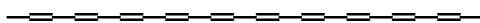


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



Jean CERF et André GRAMAIN

LE THÉORÈME DU  $h$ -COBORDISME (SMALE)

Cours professé au printemps 1966  
à la Faculté des Sciences d'Orsay

Secrétariat Mathématique  
de l'École Normale Supérieure  
45, rue d'Ulm – Paris 5e  
1968

Le rôle respectif des auteurs est le suivant: en 1966, J. CERF a fait à la Faculté des Sciences d'Orsay un cours sur la théorie de SMALE. En 1968, A. GRAMAIN, en s'inspirant des notes prises à ce cours, a fait une série de conférences à l'École Normale Supérieure sur le même sujet. Les présentes notes constituent la rédaction de ces conférences.

J. C. et A. G.

## INTRODUCTION

Soit  $W$  une variété compacte à bord dont le bord est la réunion de deux variétés  $V$  et  $V'$  ; on dit que  $W$  est un  $h$ -cobordisme entre  $V$  et  $V'$  si les injections de  $V$  et  $V'$  dans  $W$  sont de équivalences d'homotopie. S. Smale ([5]) a démontré que tout  $h$ -cobordisme simplement connexe de dimension au moins 6 est difféomorphe au produit  $V \times [0, 1]$ , et, par suite, que deux variétés simplement connexes de dimension au moins 5 qui sont  $h$ -cobordantes sont difféomorphes.

C'est l'objet de ce cours de démontrer ce théorème. On ne traitera ni des applications de ce théorème qui, pourtant, sont nombreuses et importantes (voir [1]) ni des généralisations (voir [3] pour le cas non simplement connexe). La méthode originale de démonstration utilisait une présentation des variétés par anses (méthode utilisée dans [1], [3], [5]) ; M. Cerf a préféré utiliser les fonctions de Morse sur les variétés (comme dans [4]) car ce procédé lui permet d'atteindre des résultats beaucoup plus fin que le théorème du  $h$ -cobordisme concernant le groupe des difféomorphismes d'une variété (ce choses ne sont pas abordées dans ce cour).

Le lecture de ce cours suppose la connaissance des théorèmes de base de la topologie différentielle : principal ment les théorèmes de transversalité (voir bibliographie du chapitre I), ensuite les théorèmes de fibration de J. Cerf (voir l'appendice de [2]), enfin un théorème (voir [4], [7]) dont voici l'énoncé :

**Théorème du nombre d'intersection.** *Soient  $M$  une variété,  $X$  et  $X'$  deux sous-variétés de  $M$ . On suppose  $M$ ,  $X$ , et  $X'$  compactes, connexes, orientées et sans bord; on suppose en plus :*

- (a)  $\pi_1(M) = 0$ ;  $\pi_1(M \setminus X) = 0$ ;
- (b)  $\dim M \geq 5$ ;
- (c)  $\text{codimension } X \geq 2$ ;  $\text{codimension } X' \geq 3$ ;
- (d)  $(\dim X) + (\dim X') = \dim M$ .

*Soit  $b$  le nombre d'intersection de  $X$  et  $X'$ . Il existe un plongement  $f$  de  $X'$  dans  $M$ , qui soit isotope à l'injection de  $X'$  dans  $M$ , et qui vérifie la condition suivante:  $f(X')$  coupe  $X$  en  $|b|$  points, transversalement en chacun d'eux.*

Parmi les conséquences des théorème de transversalité, on utilisera les théorème de plongement et de séparation de Whitney (voir [1], [6]).

- 
- [1] J. CERF      La théorie de Smale sur le  $h$ -cobordisme des variétés.  
Séminaire Cartan, 14ème année, 1961-62, n° 11.
  - [2] J. CERF      Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ( $\Gamma_4 = 0$ ).  
Lecture notes in mathematics, n° 53, Springer Verlag, 1968
  - [3] M. KERVAIRE    Le théorème de Baden-Mazur-Stallings.  
Commentarii Mathematici Helvetici 40, 1965, p. 31-42.

- [4] J. MILNOR      *Lectures on the  $h$ -cobordism theorem.*  
Princeton mathematical notes, 1965
- [5] S. SMALE      On the structure of manifolds.  
American Journal of Mathematics, 84, 1962, p. 387-399.
- [6] H. WHITNEY    Differentiable manifolds.  
Annals of Mathematics, 37, 1936, p. 645-680
- [7] H. WHITNEY    The self-intersection of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space.  
Annals of Mathematics, 45, 1944, p. 220-245.

## CHAPITRE I

## TRANSVERSALITÉ

Ce chapitre ne contenant que des résultats classiques, nous nous abstenons de le rédiger. Une courte bibliographie renvoie à divers articles concernant les théorèmes de transversalité. Nous énonçons cependant l'unique théorème que nous utiliseront par la suite.

**DÉFINITION.** On appelle **triade**<sup>1</sup> la donnée de trois variétés  $(W, V_0, V_1)$  où  $W$  est une variété à bord, et  $V_0$  et  $V_1$  deux variétés disjointes, ouvertes et fermées dont la réunion est le bord de  $W$ .

Soit  $(W, V_0, V_1)$  une triade, on désigne par  $\mathbf{F}$  l'ensemble des applications différentiables  $f: W \rightarrow [0, 1]$  telles que

$$f^{-1}(0) = V_0, f^{-1}(1) = V_1.$$

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés et applications considérées ici sont différentiables de classe  $\mathbf{C}^\infty$ . L'espace  $\mathbf{F}$  est muni de la topologie  $\mathbf{C}^\infty$ ; il n'est pas vide.

**DÉFINITION.** On dit qu'une fonction  $f \in \mathbf{F}$  est une **fonction de Morse** si tous ses points critiques sont non-dégénérés, et toutes ses valeurs critiques distinctes.

**THÉORÈME.** Le sous-ensemble de  $\mathbf{F}$  formé des fonctions de Morse est un ouvert partout dense de  $\mathbf{F}$  pour la topologie  $\mathbf{C}^\infty$ .

## Bibliographie du Chapitre I

- |              |  |
|--------------|--|
| R. THOM      | Quelques propriétés globales des variétés différentiables.<br>Commentarii Mathematici Helvetici, 28, 1954, p. 17-86.               |
| A. HAEFLIGER | Plongements différentiables de variétés dans variétés.<br>Commentarii Mathematici Helvetici, 36, 1961, p. 47-82.                   |
| C. MORLET    | Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney.<br>Séminaire Cartan, 14ème année, 1961-1962, exposés n°s 4, 5, 6 et 7. |
| R. ABRAHAM   | <i>Transverse mappings and flows</i> .<br>Benjamin Inc., 1967.   |

---

<sup>1</sup> On utilise aussi le nom de cobordisme.

## CHAPITRE II

## FONCTIONS DE MORSE SUR UNE TRIADE

Ce chapitre est un chapitre de leçon de choses où nous étudierons les propriétés immédiates des triades (introduites dans le chapitre précédent) munies d'une fonctions de Morse. Nous étudierons d'abord les triades munies d'une fonctions sans point critique (paragraphe 1), puis au paragraphe 2, nous montrerons qu'il existe un modèle pour les points critiques d'une fonction de Morse ; enfin, nous introduirons les nappes d'un point critique dont nous donnerons quelques propriétés (paragraphe 3 et paragraphe 4).

## Paragraphe 1. TRIADES SANS POINT CRITIQUE.

## 1. Le théorème fondamental.

THÉORÈME 1. Soit  $(W, V_0, V_1)$  une tirade compacte, et  $f : (W, V_0, V_1) \rightarrow ([a, b], \{a\}, \{b\})$  une fonction de Morse sans point critique, il existe un difféomorphisme  $\varphi : V_0 \times [a, b] \rightarrow W$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ V_0 \times [a, b] & \rightarrow & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & [a, b] & \end{array}$$

soit commutatif.

Pour la démonstration de ce théorème, le lecteur consultera J. MILNOR, Morse theory, (Annals of mathematics studies, Princeton, n° 51, Part 3). La démonstration consiste à munir  $W$  d'une métrique riemannienne, et à appliquer la théorie des équations différentielles sur une variété au champ de vecteurs  $X = \text{grad}.f / \|\text{grad}.f\|^2$ .

*Remarque.* La restrictions de  $\varphi$  à  $V_0 \times \{a\}$  définit un automorphisme  $\theta$  de  $V_0$ . En composant  $\varphi$  avec  $\theta^{-1} \times \text{id} : V_0 \times [a, b] \rightarrow V_0 \times [a, b]$ , on se ramène au cas où  $\varphi$  induit sur  $V_0 \times \{a\}$  l'identité de  $V_0$ .

Si  $H$  est l'espace des difféomorphismes  $\varphi : V_0 \times [a, b] \rightarrow W$  astreints à la condition du théorème, et dont la restrictions à  $V_0 \times \{a\}$  est l'injection canonique  $V_0 \rightarrow W$ , il est clair que le groupe  $G$  des isotopies de  $V_0$  opère à gauche dans  $H$  de façon simplement transitive.

*Remarque.* Si  $y \in W$  est un point non-critique de la fonction  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe un plongement  $\varphi : D^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow W$  (où  $n$  est la dimension de  $W$  et  $D^{n-1}$  la boule unité de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ) tel que  $\varphi(0, 0) = y$  et  $f \cdot \varphi(x, t) = f(y) + t$ . Il suffit, pour trouver  $\varphi$ , de choisir des coordonnées locales au voisinage de  $y$  pour lesquelles le champ  $\text{grad}.f$  est égal au champ  $(0, \dots, 0, 1)$ .

## 2. Sous-triades.

Si  $N$  est une sous-variété compacte à bord de  $W$ , dont le bord  $bN$  est le réunion d'une sous-variété  $M_0$  de  $V_0$  et d'une sous-variété  $M_1$  de  $V_1$ , et si  $N$  est transversale à  $bW$  le long de  $bN$ , on dira que

$(N, M_0, M_1)$  est une **sous-triade** de  $(W, V_0, V_1)$ .

**THÉORÈME 2.** Soit  $(N, M_0, M_1)$  une sous-triade de  $(W, V_0, V_1)$ , et  $f$  une fonction de Morse sans point critique sur  $W$  qui induise une fonction sans point critique sur  $N$ , alors toute "trivialisation"  $\psi : M_0 \times [a, b] \rightarrow N$  (le théorème 1 en prouve l'existence) qui induit l'inclusion canonique sur  $N_0 \times \{a\}$  peut se prolonger en une trivialisation  $\phi : V_0 \times [a, b] \rightarrow W$ , induisant sur  $V_0 \times \{a\}$  l'application canonique.

*Démonstration.* Lorsqu'on a identifié  $N$  à  $M_0 \times I$  (où  $I$  est l'intervalle  $[a, b]$ ) par le difféomorphisme  $\psi$ , et  $W$  à  $V_0 \times I$  par un difféomorphisme dont le théorème 1 affirme l'existence, choisi de façon qu'il induise l'application canonique sur  $V_0 \times \{a\}$ , le problème du prolongement de  $\psi$  devient celui de la recherche d'une isotopie de  $V_0$ , dont la restriction à  $M_0$  soit une isotopie de plongement de  $M_0$  dans  $V_0$  donné. D'après le théorème de fibration de Cerf (voir Séminaire CARTAN, n° 15, (1962-63) exposé 8, page 1), l'application de restriction  $\text{Aut}(V_0) \rightarrow \text{Pl}(M_0, V_0)$  est une fibration localement triviale, et on peut donc relever tout chemin de l'espace  $\text{Pl}(M_0, V_0)$  lorsqu'on s'est donné le relèvement de son origine. Ceci achève la démonstration.

Remarquons que, si  $\psi$  n'induit pas l'application canonique sur  $M_0 \times \{a\}$ , pour prolonger  $\psi$  il faut d'abord savoir si le difféomorphisme de  $M_0$  défini par  $\psi|_{M_0 \times \{a\}}$ , se prolonge en un difféomorphisme de  $V_0$ , c'est-à-dire si l'origine de l'isotopie de plongement admet un relèvement dans  $\text{Aut}(V_0)$ .

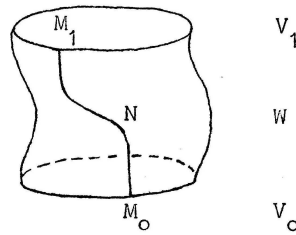


figure 1

### 3. Voisinages tubulaires de sous-triades.

Nous groupons dans ce numéro deux résultats techniques qui nous seront utiles par la suite.

**PROPOSITION 1.** Soit  $(W, V_0, V_1)$  une triade,  $f$  une fonction de Morse sur  $W$ , (avec points critiques éventuels), soit  $(N, M_0, M_1)$  une sous-triade sur laquelle  $f$  induit une fonction de Morse sans point critique, alors  $N$  admet dans  $W$  un voisinage tubulaire dont les fibres sont à niveau constant.

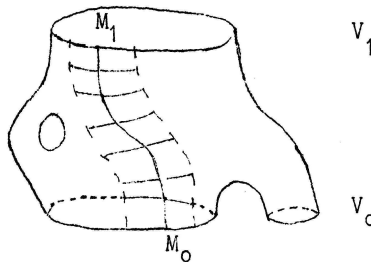


figure 2

Notons  $I$  le segment  $[a, b]$  (où  $a = f(V_0)$  et  $b = f(V_1)$ ). Le théorème 1 prouve l'existence d'un plongement  $\psi : M_0 \times I \rightarrow W$ , dont l'image est  $N$ , et qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_0 \times I & \xrightarrow{\psi} & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & I & \end{array}$$

Si  $U$  est un voisinage tubulaire assez petit de  $M_0$  dans  $V_0$ , on sait que  $\psi$  se prolonge en un plongement  $\theta : U \times I \rightarrow W$  qui induit l'application canonique sur  $U \times \{a\}$ , et qui réalise un voisinage tubulaire de  $N$  dans  $W$  (ceci d'après les propriétés des voisinages tubulaires). Mais  $\theta$  ne respecte pas les niveaux sauf le niveau  $a$  et le niveau  $b$ . Nous aurons démontré la proposition lorsque nous aurons remplacé  $\theta$  par un plongement  $\varphi : S \times I \rightarrow W$  (où  $S$  est un voisinage tubulaire assez petit de  $M_0$  dans  $V_0$ ), qui prolonge  $\psi$ , qui induise l'application canonique sur  $S \times \{a\}$ , et qui respecte les niveaux, c'est-à-dire rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S \times I & \xrightarrow{\varphi} & W \\ p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & I & \end{array}$$

Pour tout  $x$  de  $U$ , considérons la fonction  $t \mapsto f(\theta(x, t))$ . Lorsque  $x$  est un point de  $M_0$ , la dérivée de cette fonction n'est pas nulle (car elle est égale à 1); il existe donc un voisinage  $S$  (tubulaire) de  $M_0$  dans  $V_0$ , tel que la dérivée ne s'annule pas pour  $x$  dans  $S$ . L'application  $\gamma : S \times I \rightarrow S \times I$  définie par  $\gamma(x, t) = (x, f(\theta(x, t)))$  est donc un difféomorphisme de  $S \times I$  sur lui-même, et le plongement composé  $\varphi = \theta \circ \gamma^{-1}$  est le plongement cherché.

**PROPOSITION 2.** *Soient  $(W, V_0, V_1)$ ,  $(N, M_0, M_1)$  et  $f$ , une triade, une sous-triade et une fonction de Morse (avec points critiques éventuels). Soit  $h$  un niveau compris entre  $a$  et  $b$ , et  $V$  la surface de niveau  $h$  de  $W$  (la surface  $V$  n'est pas une variété si  $f$  a des points critiques de niveau  $h$ ). On suppose qu'il existe un fermé  $S$  de  $V$ , contenant  $V \cap N = M$ , et ne contenant aucun point critique de la fonction  $f$ , et que  $f$  induit sur  $N$  une fonction de Morse qui n'a pas de point critique au niveau  $h$ . Dans ces conditions, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $S$  dans  $V$ , et un plongement  $\varphi : U \times [0, \varepsilon] \rightarrow W$  (pour assez petit) tel que*

(a) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} U \times [0, \varepsilon] & \xrightarrow{\varphi} & W \\ h + p_2 \searrow & & \swarrow f \\ & [h, h + \varepsilon] & \end{array}$$

*soit commutatif,*

(b)  $\varphi|_{U \times \{0\}}$  *soit l'application canonique,*

(c)  $\varphi|_{M \times [0, \varepsilon]}$  *soit un difféomorphisme sur la portion de  $N$  comprise entre les niveau  $h$  et  $h + \varepsilon$ .*

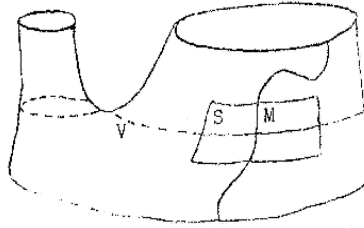


figure 3

La proposition 2 ressemble à la proposition 1, mais on s'impose ici un "minimum" pour le voisinage trivialisé de la sous-variété.

