Math. Ann. 201, 239—264 (1973)

Die Signatur von Flächenbündeln

Werner Meyer

Einleitung

In der Arbeit [3] von Chern, Hirzebruch und Serre wurde gezeigt, daß die Signatur $\tau(E(\xi))$ des Totalraumes $E(\xi)$ eines Faserbündels ξ, dessen Faser F und Basis X kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind, gleich $\tau(F)\,\tau(X)$ ist, falls $\pi_1 X$ trivial auf $\mathrm{H}^*(F, \mathbb{Q})$ operiert. Kodaira [10] und Atiyah [1] zeigten sodann, daß die letztere Voraussetzung nicht entbehrlich ist. Sie gaben dort ein Beispiel eines Flächenbündels $\xi = (E, X, p, F, G)$ an, für welches X bzw. F eine kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht 129 bzw. 6 und $\tau(E) = 2^8 \neq \tau(X)\,\tau(F) = 0$ ist. Dieses und andere Beispiele wurden erneut von Hirzebruch in [7] betrachtet, der die Ergebnisse von [10] und [1] verallgemeinerte.

In dieser Arbeit wird allgemeiner die Signatur von Flächenbündeln über Flächen mit Strukturgruppe

$$G = \mathrm{Diff}^+(F) \quad \text{mit der } C^\infty\text{-Topologie bzw.}$$
$$G = \mathrm{Aut}^+(F) \quad \text{mit der } CO\text{-Topologie}$$

untersucht. Eine wichtige Rolle spielt hierbei die Struktur der Teichmüller-Gruppe $\Gamma_h := \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Htp}}(F) \cong \mathrm{Aut}^+(\pi_1 F)/\mathrm{Inn}(\pi_1 F)$, wobei $h = g(F)$ das Geschlecht der Faser ist. In den genannten Fällen ist $\Gamma_h \cong G/G_0$. Wir zeigen, daß für $g(X) \geqq 1$ zu jedem Homomorphismus

$$\chi : \pi_1 X \to \Gamma_h \cong \pi_1 BG = \pi_0 G$$

ein Flächenbündel $\xi = (E, X, p, F, G)$ existiert, für welches χ ein klassifizierender Homomorphismus, d. h. $f_* = \chi$ ist, wobei $f: X \to BG$ eine klassifizierende Abbildung für das zu E assoziierte G-Prinzipalbündel ist. Weiter konstruieren wir einen Kozykel

$$\tau_h : \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

und zeigen, daß

$$\tau(E) = -\langle \chi^* \sigma^* [\tau_h], \omega_X \rangle$$

ist. Dabei ist $\sigma : \Gamma_h \to \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z})$ die kanonische Projektion, ferner ist (wegen $g(X) \geqq 1$) $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^2(\pi_1 X, \mathbb{Z})$ und σ^*, χ^* sind die durch σ und χ induzierten Homomorphismen in der Kohomologie von Gruppen.

Daraus schließen wir, daß die Menge der auftretenden Signaturen $\tau(E)$ bei festem Geschlecht h der Faser gleich $\operatorname{Im}(\hat{k})$ ist, wobei $\hat{k}$ das Bild von $k=\sigma^*[\tau_h]$ in der exakten Sequenz

$$0 \to \operatorname{Ext}(\mathrm{H}_1(\Gamma_h, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\Gamma_h, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\wedge} \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_2(\Gamma_h, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0$$

ist. Mittels der bekannten Relationen für Γ_h läßt sich dann zeigen, daß

$$\begin{array}{llll} \operatorname{Im}(\hat{k}) = 0, & \operatorname{ord}(k) = 3 & \text{für} & h = 1, \\ \operatorname{Im}(\hat{k}) = 0, & \operatorname{ord}(k) = 5 & \text{für} & h = 2 \quad \text{und} \\ \operatorname{Im}(\hat{k}) = 4\mathbb{Z} & & \text{für} & h \geqq 3 \end{array}$$

ist (vgl. Satz 2). Zusammen mit Formel (14*) von Satz 1 folgt daraus insbesondere, daß $\tau(E)=0$ für $g(X) \leqq 1$ oder $g(F) \leqq 2$ ist. Dies ist in Übereinstimmung mit einem Satz von Kas [9], der dasselbe Ergebnis für Flächenbündel ξ mit *holomorpher* Projektion p erhielt.

Im letzten Paragraphen zeigen wir, daß sich die eindeutig bestimmte 1-Kokette

$$\varphi : \Gamma_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to \tfrac{1}{3}\mathbb{Z}$$

mit $\delta\varphi = \tau_1$ mittels Dedekind-Summen darstellen läßt. Dieses Ergebnis läßt sich auch mit Hilfe der Auflösung gewisser Singularitäten von 2-dimensionalen komplexen Räumen ableiten, welche als Umgebungsränder Torusbündel über S^1 haben.

§ 1. Flächenbündel über Flächen

Sei F_h eine kompakte orientierte Fläche ohne Rand vom Geschlecht h. Wir betrachten orientierte Flächenbündel $\xi=(E, X, p, F_h, G)$, wobei X eine zusammenhängende kompakte orientierte Fläche mit Rand ∂X und $G \subsetneqq \operatorname{Aut}^+(F_h)$ eine Untergruppe der Gruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen von F_h ist. Es ist bekannt (vgl. [5], [6]), daß für $h \geqq 2$ und

$$\begin{array}{ll} G = \operatorname{Aut}^+(F_h) & \text{mit der } CO\text{-Topologie} \quad \text{bzw.} \\ G = \operatorname{Diff}^+(F_h) = \operatorname{Diff}(F_h) \cap \operatorname{Aut}^+(F_h) & \text{mit der } C^\infty\text{-Topologie} \end{array}$$

die Zusammenhangskomponente G_0 des Einselementes schwach-zusammenziehbar (d. h. $\pi_i(G_0)=0$ für $i \geqq 0$) bzw. zusammenziehbar ist. Ferner gilt in beiden Fällen für beliebiges h (vgl. [2, 4, 16, 18]):

$$G/G_0 \cong \operatorname{Aut}^+(\pi_1 F_h)/\operatorname{Inn}(\pi_1 F_h) \cong \operatorname{Aut}^+_{\mathrm{Htp}}(F_h).$$

Hierbei ist $\Gamma_h := \operatorname{Aut}^+_{\mathrm{Htp}}(F_h)$ die Gruppe der Homotopieklassen der orientierungserhaltenden Homotopieäquivalenzen von F_h mit sich selbst und heißt die Teichmüller-Gruppe zum Geschlecht h. Im folgenden nehmen wir an, daß $h \geqq 1$ und $X \neq S^2$ ist. Für die Untersuchung der Signatur $\tau(E)$ des Totalraumes sind die letzten Einschränkungen unwesentlich, da in den ausgeschlossenen Fällen $\tau(E)=0$ ist. Die Signatur hängt nämlich nur von der Signatur einer Bilinearform auf $\mathrm{H}^1(X, \partial X; \underline{\mathscr{H}^1(F_h, \mathbb{R})})$ ab, und diese Gruppe ist in den ausgeschlossenen Fällen Null (vgl. [14]).

Aus $X \neq S^2$ folgt, daß die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X zusammenziehbar und daher X ein klassifizierender Raum für $\pi_1 X$ ist. Zu ξ gehört eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte klassifizierende Abbildung

$$f: X \to BG \tag{1}$$

und damit auch ein bis auf einen inneren Automorphismus von Γ_h eindeutig bestimmter Homomorphismus

$$f_*: \pi_1 X \to \pi_1 BG \cong \pi_0 G \cong \Gamma_h. \tag{1*}$$

Wir zeigen nun, daß umgekehrt zu jedem Homomorphismus $\chi: \pi_1 X \to \Gamma_h$ eine stetige Abbildung (1) mit $f_* = \chi$ existiert. Sei hierzu $i: X^1 \subsetneqq X$ die Inklusion des Einsskeletts von X, $i_*: \pi_1 X^1 \to \pi_1 X$ der induzierte Homomorphismus. Offensichtlich gibt es eine stetige Abbildung $g: X^1 \to BG$ mit $g_* = \chi \circ i_*$. Da die anheftende Abbildung $S^1 \to X^1$ der einzigen 2-Zelle von $X = X^2$ gerade der einzigen definierenden Relation von $\pi_1 X$ entspricht, läßt sich g offensichtlich durch ein $f: X^2 \to BG$ über X faktorisieren, und es ist klar, daß $f_* = \chi$ ist. Es gibt somit zu jedem solchen Homomorphismus χ ein Flächenbündel $\xi = (E, X, p, F_h, G)$ mit $E = f^* EG \times_G F_h$, wobei $f: X \to BG$ eine stetige Abbildung mit $f_* = \chi$ ist.

Jeder Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}^+(\pi_1 F_h)$ induziert offenbar einen Automorphismus φ_* von $\mathrm{H}_1(F_h, \mathbb{Z}) = \pi_1 F_h / [\pi_1 F_h, \pi_1 F_h]$, der die Schnittform auf $\mathrm{H}_1(F_h, \mathbb{Z})$ invariant läßt. Da die inneren Automorphismen von $\pi_1 F_h$ auf $\mathrm{H}_1(F_h, \mathbb{Z})$ trivial operieren, erhält man auch einen Homomorphismus

$$\sigma: \Gamma_h = \mathrm{Aut}^+(\pi_1, F_h)/\mathrm{Inn}(\pi_1 F_h) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H}_1(F_h, \mathbb{Z}), \circ) =: \mathrm{Sp}_h,$$

der nach [11], Section 3.7 surjektiv ist. Es ist $\mathrm{Sp}_h \cong \mathrm{Sp}_h(2h, \mathbb{Z})$, wobei $\mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z})$ die (eigentliche) unimodulare symplektische Gruppe ist. Der Kern $N_h := \mathrm{Ker}(\sigma)$ dieses Homomorphismus besteht aus allen äußeren „Automorphismen“, die auf der Homologie von F_h trivial operieren. Wir werden zeigen, daß $\tau(E)$ nur von $\sigma \circ \chi$ abhängt.

