4.

Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen *).

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System lineärer Gleichungen geführt, in welchem die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coëfficienten noch dieselbe Gröfse $-x$ addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen lineären Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher x genügen mufs. Für jeden Werth von x, welcher diese Bedingungsgleichung erfüllt, hat man sodann aus den lineären Gleichungen die Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen. Ich werde hier zuerst die für ein solches System Gleichungen geltenden algebraischen Formeln ableiten, welche im Folgenden ihre Anwendung finden, und hierauf eine für die Rechnung sehr bequeme Methode mittheilen, wodurch man die numerischen Werthe der Gröfsen x und der ihnen entsprechenden Systeme der Unbekannten mit Leichtigkeit und mit jeder beliebigen Schärfe erhält. Diese Methode überhebt der beschwerlichen Bildung und Auflösung der Gleichung, deren Wurzeln die Werthe von x sind, indem man das gegebne System Gleichungen so transformirt, dafs man für die Gröfsen x starke Annäherungen erhält, worauf für jedes x ein schnell convergirendes Näherungsverfahren zugleich dessen *genauen* Werth und die entsprechenden Werthe der Unbekannten und zwar diese letztern viel leichter als durch die gewöhnlichen Eliminationen ergiebt. Zur Erläuterung dieser Methode habe ich die numerische Auflösung derjenigen Gleichungen gewählt, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und der Längen der Perihelien der Pla-

---

*) Die sorgfältige Ausführung der in diesem Aufsatze vorkommenden numerischen Rechnungen verdanke ich der Gefälligkeit eines meiner Schüler, des Herrn *Ludwig Seidel* in München.

neten unsers Sonnensystems abhängen, wenn man die höhern Potenzen der Excentricitäten und Neigungen vernachlässigt, da diese numerische Auflösung neuerdings mehrere Astronomen beschäftigt hat. Endlich habe ich neue Formeln für die Correctionen hinzugefügt, welche die gefundnen Zahlenresultate durch Änderung der angenommenen Planetenmassen erfahren, und auch diese Formeln durch die vollständig durchgeführten Rechnungen erläutert. Für die Zahlencoëfficienten habe ich dieselben numerischen Werthe genommen, welche Herr *Leverrier* seinen schätzenswerthen Arbeiten über diesen Gegenstand zum Grunde gelegt hat, um eine Vergleichung der Methoden zu erleichtern.

Relationen zwischen den verschiedenen Systemen der Unbekannten.

2.

Es sei zwischen den n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ ein System von n linearen Gleichungen von folgender Form gegeben,

$$1. \quad \begin{cases} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma + \ldots + (a,p)\varpi = 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma + \ldots + (b,p)\varpi = 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma + \ldots + (c,p)\varpi = 0, \\ \ldots \\ (p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma + \ldots + \{(p,p)-x\}\varpi = 0, \end{cases}$$

in welchen je zwei zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten, welche durch Vertauschung der Buchstaben auseinander erhalten werden, gleich sind,

$$2. \quad (a,b)=(b,a), \quad (a,c)=(c,a), \quad (b,c)=(c,b), \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gröfsen (a,a), (a,b) u. s. w. sind in Zahlen gegeben, die Gröfse x dagegen noch zu bestimmen. Da nämlich die ganz constanten Glieder sämmtlich $=0$ sind, so kann man aus den n Gleichungen (1.) die n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ eliminiren, und erhält dadurch für x eine Gleichung $n$ten Grades. Für jeden der n Werthe von x, welche dieser genügen, wird jede der n Gleichungen (1.) eine Folge der übrigen $n-1$, und bestimmen irgend $n-1$ derselben die Verhältnisse der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$. Da nur diese Verhältnisse und nicht die absoluten Werthe der Gröfsen α, β etc. durch die Aufgabe bestimmt werden, so werde ich annehmen, dafs für jedes der n Systeme dieser Gröfsen, welche den n Wurzeln x entsprechen, die Summe ihrer Quadrate

$$3.\quad \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\ldots+\varpi\varpi = 1$$

werde, wodurch alle hier vorkommenden Gröſsen bestimmt sind.

3.

Es seien nun x', x'' irgend zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades, und α', β', γ', ... ϖ'; α'', β'', γ'', ... ϖ'' die ihnen entsprechenden Werthe der Unbekannten α, β, γ, ... ϖ. Man hat dann aus (1.)

$$\begin{aligned}
(a,a)\alpha'+(a,b)\beta'+\ldots+(a,p)\varpi' &= \alpha'x',\\
(b,a)\alpha'+(b,b)\beta'+\ldots+(b,p)\varpi' &= \beta'x',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(p,a)\alpha'+(p,b)\beta'+\ldots+(p,p)\varpi' &= \varpi'x'.
\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen der Ordnung nach mit α'', β'', γ'', ... ϖ'' multiplicirt und nach geschehner Multiplication addirt, so erhält auf der linken Seite α' den Factor

$$(a,a)\alpha''+(b,a)\beta''+(c,a)\gamma''+\ldots+(p,a)\varpi'';$$

dieser ist aber, weil $(b,a)=(a,b)$ u. s. w. und weil α'', β'', γ'', ... ϖ'' nebst x'' die Gleichungen (1.) erfüllen, $=\alpha''x''$; ebenso wird $\beta''x''$ der Coëfficient von β' u. s. f. Man erhält daher

$$(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x'' = (\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x'.$$

Hieraus folgt wegen der Voraussetzung, daſs x' und x'' *von einander verschiedene Wurzeln* seien,

$$4.\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'' = 0.$$

Aus dieser Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen je zwei Auflösungen ausdrückt, ergiebt sich, wie *Cauchy* bemerkt hat, daſs alle Wurzeln x der Gleichung $n$ten Grades reell sind. Denn wären imaginäre vorhanden, und nähme man für x', x'' ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln, so würden auch die Gröſsen $\frac{\beta'}{\alpha'}$ und $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma''}{\alpha''}$, u. s. w., welche rationale Ausdrücke von x sind, die sich durch Auflösung der Gleichungen (1.) ergeben, conjugirte imaginäre Werthe erhalten: die Producte $\frac{\beta'\beta''}{\alpha'\alpha''}$, $\frac{\gamma'\gamma''}{\alpha'\alpha''}$ etc. würden daher jedes eine Summe von zwei Quadraten werden und die Summe aller dieser Producte könnte nicht $=-1$ sein, wie es die Formel (4.) erfordert.

Betrachten wir nun folgende lineäre Ausdrücke:

$$5.\quad \begin{cases} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \dots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \dots + \beta^{(n)} q_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_n = \varpi' q_1 + \varpi'' q_2 + \dots + \varpi^{(n)} q_n, \end{cases}$$

wo $\alpha', \beta', \dots \varpi'$; $\alpha'', \beta'', \dots \varpi''$; u. s. w. die verschiedenen Systeme der Werthe der Gröfsen $\alpha, \beta, \dots \varpi$ sind und zwischen den Gröfsen je zweier Systeme eine Gleichung (4.) Statt findet.

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so verschwinden rechts wegen der Gleichungen (4.) die Coëfficienten der Producte $q_1 q_2$, $q_1 q_3$ etc., und da die Summen der Quadrate der demselben Systeme angehörigen Werthe der Unbekannten $= 1$ angenommen worden sind (3.), so erhält man

$$6.\quad p_1 p_1 + p_2 p_2 + \dots + p_n p_n = q_1 q_1 + q_2 q_2 + \dots + q_n q_n.$$

Ferner folgen aus dem System (5.) unmittelbar die umgekehrten Ausdrücke der Gröfsen q_i durch die Gröfsen p_i, wenn man die Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander vertauscht. Um nemlich q_i zu finden, braucht man blofs die erste Gleichung mit $\alpha^{(i)}$, die zweite mit $\beta^{(i)}$ u. s. w. zu multipliciren und sie nach geschehener Multiplication zu addiren, so werden nach (4.) alle q eliminirt bis auf q_i, das den Factor 1 erhält. Man findet so die umgekehrten Gleichungen

$$7.\quad \begin{cases} q_1 = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \dots + \varpi' p_n, \\ q_2 = \alpha'' p_1 + \beta'' p_2 + \dots + \varpi'' p_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_n = \alpha^{(n)} p_1 + \beta^{(n)} p_2 + \dots + \varpi^{(n)} p_n. \end{cases}$$

Substituirt man wieder diese Werthe in die durch die Gleichungen (5.) gegebnen Ausdrücke der Gröfsen $p_1, p_2, \dots p_n$, so giebt die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} p_1 = {} & \{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \dots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)}\} p_1 \\ & + \{\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \dots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}\} p_2 \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + \{\alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \dots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)}\} p_n. \end{aligned}$$

Wegen der ganz allgemeinen Bedeutung der Gröfsen p_i mufs also sein:

$$8.\quad \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \dots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)} = 1,$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \dots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \dots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \dots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Analoge Gleichungen wie die hier in Bezug auf α erhaltnen kann man in Bezug auf jedes β, γ etc. aufstellen, wenn man in den Ausdrücken (5.) von p_2, p_3 etc. die Werthe von q_1, q_3, ... q_n aus (7.) substituirt. Diese Gleichungen ergeben sich auch sämmtlich auf einmal, wenn man die Summe der Quadrate der Werthe (7.) von q_1, q_2, ... q_n bildet, welche zufolge (6.) gleich

$$p_1 p_2 + p_2 p_2 \ldots\ldots + p_n p_n$$

sein mufs.