*Indication pour la démonstration.* On utilise la proposition 1 pour munir un voisinage tubulaire de  $N$ , au voisinage du niveau  $h$ , d'une métrique pour laquelle  $N$  est un lieu de lignes intégrales de  $\text{grad} f$ . On prolonge cette métrique à  $W$ , et on construit  $\varphi$  à l'aide de lignes intégrales de  $\text{grad} f$  comme dans la démonstration du théorème 1.

## Paragraphe 2. POINTS CRITIQUES.

Comme la démonstration du théorème de Morse n'est plus difficile pour un espace de Banach quelconque, que pour espace de dimension finie, nous donnerons la démonstration la plus générale, (voir R. PALAIS, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology, vol. 2 1963, p. 299-340).

### 1. Forme canonique pour un point critique non-dégénéré.

**THÉORÈME 3.** Soit  $U$  un voisinage de l'origine 0 d'un espace de Banach  $E$ , et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n \geq 3$ ) pour laquelle 0 est un point critique non-dégénéré; il existe un  $\mathcal{C}^{n-2}$ -difféomorphisme  $x = \varphi(y)$  d'un voisinage de 0 (dans  $E$ ) sur un voisinage de 0 (dans  $U$ ) tel que la fonction  $f(\varphi(y)) - f(0)$  soit quadratique en  $y$  (c'est-à-dire soit un polynôme homogène de degré 2).

Il suffit de considérer le cas où  $f(0) = 0$ . La formule de Taylor nous donne, dans un voisinage  $V$  ( $\subset U$ ) de 0, étoilé par rapport à 0:

$$f(x) = \left[ \int_0^1 (1-t) f''(tx) dt \right] \cdot (x, x)$$

soit 
$$f(x) = g(x) \cdot (x, x)$$

où  $g$  est une application de classe  $\mathcal{C}^{n-2}$  de  $V$  dans l'espace des formes bilinéaires symétriques et continues sur  $E$ . Pour  $x$  assez voisin de 0,  $g(x)$  est non-dégénéré, et définit donc un isomorphisme  $G(x)$  de  $E$  sur  $E^* = L(E, \mathbb{R})$ . Soit  $Y(x) = G(0)^{-1} \cdot G(x)$ ; pour  $x$  assez voisin de 0,  $Y(x)$  est voisin de l'identité de  $E$ , et on peut trouver une application  $A$  d'un voisinage  $W$  de 0 (dans  $E$ ) dans  $E^*$ , de classe  $\mathcal{C}^{n-2}$ , telle que  $Y(x) = A(x) \cdot A(x)$ . On va démontrer que

$$f(x) = g(0) \cdot (A(x) \cdot x, A(x) \cdot x).$$

Ceci achèvera la démonstration du théorème : il suffit de vérifier que  $y = A(x) \cdot x$  définit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $W$ , sur un voisinage de 0 dans  $E$ , ce qui est évident

puisque la dérivée en 0 de l'application  $x \mapsto A(x) \cdot x$  est égale à  $A(0) = \text{id}(E)$ .

La symétrie de la forme bilinéaire  $g(x)$  permet de calculer la transposée de  $Y(x)$ : pour tous  $u \in E^*$ ,  $z \in E$ ,

$$\begin{aligned} u(Y(x) \cdot z) &= u(G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z) \\ &= G(0)(G(0)^{-1} \cdot u) \cdot G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z \\ &= G(0)(G(0)^{-1} \cdot G(x) \cdot z) \cdot G(0)^{-1} \cdot u \\ &= G(x) \cdot z \cdot G(0)^{-1} \cdot u = G(x) \cdot G(0)^{-1} \cdot u \cdot z \end{aligned}$$

d'où  ${}^tY(x) = G(x) \cdot G(0)^{-1}$ .

Il en résulte que  ${}^tY(x) = G(0) \cdot Y(x) \cdot G(0)^{-1}$ : la transposée de  $Y$  se déduit de  $Y$  par l'isomorphisme  $G(0)$  de  $E$  sur  $E^*$ . Il en est de même pour la "racine carrée" de  $Y$ : sa transposée est

$${}^tA(x) = G(0) \cdot A(x) \cdot G(0)^{-1}.$$

Donc 
$$\begin{aligned} g(0) \cdot (A(x) \cdot x, A(x) \cdot x) &= G(0) \cdot (A(x) \cdot x) \cdot (A(x) \cdot x) \\ &= {}^tA(x) \cdot G(0) \cdot A(x) \cdot x \cdot x \\ &= G(0) \cdot x \cdot x = f(x). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

La difféomorphisme trouvé n'est pas le seul à transformer  $f$  en une forme quadratique, et nous verrons plus loin qu'on peut lui imposer un certain nombre de conditions. Néanmoins, si  $x = \varphi(y)$  est un difféomorphisme tel que  $f(\varphi(y)) = f(0) + P(y, y)$  où  $P$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , le calcul de la dérivée seconde de  $f$  montre que

$$2P(y, y) = f''(0) \cdot (\varphi'(0) \cdot y, \varphi'(0) \cdot y).$$

Ainsi, si  $f$  est une fonction de Morse sur une variété  $W$ , et  $c \in W$  un point critique de  $f$ , il existe au voisinage de  $c$  un système de coordonnées locales tel que  $f(x) - f(c)$  soit un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées locales. En outre, pour tout système de coordonnées locales de ce type, le polynôme obtenu a pour image par l'isomorphisme canonique de  $W$  (au voisinage de  $c$ ) sur l'espace tangent à  $W$  en  $c$  (au voisinage de 0), le polynôme symétrique  $\frac{1}{2}f''(c)$ , qui est "bien défini" puisque  $f'(c) = 0$ . En particulier, son indice est égal à l'indice  $i$  du point critique  $c$ . Nous n'utiliserons que les coordonnées locales pour lesquelles  $f(x) - f(c)$  se réduit à une somme de carrés (une transformation linéaire sur les coordonnées permet de transformer une forme quadratique d'indice  $i$ , en une somme de  $i$  carrés négatifs et de  $n - i$  carrés positifs), alors on aura:

$$f(x) = f(c) - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

## 2. Étude du modèle de point critique, voisinage de Morse.

Nous allons donner quelques définitions et notations concernant la fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$h(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

dont nous venons de montrer qu'elle est le modèle d'une fonction de Morse au voisinage d'un point critique d'indice  $i$ .

Le point 0 est le seul point critique de la fonction  $h$ . Pour faciliter l'écriture, on notera

$Y = (x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^i$  et  $Z = (x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-i}$ . La **surface de niveau supérieure**  $h(x) = -Y^2 + Z^2 = 1$  est diffeomorphe au produit  $\mathbb{R}^i \times S^{n-i-1}$  par le diffeomorphisme:

$$(1) \quad (y, z) \in (\mathbb{R}^i \times S^{n-i-1}) \mapsto (Y, Z) \in (\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}) \quad \text{où } Y = y \cdot \text{sh}|y|/|y| \text{ et } Z = z \cdot \text{ch}|y|.$$

De même, la **surface de niveau inférieure**  $h(x) = -1$  est diffeomorphe au produit  $S^{i-1} \times \mathbb{R}^{n-i}$ .

Le **voisinage de Morse modèle**  $M$  est défini par les inégalités:  $-1 \leq Y^2 + Z^2 \leq 1$ , et  $|Y| \cdot |Z| \leq 1$ . C'est un compact dont le bord comprend:

- une portion de la surface de niveau supérieure diffeomorphe au produit  $D^i \times S^{n-i-1}$  (par le paramétrage (1)),
- une portion de la surface de niveau inférieure diffeomorphe au produit  $S^{i-1} \times D^{n-i}$ ,
- la **surface latérale** qui est la portion de la variété  $|Y| \cdot |Z| = 1$  comprise entre les niveaux  $-1$  et  $1$ . Elle est donc le lieu de trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de  $h$ . Son bord est la réunion de deux exemplaires de  $S^{i-1} \times S^{n-i-1}$  placés l'un au niveau  $-1$ , l'autre au niveau  $1$ , et comme la restriction de la fonction  $h$  à la surface latérale est sans point critique (puisque cette surface est orthogonale aux surfaces de niveau de  $h$ ), il résulte du théorème sur les triades munies d'une fonction de Morse sans point critique, que la surface latérale est diffeomorphe au produit  $[-1, 1] \times S^{i-1} \times S^{n-i-1}$  de façon telle que  $h$  soit envoyé sur la projection sur  $[-1, 1]$ .

La **nappe descendante** de  $0$  est la partie de  $\mathbb{R}^i \times \{0\}$  contenue dans  $M$ ; c'est le disque  $D^i \times \{0\}$ ; elle ne rencontre pas les surfaces de niveau  $h(x) > 0$ ; le seul point de niveau  $0$  est le point  $0$ , et son intersection avec une surface de niveau compris entre  $-1$  et  $0$  est une sphère de dimension  $i-1$  centrée en  $0$ . On définit de la même manière la **nappe montante**. La réunion des deux nappes constitue la réunion des lignes de gradient de  $h$  (où trajectoires orthogonales des surfaces de niveau) issue de  $0$ .

La figure 4 représente le cas  $n = 2, i = 1$ . La figure 5 représente le même cas, mais le dessin est tracé sur la sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x_3 = h(x_1, x_2)$ . La figure 6 représente le cas  $n = 3, i = 2$ .

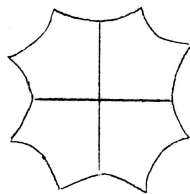


figure 4

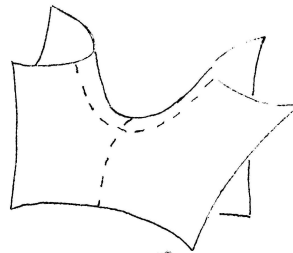


figure 5

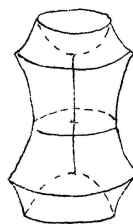


figure 6

*Remarque.* Ce que nous venons de dire ne s'applique pas aux cas des points critiques d'indice 0 ou  $n$ . Dans ce cas,  $M$  est la boule de centre et de rayon 1, qui s'identifie à la nappe montante (pour  $i = 0$ ) ou descendante (pour  $i = n$ ); il n'y a qu'une seule nappe.

*Rétractions de  $M$  adaptées à la fonction  $h$ .*

Nous ne donnerons pas de définition des rétractions de  $M$  adaptées à la fonction  $h$ , mais nous nous contentons d'indiquer trois types de rétractions de  $M$  qui nous seront utiles. Après lecture du paragraphe 3, n° 1, le lecteur soucieux de précision pourra écrire cette définition.

(a) *Homothéties.*

Soit  $\lambda$  un réel inférieur à 1, et  $\varphi_\lambda : M \rightarrow M$  l'homothétie de rapport  $\lambda$  et de centre 0; l'égalité

$$h(\lambda x) = \lambda^2 \cdot h(x)$$

prouve que  $\varphi_\lambda$  envoie les surfaces de niveau de  $h$  dans des surfaces de niveau de  $h$ .

(b) *Rétraction suivant les lignes de gradient de  $h$ .*

Si  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  est une applications croissante qui soit l'identité au voisinage de 0, l'application  $\gamma : M \rightarrow M$  définie en associant à tout point  $x$  de  $M$  l'unique point  $\gamma(x)$  situé sur la même ligne de gradient que  $x$ , et tel que  $h(\gamma(x)) = g(h(x))$ , sera appelée une rétractions suivant les lignes de gradient de  $h$ . Elle envoie les surfaces de niveau dans les surfaces de niveau, et pour un choix convenable de la fonction  $g$ , l'image de  $M$  sera dans un voisinage arbitraire de la surface de niveau 0: il suffit de choisir l'image de  $g$  assez petite (fig 8.).

Si on choisit pour  $g$  une fonctions qui soit l'identité sur  $[-1, 0]$  et telle que l'image de  $[0, 1]$  soit assez petite, la rétraction laisse invariante la portion de  $M$  de niveau négatif, et envoie la portion positive dans un voisinage de la surface de niveau 0 (fig. 9).

(c) *Rétraction suivant les lignes de gradient de la fonction  $k(Y, Z) = |Y| \cdot |Z|$ .*

On définit cette rétraction de façon évidente, et, comme les lignes de gradient de la fonctions  $k$  sont contenues dans les surfaces de niveau de  $h$ , cette rétraction envoie encore les surfaces de niveau de  $h$  dans des surfaces de niveau de  $h$ . Un choix convenable de cette rétraction permet d'envoyer  $M$  dans un voisinage arbitraire de la réunion des deux nappes.

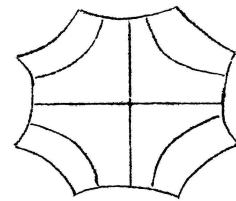
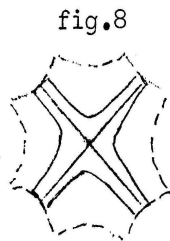
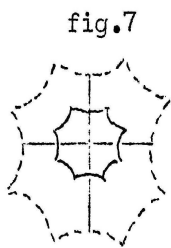


figure 10

### Paragraphe 3. NAPPES.

#### 1. Voisinage de Morse et nappes sur une variété.

Dans ce numéro,  $W$  désigne une variété différentiable de dimension  $n$ ,  $f$  une application différentiable de  $W$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $c$  un point critique non-dégénéré d'indice  $i$  pour la fonction  $f$ .

DÉFINITION. Si  $\mathbf{M}$  est le voisinage de Morse modèle pour les points critiques d'indice  $i$  sur les variétés de dimension  $n$ , on dit qu'un plongement  $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$  est un **plongement adapté à  $f$  en  $c$** , si  $\varphi(0) = c$  et s'il existe un plongement croissant  $\varphi' : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f \circ \varphi = \varphi' \circ f$  : c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\varphi} & W \\ h \downarrow & \varphi' \downarrow & f \\ [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

est commutatif.

*Propriétés.*

- (a) Si  $\psi : W \rightarrow W$ , et  $\psi' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des plongement, et  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable, si  $\psi'$  est croissant et si  $g \circ \psi = \psi' \circ f$ , alors  $\psi(c)$  est un point critique non-dégénéré pour  $g$ , et  $\psi \circ \varphi$  est un plongement adapté à  $g$  en  $\psi(c)$ ,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\psi} & W \\ h \downarrow & \varphi' \downarrow & f \downarrow & \psi' \downarrow & g \\ I & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

- (b) Pour tout point critique, il existe un plongement adapté. Le théorème de Morse nous donne, en effet, un plongement  $\psi$  d'un voisinage ouvert  $V$  de 0 (dans  $\mathbb{R}^n$ ) dans  $W$  tel que  $f(\psi(x)) = h(x) + f(c)$ . Il existe un nombre positif  $\lambda$  tel que l'homothétie de centre 0 et de rapport  $\lambda$  envoie  $\mathbf{M}$  dans  $V$ ; le plongement  $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$  défini par  $\varphi(x) = \psi(\lambda x)$  est évidemment adapté à  $f$  en  $c$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\lambda} & V & \xrightarrow{\psi} & W \\ h \downarrow & \lambda^2 \downarrow & h \downarrow & \text{id} + f(c) \downarrow & f \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

- (c) Si  $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$  est une isotopie adaptée du voisinage de Morse modèle  $\mathbf{M}$ , et  $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$  est un plongement adapté à  $f$  en  $c$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$  le plongement  $\varphi \circ \psi_t : \mathbf{M} \rightarrow W$  est adapté à  $f$  en  $c$  (c'est cette propriété qu'on vient d'appliquer en (b) à l'homothétie de rapport  $\lambda$ ).