Zu jedem Homomorphismus

$$\varphi: \pi_1 X \to \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z})$$

gehört ein lokales Koeffizientensystem

$$\Gamma := \tilde{X} \times_{\pi_1 X} \mathbb{R}^{2h}$$

mit schiefsymmetrischer regulärer Paarung

$$\Gamma \oplus \Gamma \to \underline{\mathbb{R}} = X \times \mathbb{R},$$

wobei $\pi_1 X$ vermöge φ auf $\mathbb{R}^{2h}$ operiert. Ein solches Koeffizientensystem induziert eine symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{H}^1(X, \partial X; \Gamma)$, deren Signatur mit $\tau(X; \Gamma)$ bezeichnet wird (vgl. [14]). Weiter wurde gezeigt, daß $\tau(X; \Gamma)$ die gleichen Bordismus- und Additivitätseigenschaften wie die gewöhnliche Signatur hat. Somit genügt es, $\tau(X; \Gamma)$ für den Fall zu berechnen, daß $X = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \mathring{D}_i^2$ eine dreifach gelochte 2-Sphäre ist.

Es sei noch ohne Beweis erwähnt, daß im Fall $\partial X = \emptyset$ die additive Struktur von $\mathrm{H}_*(E, \mathbb{Z})$ durch den Homomorphismus $\chi: \pi_1 X \to \Gamma_h$ vollständig bestimmt ist.

§ 2. Der Kozykel τ_h

Es sei $X = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \mathring{D}_i^2$ die dreifach gelochte orientierte 2-Sphäre und Γ ein lokales Koeffizientensystem auf X mit Strukturgruppe $\mathrm{Sp}(2h; L)$ und Halm $\mathbb{R}^{2h}$, wobei $L \subsetneqq \mathbb{R}$ ein Unterring mit Einselement ist. Da $\pi_1 X \cong \langle a, b, c \mid abc = 1 \rangle$ ist, wobei a, b, c den drei Randkurven $-\partial D_i^2$ von X entsprechen, ist Γ durch zwei beliebig wählbare Elemente $\alpha = \chi(a)$, $\beta = \chi(b)$ von $\mathrm{Sp}(2h; L)$ bestimmt. Hierbei ist $\chi: \pi_1 X \to \mathrm{Sp}(2h; L)$ ein klassifizierender Homomorphismus für Γ. Sei

$$(\ ,\ ): \mathrm{H}^1(X, \partial X; \Gamma) \times \mathrm{H}^1(X, \partial X; \Gamma) \to \mathbb{R} \tag{2}$$

die *symmetrische* Bilinearform, die durch die reguläre schiefsymmetrische Paarung $\Gamma \oplus \Gamma \to \underline{\mathbb{R}} = X \times \mathbb{R}$ induziert wird. Letztere wird durch die schiefsymmetrische Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{R}^{2h} \times \mathbb{R}^{2h} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{h} (x_i y_{i+h} - y_i x_{i+h}) \tag{3}$$

auf $\Gamma = \tilde{X} \times_{\pi_1 X} \mathbb{R}^{2h}$ induziert.

Mittels einer Simplizialzerlegung von $(X, \partial X)$ findet man leicht, daß

$$\mathrm{H}^1(X, \partial X; \Gamma) \cong V_{\alpha,\beta} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2h} \oplus \mathbb{R}^{2h} \mid (\alpha^{-1} - 1)x + (\beta - 1)y = 0\} \tag{4}$$

ist und daß unter diesem Isomorphismus die Bilinearform $-(\ ,\ )$ in

$$\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta}: V_{\alpha,\beta} \times V_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R} \ \text{mit} \ \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\alpha,\beta} = \langle x_1 + y_1, (1-\beta) y_2 \rangle \tag{5}$$

übergeht (vgl. [14]). Hieraus folgt offenbar

$$-\tau(X;\Gamma)=\tau_h(\alpha,\beta):=\operatorname{sign}(V_{\alpha,\beta},\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta})\,. \tag{6}$$

Aus der Additivität der Signatur $\tau(X;\Gamma)$ bei Verklebung längs ganzer Randkomponenten leitet man leicht die Kozykeleigenschaft

$$\tau_h(\alpha,\beta)+\tau_h(\alpha\beta,\gamma)=\tau_h(\alpha,\beta\gamma)+\tau_h(\beta,\gamma) \tag{7}$$

der Funktion τ_h ab. Man betrachte hierzu über der vierfach gelochten 2-Sphäre $X'=S^2\setminus\bigcup_{i=1}^{4}\mathring{D}_i^2$ ein lokales Koeffizientensystem Γ'. Wegen $\pi_1 X'\cong\langle a,b,c,d\,|\,abcd=1\rangle$ ist Γ' durch drei beliebig wählbare Elemente $\alpha=\chi(a)$, $\beta=\chi(b)$ und $\gamma=\chi(c)$ von $\mathrm{Sp}(2h;L)$ bestimmt. Zerschneidet man X' auf zwei verschiedene Weisen jeweils in zwei dreifach gelochte 2-Sphären, so erhält man durch Vergleich der Signaturen die Gleichung (7). Weiter leitet man aus der Definition von τ_h und den Eigenschaften der Signatur leicht folgende Eigenschaften von τ_h her:

$$\alpha\beta\gamma=1\Rightarrow\tau_h(\alpha,\beta)=\tau_h(\beta,\gamma)=\tau_h(\gamma,\alpha)\,, \tag{8}$$

$$\tau_h(\alpha,1)=\tau_h(\alpha,\alpha^{-1})=0\,, \tag{9}$$

$$\tau_h(\beta,\alpha)=\tau_h(\alpha,\beta)\,, \tag{10}$$

$$\tau_h(\alpha^{-1},\beta^{-1})=-\tau_h(\alpha,\beta)\,, \tag{11}$$

$$\tau_h(\gamma\alpha\gamma^{-1},\gamma\beta\gamma^{-1})=\tau_h(\alpha,\beta)\,. \tag{12}$$

Sei weiter

$$j:\mathrm{Sp}(2h_1;L)\times\cdots\times\mathrm{Sp}(2h_r;L)\to\mathrm{Sp}(2h;L)\qquad\left(h=\sum_{i=1}^{r}h_i\right)$$

der durch

$$j\left(\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}a_r & b_r\\ c_r & d_r\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1 & & 0 & b_1 & & 0\\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_r & 0 & & b_r\\ c_1 & & 0 & d_1 & & 0\\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & c_r & 0 & & d_r\end{pmatrix}$$

definierte Monomorphismus (a_i, b_i, c_i und d_i sind gewisse h_i-reihige Matrizen). Dann ist leicht zu sehen, daß gilt:

$$\begin{aligned} j^* \tau_h((\alpha_1, \ldots, \alpha_r), (\beta_1, \ldots, \beta_r)) &= \tau_h(j(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), j(\beta_1, \ldots, \beta_r)) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \tau_{h_i}(\alpha_i, \beta_i) . \end{aligned} \tag{13}$$

Insbesondere ist τ_h ein stabiler Kozykel, d. h. τ_h liegt im Bild von

$$H^2(\varinjlim \mathrm{Sp}(2n; L), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Sp}(L), \mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Sp}(2h; L), \mathbb{Z}) .$$

Es gilt nun

Satz 1. *Sei X eine zusammenhängende kompakte orientierte Fläche mit Rand $\partial X = \bigvee_{i=1}^{r} S_i^1$ und Γ ein lokales Koeffizientensystem auf X mit Strukturgruppe $\mathrm{Sp}(2h; L)$. Ferner sei*

$$\pi_1 X = \left\langle a_i, b_i, c_j \,\middle|\, i = 1, \ldots, g, j = 1, \ldots, r; \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} c_j = 1 \right\rangle$$

eine Darstellung von $\pi_1 X$ und $\chi: \pi_1 X \to \mathrm{Sp}(2h; L)$ ein klassifizierender Homomorphismus von Γ, $\alpha_i = \chi(a_i)$, $\beta_i = \chi(b_i)$ und $\gamma_j = \chi(c_j)$. Sei weiter $\tilde{\omega}_k$ das Produkt der ersten k Faktoren und ω_k der k-te Faktor in dem Produkt

$$\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^{r} \gamma_j = 1 \qquad (k = 1, \ldots, 4g + r)$$

sowie $\tilde{\omega}_0 = 1$. Dann ist

$$\tau(X; \Gamma) = - \sum_{i=1}^{4g+r} \tau_h(\tilde{\omega}_{i-1}, \omega_i) . \tag{14}$$

Ist $\partial X = \emptyset$, also $r = 0$ und setzt man $\varkappa_i = [\alpha_i, \beta_i]$, so ist

$$\tau(X; \Gamma) = \sum_{i=1}^{g} \tau_h(\varkappa_i, \beta_i) - \sum_{i=2}^{g-1} \tau_h\left(\prod_{j=1}^{i-1} \varkappa_j, \varkappa_i\right), \tag{14*}$$

insbesondere also $\tau(X; \Gamma) = 0$ für $g = g(X) = 1$.

Beweis. Seien $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_j$ Jordankurven in X, die die Klassen $a_i, b_i, c_j \in \pi_1 X$ repräsentieren und X in ein Polygon mit $4g + r$ Randkurven $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{a}_i^{-1}, \tilde{b}_i^{-1}, \tilde{c}_j$ und r Kreisringe $Y_1, \ldots, Y_r$ zerlegen. Man zerschneide dieses Polygon durch Strecken, die von dem Anfangspunkt von $\tilde{a}_1$ zu den übrigen Eckpunkten gehen, in $4g + r - 2$ Dreiecke. Die Bilder dieser Dreiecke in X sind dann dreifach gelochte 2-Sphären $X_1, \ldots, X_{4g+r-2}$. Sei $\Gamma_i = \Gamma | X_i$. Da für einen Kreisring $\tau(Y_i; \Gamma | Y_i) = 0$ ist, folgt

$$\tau(X; \Gamma) = \sum_{i=1}^{4g+r-2} \tau(X_i; \Gamma_i) . \tag{15}$$

Offenbar gehören zu den Γ_i klassifizierende Homomorphismen $\chi_i : \pi_1 X_i = \langle \tilde{c}_i, \tilde{d}_i \rangle \to \mathrm{Sp}(2h; L)$ mit $\chi_i(\tilde{c}_i) = \tilde{\omega}_i$, $\chi_i(\tilde{d}_i) = \omega_{i+1}$. Wegen $\tau_h(\tilde{\omega}_0, \omega_1) = \tau_h(1, \omega_1) = 0$ und $\tau_h(\tilde{\omega}_{4g+r-1}, \omega_{4g+r}) = \tau_h(\omega_{4g+r}^{-1}, \omega_{4g+r}) = 0$ liefert die Einsetzung von $-\tau_h(\tilde{\omega}_i, \omega_{i+1})$ für $\tau(X_i; \Gamma_i)$ in (15) die Behauptung (14).