Wenn man, anstatt die Quadrate der Werthe (7.) der Gröfsen q_i unmittelbar zu addiren, vorher q_1^2 mit x', q_2^2 mit x'', u. s. w. multiplicirt, wo x', x'', ... $x^{(n)}$ die n Werthe von x bedeuten, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung das Aggregat

$$x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots\ldots + x^{(n)} q_n^2,$$

zur Rechten eine homogene Function zweiten Grades der Gröfsen p_i und in derselben als Coëfficient von p_1^2 den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \alpha' + x'' \cdot \alpha'' \alpha'' + \ldots\ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \alpha^{(n)},$$

als Coëfficient von $2 p_1 p_2$ den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \beta' + x''. \alpha'' \beta'' + \ldots\ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \beta^{(n)},$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Coëfficienten. Diese Ausdrücke lassen sich aber unmittelbar auf die Zahlencoëfficienten der Gleichungen (1.) zurückführen. Die erste dieser Gleichungen ergiebt nämlich:

$$x' \alpha' = (a, a) \alpha' + (a, b) \beta' + \ldots\ldots + (a, p) \varpi',$$
$$x'' \alpha'' = (a, b) \alpha'' + (a, b) \beta'' + \ldots\ldots + (a, p) \varpi'',$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit α', α'', α''', ... multiplicirt und addirt, so erhält man nach (8.) und (9.) den Coëfficient von p_1^2,

$$x' \alpha'^2 + x'' \alpha''^2 + \ldots\ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)2} = (a, a).$$

Wenn man hingegen dieselben Gleichungen der Ordnung nach mit β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man den Coëfficient von $2 p_1 p_2$,

$$x' \alpha' \beta' + x'' \alpha'' \beta'' + \ldots\ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)} \beta^{(n)} = (a, b),$$

und auf dieselbe Weise ergeben sich die Werthe aller übrigen Coëfficienten der homogenen Function 2ten Grades. Man findet so die Gleichung

$$10. \quad \begin{array}{l} x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots\ldots + x^{(n)} q_n^2 = \\ (a, a) p_1^2 + 2(a, b) p_1 p_2 + 2(a, c) p_1 p_3 + \ldots\ldots \\ \quad + \; (b, b) p_2^2 \; + 2(b, c) p_2 p_3 + \ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad + \; (c, c) p_3^2 \; + \ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots\ldots \end{array}$$

Hätte man statt der symbolischen Ausdrücke (a, a), (a, b) u. s. w. wirklich die Quadrate und Producte aa, ab u. s. w., so würde die homogene Function zur Rechten sich in das Quadrat $\{ap_1+bp_2+cp_3+\ldots\}^2$ verwandeln.

Auf eine noch übersichtlichere Art ergiebt sich die Gleichung (10.) aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}(a,a)p_1+(a,b)p_2+(a,c)p_3+\ldots &= x'\alpha'\cdot q_1+x''\alpha''\cdot q_2+x'''\alpha'''\cdot q_3+\ldots,\\ (b,a)p_1+(b,b)p_2+(b,c)p_3+\ldots &= x'\beta'\cdot q_1+x''\beta''\cdot q_2+x'''\beta'''\cdot q_3+\ldots,\\ (c,a)p_1+(c,b)p_2+(c,c)p_3+\ldots &= x'\gamma'\cdot q_1+x''\gamma''\cdot q_2+x'''\gamma'''\cdot q_3+\ldots,\\ &\text{u. s. w.,}\end{aligned}$$

die man dadurch erhält, dafs man für die Gröfsen p_i ihre Ausdrücke durch die Gröfsen q_i setzt, und die Coëfficienten der einzelnen q_i vermittelst der Gleichungen (1.) auf einen Term reducirt. Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit p_1, p_2 u. s. w. und addirt sie alle, so erhält man links die obige homogene Function 2ter Ordnung, und rechts vermittelst der Gleichungen (7.) den Ausdruck

$$x'q_1^2+x''q_2^2+\ldots+x^{(n)}q_n^2.$$

In der Abhandlung „De binis quibuslibet functionibus etc." im 12ten Bande von *Crelle's* Journal bin ich von den beiden Gleichungen (6.) und (10.) ausgegangen, und auf dem umgekehrten Wege zu dem System (1.) und den Gleichungen (3.) und (4.) gelangt.

Allgemeine Correctionsformeln der Werthe der Unbekannten.

4.

Aus den bereits entwickelten Relationen zwischen den verschiedenen Systemen von Werthen der Unbekannten, welche den verschiedenen Werthen von x entsprechen, lassen sich auch einfache Ausdrücke für die nach den Gröfsen (a, a), (a, b), ... genommnen partiellen Differentialquotienten von x, $\alpha, \beta, \ldots.$ folgern. Diese partiellen Differentialquotienten bestimmen die für kleine Änderungen der Zahlencoëfficienten (a, a), (a, b) etc. an den gefundnen Werthen anzubringenden Correctionen, wenn man die Quadrate und Producte dieser Änderungen vernachlässigt. Es ist hiebei nur nöthig, die Differentialquotienten zweier Gröfsen, x' und α', zu suchen, da die übrigen sich ganz analog bilden lassen. Bezeichnet man durch

$$(a,a)+\Delta(a,a),\qquad x'+\Delta x',\qquad \alpha'+\Delta\alpha'\qquad \text{u. s. w.}$$

die geänderten Werthe von (a, a), x', α' u. s. w., und vernachlässigt man die

2ten Potenzen der Incremente, so dafs die Formeln für Differentiale streng richtig sind, so hat man zuerst aus (1.)

$$11.\quad \begin{cases} \alpha'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(a,a)+\beta'\cdot\Delta(a,b)+\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\dots\} \\ \quad = \{(a,a)-x'\}\Delta\alpha'+(a,b)\Delta\beta'+(a,c)\Delta\gamma'+\dots, \\ \beta'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(b,a)+\beta'\cdot\Delta(b,b)+\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\dots\} \\ \quad = (b,a)\Delta\alpha'+\{(b,b)-x'\}\Delta\beta'+(b,c)\Delta\gamma'+\dots, \\ \gamma'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(c,a)+\beta'\cdot\Delta(c,b)+\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\dots\} \\ \quad = (c,a)\Delta\alpha'+(c,b)\Delta\beta'+\{(c,c)-x'\}\Delta\gamma'+\dots, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit α', β', γ', ... und addirt sie nach geschehener Multiplication, so verschwinden wegen der Gleichungen (1.) die Gröfsen zur Rechten des Gleichheitszeichens, und man erhält, da der Coëfficient von $\Delta x' = 1$ wird:

$$12.\quad \begin{aligned} \Delta x' = \alpha'\alpha'\cdot\Delta(a,a)&+2\alpha'\beta'\cdot\Delta(a,b)+2\alpha'\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\dots \\ &+\beta'\beta'\cdot\Delta(b,b)+2\beta'\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\dots \\ &\qquad+\gamma'\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\dots \\ &\qquad\qquad\dots\dots \end{aligned}$$

Um die Correctionen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. zu erhalten, verfahre ich wie folgt. Ich addire zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten der Reihe nach die Gröfsen $(x'-x'')\Delta\alpha'$, $(x'-x'')\Delta\beta'$, $(x'-x'')\Delta\gamma'$ etc., multiplicire sie hierauf mit α'', β'', γ'' etc. und addire alle. Ebenso addire ich zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten $(x'-x''')\Delta\alpha'$, $(x'-x''')\Delta\beta'$ etc., multiplicire mit α''', β''' etc. und addire, etc. etc. Durch dieses Verfahren verschwinden jedesmal die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen und der in $\Delta x'$ multiplicirte Term, und man erhält zwischen den n Variationen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. $n-1$ Gleichungen:

$$\begin{gathered} (x'-x'')\{\alpha''\Delta\alpha'+\beta''\Delta\beta'+\gamma''\Delta\gamma'+\dots\} \\ = \alpha''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha''\beta'+\alpha'\beta''\}\Delta(a,b)+\beta''\beta'\Delta(b,b)\ \text{etc.}, \\ (x'-x''')\{\alpha'''\Delta\alpha'+\beta'''\Delta\beta'+\gamma'''\Delta\gamma'+\dots\} \\ = \alpha'''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha'''\beta'+\alpha'\beta'''\}\Delta(a,b)+\beta'''\beta'\Delta(b,b)\ \text{etc.}, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}, \end{gathered}$$

zu welchen als $n$te noch nach (3.) die Gleichung

$$\alpha'\Delta\alpha'+\beta'\Delta\beta'+\gamma'\Delta\gamma'+\dots = 0$$

kommt. Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit α' und die $n-1$ vorhergehenden respective mit $\frac{\alpha''}{x'-x''}$, $\frac{\alpha'''}{x'-x'''}$ u. s. f. und addirt alle, so werden zufolge (9.) die Gröfsen $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$ etc. sämmtlich eliminirt und man erhält:

$$13.\quad \Delta\alpha' = \alpha'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\Delta(a,a)$$
$$+\left(\beta'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}+\alpha'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\right)\Delta(a,b)$$
$$+\ \beta'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\}\Delta(b,b)+\text{etc.}$$

Man hat daher aus (12.) und (13.) die strengen Differentialformeln:

$$14.\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x'}{\partial(a,a)}=\alpha'\alpha';\quad \frac{\partial x'}{\partial(a,b)}=2\alpha'\beta';\quad \text{etc.}\\
&\frac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)}=\alpha'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots\right\};\quad \frac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}=\beta'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots\right\};\\
&\frac{\partial\alpha'}{\partial(a,b)}=\frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)}+\frac{\alpha'}{\beta'}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)};\quad \frac{\partial\alpha'}{\partial(b,c)}=\frac{\gamma'}{\beta'}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}+\frac{\beta'}{\gamma'}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial(c,c)};\quad \text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Mit den nöthigen Vertauschungen geben diese eleganten Formeln die ersten Differentialquotienten aller Unbekannten der n Systeme nach allen Coëfficienten des gegebenen Systems (1.). Man sieht aus denselben, dafs die ersten Differentialquotienten der Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades ohne weitere Rechnung unmittelbar durch die Werthe der Unbekannten gegeben sind, und dafs die ersten Differentialquotienten jeder der Unbekannten $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. nach den Gröfsen (a, b), (b, c) etc. sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Gröfsen (a, a), (b, b) etc. leicht zusammensetzen lassen, so dafs man nur diese letztern zu berechnen hat, von welchen wieder je zwei auseinander durch die Gleichung $\frac{\alpha'\partial\alpha'}{\partial(b,b)}=\frac{\beta'\partial\beta'}{\partial(a,a)}$ erhalten werden. Die ersten Differentialquotienten der Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. geben ferner sogleich auch die *zweiten* der Wurzeln x', x'' etc. Wenn die Incremente $\Delta(a, b)$ und $\Delta(b, a)$ verschieden sind, so hat man für $\Delta(a, b)$ in (12.) ihre halbe Summe $\frac{1}{2}(\Delta(a, b)+\Delta(b, a))$ zu setzen, und in (13.) den ersten Theil des mit $\Delta(a, b)$ multiplicirten Aggregats mit $\Delta(a, b)$, den zweiten mit $\Delta(b, a)$ zu multipliciren.