DÉFINITION. Soit  $N$  une sous-variété de  $W$ , on dit que  $N$  est une **nappe descendante** (resp. **montante**) du point critique  $c$  pour la fonction  $f$  s'il existe un plongement de  $\mathbf{M}$  dans  $W$ , adapté à  $f$  en  $c$ , tel que  $N$  soit l'image de la nappe descendante (resp. montante) du modèle  $\mathbf{M}$ . Il en résulte que  $N$  est difféomorphe à  $D^i$  (resp.  $D^{n-i}$ ).

*Propriétés.*

- (d) Si  $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$  est un plongement adapté, et  $N$  la nappe descendante (resp. montante) correspondante, il existe une isotopie  $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$  de plongement de  $\mathbf{M}$  dans  $W$  telle que:

- pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_t$  soit un plongement adapté,
- $\varphi_t = \varphi$  sur la nappe descendante (resp. montante) modèle,
- $\varphi_0 = \varphi$ ,
- l'image de  $\varphi_1$  soit contenue dans un voisinage arbitraire de la nappe  $N$ .

On obtient  $\varphi_t$  par composition de  $\varphi$  et d'une rétraction adaptée de  $\mathbf{M}$ , laissant fixe la nappe descendante (resp. montante) et dont l'extrémité a son image dans un voisinage assez petit de

cette nappe: pour cela on compose une rétraction du type (c) avec une rétraction du type (b).

- (e) Si l'on prend seulement une rétraction du type (c), on peut s'arranger pour que l'image de  $\varphi_1$  soit contenue dans un voisinage arbitraire de la réunion de la nappe montante et de la nappe descendante.
- (f) De même, si  $(\varphi, \varphi')$  est un plongement adapté, en composant  $\varphi$  avec une rétraction du type (b), on peut, sans changer les images des nappes, modifier  $\varphi'$  par n'importe quel automorphisme différentiable du segment  $[-1, 1]$  qui soit égal à l'identité au voisinage de 0.

Nous donnerons au n° 3 une caractéristique des nappes.

## 2. Complément au théorème de Morse.

**THÉORÈME 4.** *Soit  $E$  un espace de Banach,  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique continue non-dégénérée, et  $P : E \rightarrow E^*$  l'isomorphisme correspondant; si  $E$  est la somme directe de deux sous-espaces fermés  $M$  et  $N$  qui soient conjugués pour la forme quadratique  $p$  (c'est-à-dire que  $\forall y \in M$ , et  $\forall z \in N$ , on a  $P(y) \cdot z = P(z) \cdot y = 0$ .) et si  $q$  et  $r$  sont les forme quadratiques (supposées non-dégénérées) induites par  $p$  sur  $M$  et  $N$ , alors*

$$p(x) = q(y) + r(z)$$

(où  $(y, z)$  représente la décomposition de  $x$  sur  $M$  et  $N$  respectivement). *Sous ces hypothèses, si  $k : N \rightarrow M$  est une application de classe  $C^r$  ( $r \geq 3$ ), tangente à 0 au point 0 ( $\in N$ ), il existe un  $C^{r-2}$ -difféomorphisme d'un voisinage  $U$  de 0 dans  $E$  sur un voisinage  $V$  de 0 dans  $E$ , noté*

$$X = (Y, Z) = (\psi(y, z), \varphi(y, z)) = \theta(x).$$

tel que

- (a)  $P(\theta(x)) = p(x)$
- (b)  $y = k(z) \iff Y = \psi(y, z) = 0$
- (c)  $z = 0 \iff Z = \varphi(y, z) = 0$ .

*Commentaire.* Le théorème affirme que le groupe des difféomorphismes de  $E$  qui laissent invariante la forme quadratique  $p$ , contient des difféomorphismes d'un certain type: i.e. transformant en son plan tangent à l'origine une surface, tout en conservant le sous-espace conjugué de ce plan tangent (pourvu que les formes quadratiques induites par  $p$  soient non-dégénérées).

*Démonstration.* Nous choisissons  $Y = \psi(y, z) = y - k(z)$  de sorte que la condition (b) est vérifiée, et nous cherchons  $Z = \varphi(y, z)$  tel que

$$r(Z) + q(y - k(z)) = r(z) + q(y)$$

soit

$$r(Z) = r(z) + 2Q(y) \cdot k(z) - q(k(z)) = f(y, z).$$

On procède alors comme dans la démonstration du théorème de Morse: la formule de Taylor appliquée à  $f(y, z)$  considérée comme fonction de  $z$  donne

$$f(y, z) = g(y, z) \cdot (z, z)$$

car

$$f'_z(y, z) = 2R(z) + 2Q(y) \cdot k'(z) - 2Q(k(z)) \cdot k'(z)$$

s'annule *quel que soit*  $y$  pour  $z = 0$ . On peut alors trouver, pour  $(y, z)$  assez voisin de 0, un élément  $A(y, z)$  de  $N^*$ , tel que

$$A(y, z) \cdot A(y, z) = G(0)^{-1} \cdot G(y, z);$$

et on prend pour  $\varphi$  l'application

$$Z = A(y, z) \cdot z.$$

Les conditions (a) et (c) sont donc ainsi vérifiées. En outre l'application  $\theta$  ainsi définie est un difféomorphisme puisqu'elle est tangente en 0 à l'application identique (comme il est facile de vérifier par le calcul des dérivées des applications  $\varphi$  et  $\psi$ ).

Ce théorème va nous permettre de donner une caractérisation des nappes. Remarquons auparavant que lorsque  $E$  est un espace de Banach, et  $M$  un sous-espace fermé sur lequel  $p$  induit une forme non-dégénérée, le conjugué  $N$  de  $M$  est son supplémentaire et  $p$  induit sur  $N$  une forme non-dégénérée.

### 3. Caractérisation des nappes.

**PROPOSITION 3.** *Si  $N$  est une sous-variété de  $W$ , difféomorphe au disque  $D^i$ , dont le bord se trouve à un niveau constant de la fonction  $f$ , inférieur au niveau  $f(c)$ , si  $N$  contient  $c$  et si  $f$  induit sur  $N$  une fonction de Morse dont le seul point critique est le point  $c$ , avec l'indice  $i$ , alors  $N$  est une nappe descendante de  $c$ .*

*Il y a un énoncé analogue pour les nappes montantes. En outre, si  $N$  et  $N'$  sont deux nappes descendante et montante respectivement, dont les plans tangents en  $c$  sont conjugués par rapport à  $f'(c)$ ,  $N$  et  $N'$  sont les nappes d'un même plongement adapté du modèle  $\mathbf{M}$  dans  $W$ .*

*Démonstration.*

- (a) Soit  $\varphi$  un plongement de  $\mathbf{M}$  dans  $W$  adapté à  $f$  en  $c$ , et tel que l'image de la nappe descendante modèle soit tangente en  $c$  à  $N$  (ce qu'on peut toujours réaliser par un changement de variables linéaire parce que  $f'(c)$  induit une forme définie négative sur le plan tangent à  $N$ ); au voisinage de 0, l'image réciproque de  $N$  est une surface d'équation  $Z = k(Y)$  (avec les notations du numéro 2) où  $k$  est une application différentiable de  $\mathbb{R}^i$  dans  $\mathbb{R}^{n-i}$ , tangente à 0 au point 0. Le complément du théorème de Morse nous fournit un difféomorphisme  $\theta$  d'un voisinage de 0 dans  $\mathbf{M}$  sur un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbf{M}$ , conservant la fonction de Morse modèle  $h$ , et envoyant  $\varphi^{-1}(N)$  (au voisinage de 0) sur la nappe descendante modèle. Le plongement composé  $\varphi \cdot \theta^{-1} : V \rightarrow W$  envoie donc, au voisinage de 0, la nappe modèle sur un voisinage de  $c$  dans  $N$ , et  $f \cdot \varphi \cdot \theta^{-1} = \varphi' \cdot h$ . Il en résulte qu'un voisinage de  $c$  dans  $N$  est une nappe descendante de  $c$ .

Comme le plan tangent à  $N'$  en  $c$  est conjugué du plan tangent à  $N$ , l'image réciproque de  $N'$  par  $\varphi \cdot \theta^{-1}$  est tangente en 0 à la nappe montante modèle, et le complément du théorème de Morse nous fournit un second difféomorphisme  $\theta'$  qui envoie l'image réciproque de  $N'$  sur la nappe montante modèle, en conservant la nappe descendante (à cause du (c) du théorème 4). En considérant le plongement  $\varphi \cdot \theta^{-1} \cdot \theta'^{-1}$  on voit, qu'au

voisinage de  $c$ ,  $N$  et  $N'$  sont les nappes d'un même plongement adapté.

- (b) Il reste à étendre ce plongement de façon à obtenir pour nappes  $N$  et  $N'$  en entier. Soit donc  $\psi$  un plongement de  $M$  dans  $W$ , adapté à  $f$  en  $c$  (on supposera même, pour simplifier, que  $\psi$  envoie la fonction  $h$  sur la fonction  $f$ ) tel que l'image  $\psi(N)$  de la nappe modèle soit une sous-variété  $D$  de  $N$ , dont le bord  $S$  est au niveau  $-1$ . Soit  $-b^2$  le niveau du bord de  $N$ , le complémentaire de  $D$  dans  $N$  est une couronne  $C$  difféomorphe au produit  $S^{i-1} \times [-b^2, -1]$  par un difféomorphisme qui envoie la fonction  $f$  sur la projection sur le segment  $[-b^2, -1]$  (d'après le théorème 2 du paragraphe 1). Toujours d'après le paragraphe 1, on peut trouver un voisinage tubulaire fermé  $T$  de  $C$  dont les fibres sont à niveau constant. À l'aide d'une rétraction de  $M$  le long des lignes de niveau de  $h$ , on peut modifier  $\psi$  de façon que l'image de la surface de niveau inférieure de  $M$  (de niveau  $-1$ ) soit contenue dans  $T$  (voir paragraphe 3, n° 1).

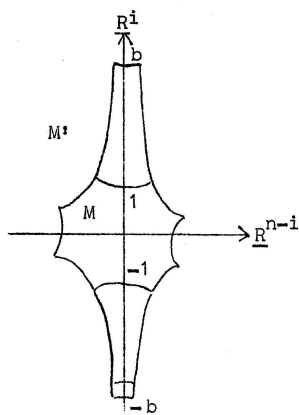


figure 11

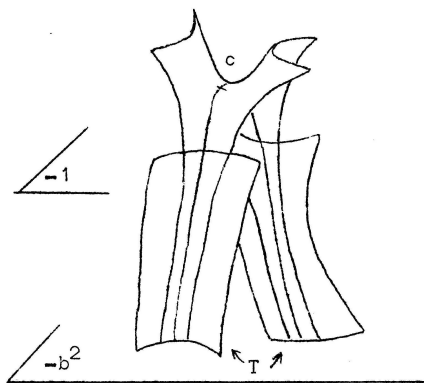


figure 12

Soit, dans le modèle  $\mathbb{R}^n$ ,  $M'$  le voisinage 0 obtenu en saturant  $M$  jusqu'au niveau inférieur  $-b^2$  le long des lignes de gradient de  $h$ ;  $M'$  est défini par les inégalités:  $-b^2 \leq -|Y|^2 + |Z|^2 \leq 1$ ;  $|Y| \cdot |Z| \leq 1$ . Le plongement  $\psi$  se prolonge en plongement  $\psi' : M' \rightarrow W$ , respectant les niveaux, et envoyant le couronne ( $Z = 0, 1 \leq |Y|^2 \leq b^2$ ) sur la couronne  $C$ . Pour construire  $\psi'$ , il suffit d'utiliser la trivialisation de  $T$ . Une rétraction de  $M'$  sur  $M$  le long de lignes de gradient de  $h$  permet de transformer  $\psi'$  en un plongement adapté ayant toutes les propriétés annoncées.

Il ne reste plus qu'à recommencer, pour la nappe montante, les opérations ci-dessus en remarquant qu'elles ne modifient pas l'image de l'autre nappe.

#### 4. Nappes de gradient.

**DÉFINITION.** Soit  $N$  une nappe descendante du point critique  $c$ , dont le bord  $bN$  est au niveau  $f(c) - b^2$  et supposons que la variété  $W$  est munie d'une métrique riemannienne; on dit que la nappe  $N$  est la **nappe de gradient** pour cette métrique si  $N$  est la réunion des lignes de gradient de la fonctions  $f$  comprises entre les niveaux  $f(c)$  et  $f(c) - b^2$  auxquelles le point  $c$  est adhérent. Il y a une définition analogue pour la nappe montante.

Par exemple, dans le voisinage de Morse modèle  $M$ , les nappes sont les nappes de gradient pour

la métrique induite par la métrique euclidienne ordinaire de  $\mathbb{R}^n$ .

**PROPOSITION 4.** *Toute nappe  $N$  du point critique  $c$  est nappe de gradient pour une certaine métrique riemannienne sur  $W$ .*

La nappe  $N$  est en effet l'image de la nappe canonique par un plongement adapté  $\varphi$  du voisinage de Morse modèle  $M$  dans  $W$ . Elle est donc nappe de gradient pour toute métrique prolongeant la métrique sur  $\varphi(M)$  transportée de celle de  $M$ .

Plus généralement, soient  $N_1, N_2, \dots, N_r$  des nappes descendantes et  $N'_1, N'_2, \dots, N'_r$  des nappes montantes relative aux points critiques  $c_1, c_2, \dots, c_r$  telles que les plans tangents en  $c_j$  à  $N_j$  et  $N'_j$  soient conjugués; si ces nappes sont "disjointes", c'est-à-dire sans autre point d'intersection que les  $c_j = N_j \cap N'_j$ , il existe une métrique riemannienne pour laquelle toutes ces nappes sont nappes de gradient. Il existe en effet des plongements  $\varphi_j : M \rightarrow W$  pour lesquels  $N_j$  et  $N'_j$  sont images des nappes canoniques et dont les images ont contenues dans des voisinages des  $N_j \cup N'_j$  assez petits pour être disjoints.

*Application au prolongement d'une nappe.* Étant donnée une nappe  $N$  descendante du point critique  $c$  jusqu'au niveau  $f(c) - b^2$ , on munit  $W$  d'une métrique adaptée à la nappe  $N$  (cf. proposition 4). Supposons que par tout point de  $bN$  passe une ligne intégrale de  $\text{grad. } f$  qui soit définie entre les niveaux  $f(c) - a^2 - b^2$  et  $f(c) - b^2$ ; alors la réunion  $N'$  de la nappe  $N$  et de toutes ces lignes de gradient est une nappe descendant de  $c$  jusqu'au niveau  $f(c) - a^2 - b^2$ . Ce la résulte immédiatement de la caractérisation des nappes. (proposition 3).

#### Paragraphe 4. UN LEMME UTILE.

Pour finir ce chapitre, nous démontrons un lemme technique que nous utiliserons par la suite. Le lecteur pressé ou peu courageux peut s'abstenir d'en lire la démonstration.