Die zweite Gl. (14*) ergibt sich durch Umformen der ersten mittels der Eigenschaften (7)–(12). Man hat hierzu lediglich zu zeigen, daß für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Sp}(2h; L)$ gilt:

$$\begin{aligned} &\tau_h(\gamma, \alpha) + \tau_h(\gamma\alpha, \beta) + \tau_h(\gamma\alpha\beta, \alpha^{-1}) + \tau_h(\gamma\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \\ &\quad = \tau_h(\gamma, [\alpha, \beta]) - \tau_h([\alpha, \beta], \beta). \end{aligned} \tag{16}$$

Die linke Seite von (16) läßt sich mittels (7) umformen zu

$$\tau_h(\gamma, [\alpha, \beta]) + \tau_h(\alpha, \beta) + \tau_h(\alpha\beta, \alpha^{-1}) + \tau_h(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta^{-1}).$$

Aus (7), (9), (10) und (12) folgt:

$$\begin{aligned} \tau_h(\alpha, \beta) + \tau_h(\alpha\beta, \alpha^{-1}) &= \tau_h(\beta, \alpha) + \tau_h(\beta\alpha, \alpha^{-1}) \\ &= \tau_h(\beta, 1) + \tau_h(\alpha, \alpha^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus (8), (10) und (11):

$$\tau_h(\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = \tau_h(\beta^{-1}, [\alpha, \beta]^{-1}) = -\tau_h([\alpha, \beta], \beta).$$

Dies beweist (16) und damit auch (14*).

Sei nun $\partial X = \emptyset$ und das Geschlecht $g = g(X) \geqq 1$. Dann ist mit $\pi := \pi_1 X = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, g_g \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$:

$$\mathbb{Z} \cong \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^2(B\pi, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^2(\pi, \mathbb{Z}).$$

Da π keine Elemente der Ordnung 2 besitzt, läßt sich jede Kohomologieklasse k von $\mathrm{H}^2(\pi, \mathbb{Z})$ durch einen Kozykel $z : \pi \times \pi \to \mathbb{Z}$ mit

$$z(x, 1) = z(1, x) = 0 \tag{17}$$

und

$$z(x, x^{-1}) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \pi \tag{18}$$

repräsentieren. Ist z ein Kozykel mit (17) und ω_X die Orientierungsklasse von X, ist ferner $\tilde{w}_j$ bzw. w_j das Produkt der ersten j Faktoren bzw. der j-te Faktor in dem Produkt $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]$, $(j = 1, \ldots, 4g)$, so ist

$$\langle [z], \omega_X \rangle = \sum_{j=1}^{4g} z(\tilde{w}_{j-1}, w_j) - \sum_{i=1}^{g} (z(a_i, a_i^{-1}) + z(b_i, b_i^{-1})). \tag{19}$$

Beweis. Man zeigt leicht, daß die rechte Seite von (19) nur von $[z]$ abhängt und somit einen Homomorphismus $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ liefert.

Ebenso liefert die linke Seite einen solchen Homomorphismus. Nun ist $H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi,\mathbb{Z})$ und man zeigt leicht, daß das $\cup$-Produkt

$$\cup : H^1(X,\mathbb{Z}) \times H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$$

durch

$$\varphi \cup \psi = [z] \quad \text{mit} \quad z(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y) \quad \text{für} \quad \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\pi,\mathbb{Z}),\ x, y \in \pi$$

gegeben wird. Ist $a_1^*, \ldots, a_g^*, b_1^*, \ldots, b_g^*$ eine zu $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ duale Basis von $H^1(X,\mathbb{Z})$ und $a_i^* \cup b_i^* = [z]$, so ist einerseits $\langle a_i^* \cup b_i^*, \omega_X \rangle = 1$ und andererseits

$$\sum_{j=1}^{4g} z(\tilde{w}_{j-1}, w_j) - \sum_{i=1}^{g} \left(z(a_i, a_i^{-1}) + z(b_i, b_i^{-1}) \right) = 1 .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Der Vergleich der obigen Formel mit der Formel (14) von Satz 1 liefert nun:

$$\tau(X;\Gamma) = -\langle \chi^*[\tau_h], \omega_X \rangle , \tag{20}$$

wobei $\chi^* : H^2(\mathrm{Sp}(2h;L),\mathbb{Z}) \to H^2(\pi,\mathbb{Z})$ der durch $\chi : \pi \to \mathrm{Sp}(2h;L)$ induzierte Homomorphismus ist. Der Vergleich mit der Signaturformel aus [14] ergibt daher:

$$\chi^*[\tau_h] = 4 c_1(\tilde{\Gamma}) .$$

Dabei ist $\tilde{\Gamma}$ das Γ zugeordnete komplexe Vektorraumbündel mit der komplexen Struktur J, die durch die Bedingung:

$$\langle \cdot, J \cdot \rangle \ \text{ist eine Metrik auf}\ \tilde{\Gamma}$$

gegeben ist. Somit ist stets $\tau(X;\Gamma) \equiv 0 \bmod 4$.

Da $\tau(X;\Gamma)$ und $\tau(E)$ bordismusinvariant sind, induzieren die Zuordnungen

$$(X,\Gamma) \mapsto \tau(X;\Gamma) \quad \text{bzw.} \quad E \mapsto \tau(E)$$

bei festem Geschlecht $h \geqq 1$ der Faser F_h Homomorphismen

$$\Omega_2(B\,\mathrm{Sp}(2h;L)) \xrightarrow{\tau'} \mathbb{Z} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_2(B\Gamma_h) \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z} .$$

Im Fall $L = \mathbb{Z}$ induziert ferner der Homomorphismus $\sigma : \Gamma_h \to \mathrm{Sp}(2h;\mathbb{Z})$ auch einen Homomorphismus

$$\Omega_2(B\sigma) : \Omega_2(B\Gamma_h) \to \Omega_2(B\,\mathrm{Sp}(2h;\mathbb{Z})) ,$$

und man erhält ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_2(B\Gamma_h) \arrow[rr, "\Omega_2(B\sigma)"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \Omega_2(B\,\mathrm{Sp}(2h;\mathbb{Z})) \arrow[dl, "\tau'"] \\
& \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

Im nächsten Abschnitt entwickeln wir eine Methode zur Berechnung von $\mathrm{Im}(\tau)$ und $\mathrm{Im}(\tau')$.

§ 3. Ein Berechnungsverfahren für $\mathrm{Im}(\hat{k})$

Sei G eine diskrete Gruppe und $k \in \mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z})$, welches durch einen Kozykel z mit

$$z(x, 1) = 0 \tag{17*}$$

und

$$z(x, x^{-1}) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in G \tag{18*}$$

repräsentiert werden kann.

Die Bedingung (17*) läßt sich stets erfüllen, während (18*) nur der Einfachheit halber aufgenommen wurde und durch geeignete Abänderung der folgenden Überlegungen eliminiert werden kann. Ist X eine zusammenhängende unberandete kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht $g \geqq 1$ und

$$\chi : \pi_1 X = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle \to G$$

ein Homomorphismus, so ist dem Paar (X, χ) die ganze Zahl $\langle \chi^* k, \omega_X \rangle$ zugeordnet. Wir wollen zeigen, daß die Menge dieser ganzen Zahlen (bei variablem X und χ) das Bild eines Homomorphismus

$$\hat{k} : \mathrm{H}_2(G, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \tag{21}$$

ist. $\hat{k}$ ist hierbei das Bild von k in der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_2(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0\,. \tag{22}$$

Sei $1 \to R \to F \xrightarrow{\pi} G \to 1$ eine exakte Sequenz von Gruppen, wobei F eine freie Gruppe mit dem freien Erzeugendensystem $E = \{e_i \mid i \in I\}$ ist. Sei weiter auch $1 \to \tilde{R} \to \tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \pi_1 X \to 1$ eine exakte Sequenz mit $\tilde{F} = \langle \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_g \rangle$, $\tilde{\pi}(\tilde{a}_i) = a_i$, $\tilde{\pi}(\tilde{b}_i) = b_i$, $(i = 1, \ldots, g)$. Dann ist $\tilde{R}$ der von

$$\tilde{r} := \prod_{i=1}^{g} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$$

erzeugte Normalteiler von $\tilde{F}$. Ferner ist (vgl. [8, 11])

$$\mathrm{H}_2(G, \mathbb{Z}) \cong R \cap [F, F]/[R, F]\,.$$

Ist nun χ ein Homomorphismus von $\pi_1 X$ in G, so gibt es, da π surjektiv und $\tilde{F}$ frei ist, einen Homomorphismus $\tilde{\chi} : \tilde{F} \to F$ mit $\pi \circ \tilde{\chi} = \chi \circ \tilde{\pi}$. Dann muß aber offenbar $\tilde{\chi}(\tilde{r}) \in R \cap [F, F]$ sein. Das Element $\tilde{\chi}(\tilde{r})\,[R, F] \in R \cap [F, F]/[R, F] \cong \mathrm{H}_2(G, \mathbb{Z})$ hängt nur von χ und nicht von der Wahl von $\tilde{\chi}$ mit

$\pi \circ \tilde{\chi} = \chi \circ \tilde{\pi}$ ab. Umgekehrt läßt sich zu $\tilde{\chi}: \tilde{F} \to F$ genau dann ein $\chi: \pi_1 X \to G$ mit $\pi \circ \tilde{\chi} = \chi \circ \tilde{\pi}$ finden, wenn $\tilde{\chi}(\tilde{r}) \in R \cap [F, F]$ ist. Weiter sieht man leicht, daß zu jedem $r \in R \cap [F, F]$ ein $g \geqq 1$ und ein $\tilde{\chi}: \tilde{F} \to F$ mit $\tilde{\chi}(\tilde{r}) = r$ existiert. Man stelle hierzu r als Produkt von g Kommutatoren dar:

$$r = \prod_{i=1}^{g} [x_i, y_i] \quad \text{mit} \quad x_i, y_i \in F$$

und definiere $\tilde{\chi}$ durch $\tilde{\chi}(\tilde{a}_i) = x_i$, $\tilde{\chi}(\tilde{b}_i) = y_i$, $(i = 1, \ldots, g)$.