Aufstellung der numerischen Gleichungen, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in Bezug auf die Diagonale symmetrischen Form. Formeln zur Bestimmung der willkürlichen Constanten.

5.

Von einem System von der Form der Gleichungen (1.) hängen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der sieben Hauptplaneten unseres Sonnensystems ab. Die zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthigen numerischen Daten entnehme ich aus Herrn *Leverrier's* Aufsatz „Sur les variations séculaires des éléments des orbites etc." in den „Additions à la connaissance des temps pour l'an 1843."

Bezeichnet e die Excentricität der Merkursbahn, ϖ die Länge ihres Perihels, und setzt man

$$h = e\sin\varpi, \qquad l = e\cos\varpi,$$

werden ferner dieselben Gröfsen für Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus durch die nämlichen Buchstaben mit einem, zwei, drei, ... sechs Accenten bezeichnet, so hat man für die Gröfsen h und l, wenn man sich auf die Glieder beschränkt, die von der ersten Ordnung der Excentricitäten sind, folgende lineäre Differentialgleichungen, in welchen t die Zeit, in Julian. Jahren ausgedrückt, bedeutet:

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \{(0,1)+(0,2)+\ldots\}l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \ldots,\\
\frac{dl}{dt} &= -\{(0,1)+(0,2)+\ldots\}h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \ldots,\\
\frac{dh'}{dt} &= \{(1,0)+(1,2)+\ldots\}l' - \boxed{1,0}\,l - \boxed{1,2}\,l'' - \ldots,\\
\frac{dl'}{dt} &= -\{(1,0)+(1,2)+\ldots\}h' + \boxed{1,0}\,h + \boxed{1,2}\,h'' + \ldots,\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

(*Laplace*, Méc. cél. Buch II. §. 55.). Die Coëfficienten $(0,1)$ etc. und $\boxed{0,1}$ etc. hängen nur von den Massen der Planeten und von den grofsen Axen ihrer Bahnen ab. Bezeichnet man die ersten mit m und die halben Axen mit a, und versieht diese Gröfsen ebenso mit Accenten wie die andern Gröfsen, so sind je zwei Coëfficienten wie $(0,1)$ und $(1,0)$, $\boxed{0,1}$ und $\boxed{1,0}$ durch die Gleichungen

$$\text{II.}\quad\left\{\begin{aligned}
m\sqrt{a}\,(0,1) &= m'\sqrt{a'}\,(1,0),\\
m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} &= m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0}
\end{aligned}\right.$$

mit einander verbunden. Setzt man zur Integration der Gleichungen I.

$$\begin{aligned}
h &= N_0\sin(gt+\beta); & l &= N_0\cos(gt+\beta),\\
h' &= N_1\sin(gt+\beta); & l' &= N_1\cos(gt+\beta),\\
&\text{etc.} & &\text{etc.},
\end{aligned}$$

wo g und die Gröfsen N Constanten bedeuten, so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen I. sieben Bedingungsgleichungen zwischen g und den Gröfsen N:

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{aligned}
(g-(0,1)-(0,2)-\ldots)N_0 + \boxed{0,1}\,N_1 + \boxed{0,2}\,N_2 + \ldots &= 0,\\
\boxed{1,0}\,N_0 + (g-(1,0)-(1,2)-\ldots)N_1 + \boxed{1,2}\,N_2 + \ldots &= 0,\\
\boxed{2,0}\,N_0 + \boxed{2,1}\,N_1 + (g-(2,0)-(2,1)-\ldots)N_2 + \ldots &= 0,\\
\text{etc.}\qquad&
\end{aligned}\right.$$

Eliminirt man aus diesen 7 Gleichungen die Verhältnisse von 6 der Gröfsen N zur 7ten, so erhält man für g eine Gleichung siebenten Grades, also sieben Wurzeln $g, g', g'', \ldots . g^{\text{VI}}$, und ein zu jeder gehöriges System von Werthen der Verhältnisse der sieben Gröfsen N. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen I. sind dann:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} h = N_0 \sin(gt+\beta) + N_0' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l = N_0 \cos(gt+\beta) + N_0' \cos(g't+\beta') + \ldots, \\ h' = N_1 \sin(gt+\beta) + N_1' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l' = N_1 \cos(gt+\beta) + N_1' \cos(g't+\beta') + \ldots. \end{cases}$$

Da in jedem System nur g und die Verhältnisse der Gröfsen N_i bestimmt sind, eine der Gröfsen N_i und der Winkel β willkürlich bleiben, so hat man im Ganzen noch 14 willkürliche Constanten, welche durch die als gegeben anzusehenden Anfangswerthe der 14 Gröfsen h und l bestimmt werden müssen.

Nimmt man für die Gröfsen m und a folgende Zahlenwerthe an:

	Masse	Halbe gr. Axe
Mercur	$\frac{1}{1909706}$	0,38709812
Venus	$\frac{1}{401839}$	0,72333230
Erde	$\frac{1}{356354}$	1,00000000
Mars	$\frac{1}{2680337}$	1,52369352
Jupiter	$\frac{1}{1050}$	5,20116636
Saturn	$\frac{1}{3512}$	9,53787090
Uranus	$\frac{1}{17918}$	19,18330500

so werden (nach *Leverrier* a. a. O. S. 13) die Werthe der Gröfsen (i, k) in Sexagesimalsecunden ausgedrückt:

i \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	*	0,447992	0,103506	0,019797	0,00024016	0,00002855	0,00000247
1	2,910335	*	5,174037	0,468978	0,00409110	0,00047742	0,00004104
2	0,891538	6,860112	*	1,817218	0,00912341	0,00103919	0,00008866
3	0,027984	0,102046	0,298228	*	0,00310537	0,00032980	0,00002755
4	1,601114	4,198404	7,061544	14,645853	*	18,196879	0,934785
5	0,077059	0,198360	0,325649	0,629736	7,367279	*	1,390990
6	0,001852	0,004740	0,007723	0,014625	0,105202	0,386656	*

Durch Addition der unter einander stehenden Zahlen erhält man die Zahlen, welche in der Diagonale in III. von g abgezogen werden. Substituirt man ferner in III. die von Herrn *Leverrier* gegebnen, ebenfalls in Sexagesimalsecunden ausgedrückten, Werthe der Coëfficienten $\overline{|i,k|}$, so wird das aufzulösende System Gleichungen:

$$\text{V.}\quad\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}(g-5{,}509882)N_0+1{,}870086\,N_1+0{,}422908\,N_2+0{,}008814\,N_3\\ +0{,}148711\,N_4+0{,}003908\,N_5+0{,}000045\,N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}287865\,N_0+(g-11{,}811654)N_1+5{,}711900\,N_2+0{,}058717\,N_3\\ +0{,}728088\,N_4+0{,}018788\,N_5+0{,}000224\,N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}049099\,N_0+4{,}308033\,N_1+(g-12{,}970687)N_2+0{,}229326\,N_3\\ +1{,}689087\,N_4+0{,}042580\,N_5+0{,}000504\,N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}006235\,N_0+0{,}269851\,N_1+1{,}397369\,N_2+(g-17{,}596207)N_3\\ +5{,}304038\,N_4+0{,}125346\,N_5+0{,}001451\,N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}0002231N_0+0{,}00070948N_1+0{,}00218227N_2+0{,}00112462N_3\\ +(g-7{,}489041)N_4+4{,}815454N_5+0{,}035319N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}00000145N_0+0{,}00004522N_1+0{,}00013588N_2+0{,}00006565N_3\\ +11{,}893979N_4+(g-18{,}585410)N_5+0{,}232241N_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}0{,}00000006N_0+0{,}00000194N_1+0{,}00000579N_2+0{,}00000273N_3\\ +0{,}313829\,N_4+0{,}835482N_5+(g-2{,}325935)N_6\end{array}\right\}=0.
\end{array}\right.$$

Das hier vorliegende System hat noch keine in Bezug auf die Diagonale symmetrische Form, wie sie der Gegenstand der Betrachtung in den vorhergehenden Paragraphen gewesen ist. Diese Form kann ihm aber vermöge der Gleichungen II., die zwischen je zweien zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten Statt finden, sehr leicht gegeben werden *). Setzt man nämlich in den Gleichungen V.

$$\text{VI.}\quad N_0=\frac{KM_0}{\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}};\quad N_1=\frac{KM_1}{\sqrt{(m'\sqrt{a'})}};\quad \ldots\ldots\quad N_6=\frac{KM_6}{\sqrt{(m^{\mathrm{VI}}\sqrt{a^{\mathrm{VI}}})}},$$

und multiplicirt nach Ausführung dieser Substitution die erste Gleichung mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}$, die zweite mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m'\sqrt{a'})}$, u. s. f., so bleiben die Coëfficienten in der Diagonale unverändert und es ist nach II. klar, dafs nun allgemein der Coëfficient in der $i$ten Horizontal- und $k$ten Verticalreihe gleich dem Coëfficienten in der $k$ten Horizontal- und $i$ten Verticalreihe werden mufs.

---

*) Dadurch, dafs man früher diese vorläufige Präparation, durch welche die zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten gleich werden, verabsäumt hat, ist, abgesehen von der angewandten Auflösungsmethode, die Mühe der Rechnung fast verdoppelt worden.