**PROPOSITION 5.** *Soit  $N$  une nappe d'un point critique d'une fonction de Morse  $f$  sur  $W$ ; si  $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$  est une isotopie du bord  $bN$  de  $N$  dans la surface de niveau de  $bN$ , dont l'image ne contienne aucun point critique de  $f$ , il existe une nappe  $N'$ , qui coïncide avec  $N$  en-dehors d'un voisinage arbitraire de  $bN$  dans  $N$ , et dont le bord  $bN'$  est l'image  $\varphi_1(bN)$  de l'extrémité de l'isotopie  $(\varphi_t)$ .*

Soit  $a$  le niveau de  $bN$ , nous allons construire une nappe  $N'$  qui coïncide avec  $N$  au-dessus du niveau  $a + \varepsilon$ . Soit  $V$  un voisinage de l'image de  $\varphi_t$  (et en particulier de  $bN$ ) dans la surface de niveau  $a$ ; on peut supposer que  $V$  est une variété à bord, et on sait alors (paragraphe 1, proposition 2) qu'il existe un tube  $T$ , compris entre les niveaux  $a$  et  $a + \eta$ , (avec  $\eta \leq \varepsilon$ ) dont l'intersection avec la surface de niveau  $a$  soit  $V$ , et un difféomorphisme  $\psi : V \times [0, \eta] \rightarrow T$  qui envoie  $bN \times [0, \eta]$  sur la couronne  $C$  de  $N$  comprise entre les niveaux  $a$  et  $a + \eta$ , et tel que  $f(\psi(x, y)) = a + y$ , où  $x \in V$  et  $y \in [0, \eta]$ . Désignons par  $\rho$  une application différentiable de  $[0, \eta]$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\rho(0) = 1$  et  $\rho(\eta) = \rho'(\eta) = 0$ , et par  $C'$  l'image de  $bN \times [0, \eta]$  dans  $T$  par l'application  $\theta : (x, y) \mapsto \psi(\varphi_{\rho(y)}(x), y)$ . Ce plongement est tangent en tout point de  $bN \times \{\eta\}$  à la restriction de  $\psi$  à  $bN \times \{0, \eta\}$  (d'après le

choix de  $\rho$ ), et  $f$  induit sur  $C'$  une fonction sans point critique puisque, d'après l'expression du plongement  $\theta$ ,  $C'$  est transversale aux surfaces de niveau de  $f$ . D'après la caractérisation de nappes, la sous-variété  $N'$  de  $W$  obtenu en recollant  $C'$  à  $N$  à la place de  $C$ , est une nappe, ce qui achève la démonstration.

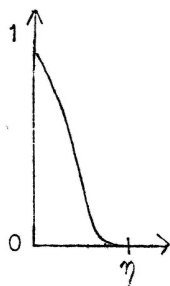
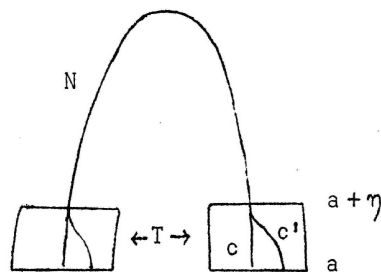
fig. 13 : la fonction  $\rho$ 

figure 14

## CHAPITRE III

## CROISEMENTS ET NAISSANCES

Dans ce chapitre, on démontre (paragraphe 2) l'existence sur toute triade d'une fonction de Morse ordonnée, c'est-à-dire dont les valeurs critiques sont fonction croissante de leur indice. On obtient une telle fonction par déformation d'une fonction de Morse arbitraire donnée sur la triade. On étudie d'abord un modèle de croisement de deux points critiques mal rangés (paragraphe 1), puis on plonge le modèle dans la triade. De même, on décrit au paragraphe 3 un modèle de naissance dans d'un couple de points critiques, l'un d'indice  $i$ , l'autre d'indice  $i + 1$ , et donne (paragraphe 4) un critère pour que le plongement de ce modèle permette la cancellation d'un tel couple de points critiques dans une triade.

## Paragraphe 1. CHEMIN ÉLÉMENTAIRE DESCENDANT

Soit  $h : \mathbf{M} \rightarrow [-1, 1]$  la fonction de Morse canonique sur le voisinage modèle  $\mathbf{M}$ , et  $\bar{\omega} : \mathbf{M} \rightarrow [0, 1]$  une fonction cloche à support contenu dans l'intérieur de  $\mathbf{M}$ , et égale à 1 au voisinage de 0. Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , la fonction

$$h_\lambda = h - \lambda \varepsilon \bar{\omega}$$

est une fonction de Morse dont l'unique point critique est 0, pourvu que  $\varepsilon > 0$  soit assez petit. Pour  $\lambda = 1$ , la valeur critique correspondante est  $h_1(0) = -\varepsilon$ .

DÉFINITION. On appelle **chemin élémentaire descendante** relatif au point critique  $c$  de la fonction de Morse  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  un chemin  $(f_\lambda)_{\lambda \in [0, 1]}$  d'origine  $f$  dans l'espace  $\mathbf{F}$  des fonctions sur  $W$  pour lequel il existe un plongement  $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow W$  adapté à  $f$  en  $c$  tel que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  on ait:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\varphi} & W \\ h_\lambda \downarrow & \varphi' \downarrow & f_\lambda \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array} \quad f_\lambda \cdot \varphi = \varphi' \cdot h_\lambda$$

$$f_\lambda | W \setminus \varphi(\mathbf{M}) = f | W \setminus \varphi(\mathbf{M})$$

Un tel chemin est entièrement déterminé par la donnée du plongement adapté  $\varphi$ . Remarquons aussi que  $f_\lambda$  est une fonction de Morse pour toutes les valeurs de  $\lambda \in [0, 1]$  sauf un nombre fini: le seul accident possible est que la valeur critique  $f_\lambda(c)$  soit égale à une autre valeur critique  $f(c')$ . On dit alors que le chemin  $(f_\lambda)$  a réalisé le le croisement des valeurs critiques en  $c$  et  $c'$ .

PROPOSITION 1. Soit  $N$  une nappe descendante du point critique  $c$  jusqu'au niveau  $f(bN) = a$ , pour toute valeur  $b \in ]a, f(c)[$  il existe un chemin élémentaire descendante  $(f_\lambda)$  relatif au point  $c$  tel que  $f_1(c) = b$ .

Démonstration. La nappe  $N$  est image de la nappe canonique par un plongement adapté  $\varphi$ :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\quad} & W \\ h \downarrow & \varphi' & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \end{array}$$

On a vu (chapitre II, §3, n° 1) qu'on peut choisir le couple  $(\varphi, \varphi')$  de telle sorte que  $\varphi'(-\varepsilon) = b$ . Le chemin élémentaire descendant correspondant est le chemin cherché.

*Paragraphe 2. FONCTION DE MORSE ORDONNÉE SUR UNE TRIADE.*

**DÉFINITION.** Une **fonction de Morse ordonnée** sur la variété  $W$  est une fonction de Morse  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  dont les valeurs critiques sont rangées dans l'ordre croissant des indices, c'est-à-dire qu'on a:

$$(1) \quad [f(c) - f(c')] \cdot [\text{indice}(c) - \text{indice}(c')] \geq 0$$

pour tout couple  $(c, c')$  de points critiques.

**THÉORÈME 1.** *Sur toute triade compact il existe une fonction de Morse ordonnée.*

*Démonstration.* Il existe sur la triade  $W$  une fonction de Morse  $f$ ; la fonction présente un nombre fini de points critiques et elle est ordonnée si et seulement si la relation (1) est vérifiée pour tout couple  $(c, c')$  de points critiques consécutifs (i.e. tel qu'il n'y ait aucune valeur critique comprise entre  $f(c)$  et  $f(c')$ ). Le théorème 1 résulte alors de la

**PROPOSITION 2.** *Si  $c$  et  $c'$  sont deux points critiques consécutifs de la fonction de Morse  $f$  avec  $f(c) \leq f(c')$  et si  $\text{indice}(c) \leq \text{indice}(c')$  il existe un chemin d'origine  $f$  dans l'espace  $F$  qui réalise le croisement des valeurs en  $c$  et  $c'$ . (C'est-à-dire un chemin  $(f_t)_{t \in [0, 1]}$  où  $f_t$  est une fonction de Morse ayant mêmes valeurs critiques que  $f$  en dehors de  $c$  et  $c'$  pour toute valeur de  $t$  sauf  $t_0 \in ]0, 1[$  où l'on a  $f_{t_0}(c) = f_{t_0}(c')$ , et l'extrémité  $f_1$  de ce chemin vérifie  $f_1(c) < f_1(c')$ ).*

On va construire explicitement ce chemin: ce sera un chemin élémentaire descendant relatif au point critique  $c$ . On peut d'ailleurs signaler que l'existence d'un chemin de croisement entre  $c$  et  $c'$  implique toujours l'existence d'un chemin élémentaire réalisant ce croisement. Compte tenu de la proposition 1, l'existence d'un chemin élémentaire convenable est une conséquence de la

**PROPOSITION 3.** *Si  $c$  et  $c'$  sont deux points critiques consécutifs de la fonction  $f$  avec*

$$\begin{array}{l} f(c') < f(c) \\ \text{indice}(c) \leq \text{indice}(c') \end{array}$$

*il existe une nappe  $N$  descendante de  $c$  et de niveau inférieur  $f(bN) < f(c')$ .*

*Démonstration.* Soient  $N_1$  une nappe descendante relative à  $c$  et  $N'_1$  une nappe montante relative à  $c'$  supposées toutes deux assez petites pour être disjointes. On sait (chapitre II, §3, n° 4) qu'on peut alors munir  $W$  d'une métrique riemannienne pour laquelle  $N_1$  et  $N'_1$  sont des nappes de gradient, et

qu'on peut prolonger ces deux nappes par les lignes de gradient jusqu'à un niveau intermédiaire  $a \in ]f(c'), f(c)[$ . A ce niveau, les bords  $bN_2$  et  $bN'_2$  des nappes prolongées sont respectivement une  $(i-1)$ -sphère et une  $(n-i'-1)$ -sphère plongées dans la  $(n-1)$ -variété  $f^{-1}(a)$  (on a désigné par  $i$  et  $i'$  les indices respectifs de  $c$  et  $c'$ ). Si ces bords sont disjoints, les lignes de gradient de tous les points de  $bN_2$  se prolongent jusqu'à un niveau inférieur à  $f(c')$  et la nappe descendante prolongée convient.

Dans le cas contraire et si  $i \leq i'$  on peut remplacer  $N_2$  par une nappe  $N_3$  dont le bord  $bN_3 \subset f^{-1}(a)$  est disjoint de  $bN_2$ . En effet, la somme  $(i-1) + (n-i'-1)$  des dimensions de variétés  $bN_2$  et  $bN'_2$  est strictement inférieure à la dimension  $(n-1)$  de la surface de niveau  $f^{-1}(a)$  et le théorème de séparation de Whitney (ou bien le théorème de transversalité de Thom) fournit une isotopie de  $bN_2$  dans la surface de niveau dont l'extrémité  $bN_3$  est disjointe de  $bN'_2$ : d'où la nappe  $N_3$  d'après la proposition 5 du chapitre II.

Pour une métrique adaptée aux nappes (disjointes)  $N_3$  et  $N'_2$ , les lignes de gradient permettent de prolonger  $N_3$  en la nappe  $N$  cherchée (voir figure 1).

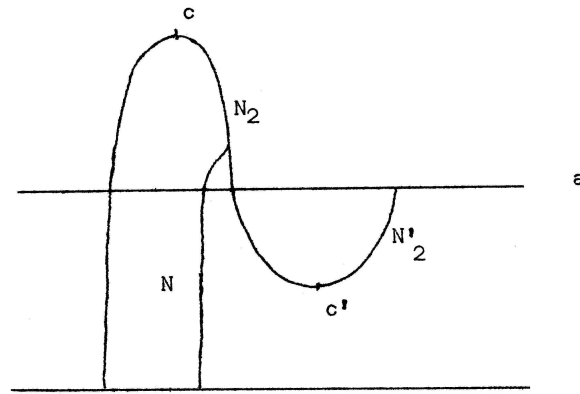


figure 1

### Paragraphe 3. MODÈLE DE NAISSANCE.

#### 1. Première étude du modèle.

Considérons sur  $\mathbb{R}^n$  la fonction numérique

$$k_s(x) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3sx_n.$$

Ses dérivées partielles sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \partial k / \partial x_1 &= -2x_1, \dots, \partial k / \partial x_i = -2x_i; \\ \partial k / \partial x_{i+1} &= 2x_{i+1}, \dots, \partial k / \partial x_{n-1} = 2x_{n-1}; \\ \partial k / \partial x_n &= 3(x_n^2 - s). \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction  $k_s$  présente:

- pour  $s < 0$  aucun point critique;
- pour  $s > 0$  deux points critiques non-dégénérés sur la droite  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ ; l'un pour  $x_n = \sqrt{s}$  à pour indice  $i$  et pour valeur critique  $-2s^{3/2}$ , l'autre, pour  $x_n = -\sqrt{s}$ , à pour indice

- $\{i + 1\}$  et pour valeur critique  $2s^{3/2}$ ,  
pour  $s = 0$  un point critique dégénéré en  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Cet exemple montre comment apparait un couple ordonné de ponts critiques d'indices consécutifs  $i$  et  $(i + 1)$ .

## 2. Plongement dans la variété.

Soit  $\bar{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  une fonction à support compact égale à 1 dans un voisinage du segment  $(x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, -1 \leq x_n \leq 1)$ , on pose:

$$l_t(x) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon[1 - (t + 1)\bar{\omega}(x)]x_n.$$

Hors du support de  $\bar{\omega}$  la fonctions  $l_t(x) = k_{-\varepsilon}(x)$  n'a pas de points critique. Dans le fermé  $\bar{\omega}^{-1}(1)$ , la fonction  $l_t(x) = k_{\varepsilon t}(x)$  a des points critiques déjà étudiés. Dans le compact adhérence( $\text{Supp}(\bar{\omega}) \setminus \bar{\omega}^{-1}(1)$ ) la fonctions  $k_0$  n'a pas de point critique; pour  $t \in [-1, 1]$ , on peut choisir  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que la fonctions  $l_t$ , assez voisine de  $k_0$ , n'y ait pas non plus de point critique.

L'application  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, L_{-1}(x))$$

est un difféomorphisme puisque  $\partial L_{-1}/\partial x_n$  ne s'annule jamais. En la composant avec une homothétie de rapport  $\psi'$  assez petit, on obtient un difféomorphisme  $\psi$  qui envoie le support de  $\bar{\omega}$  à l'intérieur du cylindre  $D^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$ . On note  $B$  (comme 'birth') l'image réciproque  $\psi^{-1}(D^{n-1} \times I)$ .

**PROPOSITION 4.** *En tout point  $y \in N$  non critique pour la fonction  $f$  on peut faire apparaître un couple de points critiques d'indices  $i$  et  $(i + 1)$  en déformant la fonction  $f$  dans un voisinage arbitraire de  $y$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : D^{n-1} \times I \rightarrow W$  un plongement adapté à la fonction en  $y$  (chapitre II, § 1, n° 1), c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} D^{n-1} \times I & \xrightarrow{\varphi} & W \\ p_2 \downarrow & \varphi' & \downarrow f \\ I & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Si l'on note  $\theta = \varphi \cdot \psi$  et  $\theta' = \varphi' \cdot \psi'$ , on définit, pour tout  $t \in [-1, 1]$  la fonction  $f_t : W \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\begin{aligned} f_t &= f \text{ en dehors de } \theta(B) \\ f_t \cdot \theta &= \theta' \cdot l_t \quad \text{sur } \theta(B). \end{aligned}$$

Pour  $t = -1$ , on a  $f_{-1} = f$  à cause de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\theta} & W \\ L_{-1} \downarrow & \theta' & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Comme la déformation de la fonction  $l_t$  lorsque varie le paramètre  $t$  n'est effective que dans le support de  $\bar{\omega}$  qui est contenu dans l'intérieur de  $B$ , la fonction  $f_t$  est différentiable; c'est même une fonctions de Morse pour  $t \neq 0$ . Pour  $t < 0$  elle a mêmes points critiques que  $f$ , pour  $t = 0$ , il y a un point critique dégénéré en  $y$ , qui se dédouble pour  $t > 0$  en un couple ordonné d'un point critique d'indice  $i$  et d'un point d'indice  $(i + 1)$  contenus dans  $\theta(B)$ .

#### Paragraphe 4. COLLISION ET CANCELLATION DE DEUX POINTS CRITIQUES.

##### 1. Énoncé du résultat.

DÉFINITION. Soit  $(c_1, c_2)$  un couple ordonné de deux points critique consécutifs d'indices  $i$  et  $(i + 1)$  pour la fonctions de Morse  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ . Une nappe montante  $N_1$  relative à  $c_1$  et une nappe descendante  $N_2$  relative à  $c_2$  telles que  $f(bN_1) = f(bN_2) = a$ , où  $f(c_1) < a < f(c_2)$ , sont **en bonne position** si la  $(n - i - 1)$ -sphère  $bN_1$  et la  $i$ -sphère  $bN_2$  se coupent transversalement et en un seul point.

THÉORÈME 2. Si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux points critiques consécutifs pour lesquels il existe deux nappes en bonne positions, il existe un chemin d'origine  $f$  dans l'espace  $\mathbf{F}$  qui réalise l'élimination de ces deux points critiques.