Wir zeigen nun, daß $\langle \chi^* k, \omega_X \rangle$ nur von $r[R, F] = \tilde{\chi}(\tilde{r})[R, F]$ abhängt. Hierzu konstruieren wir einen Homomorphismus (21) und zeigen:

$$\langle \chi^* k, \omega_X \rangle = \hat{k}(\tilde{\chi}(\tilde{r})[R, F]). \tag{23}$$

Sei $\tilde{z} = z \circ (\pi \times \pi): F \times F \to \mathbb{Z}$ der induzierte Kozykel. Wir definieren eine Abbildung

$$c: F \to \mathbb{Z} \tag{24}$$

mit $\delta c = -\tilde{z}$ wie folgt: Sei $x = \prod_{i=1}^{m} x_i$ mit $x_i \in E \cup E^{-1}$. Sei ferner $\tilde{x}_j$ das Produkt der ersten j Faktoren in dieser Darstellung von x. Dann sei

$$c(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{z}(\tilde{x}_{j-1}, x_j).$$

Aus (18*) folgt leicht, daß $c(x)$ nur von x und nicht von der Darstellung von x als Potenzprodukt in den Erzeugenden abhängt. Weiter folgt leicht, daß $\delta c = -\tilde{z}$, d. h.

$$c(xy) = c(x) + c(y) + \tilde{z}(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in F \tag{25}$$

gilt. Hieraus folgt wegen $\tilde{z}(x, y) = 0$ für $x \in R$ oder $y \in R$, daß $c|R: R \to \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus ist, der auf jeder Konjugiertenklasse $K \subseteqq R$ von F konstant ist. Somit ist $[R, F] \subseteqq \operatorname{Ker}(c|R)$. Schließlich sei (21) der von $c|R$ auf $H_2(G, \mathbb{Z}) = R \cap [F, F]/[R, F]$ induzierte Homomorphismus. Man rechnet nach, daß $\hat{k}$ nur von $k = [z]$ abhängt. Aus (19), (18*) und der Definition von $\hat{k}$ folgt sofort (23).

Die Gruppe $R/[R, F]$ wird von den Elementen $r_j[R, F]$ erzeugt, wenn R *als Normalteiler* von den $r_j (j \in J)$ erzeugt wird. Zur Berechnung des von $c|R$ induzierten Homomorphismus $\gamma: R/[R, F] \to \mathbb{Z}$ genügt somit die Kenntnis der Werte $c(r_j)$, $(j \in J)$. Seien $e_i^*: F \to \mathbb{Z}$ die zu den Erzeugenden e_i gehörenden Exponentenhomomorphismen, d. h., es sei $e_i^*(x) =$ Exponentensumme von e_i in einer Darstellung von

$$x = \prod_{k=1}^{m} x_k \quad \text{mit} \quad x_k \in E \cup E^{-1}.$$

Offenbar ist

$$x \in [F,F] \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I} e_i^*(x)=0\,.$$

Hieraus folgt nun sofort:

$$\operatorname{Im}(\hat{k})=\Big\{\sum_{j\in J} n_j c(r_j)\,|\,n_j\in\mathbb{Z},\ \text{fast alle}\ n_j=0,\ \bigwedge_{i\in I}\sum_{j\in J} n_j e_i^*(r_j)=0\Big\}. \tag{26}$$

Sei nun I eine endliche Menge. Dann gilt:

$$\operatorname{Im}(\hat{k})=0 \Leftrightarrow c|R \text{ ist linear abhängig von den } e_i^*|R, (i\in I) \Leftrightarrow \operatorname{ord}(k)<\infty\,. \tag{27}$$

Genauer gilt für $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

$$\operatorname{ord}(k)|n \Leftrightarrow \text{Es gibt } n_i\in\mathbb{Z}, (i\in I) \text{ mit } nc|R=\sum_{i\in I} n_i e_i^*|R\,. \tag{28}$$

Beweis. Sei $\tilde{c}: G\to \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ eine 1-Kokette mit $\delta\tilde{c}=-z$. Dann ist $\tilde{c}\circ\pi$ eine 1-Kokette mit $\delta(\tilde{c}\circ\pi)=-\tilde{z}=\delta c$. Somit ist $\tilde{c}\circ\pi-c: F\to\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus, also für geeignete $n_i\in\mathbb{Z}$, $(i\in I)$:

$$\tilde{c}\circ\pi - c = -\frac{1}{n}\sum_{i\in I} n_i e_i^*\,.$$

Wegen $\tilde{c}(1)=0$ folgt hieraus $nc|R=\sum_{i\in I} n_i e_i^*|R$.

Umgekehrt folgt aus den Voraussetzungen auf der rechten Seite von (28), daß die Abbildung

$$c_1 := c - \frac{1}{n}\sum_{i\in I} n_i e_i^*$$

sich über π faktorisieren läßt. Wegen $\tilde{z}(x,r)=0$ für $x\in F$, $r\in R$ hat man nämlich

$$\begin{aligned} c_1(xr) &= c(x)+c(r)+\tilde{z}(x,r)-\frac{1}{n}\sum_{i\in I} n_i(e_i^*(x)+e_i^*(r)) \\ &= c(x)-\frac{1}{n}\sum_{i\in I} n_i e_i^*(x) \\ &= c_1(x)\,. \end{aligned}$$

Sei $c_1=\tilde{c}\circ\pi$. Dann ist $\tilde{c}: G\to\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ eine 1-Kokette mit $\delta\tilde{c}=-z$, also $nz\sim 0$ und damit $\operatorname{ord}(k)|n$.

Falls die $e_i^*|R$ linear unabhängig sind, was z. B. für $\#\, G/[G,G]<\infty$ der Fall ist, sind n und die n_i durch die obige Bedingung sowie $n>0$ und

$ggT(n, n_i, (i \in I)) = 1$ eindeutig bestimmt und man erhält $\operatorname{ord}(k) = n$. Diese Voraussetzung ist für $G = \Gamma_h$ erfüllt (vgl. [15] oder auch den Beweis des folgenden Satzes in § 4).

Wir wenden unsere Ergebnisse auf $G = \Gamma_h$ und $z = \tau_h \circ (\sigma \times \sigma)$ an. Es ist bekannt, daß Γ_h von $3h-1$ Elementen erzeugt wird. Ferner sind für Γ_h Relationen bekannt, die für $h \leqq 2$ ein System von definierenden Relationen bilden; dagegen sind für $h \geqq 3$ keine definierenden Relationen für Γ_h bekannt. Die bekannten Relationen führen zu dem folgenden

Satz 2. *Sei $k = \sigma^*[\tau_h] \in \mathrm{H}^2(\Gamma_h, \mathbb{Z})$ und $\hat{k}$ der oben konstruierte Homomorphismus. Dann gilt:*

$$\begin{array}{llll} \operatorname{Im}(\hat{k}) = 0 & \textit{und} \quad \operatorname{ord}(k) = 3 & \textit{für} & h = 1\,, \\ \operatorname{Im}(\hat{k}) = 0 & \textit{und} \quad \operatorname{ord}(k) = 5 & \textit{für} & h = 2\,, \\ \operatorname{Im}(\hat{k}) = 4\mathbb{Z} & & \textit{für} & h \geqq 3\,. \end{array}$$

Hieraus folgt nun unser Hauptergebnis:

Satz 3. 1) *Jedes orientierte Flächenbündel $E \to X$ mit Faser F hat für $g(F) \leqq 2$ und $\partial X = \emptyset$ die Signatur* 0.

2) *Für jedes $h \geqq 3$ und jedes $n \in 4\mathbb{Z}$ gibt es ein Flächenbündel $E \to X$ mit Faser F, $g(F) = h$, $\partial X = \emptyset$ und $\tau(E) = n$.*

§ 4. Beweis von Satz 2

Wir unterscheiden die Fälle $h = 1$ und $h \geqq 2$.

$h = 1$. Da $\pi_1 F_1 = \mathrm{H}_1(F_1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ist, ist $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Bekanntlich besitzt $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die Darstellung

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2 b^{-3} = 1, a^4 = 1 \rangle$$

$$\text{mit} \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\tilde{F} = \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle$, $\tilde{r} = \tilde{a}^2 \tilde{b}^{-3}$, $\tilde{s} = \tilde{a}^4$. Ferner seien $\tilde{a}^*, \tilde{b}^*$ die zu $\tilde{a}, \tilde{b}$ gehörenden Exponentenhomomorphismen. Der Kozykel $z = \tau_1$ hat die Eigenschaften (7)–(12). Hieraus folgt wegen $a^2 = b^3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, daß $z(a^2, b^{-3}) = 0$ ist. Somit ist

$$\begin{aligned} c(\tilde{r}) &= c(\tilde{a}^2) + c(\tilde{b}^{-3}) \\ &= z(a, a) + z(b^{-1}, b^{-1}) + z(b^{-2}, b^{-1}) \\ &= z(a, -1) - z(b, b) - z(b, -1) \end{aligned}$$

und
$$c(\tilde{s}) = c(\tilde{a}^2) + c(\tilde{a}^2)$$
$$= 2z(a, -1).$$

Nun ist $\tau_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, -1\right) = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix}$. Ferner ist $\tau_1(b, b)$ $= \operatorname{sign}(a(b^{-1} - b)) = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$. Hieraus folgt $c(\tilde{r}) = -2$ und $c(\tilde{s}) = 4$ und damit
$$3c|R = 3\tilde{a}^*|R + 4\tilde{b}^*|R. \tag{29}$$

Somit ist $\operatorname{Im}(\widehat{[\tau_1]}) = 0$ und $\operatorname{ord}([\tau_1]) = 3$.