Man erhält so mit Anwendung der Werthe

$$\text{VII.}\quad\left\{\begin{array}{l} 6{,}7564720-10 \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}, \\ 7{,}1628084 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m'\sqrt{a'})}, \\ 7{,}2240592 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m''\sqrt{a''})}, \\ 6{,}8316297 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m'''\sqrt{a'''})}, \\ 8{,}6684306 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}})}, \\ 8{,}4720856 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}})}, \\ 8{,}1940861 \; - \; - \; \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{VI}}\sqrt{a^{\text{VI}}})} \end{array}\right.$$

folgende Gleichungen, in denen statt der Coëfficienten selbst überall, ausgenommen in der Diagonale, ihre Logarithmen gesetzt sind:

$$\text{VIII.}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}(g-5{,}509882.0)M_0+9{,}8655252M_1+9{,}1586592M_2+7{,}8700057M_3\\ \qquad+7{,}2604292M_4+5{,}8766796M_5+4{,}2156819M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}9{,}8655252M_0+(g-11{,}8116540)M_1+0{,}6955298M_2+9{,}0999439M_3\\ \qquad+8{,}3565631M_4+6{,}9646084M_5+5{,}3191061M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}9{,}1586592M_0+0{,}6955298M_1+(g-12{,}970687.0)M_2+9{,}7528822M_3\\ \qquad+8{,}7832803M_4+7{,}3811819M_5+5{,}7325546M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}7{,}8700057M_0+9{,}0999439M_1+9{,}7528822M_2+(g-17{,}596207.0)M_3\\ \qquad+8{,}8878063M_4+7{,}4576700M_5+5{,}7989267M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}7{,}2604292M_0+8{,}3565631M_1+8{,}7832803M_2+8{,}8878063M_3\\ \qquad+(g-7{,}489041.0)M_4+0{,}8789822M_5+9{,}0223508M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}5{,}8766796M_0+6{,}9646084M_1+7{,}3811819M_2+7{,}4576700M_3\\ \qquad+0{,}8789822M_4+(g-18{,}585410.0)M_5+9{,}6439380M_6\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{l}4{,}2156819M_0+5{,}3191061M_1+5{,}7325546M_2+5{,}7989267M_3\\ \qquad+9{,}0223508M_4+9{,}6439380M_5+(g-2{,}325935.0)M_6\end{array}\right\}=0.
\end{array}\right.$$

Damit die Gröfsen M völlig bestimmt seien, füge ich zu den Gleichungen VIII. noch die Bedingung

$$\text{IX.}\quad M_0^2+M_1^2+M_2^2+\ldots\ldots+M_6^2 = 1.$$

Die algebraischen Ausdrücke der mit (i,k) und $\overline{|i,k|}$ bezeichneten Gröfsen haben den Factor $m^{(k)}$. Ändert man daher die für die Massen oben angenommnen Zahlenwerthe, indem man der Masse $m^{(k)}$ einen wenig von 1 verschiednen Factor $1+\mu^{(k)}$ giebt, so sind die für (i,k) und $\overline{|i,k|}$ angegebnen Zahlen noch mit diesem Factor $1+\mu^{(k)}$ zu multipliciren. Hiernach erhält in der $(i+1)$ten Gleichung die von g abzuziehende Zahl, die in V. und VIII. dieselbe geblieben ist, die Änderung

$$(i,0)\cdot\mu+(i,1)\cdot\mu'\ldots.+(i,6)\cdot\mu^{\text{VI}},$$

wo jedesmal der Term $(i,i)\cdot\mu^{(i)}$ auszulassen ist. Nach der Art, wie die Gleichungen VIII. aus V. abgeleitet sind, wird in VIII., wenn i und k von einander verschieden sind, der Coëfficient von M_k in der $(i+1)$ten Gleichung

$$\sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}\cdot\boxed{i,k},$$

und erhält daher den Factor

$$\sqrt{((1+\mu^{(i)})(1+\mu^{(k)}))},$$

wofür man, da die Quadrate und Producte der Gröfsen μ vernachlässigt werden, einfacher $1+\frac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)})$ setzen kann. Auf diese Weise werden die Variationen der Coëfficienten der Gleichungen VIII. bestimmt, welche kleinen Änderungen der angenommenen Werthe der Planetenmassen entsprechen.

Sind h_0, l_0; h'_0, l'_0 etc. die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von h, l; h', l' etc., und setzt man

$$h_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=H^{(i)},\qquad l_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=L^{(i)},$$

bezeichnet man ferner die den verschiednen Wurzeln g, g', ... g^{VI} entsprechenden Werthe von M_i mit M_i, M'_i, ... M_i^{VI}, so hat man zur Bestimmung der 14 willkürlichen Constanten K, β; K', β' etc. zufolge (IV.) und (VI.) die beiden Systeme Gleichungen:

$$\begin{aligned}
H &= M_0\cdot K\sin\beta+M'_0\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
H' &= M_1\cdot K\sin\beta+M'_1\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\sin\beta+M'_6\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
L &= M_0\cdot K\cos\beta+M'_0\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
L' &= M_1\cdot K\cos\beta+M'_1\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\cos\beta+M'_6\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man nach §. 3., da die Gröfsen M_0, M_1 etc. mit den dort gebrauchten α, β etc. übereinkommen,

$$\begin{aligned}
A &= K\sin\beta = HM_0+H'M_1\ldots.+H^{\text{VI}}M_6,\\
B &= K\cos\beta = LM_0+L'M_1\ldots.+L^{\text{VI}}M_6,\\
A' &= K'\sin\beta' = HM'_0+H'M'_1\ldots.+H^{\text{VI}}M'_6,\\
B' &= K'\cos\beta' = LM'_0+L'M'_1\ldots.+L^{\text{VI}}M'_6,\\
&\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

woraus sich die Werthe der Winkel β, β' etc. und der Gröfsen K, K' etc. ergeben, aus welchen letztern durch die Formel (VI.)

$$N_i^{(h)} = \frac{M_i^{(h)} K^{(h)}}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}}$$

die Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ folgen.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ und der Winkel $\beta^{(h)}$ können die Gleichungen

$$k_0^{(i)} = N_i \sin\beta + N_i' \sin\beta' \ldots\ldots + N_i^{\text{vi}} \sin\beta^{\text{vi}},$$
$$l_0^{(i)} = N_i \cos\beta + N_i' \cos\beta' \ldots\ldots + N_i^{\text{vi}} \cos\beta^{\text{vi}}$$

dienen, welche aus (IV.) für $t = 0$ folgen.

Wiederholte Transformationen des Systems der Gleichungen VIII.

6.

In den Gleichungen VIII. bemerkt man, dafs im Allgemeinen die Zahlencoëfficienten, die in der Diagonale stehen, beträchtlich gröfser sind als die übrigen; von welchen letztern die Logarithmen angesetzt sind. Wäre dies überall der Fall, so würde man unmittelbar durch ein leichtes und schnelles Näherungsverfahren, welches ich weiter unten auseinander setzen werde, die Werthe der Unbekannten mit beliebiger Strenge finden können. Sobald aber auch nur einzelne der Coëfficienten, die nicht in der Diagonale stehn, beträchtliche Werthe haben, wie es in VIII. der Fall ist, kann dies Verfahren nicht angewendet werden. Dieser hinderliche Umstand läfst sich jedoch dadurch beseitigen, dafs man auf zweckmäfsige Weise die Gleichungen transformirt, indem man mittelst einfacher lineärer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Gröfsen einführt.

Es seien nämlich die Gleichungen

$$\ldots\ldots + (g-a)M_i + \ldots\ldots + \quad cM_k \quad + \ldots\ldots + h_{i,l}M_l + \ldots\ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots + \quad cM_i \quad + \ldots\ldots + (g-b)M_k + \ldots\ldots + h_{k,l}M_l + \ldots\ldots = 0$$

zwei von den Gleichungen des Systems VIII., in welchen der aufserhalb der Diagonale befindliche Coëfficient c einen erheblichen Werth hat: so kann man dadurch, dafs man M_i und M_k durch andere Unbekannte P_i und P_k ersetzt und die beiden Gleichungen gehörig zu zwei andern combinirt, das gegebne System in ein andres von ähnlicher Form verwandeln, in welchem, während g unverändert bleibt, der Coëfficient, welcher an die Stelle von c tritt, *verschwindet.* Setzt man nämlich

$$\text{X.}\quad \begin{cases} M_i = \cos\alpha\, P_i - \sin\alpha\, P_k, \\ M_k = \sin\alpha\, P_i + \cos\alpha\, P_k, \end{cases}$$

so wird jetzt in jeder von den beiden Gleichungen die Gröfse g in zwei Gliedern stehn. Man kann aber aus ihnen sogleich wieder zwei solche Gleichungen ableiten, die g nur in Einem Glied enthalten, wenn man einmal die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die 2te mit $\sin\alpha$ multiplicirt und sie nach geschehner Multiplication addirt, und dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt, und beide nach geschehner Multiplication ebenfalls addirt. Die neuen Gleichungen werden dadurch

$$\begin{aligned} \ldots + \{g - a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha\}P_i + \ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\}P_k + \ldots \\ + (h_{i,l}\cos\alpha + h_{k,l}\sin\alpha)M_l + \ldots = 0, \\ \ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\}P_i + \ldots + \{g - a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha\}P_k + \ldots \\ + (-h_{i,l}\sin\alpha + h_{k,l}\cos\alpha)M_l + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Man sieht, dafs hierdurch die Coëfficienten, welche in beiden Gleichungen dem c entsprechen, wieder wie früher einander gleich werden. Auch sonst behält das System seine Symmetrie, wenn statt M_i, M_k überall P_i, P_k eingeführt wird; denn im transformirten System werden die Coëfficienten von P_i und P_k in der $(l+1)$ten Gleichung

$$h_{l,i}\cos\alpha + h_{l,k}\sin\alpha \quad \text{und} \quad -h_{l,i}\sin\alpha + h_{l,k}\cos\alpha,$$

welche mit den Coëfficienten von M_l in der oben angegebnen transformirten $(i+1)$ten und $(k+1)$ten Gleichung übereinkommen, weil nach der Eigenschaft des ursprünglichen Systems VIII. man $h_{l,i} = h_{i,l}$, $h_{l,k} = h_{k,l}$ hat.

Man kann nun den noch willkürlichen Winkel α so bestimmen, dafs der an die Stelle von c getretene Coëfficient

$$(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha = 0$$

wird, was für α die Gleichung

$$\text{XI.}\quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2c}{b-a}$$

giebt. Sind a' und b' die neuen, den frühern a und b entsprechenden, Gröfsen in der Diagonale, so hat man

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha, \\ b' &= a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}$$

und daher zur bequemen Berechnung von a' und b' die Formeln

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} b' + a' = b + a, \\ b' - a' = \dfrac{b-a}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2c}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

welche zugleich durch den für $b'-a'$ angegebnen doppelten Ausdruck eine Controlle der Rechnung enthalten. Die Werthe der beiden Systeme Gröfsen

$$h'_{i,l} = \cos\alpha\cdot h_{i,l}+\sin\alpha\cdot h_{k,l},$$
$$h'_{k,l} = \cos\alpha\cdot h_{k,l}-\sin\alpha\cdot h_{i,l},$$

in welchen l von i und k verschieden ist, können ebenfalls leicht controllirt werden, da der Winkel α derselbe bleibt, und daher zwischen den Summen der den verschiednen l entsprechenden Gröfsen die nämlichen Gleichungen Statt finden.