C'est-à-dire un chemin  $(f_t)_{t \in [0, 2]}$  où  $f_t$  est une fonction de Morse ayant mêmes valeurs critiques que  $f$  en dehors de  $c_1$  et  $c_2$  pour toute valeur de  $t$  sauf  $t = 1$  où l'on a un point critique dégénéré (provenant de la collision de  $c_1$  et  $c_2$ ) et la fonction  $f_2$  a mêmes points et valeurs critiques que  $f$  sauf  $c_1$  et  $c_2$  qui ont disparu.

Comme au paragraphe 3, on obtient un tel chemin en plongeant dans  $W$  une déformation du type  $(k_s)$ .

##### 2. Description du voisinage double modèle $\mathbf{D}$ .

Soient  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  les voisinages de Morse modèles pour les indices  $i$  et  $(i + 1)$  munis des fonctions de Morse canoniques  $h_1$  et  $h_2$ . Soit  $\psi_1: D^i \times S^{n-i-1} \rightarrow \mathbf{M}_1$  le paramétrage (chapitre II, paragraphe 2, n° 2) de la surface de niveau supérieur de  $\mathbf{M}_1$ . Si  $b_1$  est un point du bord supérieur de la nappe montante de  $\mathbf{M}_1$  et si  $\theta_1: D^{n-i-1} \rightarrow S^{n-i-1} \times \{0\}$  est un plongement tel que  $\theta_1(0) = \psi_1^{-1}(b_1)$ , le plongement

$$\psi_1 \cdot (\text{id} \times \theta_1): D^i \times D^{n-i-1} \rightarrow \mathbf{M}_1$$

est un paramétrage d'un voisinage de  $b_1$  dans la surface de niveau supérieur de  $\mathbf{M}_1$ . À l'aide des lignes de gradient de la fonction  $h_1$ , on prolonge ce plongement en un paramétrage d'un voisinage de  $b_1$  dans  $\mathbf{M}_1$  noté  $\chi_1: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbf{M}_1$  adapté à la fonction  $h_1$  par la relation  $h_1 \cdot \chi_1(x, y, t) = 1 - t$ .

De la même manière, on construit un paramétrage  $\chi_2: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbf{M}_2$  d'un voisinage d'un point  $b_2$  dans la surface de niveau inférieur de  $\mathbf{M}_2$ . Le voisinage double  $\mathbf{D}$  est la réunion de  $\mathbf{M}_1$  et de  $\mathbf{M}_2$  avec l'identification évidente de  $\chi_1(D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\})$  avec  $\chi_2(D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\})$ . Le voisinage  $\mathbf{D}$  est une variété à bord, arêtes et coins, munie d'un paramétrage d'un voisinage du point  $b$  (qui résulte de l'identification de  $b_1$  et  $b_2$ ) par le plongement  $\chi: D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{D}$  obtenu en recollant  $\chi_1$  et  $\chi_2$ . Sur  $\mathbf{D}$  la fonction  $h$  obtenue en recollant  $h_1 - 1$  et  $h_2 + 1$  est une fonction de Morse; on a  $h \cdot \chi(x, y, t) = t$ .

On va maintenant munir d'une métrique riemannienne en déformant les métriques canoniques de  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  au voisinage de l'image de  $\chi$  de façon qu'elles se recollent, et ceci de telle sorte que les courbes  $t \mapsto \chi(x, y, t)$  soient des lignes de gradient de  $h$ , et, plus précisément, que les lignes de gradient de  $h$  soient réunions de lignes de gradient de  $h_1$  et  $h_2$ . Pour cela, on recolle la métrique de  $\mathbf{M}_1$ , celle de  $\mathbf{M}_2$  et l'image par  $\chi$  de la métrique produit de  $D^i \times D^{n-i-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  à l'aide d'une partition de l'unité.

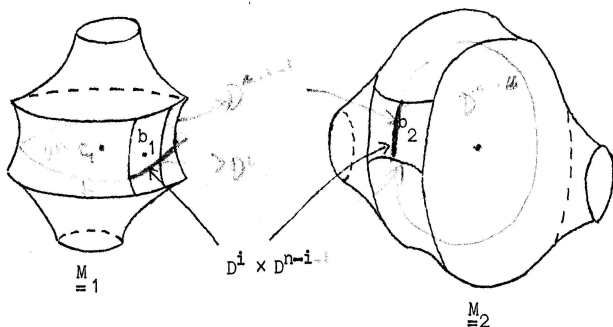


figure 2 : formation du modèle double.

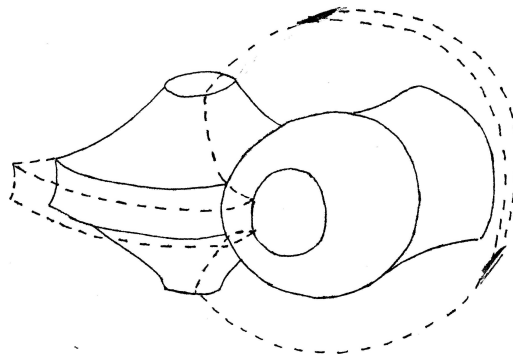


figure 2 bis : le modèle double et son saturé (en pointillé)

### 3. Plongement et saturation du double modèle.

**PROPOSITION 5.** *Si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux points critiques consécutifs de la fonction  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquels il existe deux nappes  $N_1$  et  $N_2$  en bonne position, il existe un plongement  $\varphi_1: \mathbf{M}_1 \rightarrow W$  adapté à la nappe  $N_1$  et un plongement  $\varphi_2: \mathbf{M}_2 \rightarrow W$  adapté à la nappe  $N_2$  qui se recollent en un plongement  $\varphi: \mathbf{D} \rightarrow W$  adapté à la fonction  $f$  par un difféomorphisme  $\varphi': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f \cdot \varphi = \varphi' \cdot h$ .*

*Démonstration.* Soient  $\varphi_1: \mathbf{M}_1 \rightarrow W$  et  $\varphi_2: \mathbf{M}_2 \rightarrow W$  deux plongement adapté des modèle pour lesquels  $N_1$  et  $N_2$  sont respectivement les images des nappes canoniques. Si  $V$  est la variété de niveau  $f^{-1}(a)$  et si  $M_1 = \varphi_1(\mathbf{M}_1)$  et  $M_2 = \varphi_2(\mathbf{M}_2)$ , les intersections  $M_i \cap V$  sont des voisinages tubulaires des sphères  $bN_i$ . Si on a choisi  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  d'images assez voisines des nappes (chapitre II, paragraphe 3, n° 1, propriété (a)), la condition de transversalité de  $bN_1$  et  $bN_2$  au point  $b' = bN_1 \cap bN_2$  assure que l'intersection de ces tubes est "bonne": c'est un cube voisinage tubulaire trivial d'un voisinage de  $b'$  dans chacune des nappes.

Soit  $\psi': D^i \times D^{n-i-1} \rightarrow V$  un paramétrage de ce cube; en composant  $\varphi_1$  avec un automorphisme horizontal de  $\mathbf{M}_1$  (c'est-à-dire conservant les surfaces de niveau de la fonction  $h_1$ ) qui conserve la nappe montante modèle, on peut s'arranger pour que  $\psi' = \varphi_1 \cdot \chi_1 | D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\}$ . On fait la même chose pour  $\varphi_2$ . Supposons en outre qu'on a choisi  $\varphi_1$  de telle sorte que  $f \cdot \varphi_1 \cdot \chi_1(x, y, t) = a + t$  et  $\varphi_2$  de telle sorte que  $f \cdot \varphi_2 \cdot \chi_2(x, y, t) = a + t$ ; alors les deux plongements  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  se recollent en une application continue  $\varphi: \mathbf{D} \rightarrow W$ , et si  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  sont les deux changement de paramètre associés à  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , la fonctions  $\varphi'_1(1+t) = a+t$  sur  $[-\varepsilon, 0]$  se recolle différemment à la fonction  $\varphi'_2(t-1) = a+t$  sur  $[0, \varepsilon]$ . Comme la fonction  $h$  est obtenue en recollant  $h_1 - 1$  et  $h_2 + 1$ , les égalités  $f \cdot \varphi_1 = \varphi'_1 \cdot h_1$  et  $f \cdot \varphi_2 = \varphi'_2 \cdot h_2$  entraînent que  $f \cdot \varphi = \varphi' \cdot h$ .

Il ne reste qu'à rendre différentiable le long de  $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$  l'application  $\varphi$ . Il existe des coordonnées locales  $(X, Y, T)$  dans  $W$ , au voisinage du cube image de  $\varphi \cdot \chi$ , pour lesquelles on a:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \chi_1(x, y, t) &= (x, \eta(x, y, t), t) \text{ où } \eta(x, y, 0) = y \\ \varphi_2 \chi_2(x, y, t) &= (\xi(x, y, t), y, t) \text{ où } \xi(x, y, 0) = x.\end{aligned}$$

Par une déformation de plongement  $\varphi_1 \chi_1$  laissant fixes les images des surfaces ( $t = \text{constante}$ ) et des surfaces ( $x = \text{constante}$ ), on peut déformer la fonction  $\eta$  en une fonction égale à  $y$  au voisinage de  $t = 0$ . Cette déformation se transporte par  $\chi_1^{-1}$  en une déformation de  $\varphi_1$  sur un voisinage de  $b_1$  qui conserve les images des surfaces de niveau et de la nappe canonique montante. Cette déformation se prolonge en une déformation de  $\varphi_1$  sur  $M_1$  tout entier ayant les mêmes propriétés. Une opération analogue sur  $\varphi_2$  permet de rendre différentiable le plongement  $\varphi$  qui vérifie toutes les conditions de la proposition 5.

*Remarque.* Comme les points critiques  $c_1$  et  $c_2$  sont consécutifs, on peut toujours supposer que le plongement  $\varphi : D \rightarrow W$  a une image  $D = \varphi(D)$  comprise entre des niveaux entre lesquels les seuls points critiques de la fonction  $f$  sont les points  $c_1$  et  $c_2$ .

*Saturation.* Soit  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $f' : W' \rightarrow \mathbb{R}$ ) une fonction de Morse,  $c_1$  et  $c_2$  (resp.  $c'_1$  et  $c'_2$ ) deux points critiques consécutifs d'indices  $i$  et  $(i + 1)$  pour lesquels il existe des nappes en bonne position, et  $\varphi : D \rightarrow W$  (resp.  $\varphi' : D' \rightarrow W'$ ) un plongement (proposition 5) du voisinage double modèle adapté à ce couple de points critiques, d'image  $\varphi(D) = D$  (resp.  $\varphi'(D') = D'$ ). L'application  $\lambda = \varphi^{-1} \varphi' : D \rightarrow D'$  est un isomorphisme, et il existe un automorphisme  $\lambda'$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $f' \lambda = \lambda' f$ .

Munissons  $W$  et  $W'$  de métrique riemannienne qui prolongent les métriques de  $D$  et  $D'$  images de celle de  $D$  par  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Soit  $S \subset W$  le fermé obtenu en prenant la réunion de toutes les lignes de gradient de  $f$  rencontrant  $D$  et limitées aux niveaux extrêmes de  $D$ : on dit que  $S$  est le **saturé** de  $D$ . Le saturé  $S$  est une variété à bord et à arêtes obtenue en collant à  $D$  deux pavés isomorphes à  $D^i \times D^{n-i-1} \times I$ , l'un à la surface de niveau supérieur de  $M_1$  dans le complément de  $M_1 \cap M_2$  par la face  $D^i \times D^{n-i-1} \times \{0\}$ , et à la surface latérale de  $M_2$  par la face  $D^i \times S^{n-i-2} \times I$ , l'autre étant collé de façon symétrique (voir figures 3 et 4).

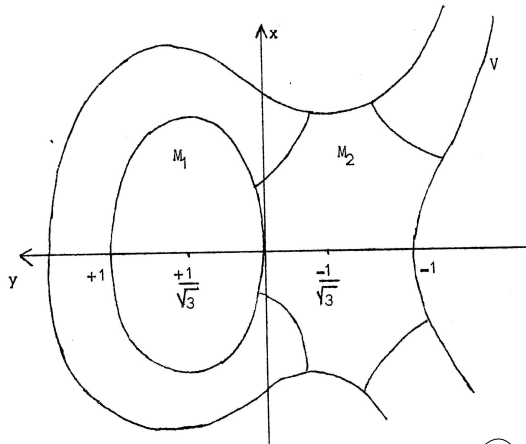


figure 3

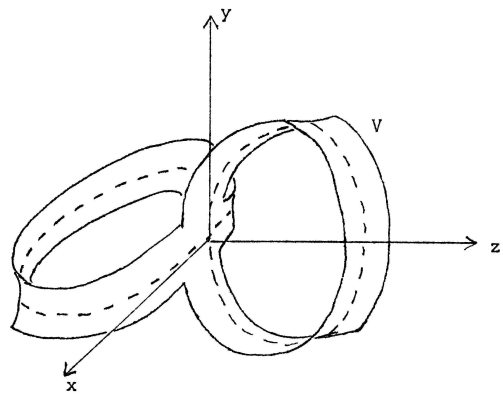
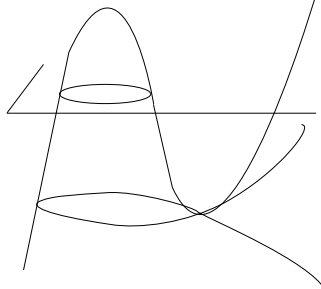


figure 4



Il est clair que l'isomorphisme  $\lambda$  se prolonge en un isomorphisme de  $S$  sur le saturé  $S'$  de  $D'$  transformant encore  $f$  en  $\lambda'f$ . Il en résulte que s'il existe une déformation à support dans l'intérieur de  $S$  qui élimine les points critiques  $c_1$  et  $c_2$ , l'application  $\lambda$  la transporte en une déformation analogue pour la fonction  $f'$ .

*Conclusion.* Pour démontrer le théorème 2, il suffit de trouver, pour une fonction de Morse particulière, une déformation à support contenu dans un voisinage double saturé qui élimine un couple de points critiques d'indices  $i$  et  $(i + 1)$ , et ceci pour tout  $i$ .

#### 4. Retour au modèle.

On choisit comme fonction particulière la fonction

$$k_\varepsilon(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon'x_n$$

où  $\varepsilon' > 0$  sera fixé. La déformation est donnée, pour  $t \in [0, 2]$ , par

$$f_t(x) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3 - 3\varepsilon'[1 - \bar{\omega}(x)]x_n$$

où  $\bar{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  est la fonction cloche du paragraphe 3, n° 2. Comme au paragraphe 3, hors du support de  $\bar{\omega}$ , la fonction  $f_t = k_\varepsilon$  n'a pas de point critique. Dans le compact  $\bar{\omega}^{-1}(1)$ , la fonction  $f_t = k_\varepsilon(1-t)$  a deux points critiques déjà étudiés pour  $0 \leq t < 1$ , un point critique dégénéré pour  $t = 1$  et aucun point critique pour  $t > 1$ . Enfin  $\varepsilon' > 0$  peut être choisi assez petit pour que, sur le compact adhérence( $\text{supp}(\bar{\omega}) \setminus \bar{\omega}^{-1}(1)$ ) et pour  $t \in [0, 2]$ , la fonction  $f_t$ , assez voisine  $C^1$  de la fonction de la fonction  $k_0$ , n'ait pas de point critique.

Montrons qu'il existe un voisinage double saturé de deux nappes en bonne position de  $f_0 = k_\varepsilon$  assez grand pour contenir le support de la déformation  $f_t$ , c'est-à-dire le support de  $\bar{\omega}$ . Il suffit d'étudier les cas suivants (affinité sur la variable  $x_n$ );

1<sup>er</sup> cas:  $i = 0$ ;  $f(x, y) = |x|^2 + y^3 - y$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Le cas de  $i = n - 1$  est du même coup résolu par la fonction  $-f$ .

2<sup>eme</sup> cas:  $1 \leq i \leq n - 2$ ;  $f(x, y, z) = -|x|^2 + |y|^2 + z^3 - z$  où  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i-1} \times \mathbb{R}$ .