$h \geqq 2$. Sei $F_* = \langle \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_h, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_h \rangle$ und $p_* : F_* \to \pi_1 F_h$ die kanonische Projektion mit $p_*(\tilde{a}_i) = a_i, p_*(\tilde{b}_i) = b_i, (i = 1, \ldots, h)$. Nach [11] und [18] wird jeder Automorphismus φ von $\pi_1 F_h$ von einem Automorphismus $\tilde{\varphi}$ von F_* mit

$$\tilde{\varphi}\left(\prod_{i=1}^{h} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]\right) = \tilde{t} \cdot \left(\prod_{i=1}^{h} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]\right)^{\varepsilon} \cdot \tilde{t}^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{t} \in F_*, \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (*)$$

induziert. Dabei entsprechen die $\varphi \in \operatorname{Aut}^+(\pi_1 F_h)$ gerade den $\tilde{\varphi}$ mit $\varepsilon = 1$. Sei H die Untergruppe der Automorphismen $\tilde{\varphi}$ von F_*, die die Bedingung $(*)$ mit $\varepsilon = 1$ erfüllen und seien $q : H \to \operatorname{Aut}^+(\pi_1 F_h)$ und $\pi_* : \operatorname{Aut}^+(\pi_1 F_h) \to \Gamma_h$ die kanonischen Projektionen. Seien weiter $\tilde{y}_i, \tilde{u}_i, \tilde{z}_j$ $(i = 1, \ldots, h;$ $j = 1, \ldots, h-1)$ die wie folgt definierten Automorphismen von F_*:

$$\tilde{y}_i(\tilde{a}_i) = \tilde{a}_i \tilde{b}_i^{-1}, \quad \text{alle anderen} \quad \tilde{a}_j, \tilde{b}_j \quad \text{fest},$$
$$\tilde{u}_i(\tilde{b}_i) = \tilde{b}_i \tilde{a}_i, \quad \text{alle anderen} \quad \tilde{a}_j, \tilde{b}_j \quad \text{fest},$$
$$\tilde{z}_j(\tilde{a}_j) = \tilde{a}_j \tilde{d}_j, \quad \tilde{z}_j(\tilde{b}_j) = \tilde{d}_j^{-1} \tilde{b}_j \tilde{d}_j, \quad \tilde{z}_j(\tilde{a}_{j+1}) = \tilde{d}_j^{-1} \tilde{a}_{j+1} \quad \text{mit}$$
$$\tilde{d}_j = \tilde{b}_j^{-1} \tilde{a}_{j+1} \tilde{b}_{j+1} \tilde{a}_{j+1}^{-1}, \quad \text{alle anderen} \quad \tilde{a}_k, \tilde{b}_k \quad \text{fest}.$$

Sei G die von diesen Automorphismen erzeugte Untergruppe von $\operatorname{Aut}(F_*)$. Man rechnet leicht aus, daß für die Erzeugenden und damit für alle Elemente von $G(*)$ mit $\tilde{t} = 1$ und $\varepsilon = 1$ gilt. Somit ist $G \subsetneqq H$ und sogar $\pi_* \circ q(G) = \Gamma_h$, da Γ_h von den Bildern $\bar{y}_i, \bar{u}_i$ und $\bar{z}_j$ der $\tilde{y}_i, \tilde{u}_i$ und $\tilde{z}_j$ unter $\pi_* \circ q$ erzeugt wird. Um die Relationen übersichtlicher schreiben zu können, führen wir noch die folgenden Elemente von G ein:

$$\tilde{v}_i = \tilde{y}_i \tilde{u}_i \tilde{y}_i, \qquad \tilde{w}_j = \tilde{y}_j \tilde{u}_j \tilde{z}_j \tilde{u}_{j+1} \tilde{y}_{j+1}, \qquad (i = 1, \ldots, h;\ j = 1, \ldots, h-1),$$
$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{p}_i = \tilde{p}_{i-1} \tilde{s}_i & \text{mit} \quad \tilde{p}_1 = \tilde{v}_1, & \tilde{s}_i = \tilde{y}_{i-1}^{-1} \tilde{z}_{i-1} \tilde{u}_i \tilde{y}_i, \\ \tilde{p}_i^* = \tilde{s}_i^* \tilde{p}_{i-1}^* & \text{mit} \quad \tilde{p}_1^* = \tilde{v}_1, & \tilde{s}_i^* = \tilde{y}_i \tilde{u}_i \tilde{z}_{i-1} \tilde{y}_{i-1}^{-1}, \end{array}\right\} (i = 2, \ldots, h),$$
$$\tilde{t}_k = \tilde{v}_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (\tilde{v}_i^{-3} \tilde{w}_i \tilde{v}_i^{-1}), \qquad \tilde{t} = \tilde{t}_h, \qquad (k = 1, \ldots, h).$$

Sei $F_0 = \langle y_i, u_i, z_j | i=1, \dots, h; j=1, \dots, h-1 \rangle$ und $\pi_0 : F_0 \to \Gamma_h$ die durch $\pi_0(y_i) = \bar{y}_i$, $\pi_0(u_i) = \bar{u}_i$ und $\pi_0(z_j) = \bar{z}_j$ induzierte kanonische Projektion. Die den $\tilde{v}_i, \dots, t$ entsprechenden Elemente in F_0 bzw. Γ_h bezeichnen wir mit $v_i, \dots, t$ bzw. $\bar{v}_i, \dots, \bar{t}$.

Es gelten nun die folgenden Relationen für die $\bar{y}_i, \bar{u}_i$ und $\bar{z}_j$ (vgl. [2]; dort sind allerdings die Relationen unter d) und die Definition von $\bar{t}$ falsch angegeben):

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} &[\bar{y}_i, \bar{y}_j] = 1, && (1 \leqq i < j \leqq h),\\ &[\bar{y}_i, \bar{u}_j] = 1, && (1 \leqq i \leqq h,\ 1 \leqq j \leqq h,\ i \neq j),\\ &[\bar{y}_i, \bar{z}_j] = 1, && (1 \leqq i \leqq h,\ 1 \leqq j \leqq h-1),\\ &[\bar{u}_i, \bar{u}_j] = 1, && (1 \leqq i < j \leqq h),\\ &[\bar{u}_i, \bar{z}_j] = 1, && (1 \leqq i \leqq h,\ 1 \leqq j \leqq h-1,\ j \neq i,\ i+1),\\ &[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = 1, && (1 \leqq i < j \leqq h-1); \end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} &\bar{y}_i \bar{u}_i \bar{y}_i \bar{u}_i^{-1} \bar{y}_i^{-1} \bar{u}_i^{-1} = 1, && (1 \leqq i \leqq h),\\ &\bar{u}_i \bar{z}_i \bar{u}_i \bar{z}_i^{-1} \bar{u}_i^{-1} \bar{z}_i^{-1} = 1, && (1 \leqq i \leqq h-1),\\ &\bar{z}_i \bar{u}_{i+1} \bar{z}_i \bar{u}_{i+1}^{-1} \bar{z}_i^{-1} \bar{u}_{i+1}^{-1} = 1, && (1 \leqq i \leqq h-1); \end{aligned}$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} &\bar{p}_h^{2h+2} = 1,\\ &(\bar{p}_h \bar{p}_h^*)^2 = 1,\\ &[\bar{p}_h \bar{p}_h^*, \bar{y}_1] = 1,\\ &\bar{t}^h = 1,\\ &\bar{p}_k^{2k+2} (\bar{p}_k \bar{p}_k^*)^{-2} = 1, \quad (2 \leqq k \leqq \min(3, h)), \end{aligned}$$

(diese Relationen sind in [2] noch nicht angegeben);

$$\text{d)}\quad \left.\begin{aligned} &\bar{y}_{i+1} \bar{t} \bar{y}_i^{-1} \bar{t}^{-1} = 1,\\ &\bar{u}_{i+1} \bar{t} \bar{u}_i^{-1} \bar{t}^{-1} = 1,\\ &\bar{z}_{j+1} \bar{t} \bar{z}_j^{-1} \bar{t}^{-1} = 1, \end{aligned}\right\} (1 \leqq i \leqq h-1,\ 1 \leqq j \leqq h-2).$$

Dabei hat man für $\bar{p}_h$, $\bar{p}_h^*$ und $\bar{t}$ die oben angegebenen Produkte in den Erzeugenden einzusetzen. Aus den Relationen d) folgt, daß Γ_h schon von den 4 Elementen $\bar{y}_1, \bar{u}_1, \bar{z}_1$ und $\bar{t}$ erzeugt wird. Wir wählen daher statt F_0 die freie Gruppe $F = \langle y_1, u_1, z_1, t \rangle$ und bezeichnen den durch $y_1 \mapsto \bar{y}_1$, $u_1 \mapsto \bar{u}_1$, $z_1 \mapsto \bar{z}_1$ und $t \mapsto \bar{t}$ induzierten Homomorphismus $F \to \Gamma_h$ mit π. Definiert man y_i, u_i und z_i durch

$$y_i = t^{i-1} y_1 t^{1-i}, \quad u_i = t^{i-1} u_1 t^{1-i} \quad \text{und} \quad z_i = t^{i-1} z_1 t^{1-i}, \quad (i = 2, \dots, h),$$

so fallen die Relationen d) weg und einige Relationen werden Folgerelationen von gewissen anderen. Es bleiben die folgenden Relationen zu betrachten:

$$\text{a*)}\quad \left.\begin{aligned} &[\bar{y}_1, \bar{y}_j] = 1,\\ &[\bar{u}_1, \bar{u}_j] = 1,\\ &[\bar{z}_1, \bar{z}_j] = 1, \end{aligned}\right\} \quad (2 \leqq j \leqq [h/2]+1),$$

$$\begin{aligned} &[\bar{y}_1, \bar{u}_j] = 1, \quad && (2 \leqq j \leqq h),\\ &[\bar{y}_1, \bar{z}_j] = 1, && (1 \leqq j \leqq h),\\ &[\bar{u}_1, \bar{z}_j] = 1, && (2 \leqq j \leqq h-1); \end{aligned}$$

$$\text{b*)}\quad \begin{aligned} &\bar{y}_1 \bar{u}_1 \bar{y}_1 \bar{u}_1^{-1} \bar{y}_1^{-1} \bar{u}_1^{-1} = 1,\\ &\bar{u}_1 \bar{z}_1 \bar{u}_1 \bar{z}_1^{-1} \bar{u}_1^{-1} \bar{z}_1^{-1} = 1,\\ &\bar{z}_1 \bar{u}_2 \bar{z}_1 \bar{u}_2^{-1} \bar{z}_1^{-1} \bar{u}_2^{-1} = 1; \end{aligned}$$

c*) $=$ c) und

$$\bar{t}^{-1} \bar{v}_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{h-1} (\bar{v}_i^{-3} \bar{w}_i^3 \bar{v}_i^{-1}) = 1.$$

Hierin sind $\bar{y}_i, \bar{u}_i, \bar{z}_i, (i \geqq 2), \bar{p}_h, \bar{p}_h^*, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ natürlich in den Erzeugenden $\bar{y}_1, \bar{u}_1, \bar{z}_1$ und $\bar{t}$ auszudrücken.