Die Summen der Quadrate der Zahlencoëfficienten des gegebnen und transformirten Systems sind einander gleich, wenn man jeden Coëfficienten so oft als er vorkommt nimmt, d. h. die aufserhalb der Diagonale befindlichen zweimal. Denn für jedes l ist $h'^2_{i,l}+h'^2_{k,l} = h^2_{i,l}+h^2_{k,l}$; ferner

$$(a'+b')^2+(a'-b')^2\cos^2 2\alpha+(a'-b')^2\sin^2 2\alpha = (a+b)^2+(a-b)^2+4c^2,$$

und daher

$$a'^2+b'^2 = a^2+b^2+2c^2.$$

Theilt man daher die Summe der Quadrate der Zahlencoëfficienten in die Summe der Quadrate der in der Diagonale und in die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wächst durch die Transformation die erste Summe um $2c^2$, während die zweite Summe sich um dieselbe Gröfse $2c^2$, nämlich um die Summe der Quadrate der beiden vernichteten Coëfficienten, verkleinert hat. Wiederholt man die Transformation, indem man immer nur für zwei Unbekannte andre Gröfsen einführt, und zwei Gleichungen auf die angegebne Art zu zwei andern Gleichungen combinirt, so wird für jedes nach und nach durch die angegebne Transformation erhaltene System Gleichungen der Satz gelten,

> *dafs die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Coëfficienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebnen System Gleichungen, und dafs die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Coëfficienten sich um dieselbe Gröfse vermehrt hat.*

Man ersieht aus diesem Satze, dafs man in allen Fällen die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten nach und nach so klein als man nur will machen kann, so dafs sie kleiner werden kann als jede gegebne noch so kleine Gröfse. *Es lassen sich also auch alle einzelnen aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten durch wiederholte Anwendung der angegebnen Transformation unendlich verkleinern.* Man kann so immer dem Grenzfall, wo jene Coëfficienten ganz verschwinden und die

Gleichungen sich unmittelbar auflösen lassen, beliebig nahe kommen, ohne dafs es nothwendig wäre, dafs, wie in unserm Fall, schon Anfangs die Mehrzahl der Glieder aufserhalb der Diagonale von denen in derselben an Gröfse übertroffen würde.

Ist nämlich n die Anzahl der Gleichungen und S nach der ersten Transformation die Summe der Quadrate der $n(n-1)$ aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wird, da immer wenigstens zwei dieser Coëfficienten in jedem transformirten System $=0$ sind, das Quadrat des gröfsten $>\frac{S}{(n-2)(n+1)}$. Wenn man daher durch jede neue Transformation immer den gröfsten der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten zerstört, so wird die Summe im nächsten System $<S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)$, im nächst folgenden $<S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)^2$, und nach i Transformationen $<S\left(1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)^i$, welche Gröfse mit wachsendem i kleiner als jede gegebne werden kann. Diese Summen werden aber in der Wirklichkeit viel schneller abnehmen, da die Verringerung nur dann genau in dem Verhältnisse $1:1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}$ Statt fände, wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten aufser den zweien verschwindenden sämmtlich einander gleich wären. Man sieht zugleich, dafs die Transformation mit dem meisten Erfolg angewandt wird, wenn unter den aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten ein Paar gleiche zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten einen vorzugsweise bedeutenden Werth haben. Aus dem Umstande, dafs man durch den unendlich fortgesetzten Procefs die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten unendlich klein machen kann, folgt, dafs die Gleichung $n$ten Grades lauter reelle Wurzeln hat. Denn nach jeder Transformation bleiben die Coëfficienten reell, und wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen verschwinden, werden die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in der Diagonale die verschiednen Werthe von g.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt noch der Satz, dafs die Summe der Coëfficienten in der Diagonale gleich der Summe der Gröfsen g und die Summe der Quadrate *aller* Coëfficienten gleich der Summe ihrer Quadrate sein mufs, wenn man für die Coëfficienten in der Diagonale immer die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen nimmt. Denn die beiden Summen behalten nach jeder Transformation denselben Werth wie in den ursprünglichen Gleichungen VIII. und müssen ihn daher noch in dem Grenzfalle behalten, in welchem die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale verschwinden und die in der Diagonale befindlichen den Gröfsen g gleich werden.

In den Gleichungen VIII. ist unter allen Coëfficienten aufserhalb der Diagonale der gröfste in der 5ten und 6ten Gleichung, dessen Logarithmus $= 0{,}8789822$. Dieser wurde bei der Rechnung zuerst zu Null gemacht, und so wurde auch bei allen folgenden Substitutionen im Allgemeinen die Regel befolgt, jedesmal den gröfsten von den aufserhalb der Diagonale vorhandnen Coëfficienten gleich Null zu machen. Im Ganzen wurden nach und nach zehn Paare von Unbekannten durch neue ersetzt. Da die Ausführung einer Substitution sehr schnell gemacht ist, und jede derselben für die Auffindung aller Systeme der Werthe der Unbekannten, welche die sieben Auflösungen ergeben, zugleich Gewinn bringt, so schien es am vortheilhaftesten, dieser für alle sieben Auflösungen gleichzeitig vorbereitenden Rechnung die angegebne Ausdehnung zu geben, obgleich man schon früher zur Anwendung einer Näherungsmethode hätte schreiten können. Wenn die jedesmalige erste Unbekannte mit (0), die zweite mit (I) u. s. f. bezeichnet wird, so sind die verschiednen Paare, die nach und nach durch neue ersetzt wurden, und die zu der Substitution dienenden Winkel α folgende:

$$\text{XIII.}\quad\left\{\begin{array}{llllll}
(\mathrm{IV}) & \text{und} & (\mathrm{V}) & \ldots\ldots & \alpha = & +26^{0}\,52'\,38'',12, \\
(\mathrm{I}) & - & (\mathrm{II}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +41\;\;40\;\;\;5,92, \\
(0) & - & (\mathrm{I}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +17\;\;\;9\;20,35, \\
(\mathrm{II}) & - & (\mathrm{III}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +36\;\;22\;14,58, \\
(\mathrm{IV}) & - & (\mathrm{VI}) & \ldots\ldots & - \;\; - & -11\;\;54\;41,37, \\
(0) & - & (\mathrm{III}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +\;\;1\;\;31\;11,46, \\
(\mathrm{I}) & - & (\mathrm{II}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +\;\;2\;\;\;7\;52,40, \\
(\mathrm{V}) & - & (\mathrm{VI}) & \ldots\ldots & - \;\; - & -\;\;0\;\;57\;36,18, \\
(0) & - & (\mathrm{II}) & \ldots\ldots & - \;\; - & -\;\;0\;\;59\;46,42, \\
(\mathrm{I}) & - & (\mathrm{III}) & \ldots\ldots & - \;\; - & +\;\;1\;\;38\;\;\;7,62.
\end{array}\right.$$

Man sieht, dafs nur die Unbekaunten (0), (I), (II), (III) und wiederum die Unbekannten (IV), (V), (VI) mit einander verbunden worden sind, und so hat sich bei diesen Transformationen die Gruppirung der *sieben* Planeten in *vier* und *drei* von selber dargeboten, ohne dafs hiebei von der Strenge etwas geopfert werden durfte.

Die unten folgende Tabelle giebt die *zehn* Systeme, in welches das gegebne nach und nach transformirt worden ist, wobei ich in jedem System den Coëfficient, welcher in dem folgenden Systeme beseitigt ist, durch Sternchen bezeichnet habe.

Schemata der Gleichungen (VIII.) und der zehn transformirten Systeme.

(Es ist aufser den Gröfsen der Diagonale abwechselnd blofs die obere oder die untere Hälfte jedes Schemas angesetzt, das letzte jedoch vollständig ausgefüllt worden. Nur in der Diagonale stehn Numeri, vor welchen die Gröfsen g weggelassen worden, sonst überall die Logarithmen, bei welchen durchweg —10 zu ergänzen ist. Wenn die Logarithmen zu negativen Numeris gehören, ist es durch n angezeigt.)

Gegebenes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	—5.5098820	9.8655252	9.1586592	7.8700057	7.2604292	5.8766796	4.2156819	0
		—11.8116540	10.6955298	9.0999439	8.3565631	6.9646084	5.3191061	1
0	—5 5098820		—12.9706870	9.7528822	8.7832803	7.3811819	5.7325546	2
1	9.8655252	—11.8116540		—17.5962070	8.8878063	7.4576700	5.7989267	3
2	9.1586592	*10.6955298	—12.9706870		—7.4890410	*10.8789822	9.0223508	4
3	7.8700057	9.0999439	9.7528872	—17.5962070		—18.5854100	9.6439380	5
4	7.2197860	8.3157530	8 7422682	8.8462593	—3.6533425		—2.3259350	6
5	6.8787034n	7.9755587n	8.4031471n	8.5099694n	*	—22.4211085		
6	4.2156819	5.3191061	5.7325546	5.7989267	9.4669363	9.5382132	—2.3259350	

Erstes transformirtes System.

Zweites transformirtes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	—5.5098820	*9.8088089	9.5799453n	7.8700057	7.2197860	6.8787034n	4.2156819	0
		—7.3968844	*	9.6724433	8.7175126	8.3780737n	5.7117103	1
0	—5.3111122		—17.3854565	9.5304363	8.4395088	8.1009230n	5.4231118	2
1	*	—7.5956542		—17.5962070	8.8462593	8.5099694n	5.7989267	3
2	9.5601792n	9.0497211	—17.3854565		—3.6533425	*	9.4669363	4
3	9.1638436	9.6505590	*9.5304363	—17.5962070		—22.4211085	9.5382132	5
4	8.2298539	8.6934635	8.4395088	8.8462593	—3.6533425		—2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.1009230n	8.5099694n	*	—22.4211085		
6	5.2242105	5.6876443	5.4231118	5.7989267	9.4669363	9.5382132	—2.3259350	

Drittes transformirtes System.