Nous allons démontrer dans ces deux cas le

LEMME 1. Pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage double saturé  $S$  pour la fonction  $f$  dont l'intérieur contient  $K$ .

Choisissons les nappes en bonne position:

1<sup>er</sup> cas:  $c_1 = (0, 1/\sqrt{3})$ ;  $N_1 =$  composante connexe de  $(f \leq 0)$  contenant  $c_1$   
 $c_2 = (0, -1/\sqrt{3})$ ;  $N_2 = (x = 0; -1 \leq y \leq 0)$ .

2<sup>eme</sup> cas:  $c_1 = (0, 0, 1/\sqrt{3})$ ;  $N_1$  contenue dans  $(x = 0)$  et  $f(bN_1) = 0$ ;  
 $c_2 = (0, 0, -1/\sqrt{3})$ ;  $N_2$  contenue dans  $(y = 0)$  et  $f(bN_2) = 0$ .

Soit  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un plongement adapté à ces deux nappes; on munit  $\mathbb{R}^n$  d'une métrique prolongeant l'image par  $\varphi$  de celle de  $D$ . Puisque  $c_1$  et  $c_2$  sont seuls points critiques de  $f$ , on peut

prolonger le plongement  $\varphi$  le long des lignes de gradient de  $f$  de sorte que les niveaux extrêmes du saturé  $S$  soient  $-A$  et  $A$  tels que  $f(K) \subset [-A, A]$ .

Soit  $\mathbf{P} \subset \mathbf{D}$  la surface de niveau  $h^{-1}(0)$ : c'est le "plombage" de deux couronnes  $S^i \times D^{n-i-1}$  et  $D^i \times S^{n-i-1}$ . La donnée de  $\varphi|_{\mathbf{P}}$ , plongement dans la variété de niveau  $V = f^{-1}(0)$ , suffit pour reconstituer  $\varphi(\mathbf{D})$  et  $S$  à l'aide des lignes de gradient de  $f$ . Si, d'autre part,  $K'$  est la "projection" de  $K$  sur  $V$  par les lignes de gradient de la fonction  $f$ , le lemme 1 est démontré dès que  $K'$  est contenu dans  $\varphi(\mathbf{P})$ . Il suffit donc de démontrer le

LEMME 2. Si  $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un plongement adapté aux points critiques  $c_1$  et  $c_2$  et aux nappes  $N_1$  et  $N_2$ , pour tout compact  $K' \subset V$  il existe une isotopie  $(\gamma_t)_{t \in [0, 1]}$  du plongement  $\varphi|_{\mathbf{P}} = \gamma : \mathbf{P} \rightarrow V$  telle que  $K'$  soit contenu dans  $\gamma_1(\mathbf{P})$ .

1<sup>er</sup> cas: On traite seulement du cas  $n = 2$  et  $f(x, y) = x^2 + y^3 - y$ ; (on obtient le cas générale à partir de celui-là par rotation dans  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  autour de l'axe  $\{0\} \times \mathbb{R}$ ). La variété  $V$  est alors la courbe d'équation

$$x^2 + y^3 - y = 0$$

qui est difféomorphe à la droite, et  $\mathbf{F}$  est un segment: d'où le lemme (voir figure 3).

2<sup>eme</sup> cas: On traite seulement du cas  $n = 3, i = 1$  et  $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^3 - z$ ; (on obtient le cas générale à partir de celui-là par deux rotations). La variété  $V$  est alors la surface d'équation

$$-x^2 + y^2 + z^3 - z = 0$$

qui est difféomorphe au tore privé d'un point (penser à la cyclide de Dupin d'équation  $x^2(z-1) + y^2(z+1) + z^3 - z = 0$  qui est l'inverse d'un certain tore par rapport à un de ces points) et  $\mathbf{P}$  est le plombage de deux couronnes difféomorphe à  $S^1 \times I$  dont les âmes sont plongées par  $\varphi$  sur un cercle méridien et un cercle parallèle de  $\{S^1 \times S^1\} \setminus \{\text{point}\}$  respectivement: d'où le lemme dans ce dernier cas (voir figure 4).

## CHAPITRE IV

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DU  $h$ -COBORDISME

Dans ce chapitre, on démontre le théorème du  $h$ -cobordisme (voir Introduction): on sait (chapitre III, paragraphe 2, théorème 1) qu'il existe sur tout cobordisme compact une fonction de Morse ordonnée et on va montrer que les hypothèses homologiques de  $h$ -cobordisme et l'hypothèse de dimension permettent d'éliminer tous les points critiques de cette fonction par collision (chapitre III, paragraphe 4, théorème 2) d'où la trivialité du  $h$ -cobordisme (chapitre II, paragraphe 1, théorème 1).

Dans tout ce chapitre,  $(W, V, V')$  désigne une triade compacte, connexe (c'est-à-dire que  $W$  est connexe, ce qui ne restreint pas la généralité) munie d'une fonction de Morse ordonnée. On note  $n$  la dimension de  $W$ ; on note  $V_i$  une variété de niveau située entre les points critiques d'indice  $i$  et ceux d'indice  $(i + 1)$  et  $W_i$  la partie de  $W$  située en-dessous de  $V_i$ : c'est une variété à bord  $bW_i = V \cup V_i$ . On suppose que  $W$  est orientée ce qui oriente chaque  $V_i$  comme composante du bord de  $W_i$ .

*Paragraphe 1. TRIADES DONT TOUS LES POINTS CRITIQUES ONT MÊME INDICE.*

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la triade  $(W, V, V')$  est munie d'une fonction de Morse  $f$  qui a  $(r + 1)$  points critiques  $c_0, c_1, \dots, c_r$  (indexée dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes) qui sont tous des points critiques d'indice  $i$ .

*1. Métriques adaptées.*

**PROPOSITION 1.** *Il existe un système de nappes  $N_0, N_1, \dots, N_r$ , deux à deux disjointes descendant respectivement des points  $c_0, c_1, \dots, c_r$  jusqu'à la variété de niveau  $V$ . Pour toute donnée de ce type, il existe une métrique riemannienne sur  $W$  pour laquelle ces nappes sont de gradient. De plus, pour cette métrique, les nappes de gradient montantes sont deux à deux disjointes et montent jusqu'au niveau de  $V'$ .*

La deuxième partie de la proposition est évidente d'après (chapitre III, paragraphe 2, proposition 4). La première partie se démontre par récurrence. Supposons  $W$  munie d'une métrique pour laquelle les nappes de gradient de  $c_1, \dots, c_r$  soient disjointes, et soit  $N$  la nappe de gradient descendant de  $c_0$  jusqu'à une variété  $V''$  de niveau compris entre  $f(c_0)$  et  $f(c_1)$ . Dans  $V''$  (de dimension  $(n - 1)$ ) la trace de la nappe montante  $N'_j$  de  $c_j$  est une sphère de dimension  $(n - i - 1)$ , et  $bN$  est une sphère de dimension  $(i - 1)$ ; il existe donc une isotopie d'un voisinage de  $bN$  dans  $V''$  telle que l'image de  $bN$  par l'extrémité de cette isotopie ne rencontre pas les  $N'_j$ . La nappe fournie par (chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) se prolonge alors, le long des lignes de gradient, entre les niveaux  $V''$  et  $V$ .

*2. Relation homologiques.*

**2.1** L'homologie  $H_i(W, V)$  est somme directe de  $(r + 1)$  sous-groupes isomorphes à  $\mathbb{Z}$  et  $H_q(W, V)$  est nul pour  $q \neq i$ . En effet, le long des lignes de gradient, on peut rétracter  $W$  sur la réunion de  $V$  et de toutes les nappes descendantes, d'où l'isomorphisme

$$\oplus_j H_q(N_j, bN_j) \cong H_q(V \cup (\cup N_j), V) \cong H_q(W, V).$$

Choisissons une orientation sur chaque nappes descendante: les classes fondamentales de nappes  $(N_j, bN_j)$  forment une base de  $H_i(W, V)$ , notée  $(y_0, y_1, \dots, y_r)$ .

2.2 Soit  $B' = \cup N'_j$  la réunion des nappes montantes et  $A' = B' \cap V'$ . L'application naturelle  $H_q(W, V) \rightarrow H_q(W, W \setminus B')$  est un isomorphisme car  $W \setminus B'$  se rétracte sur  $V$  le long des lignes de  $f$ . Mais, par excision, on peut replacer  $W$  par un voisinage tubulaire  $T$  de  $B'$  (i.e., une réunion disjointe de voisinages tubulaires  $T_j$  des nappes montantes  $N'_j$ ). Si on oriente  $T_j$  en orientant sa fibre en  $c_j$  comme la nappe  $N_j$  qui est tangente, et si on oriente  $N'_j$  de sorte que le nombre d'intersection  $N_j \cdot N'_j$  soit  $+1$ , on a alors un isomorphisme de  $T_j$  sur  $D^{n-i} \times D^i$  d'où un isomorphisme

$$t_q : H_q(W, W \setminus B') \xrightarrow{\cong} \oplus_j H_q(D^{n-i} \times (D^i, S^{i-1}))$$

de telle sorte que l'image par  $t_i$  de la classe fondamentale  $y_j$  de la nappe  $(N_j, bN_j)$  soit exactement le générateur canonique du  $j$ -ième composant de la somme directe.

2.3 L'injection  $(V', V' \setminus A') \rightarrow (W, W \setminus B')$  induit sur l'homologie un isomorphisme sauf en dimension  $(n-1)$ . Ceci provient du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(V', V' \setminus A') & \rightarrow & H_q(W, W \setminus B') \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_q(S^{n-i-1} \times (D^i, S^{i-1})) & \rightarrow & H_q(D^{n-i} \times (D^i, S^{i-1})) \end{array}$$

où la flèche du bas est un isomorphisme pour  $q \neq n-1$ .

En particulier, si  $i \neq n-1$ , la composée des flèches

$$H_i(V', V' \setminus A') \xrightarrow{\gamma_2} H_i(W, W \setminus B') \xrightarrow{\gamma_1} H_i(W, V)$$

est un isomorphisme; le groupe  $H_i(V', V' \setminus A')$  est un groupe libre à  $(r+1)$  générateurs et on peut représenter le générateur correspondant à  $y_j \in H_i(W, V)$  par un petit disque rencontrant  $bN'_j$  (seulement) transversalement en un point avec un nombre d'intersection égal à  $+1$ .

2.4 In en résulte que, si  $M$  est une sous-variété orientée de dimension  $i$  de  $V'$  qui coupe transversalement les  $bN'_j$ , l'image de sa classe fondamentale par l'application composée

$$H_i(M) \rightarrow H_i(V') \rightarrow H_i(W) \rightarrow H_i(W, V)$$

est égale à  $\sum_j (M \cdot bN_j) y_j$  en tenant compte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & H_i(V', V' \setminus A') & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ H_i(V') & & & & H_i(W, W \setminus B') \xrightarrow{\cong} H_i(W, V) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & H_i(W) & & \end{array}$$

Soient  $V''$  et  $V'''$  deux variétés de niveau situées entre les niveaux de  $c_0$  et de  $c_1$ ,  $V'''$  étant située au-dessous de  $V''$ .

$W''''$  la portion de  $W$  située entre  $V$  et  $V'''$  (voir figure 1).

figure 1

$S_0$  l'intersection de  $N_0$  et de  $V'''$ .

$$\pi_1(\mathbf{S}, \mathbf{S}^*, S_0) \xrightarrow{\alpha} H_i(V''', V''' \setminus A'')$$

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \beta \downarrow & \downarrow \gamma \\ & \pi_0(N, N_0) & \xrightarrow{\zeta} H_i(W', V) \end{array}$$

Les espaces  $N$  et  $S$ , espaces de sous-variétés, sont munis de la topologie quotient de l'espace des plongement par les automorphismes de la source.

*Définition de  $\beta$ .* Il n'y a pas de point critique entre les niveaux  $V''$  et  $V'''$ , et  $W'''$  est donc difféomorphe à  $V''' \times I$  par un difféomorphisme qui envoie  $N_0 \cap W'''$  sur  $S_0 \times I$ . Ceci entraîne qu'il existe un isomorphisme canonique  $\pi_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, S_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{N}^*, N_0)$ . La flèche  $\beta$  est la flèche composée de cet isomorphisme et de la flèche canonique  $\pi_0(\mathcal{N}^*, N_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{N}, N_0)$ .

*Définition de  $\zeta$ .* Une nappe  $N$  de  $\mathcal{N}$  est un disque de dimension  $i$ , plongé dans  $W$ , avec son bord dans  $V$ ; elle définit donc une classe d'homologie dans  $H_i(W, V)$  qui ne dépend que de la classe d'homotopie du plongement. D'où une application

$$\zeta' : \pi_0(\mathcal{N}, N_0) \rightarrow H_i(W', V).$$

Mais chaque nappe  $N \in \mathcal{N}$  coïncide avec  $N_0$  au-dessus de  $V''$ , donc tout élément de l'image de  $\zeta'$  induit dans  $H_i(W'', V'')$  le même élément que  $N_0$ . La suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_i(W', V) \rightarrow H_i(W, V) \rightarrow H_i(W, W') \rightarrow 0 \\ \cong \downarrow \text{excision} \\ H_i(W'', V'') \end{aligned}$$

montre que l'image de  $\zeta'$  est dans le sous-espace affine de  $H_i(W, V)$  parallèle à  $H_i(W', V)$  et issu de la classe définie par  $N_0$ ; la soustraction de cette classe identifie ce sous-espace affine et  $H_i(W', V)$ . C'est ainsi qu'on définit l'application  $\zeta$ ; on montrera qu'elle est surjective.

*Définition de  $\alpha$ .* (analogue à celle de  $\zeta'$ ) On prend l'image de la classe fondamentale du cylindre  $S_0 \times I$  dans  $V'''$ .

*Définition de  $\gamma$ .* C'est l'application composée

$$H_i(V''', V''' \setminus A) \xrightarrow{\gamma_2} H_i(W''''', W'''' \setminus B'') \xrightarrow{\gamma_1} H_i(W''''', V) \xrightarrow{\gamma_3} H_i(W', V)$$

où  $\gamma_3$  est l'isomorphisme induit par rétraction de  $W'''$  sur  $V'''$ , et  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les applications définies au paragraphe 1, n° 2.3.

**PROPOSITION 3.** *L'application  $\zeta$  est surjective pour  $2 \leq i \leq n - 2$ ; si  $V'''$  est connexe.*

La commutativité du diagramme (1) est évidente d'après la définition des applications  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\zeta$ . La surjectivité de  $\zeta$  résulte de la surjectivité de  $\alpha$  et de  $\gamma$ .

*L'application  $\gamma$  est bijective pour  $i \neq n - 1$ .* Il suffit d'appliquer le paragraphe 1, n° 2.3 à la triade  $(W''''', V, V''')$  ce qui montre que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des isomorphismes si  $i \neq n - 1$ .

*L'application  $\alpha$  est surjective si  $2 \leq i \leq n - 2$  et si  $V'''$  est connexe,* (pour  $i = 1$ , on a le même résultat si on ajoute l'hypothèse que le complémentaire de  $A''$  dans  $V'''$  est connexe; de même pour  $i = n - 1$  si le complémentaire de  $S_0$  dans  $V'''$  est connexe).

La sous-variété  $A''$  de  $V'''$  est la réunion disjointe de  $r$  sphères  $S_1, \dots, S_r$  de dimension  $(n - i - 1)$ ; rappelons (paragraphe 1, n° 2.3) que les  $r$  générateurs du groupe libre  $H_i(V''', V''' \setminus A)$  sont représentés par des petits disques de dimension  $i$  transversaux chacun à l'une des  $S_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ).