Da $z = \tau_h \circ (\sigma\pi \times \sigma\pi): F \times F \to \mathbb{Z}$ ebenfalls die Gl. (7)–(12) erfüllt, ergeben sich bei der Berechnung von $c: F \to \mathbb{Z}$ erhebliche Vereinfachungen: Zunächst hat man wegen (9):

$$0 = c(1) = c(xx^{-1}) = c(x) + c(x^{-1}) + z(x, x^{-1}) = c(x) + c(x^{-1}),$$

also

$$c(x^{-1}) = -c(x) \quad \text{für alle} \quad x \in F.$$

Sodann hat man wegen (7), (9), (10) und (12):

$$\begin{aligned} c(xyx^{-1}) &= c(x) + c(y) + c(x^{-1}) + z(x, y) + z(xy, x^{-1})\\ &= c(y) + z(y, x) + z(yx, x^{-1})\\ &= c(y) + z(y, 1) + z(x, x^{-1})\\ &= c(y). \end{aligned}$$

Weiter hat man für $x, y, z \in F$:

$$\begin{aligned} c(xzy^{-1}z^{-1}) &= c(x) + c(zy^{-1}z^{-1}) + z(x, zy^{-1}z^{-1})\\ &= c(x) - c(y) - z(x^{-1}, xzy^{-1}z^{-1}). \end{aligned}$$

Falls $\pi(xzy^{-1}z^{-1})=1$ ist, erhält man

$$c(xzy^{-1}z^{-1})=c(x)-c(y).$$

Da für die Erzeugenden e von F $c(e)=0$ ist, erhält man $c(r)=0$ für die Relationen in a*) und b*) sowie $r=[p_h p_h^*, y_1]$. Für $[p_h p_h^*, y_1]$ und die Relationen in a*) sind auch die Exponentensummen alle Null, so daß man sie bei der Berechnung von $\mathrm{Im}(\widehat{\sigma^*[\tau_h]})$ weglassen darf.

Sei $\sigma(\bar{y}_i)=Y_i$, $\sigma(\bar{u}_i)=U_i$, $\sigma(\bar{z}_j)=Z_j, \ldots, \sigma(\bar{t})=T$. Ferner sei C_{ij} die $h\times h$-Matrix, die an der Stelle (i,j) eine 1 und sonst überall 0 stehen hat. Dann ist $E=\sum_{i=1}^{h} C_{ii}$ die Einheitsmatrix. Weiter ist

$$Y_i=\begin{pmatrix} E & 0\\ -C_{ii} & E\end{pmatrix},\qquad U_i=\begin{pmatrix} E & C_{ii}\\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad V_i=\begin{pmatrix} E-C_{ii} & C_{ii}\\ -C_{ii} & E-C_{ii}\end{pmatrix},$$

$$Z_j=\begin{pmatrix} E & 0\\ -C_{jj}-C_{j+1,j+1}+C_{j,j+1}+C_{j+1,j} & E\end{pmatrix},$$

$$W_j=\begin{pmatrix} E-C_{jj}-C_{j+1,j+1} & C_{jj}+C_{j+1,j+1}+C_{j,j+1}\\ -C_{jj}-C_{j+1,j+1}+C_{j+1,j} & E-C_{jj}-C_{j+1,j+1}\end{pmatrix},$$

$$P_k=\begin{pmatrix} E-\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj} & \sum\limits_{1\leqq i\leqq j\leqq k} C_{ij}\\ -\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj}+\sum\limits_{j=2}^{k} C_{j,j-1} & E-\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj}\end{pmatrix},$$

$$P_k^*=\begin{pmatrix} E-\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj} & \sum\limits_{1\leqq i\leqq j\leqq k} C_{ji}\\ -\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj}+\sum\limits_{j=2}^{k} C_{j-1,j} & E-\sum\limits_{j=1}^{k} C_{jj}\end{pmatrix},$$

$$S_k=\begin{pmatrix} E-C_{k+1,k+1} & C_{k+1,k+1}\\ C_{k+1,k}-C_{k+1,k+1} & E-C_{k+1,k+1}+C_{k,k+1}\end{pmatrix},$$

$$S_k^*=\begin{pmatrix} E-C_{k+1,k+1}+C_{k+1,k} & C_{k+1,k+1}\\ C_{k,k+1}-C_{k+1,k+1} & E-C_{k+1,k+1}\end{pmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & 0\\ 0 & \tilde{T}_1^{-t}\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad \tilde{T}_1=\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1\\ 1 & & & & 0 & 0\\ & \cdot & & & & \cdot\\ & & \cdot & & & \cdot\\ & & & \cdot & & \cdot\\ 0 & & & & 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(h,\mathbb{Z}).$$

Aus der Definition von τ_h folgt ferner: Sind $A, B \in \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^{-t} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1^{-t} \end{pmatrix}, \quad A_1, B_1 \in \mathrm{GL}(h, \mathbb{Z}),$$

so ist $\tau_h(A, B) = 0$. Weiter rechnet man aus, daß

$$c(p_1) = c(p_1^*) = 1,$$
$$c(s_k) = c(t^{k-1} s_1 t^{1-k}) = c(s_1) = c(s_1^*) = c(s_k^*) = 1$$

sowie

$$z(p_{k-1}, s_k) = z(s_k^*, p_{k-1}^*) = -1$$

ist. Somit ist auch

$$c(p_k) = c(p_k^*) = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq h.$$

Nun ist

$$P_k^2 = \begin{pmatrix} P_{1,k} & 0 \\ 0 & P_{1,k}^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad P_{1,k} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{1,k} & 0 \\ 0 & E_{h-k} \end{pmatrix}.$$

wobei $\tilde{P}_{1,k} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ nicht den Eigenwert 1 hat ($E_l = l$-reihige Einheitsmatrix). Daher ist

$$c(p_k^{2k+2}) = (k+1)\, c(p_k^2) = (k+1)\,(2 + z(p_k, p_k)).$$

Aus (9) und (13) folgt

$$z(p_k, p_k) = \tau_k \left(\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D^{-t} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D^{-t} & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Z}).$$

Für die zugehörige quadratische Form erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} D^{-t} + D^{-1} & 0 \\ 0 & D + D^t \end{pmatrix}.$$

Da $D + D^t = D(D^{-1} + D^{-t})\, D^t$ ist, folgt hieraus

$$z(p_k, p_k) = 2 \operatorname{sign}(D^{-1} + D^{-t}) = 2 \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2k,$$

und damit

$$c(p_k^{2k+2}) = 2(k+1)^2. \tag{30}$$

Ferner ist $P_k P_k^* = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ mit $Q = \begin{pmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{h-k} \end{pmatrix}$. Hieraus erhält man $z(p_k, p_k^*) = 2k$ und zusammen mit $c(p_k) = c(p_k^*) = 1$:

$$c((p_k p_k^*)^2) = 4(k+1). \tag{31}$$

Da $T = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_1^{-t} \end{pmatrix}$ mit $\tilde{T}_1 \in \mathrm{GL}(h, \mathbb{Z})$ ist, hat man weiter:

$$c(t^h) = 0. \tag{32}$$

Aus (30) und (31) folgt wegen $z(p_k^{2k+2}, (p_k p_k^*)^{-2}) = 0$:

$$c(p_k^{2k+2}(p_k p_k^*)^{-2}) = 2(k^2 - 1). \tag{33}$$

Schließlich haben wir noch $c\left(t^{-1} v_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{h-1} (v_i^{-3} w_i^3 v_i^{-1})\right)$ zu berechnen. Da T^{-1}, V_i^4 und $V_i W_i^3 V_i^{-1}$ die Gestalt $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-t} \end{pmatrix}$ haben, ist

$$\begin{aligned} c\left(t^{-1} v_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{h-1} (v_i^{-4} v_i w_i^3 v_i^{-1})\right) &= c(t^{-1}) + c(v_1^4) + \sum_{i=1}^{h-1} (c(v_i^{-4}) + c(v_i w_i^3 v_i^{-1})) \\ &= c(v_1^4)(2-h) - c(w_1^3)(1-h). \end{aligned}$$