Viertes transformirtes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	—5.3111122	*	9.3138512n	9 5222066	8.2298539	7.8902619n	5.2242105	0
		—7.5956542	9.5508572	9.4678118	8.6934635	8.3540409n	5.6876443	1
0	—5.3111122		—17.1356554	*	8.8046407	8.4675546n	5.7683052	2
1	*	—7.5956542		—17.8460080	8.6042303	8.2688686n	5.5436860	3
2	9.3138512n	9.5508572	—17.1356554		—3.6533425	*	*9.4669363	4
3	*9.5222066	9.4678118	*	—17.8460080		—22.4211085	9.5382132	5
4	8.2203099	8.6839195	8.7951029	8.5946971	—3.7151584		—2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.4675546n	8 2688686n	8.8529238n	—22.4211085		
6	7.4465920	8.0102012	8.1212408	7.9207282	*	9.5287595	—2.2641190	

Fünftes transformirtes System.

0. I. II. III. IV. V. VI.

Sechstes transformirtes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	−5.3022811	7.8914390	*9.3136984n	*	8.2466210	7.9168235n	7.5728881	0
	———	−7.5956542	9.5508572	9.4676590	4.6839195	8.3540409n	8.0102012	1
0	−5.3022811	———	−17.1356554	7.7374784	8.7951029	8.4675546n	8.1212408	2
1	6.0970453	−7.5824233	———	−17.8548391	8.5896508	8.2638698	7.9156789	3
2	9.3140047n	*	−17.1488863	———	−3.7151584	8.8529238n	*	4
3	*	9.4676593	7.7368910n	−17.8548391	———	−22.4211085	9.5287595	5
4	8.2466210	8.7040099	8.7821072	8.5896508	−3.7151584	———	−2.2641190	6
5	7.9168235n	8.3742385n	8.4546278n	8.2638698n	8.8529238	−22.4211085	———	
6	7.5728881	8.0302850	8.1082409	7.9156789	*	*9.5287595	−2.2641190	

Siebentes transformirtes System.

Achtes transformirtes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	−5.3022811	6.0970453	*9.3140047n	*	8.2466210	7.9200467n	7.5564556	0
	———	−7.5824233	*	9.4676593	8.7040099	8.3774615n	8.0138517	1
0	−5.2986987	———	−17.1488863	7.7368910n	8.7821072	8.4578325n	8.0917138	2
1	6.0969796	−7.5824233	———	−17.8548391	8.5896508	8.2670610n	7.8990825	3
2	*	4.3372594	−17.1524687	———	−3.7151584	8.8528628n	7.0770747n	4
3	5.9771051	*9.4676598	7.7368253n	−17.8548391	———	−22.4267712	*	5
4	8.2198352	8.7040099	8.7842368	8.5896508	−3.7151584	———	−2.2584562	6
5	7.8931143n	8.3774615n	8.4599504n	8.2670610n	8.8528628n	−22.4267712	———	
6	7.5296841	8.0138517	8.0938446	7.8990825	7.0770747n	*	−2.2584562	

Neuntes transformirtes System.

Zehntes transformirtes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
XIV.	−5.2986987	6.1061176	*	5.9602777	8.2198352	7.8931143n	7.5296841
	6.1061176	−7.5740431	6.1861782n	*	8.7132591	8.3867961n	8.0230921
	*	6.1861782n	−17.1524687	7.7366533n	8.7842368	8.4599504n	8.0938446
	5.9602777	*	7.7366533n	−17.8632192	8.5730312	8.2505934n	7.8824471
	8.2198352	8.7132591	8.7842368	8.5730312	−3.7151584	8.8528628n	7.0770747n
	7.8931143n	8.3867961n	8.4599504n	8.2505934n	8.8528628n	−22.4267712	*
	7.5296841	8.0230921	8.0938446	7.8824471	7.0770747n	*	−2.2584562

In dem System VIII. geben die in der Diagonale befindlichen Zahlen noch keine Vorstellung von der Gröfse und der Aufeinanderfolge der sieben Wurzeln g; aber schon sogleich nach der zweiten Transformation erhält man durch diese Zahlen eine starke Annäherung an alle *sieben* Wurzeln auf einmal, welche bald so grofs wird, dafs sie nur noch kleiner Correctionen bedarf.

Wenn man alle in (XIII.) angegebenen Substitutionen von der Form (X.) zusammenfafst, so dafs die Unbekannten M des Systems (VIII.) unmittelbar durch die Unbekannten des letzten transformirten Systems, welche ich mit

$$R_0,\ R_1,\ \ldots\ R_6$$

bezeichnen will, ausgedrückt werden, so findet man, wenn man statt der Zahlen die Logarithmen, aber mit den Vorzeichen der Zahlen, setzt:

$$\text{XV.}\quad\begin{cases} M_0 = 9{,}9799291\,R_0 - 9{,}4703632\,R_1 + 8{,}4405137\,R_2 - 8{,}2284096\,R_3, \\ M_1 = 9{,}3810153\,R_0 + 9{,}8476757\,R_1 - 9{,}7461559\,R_2 + 9{,}5662156\,R_3, \\ M_2 = 9{,}2410836\,R_0 + 9{,}8089612\,R_1 + 9{,}7638502\,R_2 - 9{,}6689433\,R_3, \\ M_3 = 8{,}0433639\,R_0 + 8{,}6533681\,R_1 + 9{,}7729660\,R_2 + 9{,}9052324\,R_3, \\ M_4 = \quad 9{,}9409002\,R_4 - 9{,}6581085\,R_5 + 9{,}2467542\,R_6, \\ M_5 = \quad 9{,}6457624\,R_4 + 9{,}9495307\,R_5 + 9{,}0343951\,R_6, \\ M_6 = -9{,}3147106\,R_4 - 8{,}2146974\,R_5 + 9{,}9904855\,R_6. \end{cases}$$

So oft vermittelst der Gleichungen X. zwei Unbekannte durch zwei neue ersetzt werden, bleibt die Summe ihrer Quadrate unverändert. Da niemals eine der vier ersten Unbekannten mit einer der drei letzten verbunden worden ist, sondern beide Gruppen nur unter sich, so mufs man folgende zwei Gleichungen besonders haben:

$$M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,$$
$$M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 = R_4^2 + R_5^2 + R_6^2.$$

Setzt man links statt der Gröfsen M ihre Ausdrücke XV., so erhält man für die Coëfficienten der vier ersten Gleichungen XV. zehn und für die der drei letzten sechs Bedingungen, die zur Prüfung der Zahlen in (XV.) benutzt worden sind. Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt auch noch, dafs, um umgekehrt die Gröfsen R durch die Gröfsen M auszudrücken, man in jeder der beiden Gruppen in XV. nur die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander zu vertauschen braucht.

Näherungsmethode zur numerischen Auflösung des Systems der Gleichungen (1.), wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten als kleine Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden können.

7.

Wenn in dem System der n Gleichungen (1.)

$$\begin{array}{llllll} \{(a,a)-x\}\alpha + & (a,b)\beta + & (a,c)\gamma & \ldots + & (a,p)\varpi & = 0, \\ (b,a)\alpha & + \{(b,b)-x\}\beta + & (b,c)\gamma & \ldots + & (b,p)\varpi & = 0, \\ (c,a)\alpha + & (c,b)\beta & + \{(c,c)-x\}\gamma & \ldots + & (c,p)\varpi & = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (p,a)\alpha + & (p,b)\beta + & (p,c)\gamma & \ldots + & \{(p,p)-x\}\varpi & = 0, \end{array}$$

die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten (a, b), (a, c) etc. als kleine Gröfsen *erster* Ordnung betrachtet werden können, so lassen sich die Werthe der Unbekannten durch eine successive Annäherung finden, welche sehr rasch zum Ziele führt und jede Strenge verstattet.

Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen den Werth einer Gröfse u durch

$$u = \Delta^0 u + \Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u \text{ etc.},$$

wo $\Delta^0 u$ den Näherungswerth, $\Delta' u$, $\Delta'' u$ etc. seine successiven Correctionen von den verschiednen Ordnungen bedeuten, so dafs $\Delta^i u$ eine kleine Gröfse der $i$ten Ordnung ist, so findet man in unserm Falle diese immer kleiner werdenden Gröfsen auf folgende Weise. Zuerst bemerke ich, dafs man als Näherungswerth von x jede der n Gröfsen

$$(a, a), \quad (b, b), \quad (c, c), \quad \ldots\ldots \quad (p, p)$$

annehmen kann. Für jede dieser Annahmen erhält man ein System von Werthen der Unbekannten. Es reicht hin, das Verfahren für eine dieser Annahmen $\Delta^0 x = (a, a)$ auseinander zu setzen. Man erhält für diese Annahme zunächst

$$\Delta^0 x + \Delta' x = (a, a), \quad \Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad \Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$\Delta' \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(b, a)}{(a, a) - (b, b)}, \quad \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{(c, a)}{(a, a) - (c, c)}, \quad \text{etc.}$$

Der Werth von x weicht nämlich von (a, a) nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab, weshalb die in (XIV.) in der Diagonale befindlichen Coëfficienten die Werthe der Wurzeln x sogleich mit so grofser Annäherung geben, dafs es nur einer leichten Verbesserung bedarf, um die wahren Werthe zu erhalten. Die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. sind Gröfsen der *ersten* Ordnung; der Werth von α selber, welcher $=$ $\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.}\right)}}$, weicht daher von der *Einheit* ebenfalls nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab. Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$ etc. von der *zweiten* Ordnung erhält man aus den Gleichungen:

$$\{(a, a) - (b, b)\} \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = (b, c) \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + (b, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$\{(a, a) - (c, c)\} \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = (c, b) \Delta' \frac{\beta}{\alpha} + (c, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Die Correctionen von x von der zweiten und dritten Ordnung erhält man hierauf durch die Gleichung

$$\Delta^2 x + \Delta^3 x = (a, b) \left\{\Delta' \frac{\beta}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha}\right\} + (a, c) \left\{\Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha}\right\} + \text{etc.}$$

Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. von der *dritten* und *vierten* Ordnung ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-\{\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-(\Delta^2 x+\Delta^3 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

etc. etc.