Soit  $P$  un point de  $S_0$ , et  $Q$  un point de  $S_j$ ; comme  $V'''$  est connexe, il existe un chemin différentiable  $\delta$  joignant  $P$  à  $Q$ . On peut supposer que  $P$  est le seul point d'intersection de  $S_0$  et du chemin  $\delta$ , et  $Q$  le seul point d'intersection de  $A''$  et de  $\delta$ , puisque  $S_0$  et  $A''$  sont des sous-variétés de

codimension au moins 2 dans  $V'''$ . De plus on peut supposer que ces intersections sont transversales. Il existe alors un plongement du tube  $D^{n-2} \times [0, 1 + \varepsilon]$  dont la restriction à  $\{0\} \times [0, 1]$  est le chemin  $\delta$ , et tel que  $S_0$  rencontre le tube suivant un diamètre  $D$  de  $D^{n-2} \times \{0\}$ , et  $S_j$  rencontre suivant un diamètre  $D'$  de  $D^{n-2} \times \{1\}$ , et que les  $S_k, k \neq j$  ne rencontrent pas le tube. Les disques  $D$  et  $D'$  sont des diamètres de dimension  $(i-1)$  et  $(n-i-1)$  respectivement de  $D^{n-2}$ . Comme  $i-1 \leq n-2-1$ , il existe une rotation  $\rho_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) de  $D^{n-2}$  qui transforme  $D$  en un diamètre transversale à  $D'$ , et d'orientation arbitraire. Soit  $h$  une application différentiable de  $D$  dans  $I = [0, 1]$  qui soit égale et tangente à 0 au bord de  $D$ , et égale à 1 au voisinage du centre de  $D$ . L'application  $g$  de  $I \times D$  dans le tube  $D^{n-2} \times [0, 1 + \varepsilon]$  définie par

$$\begin{aligned} g(t, x) &= (\rho_{h(x), t}, h(x) \cdot t) && \text{pour } t \in [0, 1] \\ &= (\rho_{h(x)}, h(x) + t - 1) && \text{pour } t \in [1, 1 + \varepsilon] \end{aligned}$$

définit une déformation de  $D$ , et donc de  $S_0$ , c'est-à-dire un élément de  $\pi_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, S_0)$  dont l'image dans  $H_i(V''', V''' \setminus A)$  est le générateur défini par un petit disque transverse à  $S_j$ , ou son opposé, suivant la rotation  $\rho_t$  choisie.

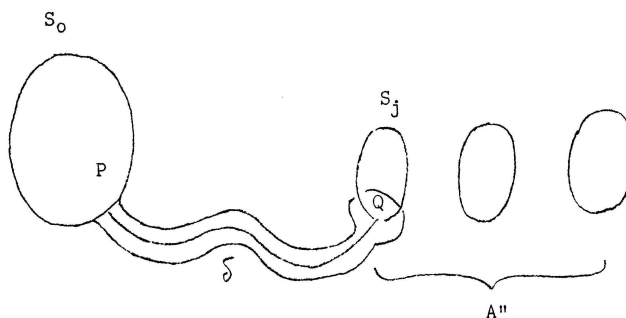


figure 2

Le fait que tous les générateurs de  $H_i(V''', V''' \setminus A)$  soient dans l'image de l'application  $\alpha$  ne prouve que  $\alpha$  est surjective, puisque  $\pi_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, S_0)$  n'est pas un groupe. Il est cependant bien clair, qu'en itérant la déformation décrite plus haut, on peut obtenir n'importe quelle combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des générateurs de  $H_i(V''', V''' \setminus A)$ ; d'où la surjectivité de l'application  $\alpha$ .

#### 4. Le théorème de la base.

**THÉORÈME 1.** Soit  $(W, V, V')$  une triade,  $f$  une fonction de Morse sur la triade dont tous les points critiques sont d'indice  $i$  ( $2 \leq i \leq n-2$ ), et soit  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  une base de  $H_i(W, V)$ ; il existe une fonction de Morse  $g$  sur la triade qui a les propriétés suivantes;

- (a).  $g$  a les mêmes points critiques que  $f$ ,
- (b).  $g$  coïncide avec  $f$  au voisinage du bord de  $W$ ,
- (c).  $g$  se déduit de  $f$  par un nombre fini de croisements élémentaires,
- (d).  $g$  possède un système de nappes descendantes (deux à deux sans point commun) qui réalisent la base  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  (en les prenant dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes).

*Démonstration.* Soit  $(y_0, \dots, y_r)$  une base de  $H_i(W, V)$  réalisée par un système de nappes de la fonction  $f$  (numérotée dans l'ordre des valeurs critiques décroissantes). La surjectivité de l'application  $\zeta$  (n° 3, proposition 3) montre qu'il existe une nappe descendante du point  $c_0$  et disjointe des nappes représentatives de  $y_1, \dots, y_r$ , dont l'image dans  $H_i(W, V)$  est la somme de  $y_0$  et d'une combinaison linéaire arbitraire des  $y_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ).

D'autre part, en changeant la fonction  $f$  par un chemin élémentaire de traversée, on peut permuter l'ordre des éléments de la base  $(y_0, \dots, y_r)$ . Enfin, en changeant l'orientation d'une nappe, on change l'élément de base correspondant en son opposé. Or toute base d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini peut être obtenue à partir d'une base donnée par un nombre fini d'opérations de ce type: le théorème en résulte.

En d'autres termes, on a utilisé le fait (élémentaire) que le groupe linéaire  $GL(\mathbb{Z}, r+1)$  est engendré par la réunion du sous-groupe des matrices de permutation et du sous-groupe des matrices triangulaires inférieures dont tous les éléments diagonaux sont égaux à  $\pm 1$ .

## Paragraphe 2. RELATIONS HOMOLOGIQUES ET HOMOTOPIQUES DANS UNE TRIADE ORDONNÉE.

### 1. Relation homologiques.

1.1 De l'étude des triades qui n'ont de points critiques qu'en dimension  $i$ , on déduit par excision que  $H_i(W_i, W_{i-1})$  est somme directe de sous-groupes isomorphes à  $\mathbb{Z}$  en nombre égal au nombre de points critiques d'indice  $i$ , chacun engendré par la classe fondamentale d'une nappe descendante. De plus  $H_q(W_i, W_{i-1})$  est nul pour  $q \neq i$ .

1.2. On en déduit que, pour  $i \leq j$ , on a  $H_q(W_j, W_i) = 0$  si  $q \leq i$  et si  $j < q$ .

1.3. En considérant la suite exacte d'homologie du triple  $(W_j, W_i, V)$  on trouve que l'application canonique  $H_q(W_i, V) \rightarrow H_q(W_j, V)$  est un isomorphisme dès que  $q < i$  ou  $j < q$ . En particulier, comme  $W = W_n$ , l'application  $H_i(W_{i+1}, V) \rightarrow H_i(W, V)$  est un isomorphisme.

### 2. Relation homotopiques.

2.1 Dans le cas où il n'y a de ponts critiques que d'indice  $i$ , l'image d'une application de  $S^q$  dans  $W$  peut être séparée des nappes montantes (qui sont des  $(n-i)$ -disques) dès que  $q + (n-i) \leq n-1$  d'après le théorème de la séparation de Whitney. Or on a vu (paragraphe 1, n° 2.2) que le complémentaire dans  $W$  de la réunion des nappes montantes se rétracte par déformation sur  $V$ . Il en résulte que  $\pi_q(W, V) = 0$  pour  $q < i$ .

2.2. On en déduit immédiatement que dans le cas général  $\pi_q(W_j, W_i) = 0$  si  $q \leq i$ . Et, en considérant la triade  $(W, V', V)$  munie de la fonction ordonnée  $-f$ , on trouve que  $\pi_q(W_i, V) = 0$  pour  $q \leq n-i-1$ .

2.3. L'application naturelle naturelle  $\pi_q(W_i) \rightarrow \pi_q(W_j)$  est un isomorphisme pour  $q < i$ ; elle est surjective pour  $q = i$ .

## Paragraphe 3. ÉLIMINATION DES POINTS CRITIQUES D'INDICE 0 ET 1.

## 1. Points critiques d'indice 0.

THÉORÈME 2. *Sur une triade connexe  $(W, V, V')$  il existe une fonction de Morse sans point critique d'indice 0 ni point critique d'indice  $n$ .*

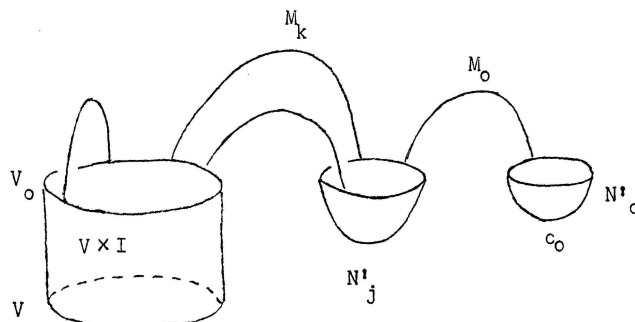


figure 3

La variété  $W_0$  est difféomorphe à la réunion (disjointe) d'un cylindre  $V \times I$  et des nappes montantes ( $N'_j$ ) des points critiques d'indice 0 qui sont des  $n$ -disques. La variété  $W_1$  se rétracte par déformation sur la réunion de  $W_0$  et des nappes descendantes ( $M_k$ ) des points critiques d'indice 1 (paragraphe 1, n° 2.1); d'autre part (paragraphe 2, n° 2.3), on a  $\pi_0(W_1) = \pi_0(W) = 0$ .

Soit  $c_0$  le point critique d'indice 0 le plus haut, en raison de la connexité de  $W_1$  il existe une nappe descendante  $M_0$  d'indice 1 (i.e., un 1-disque) qui joint la nappe  $N'_0$  de  $c_0$  soit à la nappe d'un autre point critique d'indice 0, soit au cylindre  $V \times I$ : l'intersection de  $N'_0$  et de  $M_0$  est nécessairement réduite à un point et évidemment transversale. Ces nappes sont en bonne position et le théorème de cancellation (chapitre III, 4.1, théorème 2) permet d'éliminer le point critique  $c_0$  avec un point critique d'indice 1.

Par récurrence, on voit qu'on peut éliminer tous les points critiques d'indice 0; le procédé utilisé nous garantit l'existence d'un nombre égal de points critiques d'indice 1 qui sont éliminés gratuitement tandis que tous les autres points critiques restent inchangés. Le même procédé appliqué à la fonction  $-f$  élimine les points critiques d'indice  $n$  avec un nombre de points d'indice  $(n - 1)$ .

COROLLAIRE 1. *Tout cobordisme connexe de dimension 1 est trivial et donc difféomorphe au segment  $[0, 1]$ .*

En effet, lorsqu'on a éliminé les points critiques d'indice 0 et ceux d'indice  $n = 1$ , il n'en reste plus et la trivialité résulte de (chapitre II, 1.1, théorème 1).

COROLLAIRE 2. *Tout cobordisme de dimension 2 tel que  $H_1(W, V) = 0$  est trivial.*

En effet, lorsqu'on a éliminé les points critiques d'indice 0 et d'indice 2, on a  $H_1(W_1, W_0) = H_1(W, V) = 0$  ce qui montre qu'il ne reste plus de point critique d'indice 1 d'après (paragraphe 2, n° 1.1)

*Application : classification des variétés compactes de dimension 1 et 2.*

Soit  $M$  une variété compacte munie d'une fonction de Morse  $f$ : cette fonction a au moins un maximum et un minimum. Lorsqu'on retire à  $M$  un petit voisinage de Morse d'un maximum et d'un minimum, on obtient un cobordisme. Dans le cas de la dimension 1, il est trivial donc difféomorphe

à la réunion de deux segment. Il en résulte que  $M$  est toujours difféomorphe au cercle.

Dans le cas de la dimension 2, le lecteur étudiera ce cobordisme suivant la dimension de  $H_1(W, V)$  pour obtenir la calcification des variétés de dimension 2 (cf. Seifert et Threlfall, Lehrbuch der Topologie.)

## 2. Points critiques d'indice 1.

THÉORÈME 3. Soit  $(W, V, V')$  une triade connexe telle que

$$\begin{aligned} V &\text{ soit connexe,} \\ \pi_1(V) &= \pi_1(W) = 0, \\ n = \dim W &\geq 5, \end{aligned}$$

et si  $f$  est une fonction de Morse sans point critique d'indice 0, on peut éliminer les points critiques d'indice 1 de  $f$  en ajoutant un nombre égal de points critiques d'indice 3.

A partir de maintenant, on suppose  $V$  et  $V'$  connexe pour éviter d'avoir à prendre dans les énoncés des hypothèse des précautions illusoires (car, si on peut supprimer les points critiques d'indice 1, la variété  $V$  est sûrement connexe).

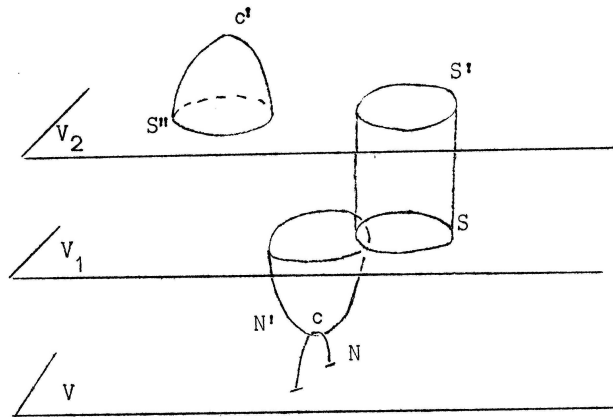


figure 4

Soit  $c$  le plus haut des points critiques d'indice 1 et  $N'$  sa nappe montante dont le bord  $bN' \subset V_1$  est une  $(n-2)$ -sphère. Il existe un cercle  $S \subset V_1$  qui coupe  $bN'$  transversalement et en un seul point. En effet, le complémentaire  $V_1 \setminus (\cup bN'_j)$  de la réunion des bords de toutes les nappes montantes d'indice 1 se transporte le long des lignes de gradient sur le complémentaire  $V \setminus (\cup bN_j)$  des bords des nappes descendantes qui est connexe puisque  $V$  est connexe et que chaque  $bN_j$  est un couple de points. Considérons alors un petit segment transverse à  $bN'$ ; on peut joindre ses extrémités dans  $V_1 \setminus (\cup bN'_j)$  d'où, en arrondissant les angles, un cercle  $S \subset V_1$  qui ne rencontre aucun  $bN_j$  sauf  $bN'$  qu'il coupe transversalement en un seul point.

Les nappes descendantes  $M_k$  des points d'indice 2 sont de dimension 2. Comme  $\dim S + \dim bM_k = 2 < n-1 = \dim V_1$ , le théorème de séparation de Whitney nous permet de supposer, par isotopie, que  $S$  ne rencontre aucune des  $bM_k$ . À l'aide des ligne de gradient, on construit un cylindre qui rencontre  $V_1$  suivant  $S$  et  $V_2$  suivant un cercle  $S'$ .

Par un chemin élémentaire de naissance (chapitre III, paragraphe 3, proposition 4), on fait apparaître un peu au-dessus de  $V_2$  un couple d'un point  $c'$  d'indice 2 et d'un point  $c''$  d'indice 3. Soit  $S'' \subset V_2$  le bord de la nappe descendante de  $c'$ ; si les deux cercles  $S'$  et  $S''$  sont isotopes par une

isotopie de plongement dans  $V_2$ , le procédé de (chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) nous donne une nappe descendante de  $c'$  de bord  $S'$  et qui se prolonge donc le long des lignes de gradient jusqu'à  $S \subset V_1$ . Les points  $c$  et  $c'$  ont des nappes en bonne position, donc se tuent par (chapitre III, paragraphe 4, théorème 2).

Il reste à montrer que  $S'$  et  $S''$  sont isotopes. Pour cela, il suffit de voir qu'ils sont homotopes, car, d'après le théorème de plongement de Whitney, le cercle étant de dimension 1, et  $V_2$  de dimension au moins 4, deux plongements homotopes du cercle dans  $V_2$  sont isotopes. Les cercles  $S'$  et  $S''$  sont en fait homotopes à 0 sous les hypothèses du théorème 3 d'après le

LEMME. *La variété de niveau  $V_2$  est simplement connexe.*

En effet,  $\pi_1(W_2) = \pi_1(W) = 0$  d'après (paragraphe 2, n° 2.3) et  $\pi_1(W) = 0$  par hypothèse; d'autre part  $\pi_1(W_2, V_2) = 0$  d'après (paragraphe 2, n° 2.2) puisque  $2 \leq n - 3$ ; le lemme résulte alors de la suite exacte d'homotopie du couple  $(W_2, V_2)$

$$\pi_1(W_2, V_2) \rightarrow \pi_1(V_2) \rightarrow \pi_1(W_2).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

*Remarques.*

1. Si l'on oublie que  $\pi_1(W) = 0$ , il n'en reste pas moins que  $S''$  est homotope à 0 dans  $V_2$ . Supposons en effet que la naissance du couple  $(c', c'')$  ait eu lieu dans une portion  $W'_2$  de  $W$ , située entre les surface de niveau  $V_2$  et  $V'_2$ , assez plate pour qu'il n'y ait eu aucun point critique avant la naissance de  $(c', c'')$ ; alors  $V_2$  est rétracte par déformation de  $W'_2$  et  $S''$  qui est le bord d'un disque dans  $W'_2$  (c'est le bord de la nappe) est homotope à 0 dans  $V_2$ .