Ferner rechnet man aus, daß

$$\begin{aligned} &z(v_1, v_1) = z(v_1, v_1^2) = 2, \qquad z(v_1, v_1^3) = 0, \\ &z(w_1, w_1) = 4, \qquad z(w_1, w_1^2) = 2 \end{aligned}$$

ist. Zusammen mit $c(v_1) = c(w_1) = 1$ (wegen $p_1 = v_1, p_2 = w_1$) ergibt sich $c(v_1^4) = 8$, $c(w_1^3) = 9$ und damit schließlich

$$c\left(t^{-1} v_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{h-1} (v_i^{-3} w_i^3 v_i^{-1})\right) = h + 7. \tag{34}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} r_1 &= y_1 u_1 y_1 u_1^{-1} y_1^{-1} u_1^{-1}, \\ r_2 &= u_1 z_1 u_1 z_1^{-1} u_1^{-1} z_1^{-1}, \\ r_3 &= z_1 u_2 z_1 u_2^{-1} z_1^{-1} u_2^{-1}, \\ r_4 &= p_h^{2h+2}, \\ r_5 &= (p_h p_h^*)^2, \\ r_6 &= t^h, \\ r_7 &= t^{-1} v_1^4 \cdot \prod_{i=1}^{h-1} (v_i^{-3} w_i^3 v_i^{-1}), \\ r_8 &= p_2^6 (p_2 p_2^*)^{-2}, \\ r_9 &= p_3^8 (p_3 p_3^*)^{-2}, \qquad (\text{für } h \geqq 3) \end{aligned} \tag{35}$$

und bezeichnen die zu y_1, u_1, z_1 und t gehörenden Exponentenhomomorphismen mit y_1^*, u_1^*, z_1^* und t^*. Aus (30)–(35) und der Definition der $y_i, \ldots, p_h^*$ erhält man die folgende Tabelle für die Werte $y_1^*(r_i), \ldots, t^*(r_i)$ und $c(r_i)$:

	y_1^*	u_1^*	z_1^*	t^*	c
r_1	1	-1	0	0	0
r_2	0	1	-1	0	0
r_3	0	-1	1	0	0
r_4	$4(h+1)$	$2h(h+1)$	$2(h^2-1)$	0	$2(h+1)^2$
r_5	8	$4h$	$4(h-1)$	0	$4(h+1)$
r_6	0	0	0	h	0
r_7	$2(5-h)$	$2(h+1)$	$3(h-1)$	-1	$h+7$
r_8	4	4	2	0	6
r_9	8	12	8	0	16 (für $h \geqq 3$).

Die Gleichungen $\sum_i n_i e^*(r_i) = 0$, $(e = y_1, u_1, z_1, t)$ ergeben nach Elimination von n_1, n_2, n_3 und n_7 eine Bedingung:

$$2(2h+1)\left((h+1)\,n_4 + 2n_5\right) + 3h(h+3)\,n_6 + 10n_8 + 28n_9 = 0\,, \tag{36}$$

wobei für $h=2$ der letzte Summand wegfällt. Die entsprechende Linearkombination für c ist:

$$\begin{aligned} s := 2(h+1)\left((h+1)\,n_4 + 2n_5\right) + h(h+7)\,n_6 + 6n_8 + 16n_9 \\ (\text{mit } n_9 = 0 \text{ für } h = 2)\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Mit $n_4 = n_5 = n_6 = 0$, $n_8 = 14$, $n_9 = -5$ wird $s = 4$. Bezeichnet man die linke Seite von (36) mit $\tilde{s}$, so ist

$$\tilde{s} - s = 2h((h+1)\,n_4 + 2n_5) + 2h(h+1)\,n_6 + 4n_8 + 12n_9 \equiv 0 \bmod 4\,.$$

Somit ist $s \in 4\mathbb{Z}$ und daher für $h \geqq 3$

$$\operatorname{Im}(\hat{k}) = 4\mathbb{Z}\,. \tag{38}$$

Für $h=2$ bilden die angegebenen Relationen ein vollständiges Relationensystem. Ferner entnimmt man aus der Tabelle jetzt:

$$5c\,|\,R = 3(y_1^* + u_1^* + z_1^*)\,|\,R\,, \tag{39}$$

also $\operatorname{Im}(\hat{k}) = 0$ und $\operatorname{ord}(k) = 5$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung. Aus der obigen Tabelle folgt noch

$$\Gamma_h/[\Gamma_h, \Gamma_h] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{10} & \text{für } h=2 \\ \mathbb{Z}_d & \text{für } h \geqq 3 \text{ mit } d|2. \end{cases}$$

§ 5. Die Funktion φ

Da $[\tau_1]$ die Ordnung 3 hat, gibt es eine 1-Kokette

$$\varphi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to \tfrac{1}{3}\mathbb{Z}$$

mit $\delta\varphi = \tau_1$. Aus dem Beweis von (28) und (29) folgt für

$$\pi : \tilde{F} = \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

mit

$$\pi(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

daß

$$\varphi \circ \pi = -c + \tilde{a}^* + \tfrac{4}{3}\tilde{b}^* \tag{40}$$

ist. Wegen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/[\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})] \cong \mathbb{Z}_{12}$ ist nämlich φ eindeutig bestimmt, da φ durch $\delta\varphi = \tau_1$ bis auf einen Homomorphismus $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Q}$ festgelegt ist. Aus den Eigenschaften (7)–(12) ergeben sich die folgenden Eigenschaften für φ:

$$\varphi(1) = 0, \tag{41}$$

$$\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha) \tag{42}$$

und

$$\varphi(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = \varphi(\alpha). \tag{43}$$

Wir wollen nun eine explizite Formel für φ mit Hilfe von Dedekind-Summen herleiten. Von C. Meyer [12] und K. Rademacher [17] wurde die Funktion $\Psi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}$ untersucht mit

$$\Psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sign}(c)\, s(a, c) - 3 \operatorname{sign}(c(a+d)) & \text{für} \quad c \neq 0, \\ \dfrac{b}{d} & \text{für} \quad c = 0. \end{cases}$$

Hierin ist $s(a, c)$ die Dedekind-Summe:

$$s(a, c) := \sum_{k \bmod |c|} \left(\left(\frac{ak}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{k}{c}\right)\right),$$

wobei

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ist. Ψ hat die folgenden Eigenschaften:

$$\Psi(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = \Psi(\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad \alpha, \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \tag{44}$$

$$\Psi(-\alpha) = \Psi(\alpha), \tag{45}$$

$$\Psi(\alpha^{-1}) = -\Psi(\alpha) \tag{46}$$

und

$$\alpha \text{ nicht elliptisch, d. h. } |a+d| \geqq 2 \Rightarrow \Psi(\alpha^k) = k\Psi(\alpha). \tag{47}$$

Ferner erfüllt Ψ die „Kozykelbedingung" (vgl. [12, 13]):

$$\Psi(\alpha_1) + \Psi(\alpha_2) + \Psi(\alpha_3) = -3\left[\operatorname{sign}(c_1 c_2 c_3) + \sum_{i=1}^{3} \operatorname{sign}(c_i(a_i + d_i))\right], \tag{48}$$

wobei $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ mit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$ ist.

Es sei weiter

$$S(\alpha) = a + d \quad \text{die Spur von} \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma(\alpha) = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\left(J(\alpha - \tfrac{1}{2}S(\alpha))\right) \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\alpha J \alpha^t = J$ für $\alpha \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma\alpha\gamma^{-1}) &= \operatorname{sign}\left(J(\gamma\alpha\gamma^{-1} - \tfrac{1}{2}S(\gamma\alpha\gamma^{-1}))\right) \\ &= \operatorname{sign}\left(\gamma^{-t} J(\alpha - \tfrac{1}{2}S(\alpha))\,\gamma^{-1}\right) \\ &= \sigma(\alpha), \end{aligned}$$

d. h., σ ist eine Klassenfunktion. Es ist $\sigma(\alpha) = \tau_1(\alpha, -1)$, wie schon früher bemerkt wurde. Wir beweisen nun

Satz 4. $\quad \varphi(\alpha) = -\frac{1}{3}\Psi(\alpha) + \sigma(\alpha) \cdot \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(S(\alpha))),$

$$\tau_1(\alpha_1, \alpha_2) = \varrho(\alpha_1) + \varrho(\alpha_2) + \varrho(\alpha_3) + \operatorname{sign}(c_1 c_2 c_3),$$

wobei

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \qquad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$$

und

$$\varrho(\alpha_i) = \operatorname{sign}(c_i S(\alpha_i)) + \sigma(\alpha_i) \cdot \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(S(\alpha_i)))$$

ist.

Da für $|S(\alpha)| \geqq 3$ $\sigma(\alpha) = 0$ und für $S(\alpha) < 0$ $1 + \mathrm{sign}(S(\alpha)) = 0$ ist, haben wir noch das

Korollar. $\varphi(\alpha) = -\frac{1}{3}\Psi(\alpha)$, *falls* $S(\alpha) \neq 0, 1, 2$ *ist.*

Beweis. Die Formel für τ_1 folgt unmittelbar durch Einsetzen der Formel für φ in $\delta\varphi = \tau_1$ unter Berücksichtigung von (42) und (48).

Zum Beweis der ersten Formel setzen wir

$$\Delta(\alpha) := \Psi(\alpha) + 3\varphi(\alpha) - 3\sigma(\alpha) \cdot \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{sign}(S(\alpha)))$$

und zeigen:

a) Δ ist eine Klassenfunktion,

b) α elliptisch oder parabolisch $\Rightarrow \Delta(\alpha) = 0$,

c) $\Delta(\alpha^{-1}) = -\Delta(\alpha)$,

d) α hyperbolisch $\Rightarrow \Delta(\alpha\sigma) = \Delta(\alpha)$, wobei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

e) Aus a), b), c) und d) folgt $\Delta = 0$.

Wir beweisen zuerst e). Bekanntlich wird $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ von σ und $\tau = J\sigma J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt.

Wir definieren die Länge $l(\alpha)$ von $\alpha \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch:

$$l(\alpha) := \mathrm{Min}\left\{ \sum_{i=1}^{n} (|\varepsilon_i| + |\eta_i|) \;\middle|\; \alpha = \prod_{i=1}^{n} \tau^{\eta_i}\sigma^{\varepsilon_i},\ n \geqq 0, \varepsilon_i, \eta_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

und führen den Beweis durch Induktion über die Länge. Wäre $\Delta \neq 0$, so gäbe es ein α minimaler Länge mit $\Delta(\alpha) \neq 0$. Wegen b) ist α hyperbolisch. Wegen a) ist auch $\Delta(\gamma\alpha\gamma^{-1}) \neq 0$ und wir dürfen (notfalls nach Übergang zu einer Konjugierten $\gamma\alpha\gamma^{-1}$) annehmen, daß $\alpha = \prod_{i=1}^{n} \tau^{\eta_i}\sigma^{\varepsilon_i}$ mit $l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (|\eta_i| + |\varepsilon_i|)$ und $\eta_i, \varepsilon_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist. Bei geeigneter Wahl von $\varepsilon = \pm 1$ ist daher $l(\alpha\sigma^{\varepsilon}) < l(\alpha)$ und damit $\Delta(\alpha\sigma^{\varepsilon}) = 0$. Ist nun $\varepsilon = 1$, so folgt aus d) der Widerspruch:

$$0 = \Delta(\alpha\sigma) = \Delta(\alpha) \neq 0\,.$$

Ist dagegen $\varepsilon = -1$, so erhalten wir mittels a), c) und d) den Widerspruch:

$$0 = \Delta(\alpha\sigma^{-1}) = -\Delta(\sigma\alpha^{-1}) = -\Delta(\alpha^{-1}\sigma) = -\Delta(\alpha^{-1}) = \Delta(\alpha) \neq 0\,,$$

da auch α^{-1} hyperbolisch ist.