Man erhält dann $\Delta^4 x+\Delta^5 x$ und $\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$, etc., $\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}$, etc. durch die Gleichungen

$$\Delta^4 x+\Delta^5 x=(a,b)\left\{\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\dots,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\dots-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\dots-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\dots,$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\dots,$$

etc. etc.

Endlich erhält man

$$\Delta^6 x+\Delta^7 x=(a,b)\left\{\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\dots,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^7\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\ldots+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right),$$
$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^7\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\ldots+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$
. . . . *).

---

*) Wenn in den vorgelegten Gleichungen (1.) die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale nur in *einer* Horizontal- und Verticalreihe klein sind, in den übrigen aber von beliebiger Gröfse, so kann man durch ein ähnliches Näherungsverfahren immer *eine* Wurzel der Gleichung $n$ten Grades und die ihr entsprechenden Werthe der Unbekannten finden. Sind z. B. die Gröfsen (ab), (ac), ... (ap) klein, so erhält man wieder aus der ersten Gleichung den Näherungswerth $x=(aa)$ bis auf Gröfsen 2ter Ordnung exclusive genau. Wenn man diesen Werth in die $n-1$ folgenden Gleichungen substituirt, so erhält man durch strenge Auflösung eines Systems von $n-1$ linearen Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, ... $\frac{\varpi}{\alpha}$ bis auf Gröfsen 3ter Ordnung excl. genau. Substituirt man diese Werthe wieder in die erste Gleichung, so erhält man den Werth von x bis auf Gröfsen 4ter Ordnung excl. genau, und mit diesem Werthe von x erhält man dann wieder durch Auflösung von $n-1$ linearen Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. bis zu der 5ten Ordnung excl. genau, u. s. f. Es wird hiebei von Vortheil sein, in den jedesmal aufzulösenden $n-1$ linearen Gleichungen den ersten Näherungswerth von x in den Coëfficienten beizubehalten und die von den Correctionen von x herrührenden Gröfsen mit den ganz constanten Gliedern zu vereinigen, wodurch die Coëfficienten der linearen Gleichungen immer dieselben bleiben und sich nur ihre ganz constanten Glieder ändern, so dafs der gröfste Theil der numerischen Rechnung, welche zur Auflösung der linearen Gleichungen gemacht werden mufs, für die Correctionen aller Ordnungen unverändert beibehalten werden kann. Setzt man

$$x = (aa)+\delta' x+\delta'' x+\delta''' x \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}x$ von der $(2i)$ten Ordnung ist, ferner

$$\frac{\beta}{\alpha} = \delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\delta'''\frac{\beta}{\alpha} \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}$ von der $(2i-1)$ten Ordnung ist; setzt man endlich

$$\delta' x+\delta'' x+\ldots+\delta^{(i)}x = (x)_i,$$
$$\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\ldots+\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_i,$$

und gebraucht dieselben Bezeichnungen in Bezug auf $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha}$, etc., so werden die Correctionen der Gröfse x von der $(2i)$ten und der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$. etc. von der $(2i+1)$ten Ordnung aus den bereits gefundenen Correctionen niedriger Ordnung durch die folgen-

Nimmt man z. B. für das System der n Gleichungen (1.) die 7 Gleichungen XIV., nachdem man darin alle Zeichen umgekehrt hat, und nimmt als Näherungswerth von x oder g denjenigen, welchen die erste Gleichung giebt, so findet man nach und nach:

$$\begin{aligned} \Delta^0 x + \Delta^1 x &= 5'',2986987 \\ \Delta^2 x + \Delta^3 x &= + \qquad 1747\cdot 6 \\ \Delta^4 x + \Delta^5 x &= - \qquad\quad 2\cdot 3 \\ \Delta^6 x + \Delta^7 x &= \qquad\quad 0\cdot 0 \\ \hline x = g &= 5'',2988732 \end{aligned}$$

$\Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\delta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1 \frac{\beta}{\alpha} = +0{,}00005611390$	$\Delta^1 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^1 \frac{\delta}{\alpha} = +0{,}000007263263$
$\Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00023818658\cdot 9$	$\Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005383551\cdot 3$	$\Delta^2 \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000031224732\cdot 1$
$\Delta^3 \frac{\beta}{\alpha} = - \quad 102738\cdot 2$	$\Delta^3 \frac{\gamma}{\alpha} = - \quad 21373\cdot 6$	$\Delta^3 \frac{\delta}{\alpha} = - \quad 110879\cdot 5$
$\Delta^4 \frac{\beta}{\alpha} = - \quad 31046\cdot 2$	$\Delta^4 \frac{\gamma}{\alpha} = + \quad 7022\cdot 3$	$\Delta^4 \frac{\delta}{\alpha} = + \quad 40788\cdot 6$
$\Delta^5 \frac{\beta}{\alpha} = + \quad 220\cdot 7$	$\Delta^5 \frac{\gamma}{\alpha} = + \quad 48\cdot 1$	$\Delta^5 \frac{\delta}{\alpha} = + \quad 262\cdot 2$
$\Delta^6 \frac{\beta}{\alpha} = - \quad 33\cdot 2$	$\Delta^6 \frac{\gamma}{\alpha} = - \quad 7\cdot 5$	$\Delta^6 \frac{\delta}{\alpha} = - \quad 43\cdot 8$
$\Delta^7 \frac{\beta}{\alpha} = - \quad 0\cdot 3$	$\Delta^7 \frac{\gamma}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$	$\Delta^7 \frac{\delta}{\alpha} = - \quad 0\cdot 3$
$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00018278774$	$\frac{R_2}{R_0} = \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005397862$	$\frac{R_3}{R_0} = \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000024031342$

---

den Gleichungen erhalten:

$$\delta^{(i)} x = (ab)\,\delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} + (ac)\,\delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} = \{(bb)-(aa)\}.\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + (bc).\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} = (cb).\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + \{(cc)-(aa)\}.\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Die Näherungsmethode wird hier beschwerlicher, weil man die $n-1$ linearen Gleichungen streng aufzulösen hat, welche im obigen Falle ebenfalls durch Näherung leicht aufgelöst werden konnten, so dafs der Vortheil der Methode sich in diesem Falle grofsentheils darauf beschränkt, dafs man, um den Werth von x zu finden, nicht die Gleichung $n$ten Grades zu bilden und aufzulösen braucht.

$\Delta^0 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\zeta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\eta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010476254$	$\Delta^1 \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00045646310$	$\Delta^1 \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011137195$
$\Delta^2 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 23384\cdot 3$	$\Delta^2 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 4349994$	$\Delta^2 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 43279\cdot 0$
$\Delta^3 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\quad 13690\cdot 2$	$\Delta^3 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 55503\cdot 2$	$\Delta^3 \frac{\eta}{\alpha} = +\quad 11793\cdot 7$
$\Delta^4 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\quad 70\cdot 2$	$\Delta^4 \frac{\zeta}{\alpha} = -\quad 5502\cdot 3$	$\Delta^4 \frac{\eta}{\alpha} = +\quad 100\cdot 9$
$\Delta^5 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 14\cdot 8$	$\Delta^5 \frac{\zeta}{\alpha} = -\quad 89\cdot 9$	$\Delta^5 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 13\cdot 6$
$\Delta^6 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 0\cdot 1$	$\Delta^6 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 5\cdot 8$	$\Delta^6 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 0\cdot 2$
$\Delta^7 \frac{\varepsilon}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$	$\Delta^7 \frac{\zeta}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$	$\Delta^7 \frac{\eta}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$
$\frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_0} = \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010485893$	$\frac{\boldsymbol{R}_5}{\boldsymbol{R}_0} = \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00041246399$	$\frac{\boldsymbol{R}_6}{\boldsymbol{R}_0} = \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011168593$

Aus $\alpha^2\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\ldots\right\}=1$ folgt noch

$$\log\alpha = \log\boldsymbol{R}_0 = 9{,}9999758,$$

woraus ferner

$$\log\beta = \log\boldsymbol{R}_1 = 6{,}2619229\,\mathrm{n}, \qquad \log\varepsilon = \log\boldsymbol{R}_4 = 8{,}0205812\cdot 5\,\mathrm{n},$$
$$\log\gamma = \log\boldsymbol{R}_2 = 5{,}7321976\,\mathrm{n}, \qquad \log\zeta = \log\boldsymbol{R}_5 = 6{,}6153618\,\mathrm{n},$$
$$\log\delta = \log\boldsymbol{R}_3 = 5{,}3807537\,\mathrm{n}, \qquad \log\eta = \log\boldsymbol{R}_6 = 7{,}0479743\,\mathrm{n}$$

gefunden wird. Die Genauigkeit ist hier viel weiter getrieben als der nachherige Gebrauch verlangt. Wenn man in der That die gefundnen Werthe der Unbekannten in die Gleichungen XIV. substituirt, so findet man eine vollendete Übereinstimmung, indem der Werth des Aggregats, welches verschwinden soll, in keiner Gleichung den zehnmillionensten Theil seines gröfsten Terms erreicht.

Durch die hier auseinandergesetzte Methode sind die folgenden Resultate für die sieben Systeme der Unbekannten gefunden worden.

Tabelle der sieben Systeme der Werthe der Unbekannten des transformirten Systems XIV.

(Nur bei g sind die Zahlen angesetzt, sonst die Logarithmen, bei denen überall —10 in der Characteristik zu ergänzen ist.)