2. Démontrons la généralisation suivante du théorème 3;

THÉORÈME 3'. *Soit  $(W, V, V')$  une triade de dimension  $n \geq 5$  telle que l'application canonique  $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(W)$  soit un isomorphisme, et si  $f$  est une fonction de Morse sans point critique d'indice 0, on peut éliminer les points critiques d'indice 1 de  $f$  en ajoutant un nombre égal de points critiques d'indice 3.*

D'après ce qui précède, il suffit de trouver un cercle  $S$ , plongé dans  $V_1$ , coupant  $bN'$  transversalement en un seul point et qui soit homotope à 0 dans  $W_2$ , ceci parce que  $S$  a même classe que  $S'$  dans  $\pi_1(W_2)$  et parce que, si cette classe est nulle, la nullité de  $\pi_2(W_2, V_2)$  (paragraphe 2, n° 2.2) entraîne que  $S'$  est homotope à 0 dans  $V_2$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_s; R_1, \dots, R_t)$  une présentation de  $\pi_1(V)$  par générateurs et relations. On peut supposer que les générateurs sont représentés par des cercles plongés dans  $V \setminus (\cup bN_j)$ . Le groupe  $\pi_1(W_1)$  est alors le composé  $\pi_1(W_1) = \pi_1(V) * (y_1, \dots, y_r)$  où  $y_j$  correspond à la nappe  $N_j$ . D'où

$$\pi_1(V_1) = \pi_1(W_1) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r; R_1, \dots, R_t)$$

et on peut représenter dans  $V_1$  les générateurs  $x_1, \dots, x_s$  (en déplaçant les précédents le long des lignes de gradient) par des cercles plongés dans  $V_1$  et ne rencontrant aucun  $bN'_j$ ; de même chaque  $y_j$  peut être représenté par un cercle plongé dans  $V_1$  et qui rencontre la seule nappe  $N_j$  en un seul point et transversalement.

Le groupe  $\pi_1(W_2)$  est quotient de  $\pi_1(W_1)$  par les relations introduites par les nappes descendantes

d'indice 2; mais, par hypothèse, on a  $\pi_1(W_2) = \pi_1(W) = \pi_1(V)$  et il résulte que, dans  $\pi_1(W_2)$ , on a des relations du type  $y_j = \eta_j(x_1, \dots, x_s)$  où  $\eta_j$  est un mot composé avec les lettres  $x_1, \dots, x_s$  et leurs inverses. D'après le choix des représentants dans  $V_1$  des générateurs, et comme  $V_1$  est de dimension au moins 3, on peut trouver un cercle  $S$ , plongé dans  $V_1$  et rencontrant  $bN_1$  transversalement en un seul point, dont la classe d'homotopie dans  $\pi_1(V_1)$  soit  $y_1 \cdot \eta_1^{-1}(x_1, \dots, x_s)$ . Il est clair que le cercle  $S$  est homotope à 0 dans  $W_2$  et ceci achève la démonstration.

3. Sous les hypothèses du théorème 3 et si  $\pi_1(V') = 0$ , le théorème 3 appliqué à la fonction  $-f$  montre qu'on peut éliminer les points critiques d'indice  $(n - 1)$ .

4. La méthode précédente qui consiste à faire naître un point critique d'indice  $(i + 1)$  et un point critique d'indice  $(i + 2)$  pour que le point nouveau-né d'indice  $(i + 1)$  tue un point critique d'indice  $i$  permet, si  $\pi_1(V) = \pi_1(W) = \pi_1(V')$  et si  $H_*(W, V) = 0$ , d'éliminer tous les points critiques sauf pour les indice  $i$  et  $(i + 1)$  où  $2 \leq i \leq n - 3$ . Dans ce cours, on utilise une autre méthode.

5. Il n'y a pas d'espoir pour que ces méthodes fonctionnent en dimensions 3 et 4; en dimension 3 on ne peut pas éviter que  $S$  rencontre les nappes descendantes d'indice 2 et en dimension 4 les cercles  $S'$  et  $S''$  peuvent être noués dans  $V_2$  (de dimension 3) et pas forcément isotopes.

*Paragraphe 4. ÉLIMINATION DES POINTS CRITIQUES D'INDICE  $i$  ( $2 \leq i \leq n - 4$ ).*

THÉORÈME 4. *Soit  $(W, V, V')$  une triade de dimension  $n$ ,  $f$  une fonction de Morse sur  $W$  et  $i$  un entier tel que  $2 \leq i \leq n - 4$ ; on suppose que*

$$n \geq 6$$

$$\pi_1(V) = 0$$

$$H_i(W, V) = 0$$

*$f$  n'a pas de point critique d'indice inférieur ou égal à  $(i - 1)$ .*

*Il existe alors un difféomorphisme de la fonction  $f$  qui élimine tous les points critiques d'indice  $i$  par collision avec des points d'indice  $(i + 1)$  en nombre égal et qui conserve tous les autres points critiques.*

La démonstration est scindée en deux parties.

### 1. Partie géométrique.

Soit  $c$  le plus haut des oints critiques d'indice  $i$  et  $N'$  sa nappe montante. Le théorème de cancellation permet d'éliminer  $c$  si l'on trouve un point critique  $c'$  d'indice  $(i + 1)$  et une nappe descendante  $M$  relative à  $c'$  qui soit en bonne position par rapport à  $N'$ . Cela signifie que dans  $V_i$  la  $i$ -sphère  $bM$  coupe la  $(n - i - 1)$ -sphère  $bN'$  transversalement en un seul point. Il en résulte que le nombre d'intersection  $(bM \cdot bN')$  doit être égal à  $\pm 1$ . La deuxième partie de la démonstration (partie algébrique) est consacrée à la démonstration de l'existence d'un point critique  $c'$  et d'une nappe  $M$  telle que  $(bM \cdot bN') = 1$ ; si l'on admet cela, pour déformer la nappe  $M$  en une nappe de  $c'$  en bonne position par rapport à  $N'$ , il suffit (d'après chapitre II, paragraphe 4, proposition 5) de trouver une isotopie de plongement de  $bM$  dans  $V_i$  dont l'extrémité coupe  $bN'$  transversalement en un seul point.

Une telle isotopie est fournie par le théorème du nombre d'intersection de Whitney (cf. Introduction) pourvu que les hypothèse en soient vérifiées. Or  $V_i$  est de dimension  $n - 1 \geq 5$ , la

$i$ -sphère  $bM$  est de codimension  $n - i - 1 \geq 3$  d'après l'hypothèse sur  $i$ , et la  $(n - i - 1)$ -sphère  $bN'$  est de codimension  $i \geq 2$ . Il reste à vérifier l'hypothèse (a). Comme il n'y a pas de point critique d'indice plus petit que 2, la tranche  $W_1$  à l'homotopie de  $V$ ; elle est en particulier simplement connexe; il en est de même de toute tranche  $W_j$  d'après (paragraphe 2, n° 2.3). Comme  $i \leq n - 3$ , il résulte de (paragraphe 2, n° 2.2) que  $\pi_2(W_j, W_i) = 0$ , donc  $V_i$  est simplement connexe.

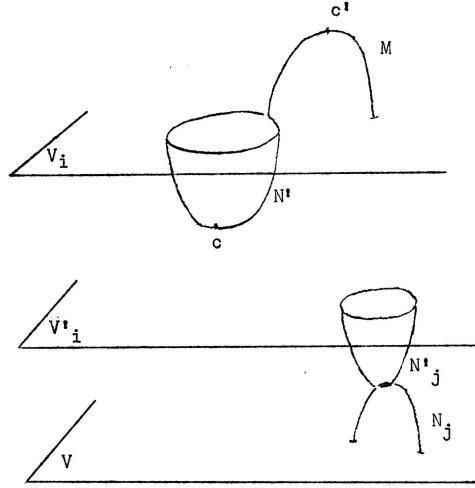


figure 5

Il reste à voir que  $(V_i \setminus bN')$  est simplement connexe. Si l'on avait  $i \geq 3$ , ce serait évident car  $bN'$  a pour codimension  $i$  dans  $V_i$ . Pour le cas  $i = 2$ , on doit faire une démonstration plus compliquée. Soit  $V'_i$  une variété de niveau située en-dessous de  $c$  et au-dessus des autres points d'indice  $i$ . Le groupe  $\pi_1(V'_i)$  est un quotient du groupe  $\pi_1(V'_i \setminus (\cup (N'_j \cap V'_i)))$  d'après le théorème de séparation de Whitney, puisque les intersections  $(N'_j \cap V'_i)$  des nappes montantes  $N'_j$  d'indice  $i$  sont de codimension  $i \geq 2$ . Par transport le long des lignes de gradient,  $(V'_i \setminus (\cup (N'_j \cap V'_i)))$  a l'homotopie du complémentaire  $(V \setminus (\cup bN_j))$  des bords des nappes descendantes des points critiques situés au-dessous de  $V'_i$ . Pour  $i \leq n - 3$ , la codimension des  $bN_j$  est au moins 3 et  $\pi_1(V \setminus (\cup bN_j)) = \pi_1(V) = 0$ .

Ainsi,  $V'_i$  est simplement connexe, donc aussi  $(V'_i \setminus (N \cap V'_i))$  où  $N$  est la nappe descendante de  $c$ , et de même  $(V \setminus bN')$  par transport le long des lignes de gradient.

## 2. Partie algébrique.

On va montrer qu'après des croisements éventuels de points critiques d'indice  $(i + 1)$ , il existe une nappe  $M$  descendante d'un point  $c'$  d'indice  $(i + 1)$  dont la trace  $bM$  sur  $V_i$  ait un nombre d'intersection égal à 1 avec  $bN'$ . En appliquant (paragraphe 1, n° 2.4) à la triade  $(W_i, V, V_i)$  avec  $c_0 = c$ , cela signifie que l'image de la classe fondamentale  $bM$  par l'application composée

$$H_i(V_i) \xrightarrow{k} H_i(W_i) \xrightarrow{h} H_i(W_i, V)$$

a pour coordonnée 1 sur  $y_0$ .

Si  $\alpha \in H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$  (où  $W'_{i+1}$  est la portion de  $W$  située entre  $V_i$  et  $V_{i+1}$ ) est une classe telle que  $h \cdot k \cdot \partial(\alpha)$  ait pour coordonnée 1 sur  $y_0$ , alors  $\alpha$  est élément d'une base du  $\mathbb{Z}$ -module libre

$H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$  et le théorème de la base (paragraphe 1, n° 4) appliqué à la triade  $(W'_{i+1}, V_i, V_{i+1})$

montre qu'après quelques croisements, il existe une nappe descendante d'indice  $(i + 1)$  représentant

$\alpha$  et, par suite, dont le bord  $bM$  a une classe fondamentale  $[bM] = \partial\alpha$  convenable. On va construire  $\alpha$ .

Comme  $H_i(W_{i+1}, V_i) = H_i(W, V) = 0$ , la suite exacte

$$H_{i+1}(W_{i+1}, W_i) \xrightarrow{\partial} H_i(W_i, V) \rightarrow H_i(W_{i+1}, V)$$

prouve que  $y_0 = \partial\beta$  où  $\beta \in H_{i+1}(W_{i+1}, W_i)$ . L'image réciproque par excision de  $\beta$  dans  $H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i)$  est l'élément  $\alpha$  cherché à cause de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_{i+1}(W'_{i+1}, V_i) & \xrightarrow{\partial} & H_i(V_i) & \xrightarrow{k} & H_i(W_i) \\ \cong \downarrow \text{excision} & & \partial & & \downarrow = \\ H_{i+1}(W_{i+1}, W_i) & \rightarrow & & & H_i(W_i) \end{array}$$

Paragraphe 5. CONCLUSION.

THÉORÈME 5. Soit  $(W, V, V')$  une triade compacte de dimension  $n$ , on suppose que

$$n \geq 6$$

$$\pi_1(V) = \pi_1(W) = \pi_1(V') = 0$$

$$H_*(W, V) = 0$$

alors  $W$  est difféomorphe à  $V \times [0, 1]$ .

En effet, on peut munir  $W$  d'une fonction de Morse (chapitre I) dont on élimine les points critiques d'indice 0 et 1 (chapitre IV, paragraphe 3) ainsi que les points d'indice  $n$  et  $(n-1)$  (chapitre IV, paragraphe 3). L'utilisation de (chapitre IV, paragraphe 4) ne laisse de points critiques qu'en dimension  $(n-3)$  et  $(n-2)$ . Le lecteur se convaincra à l'aide de (chapitre IV, paragraphe 1, n° 2) qu'on a  $H_*(W, V') = 0$ ; on applique alors à la fonction  $-f$  le paragraphe 4 pour conclure.

Note. Montrons que  $H_*(W, V') = 0$ . Lorsqu'il n'y a que des points critiques d'indice  $(n-3)$  et  $(n-2)$ , le triple  $(W_{n-2}, W_{n-3}, W_{n-4})$  est équivalent au triple  $(W, W_{n-3}, V)$ . Le seul groupe d'homologie non nul de  $(W, W_{n-3})$  est le groupe de dimension  $(n-2)$  dont une base est constituée des classes fondamentales des nappes  $(M_k)_{1 \leq k \leq r}$  descendantes des points critiques d'indice  $(n-2)$ . De même pour  $H_{n-3}(W_{n-3}, V)$  dont une base est représentée par les nappes descendantes  $(N_j)_{1 \leq j \leq s}$ . Dans la suite exacte du triple  $(W, W_{n-3}, V)$ , la nullité de  $H_*(W, V)$  prouve que le seul homomorphisme non nul:

$$\partial: H_{n-2}(W, W_{n-3}) \rightarrow H_{n-3}(W_{n-3}, V)$$

est un isomorphisme. On en déduit d'abord que  $r = s$ ; d'autre part, d'après (paragraphe 1, n° 2.4), sur les bases canoniques,  $\partial$  s'exprime par la matrice des nombre d'intersection  $(bM_k \cdot bN'_j)$ : cette matrice est inversible.

Si l'on note  $W'_{n-3}$  la tranche de  $W$  située au-dessus de  $V_{n-3}$ , on calcule  $H_*(W, V')$  à l'aide de la suite exacte du triple  $(W, W'_{n-3}, V')$ . L'homomorphisme  $H_3(W, W'_{n-3}) \rightarrow H_2(W'_{n-3}, V')$  qui s'exprime par la transposée de la matrice précédente est inversible; d'où la nullité de  $H_*(W, V')$ .

Plus généralement, avec des points critiques en tous indices, on peut montrer que  $H_*(W, V)$  est l'homologie du complexe  $(H_q(W_q, W_{q-1}); \partial_q)_q$ ; et  $H_*(W, V')$  l'homologie du complexe transposée.

-----

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.	3
CHAPITRE I.    TRANSVERSALITÉ	5
CHAPITRE II.   FONCTION DE MORSE SUR UNE TRIADE	6
1 . Triades sans point critique.	6
2 . Points critiques.	9
3 . Nappes.	12
4 . Un lemme utile.	17
CHAPITRE III.   CROISEMENTS ET NAISSANCES	19
1 . Chemin élémentaire descendant.	19
2 . Fonction de Morse ordonnée sur une triade.	20
3 . Modèle de naissance,	21
4 . Collision et cancellation de deux points critiques.	22
CHAPITRE IV.   DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DU $h$ -COBORDISME	28
1 . Triades dont tous les points critiques ont même indice.	28
2 . Relations homologiques et homotopiques dans une triade ordonnée.	33
3 . Élimination des points critiques d'indice 0 et 1.	34
4 . Élimination des points critiques d'indice $i$ ( $2 \leq i \leq n - 4$ ).	37
5 . Conclusion.	39

-:-:-:-:-