„a)“: Da Ψ, φ, σ und S Klassenfunktionen sind, ist auch Δ eine Klassenfunktion,

„b)“: Bekanntlich ist jedes elliptische oder parabolische Element zu einem der Elemente $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{\pm 1}$, $\pm\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{Z})$ konjugiert.

Man hat nun folgende Tabelle, aus der man leicht die Behauptung b) abliest:

$\alpha =$	$\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$	$\pm\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\Psi(\alpha) =$	0	-2	2	b
$\varphi(\alpha) =$	∓ 1	$-\frac{1}{3} \mp 1$	$\frac{1}{3} \pm 1$	$\frac{1}{2}\operatorname{sign}(b)(1 \pm 1) - \frac{b}{3}$
$\sigma(\alpha) =$	∓ 2	∓ 2	± 2	$\pm \operatorname{sign}(b)$
$S(\alpha) =$	0	± 1	± 1	± 2

Alle Werte in der Tabelle außer $\varphi(\alpha)$ ergeben sich unmittelbar aus der Definition und $s(a, c) = 0$ für $c = \pm 1$. Die Werte für $\varphi(\alpha)$ errechnet man leicht aus der Konstruktion von $c: F \to \mathbb{Z}$, der Formel (40) und den Gleichungen:

$$\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = a^{\mp 1}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{\pm 1} = ab^{\mp 1}a^{-1}, -\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{\pm 1}$$
$$= ab^{\mp 1}a, \pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = b^{-1}a^{\pm 1}.$$

Ferner wurden noch die Formeln

$$\tau_1(\alpha, -1) = \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha) + \varphi(-1) = \operatorname{sign}\begin{pmatrix}-2c & a-d\\ a-d & 2b\end{pmatrix},$$
$$\varphi(-1) = 0$$

und

$$\tau_1(\sigma^k, \sigma^l) = \operatorname{sign}(kl(k+l)) = \operatorname{sign}(k) + \operatorname{sign}(l) - \operatorname{sign}(k+l)$$

benutzt.

„c)“: Wegen $\Psi(\alpha^{-1}) = -\Psi(\alpha)$, $\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha)$ und $S(\alpha^{-1}) = S(\alpha)$ ist die Behauptung äquivalent mit

$$\tau_1(\alpha^{-1}, -1) = -\tau_1(\alpha, -1).$$

Dies ist aber wegen

$$J(\alpha^{-1} - \tfrac{1}{2}S(\alpha^{-1})) = -J(\alpha - \tfrac{1}{2}S(\alpha))$$

richtig.

„d)“: Die Gleichung $\Delta(\alpha\sigma)=\Delta(\alpha)$ läßt sich wegen $\Delta(\sigma)=0$ umformen zu

$$\begin{aligned}
0&=\Delta(\alpha\sigma)-\Delta(\alpha)-\Delta(\sigma)\\
&=-\Psi((\alpha\sigma)^{-1})-\Psi(\alpha)-\Psi(\sigma)+3\varphi(\alpha\sigma)-3\varphi(\alpha)-3\varphi(\sigma)\\
&\quad-3\sigma(\alpha\sigma)\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(S(\alpha\sigma)))+3\sigma(\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(S(\alpha)))\\
&\quad+3\sigma(\sigma)\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(S(\sigma)))\\
&=3\operatorname{sign}(c(a+d))+3\operatorname{sign}(-c(a+d+c))-3\tau_1(\alpha,\sigma)\\
&\quad+3\sigma\begin{pmatrix}c+d & -a-b\\ -c & a\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(a+d+c))+3\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sigma(\alpha)=0$ und $\sigma(\sigma)=1$ berücksichtigt. Wegen $c\neq 0$, $\tau_1(\alpha,\sigma)=\operatorname{sign}((a+d-2)(a+d+c-2))$ und

$$\operatorname{sign}(xy)+\operatorname{sign}(yz)+\operatorname{sign}(zx)=-1 \text{ für } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \text{ mit } x+y+z=0$$

läßt sich dies weiter umformen zu:

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{sign}((a+d-2)(a+d+c-2))+\operatorname{sign}((a+d)(a+d+c))\\
&+\operatorname{sign}\begin{pmatrix}2c & c+d-a\\ c+d-a & -2a-2b\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(a+d+c))=0\,.
\end{aligned}\tag{49}$$

Ferner hat man

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix}2c & c+d-a\\ c+d-a & -2a-2b\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}2\operatorname{sign}(c-a-b) & \text{für} & |a+d+c|\leqq 1\\ \operatorname{sign}(c-a-b) & \text{für} & |a+d+c|=2\\ 0 & \text{für} & |a+d+c|\geqq 3\end{matrix}\right\}.$$

Zum Nachweis von (49) unterscheiden wir demnach die Fälle $a+d+c=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ und $|a+d+c|\geqq 3$. Wir betrachten nur den Fall $a+d+c=1$, da sich die anderen Fälle ähnlich erledigen lassen. Zu zeigen ist jetzt:

$$\operatorname{sign}(a+d-2)+\operatorname{sign}(a+d)=2\operatorname{sign}(a+b-c)\,.$$

Wegen $|a+d|\geqq 3$ und $c=1-a-d\neq 0$ ist dies äquivalent mit:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(c(a+d))&=\operatorname{sign}(c(a+b-c))\\
&=\operatorname{sign}(a-a^2-1-c^2)\\
&=-1\,.
\end{aligned}$$

Da $c(a+d)=(1-a-d)(a+d)<0$ ist wegen $|a+d|\geqq 3$, ist dies aber richtig. Hiermit ist a), b), c) und d) und damit Satz 4 bewiesen.

Bemerkung. Es gibt noch einen weiteren Beweis von Satz 4, der auf der Auflösung gewisser Singularitäten von 2-dimensionalen komplexen Räumen mit einem Torusbündel über S^1 als Umgebungsrand beruht.

Aus Satz 4 und Satz 1 ergibt sich nun als Korollar

Satz 5. *Sei X eine kompakte orientierte Fläche mit $\partial X = \bigvee_{i=1}^{r} S_i^1$ (disjunkte Vereinigung), und sei $E \to X$ ein orientiertes Torusbündel über X. Ferner seien $\alpha_i \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ $(i=1,\ldots,r)$ klassifizierende Elemente für $E_i := E \mid S_i^1$, d. h. $\alpha_i = \chi_i(1)$, wobei $\chi_i : \pi_1(S_i^1) \cong \mathbb{Z} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ klassifizierende Homomorphismen für E_i sind. Dann ist*

$$\tau(E, \partial E) = -\sum_{i=1}^{r} \varphi(\alpha_i).$$

Abschließend sei noch bemerkt, daß $[\tau_2] \in H^2(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ im Gegensatz zu $\sigma^*[\tau_2]$ *keine* endliche Ordnung hat. In [14] wurde nämlich ein lokales Koeffizientensystem Γ mit Strukturgruppe $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$ und typischem Halm $\mathbb{R}^4$ über der Fläche X vom Geschlecht 4 mit $\tau(X;\Gamma) = 8$ angegeben.

Literatur

1. Atiyah, M. F.: The signature of fibre bundles. Coll. Math. Papers in honor of Kodaira, Tokyo Univ. Press 1969.
2. Birman, J. S., Hilden, H. M.: On the mapping class group of closed surfaces as covering spaces. From: Advances in the theory of Riemann surfaces. Princeton Univ. Press **66**, 81—115 (1971).
3. Chern, S. S., Hirzebruch, F., Serre, J. P.: On the index of a fibred manifold. Proc. AMS **8**, 587—596 (1957).
4. Dehn, M.: Die Gruppe der Abbildungsklassen. Acta Math. **69**, 135—206 (1938).
5. Earle, C. J., Eells, J.: The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. Bull. AMS **73**, 557—559 (1967).
6. Hamstrom, M. E.: Homotopy-groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold. Illinois Journ. Math. **10**, 563—573 (1966).
7. Hirzebruch, F.: The signature of ramified coverings. Coll. Math. Papers in honor of Kodaira, Tokyo Univ. Press 1969.
8. Hopf, H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe. Comm. Math. Helv. **14**, (1942).
9. Kas, A.: On deformations of a certain type of irregular algebraic surface. Am. Journ. of Math., Vol. **40** (3), 789—804 (1968).
10. Kodaira, K.: A certain type of irregular algebraic surfaces. Journal d'Analyse Mathématique **19**, 207—215 (1967).
11. Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D.: Combinatorial group theory. New York: Interscience Publ. 1966.
12. Meyer, C.: Über die Bildung von Klasseninvarianten... Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg **27** (3/4), 206—230 (1964).
13. Meyer, C.: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. Journal für r. u. a. Mathematik **198** (3/4), 143—203 (1957).
14. Meyer, W.: Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln. Dissertation, Bonner Mathematische Schriften, Nr. 53, Bonn (1972).

15. Mumford, D.: Abelian quotients of the Teichmüller modular group. J. d'Analyse Math. **18**, 227—244 (1967).
16. Nielsen, J.: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. Acta Math. **50**, 189—358 (1927).
17. Rademacher, H.: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Zeitschrift **63**, 445—463 (1955/56).
18. Zieschang, M., Vogt, E., Coldeway, H. D.: Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen. Lecture Notes in Math., Band 122. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Dr. W. Meyer
Math. Institut der Univ.
D-5300 Bonn
Wegelerstr. 10
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 19. September 1972)