	System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
g	5.2988733	7.5747191	17.1525573	17.8632966	3.7136434	22.4273091	2.2584168
R_0	9.9999758	5.59372	4.49078	4.77888n	8.020611	6.6558531	7.0453348
R_1	6.26186n	9.9999595	5.44276	4.69090	8.127403	7.2114826	7.296067
R_2	5.73272n	5.99605n	9.9999760	7.88943	7.656551	7.7345775	6.919256
R_3	5.38164n	5.67660n	7.8913067n	9.9999850	7.422751	7.5884936	6.687464
R_4	8.0205807n	8.1275834n	7.6565719n	7.4309490n	9.9999278	7.5772574	6.83876n
R_5	6.6153199n	7.1975215n	7.7307677n	7.5920478n	7.58422n	9.9999867	4.25271
R_6	7.0479752n	7.2980444n	6.9189241n	6.6948000n	6.80754	4.73984n	9.9999986

Wenn man die vorstehenden 7 Systeme der Werthe der Gröfsen R in die Gleichungen XV. substituirt, so findet man die 7 Systeme der Werthe der Gröfsen M. Es ist, um diese Gröfsen mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten, überflüssig, die Logarithmen aller Gröfsen R auf dieselbe Zahl Stellen zu berechnen. Denn wenn man die Werthe der Gröfsen R substituirt, wird in vielen zur Bestimmung der Gröfsen M zu bildenden Aggregaten der Werth *eines* Terms die andern beträchtlich übertreffen, so dafs man nur von den *Zahlen* die erforderliche Anzahl Stellen zu kennen braucht. Es sind deshalb in der obigen Tabelle einige Logarithmen mit 7, andere aber nur mit 5 Stellen angesetzt worden.

Die Werthe der 7 Systeme der Gröfsen M, wie sie aus den Gröfsen R durch die Formeln XV. abgeleitet worden sind, giebt die folgende Tabelle. Sie sind mit aller Genauigkeit berechnet, welche die Anwendung siebenstelliger Tafeln verstattet.

	System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
g	5,2988733	7,5747191	17,1525573	17,8632966	3,7136434	22,4273091	2,2584168
M_0	+0,9548364.7	−0,2953047.4	+0,0276998.70	−0,0167131.95	+0,0061320.4	+0,0000356.840	+0,0004905.317
M_1	+0,2403236.7	+0,7041486.2	−0,5602023.6	+0,3639800.2	+0,0104109.52	−0,0003423.278	+0,0013757.54
M_2	+0,1740664.5	+0,6440231.1	+0,5841832.64	−0,4620795.6	+0,0118614.62	+0,0024689.22	+0,0017218.36
M_3	+0,0109897.86	+0,0449154.3	+0,5865879.5	+0,8085248.5	+0,0055361.02	+0,0064128.63	+0,0009850.343
M_4	−0,0091606.953	−0,0113414.30	−0,0016560.475	−0,0006617.204	+0,8744861.9	−0,4517914.9	+0,1759003.9
M_5	−0,0051261.723	−0,0075519.595	−0,0068854.157	−0,0047267.932	+0,4389244.0	+0,8919316.0	+0,1079379.0
M_6	+0,0010783.321	+0,0008513.954	+0,0002124.55	+0,0001363.418	−0,2056750.7	−0,0171791.24	+0,9784694.7

Zur Probe über die richtige Bestimmung der sieben Wurzeln g hat man die beiden Bedingungen, dafs ihre Summe = der Summe der Zahlencoëfficienten der Diagonale in den Gleichungen VIII. oder XIV., und dafs die Summe ihrer Quadrate

= der Summe der Quadrate aller Coëfficienten dieser Gleichungen sein mufs. Die letztere Summe ist im Laufe der Rechnung schon einmal, nämlich zur Prüfung des transformirten Systems XIV. gebraucht worden. Die richtige Herleitung der Gröfsen M aus den für die Gröfsen R gefundnen Werthen kann ebenfalls auf eine doppelte Art für alle gleichzeitig geprüft werden. Wenn man nemlich in dem Schema der Werthe der Gröfsen M einmal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Verticalreihen oder das andere Mal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Horizontalreihen addirt, so mufs in beiden Fällen die Zahl 7 als Summe gefunden werden. Denn aus dem auf eine dieser Arten gebildeten Ausdruck verschwinden die Producte je zweier verschiedner M nach den Gleichungen (4.) und (9.) in §. 2.; die Summe der quadratischen Glieder $M_0^2 + M_1^2 + \ldots + M_6^2$ mufs aber für jedes der 7 Systeme besonders $= 1$ sein, weil $R_0^2 + R_1^2 + \ldots + R_6^2 = 1$ gemacht worden ist. Diese Prüfungen, welche besonders für die Zeichen der Gröfsen M eine leichte und entscheidende Controlle geben, sind an den Zahlen der obigen Tafel vorgenommen worden, und mit der erwarteten Strenge eingetroffen.

Nachdem die Gröfsen M bestimmt sind, erhält man die Verhältnisse der Unbekannten N des Systems V. mittelst der Gleichungen VI., deren Constanten in VII. angegeben sind. Die hieraus sich ergebenden numerischen Werthe der Verhältnisse der Gröfsen N respective zu N_3 und zu N_6 in den vier ersten und in den drei letzten Systemen sind zugleich mit ihren von den Änderungen der Massen abhängigen Variationen am Schlusse dieses Aufsatzes zusammengestellt worden, um unmittelbar mit den Resultaten verglichen werden zu können, welche Herr *Leverrier* in der „Connaiss. des temps" für 1843 Seite 31 ff. gefunden hat. Ich wende mich jetzt zu der Berechnung dieser Variationen oder der für eine Änderung der angewandten Werthe der Planetenmassen anzubringenden Correctionen.

Berechnung der Variationen, welche die sieben Systeme der Werthe der Unbekannten durch die Änderung der zum Grunde gelegten Werthe der Planetenmassen erfahren.

8.

Die von einer Änderung der Planetenmassen herrührenden Variationen der Werthe der Unbekannten könnten aus den §. 4. gegebnen allgemeinen Formeln entnommen werden, wenn man darin die Variationen der Coëfficienten der gegebenen Gleichungen substituirt, welche man durch Änderung der Planetenmassen erhält. Es ist aber bequemer, die auf diese besondre Form der Variationen bezüglichen Formeln unmittelbar abzuleiten.

Ich will das System der Gleichungen VIII. folgendermaafsen bezeichnen:

$$\text{XVI.}\quad \begin{cases} 0 = \{g-[0,0]\}M_0+[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6, \\ 0 = [1,0]M_0+\{g-[1,1]\}M_1+[1,2]M_2+\ldots+[1,6]M_6, \\ \qquad\text{etc.,} \end{cases}$$

wo

$$[i,k] = \sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}.$$

Werden die Massen dadurch corrigirt, dafs man $m(1+\mu)$ statt m, $m'(1+\mu')$ statt m', etc. setzt, so erhält der Coëfficient $[i,k]$, wenn i und k verschieden sind, den Factor

$$1+\tfrac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)}),$$

wie oben §. 5. bemerkt wurde; die Coëfficienten in der Diagonale aber, für welche beide Indices gleich sind, erhalten die Correctionen

$$\text{XVII.}\quad \begin{cases} \varDelta[0,0] = (0,1)\mu'+(0,2)\mu''+\ldots+(0,6)\mu^{\text{vi}}, \\ \varDelta[1,1] = (1,0)\mu+(1,2)\mu''+\ldots+(1,6)\mu^{\text{vi}}, \\ \qquad\text{etc.,} \end{cases}$$

wo die Zahlenwerthe der Coëfficienten $(0,1)$, $(0,2)$, ...; $(1,0)$, $(1,2)$, ... aus der unmittelbar vor dem System V. aufgestellten Tabelle zu entnehmen sind.

Zwischen den Correctionen der Unbekannten, welche aus diesen Variationen der Coëfficienten hervorgehen, oder zwischen den Gröfsen $\varDelta g$, $\varDelta M_i$ erhält man aus der ersten Gleichung in XVI. die folgende:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{\varDelta g-\varDelta[0,0]\}M_0+\tfrac{1}{2}\mu\{[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6\} \\ & +\tfrac{1}{2}\{(0,1)\mu'M_1+[0,2]\mu''M_2+\ldots+[0,6]\mu^{\text{vi}}M_6\} \\ & +\{g-[0,0]\}\varDelta M_0+[0,1]\varDelta M_1+\ldots+[0,6]\varDelta_6, \end{aligned}$$

oder, weil $[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6 = -\{g-[0,0]M_0\}$ ist,

$$0 = \{\varDelta g-\varDelta[0,0]\}M_0-(g-[0,0])\mu M_0$$
$$+(g-[0,0])\{\varDelta M_0+\tfrac{1}{2}\mu M_0\}+[0,1]\{\varDelta M_1+\tfrac{1}{2}\mu'M_1\}\ldots+[0,6]\{\varDelta M_6+\tfrac{1}{2}\mu^{\text{vi}}M_6\}.$$

Bildet man die ähnlichen Gleichungen und setzt:

$$\text{XVIII.}\quad M_i\{(g-[i,i])\mu^{(i)}+\varDelta[i,i]\} = p_i, \qquad \varDelta M_i+\tfrac{1}{2}\mu^{(i)}M_i = \delta M_i,$$

so erhält man folgendes System Gleichungen:

$$\text{XIX.}\quad \begin{cases} p_0 = M_0\varDelta g+(g-[0,0])\delta M_0+[0,1]\delta M_1+\ldots+[0,6]\delta M_6, \\ p_1 = M_1\varDelta g+[1,0]\delta M_0+(g-[1,1])\delta M_1+\ldots+[1,6]\delta M_6, \\ \qquad\text{etc.} \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen Δg zu erhalten, multiplicire man dieselben respective mit M_0, M_1, etc., so verschwinden nach geschehner Addition die mit den verschiednen Factoren δM_i multiplicirten Aggregate wegen der Gleichungen XVI.; der Coëfficient von Δg wird $\Sigma M^2 = 1$, und daher

$$\text{XX.} \qquad \Delta g = M_0 p_0 + M_1 p_1 \ldots . + M_6 p_6.$$

Um die Correctionen der Gröfsen M zu erhalten, bringe man die Gleichungen XIX. in die Form:

$$p_0 = M_0 \Delta g + (g-g')\delta M_0 + (g'-[0,0])\delta M_0 + [0,1]\delta M_1 + \ldots . + [0,6]\delta M_6,$$
$$p_1 = M_1 \Delta g + (g-g')\delta M_1 + [1,0]\delta M_0 + (g'-[1,1])\delta M_1 + \ldots . + [1,6]\delta M_6.$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den zu g' gehörigen Gröfsen des zweiten Systems, M_0', M_1', etc., so bleiben nach geschehner Addition rechts vom Gleichheitszeichen nur die zweiten Terme, indem vermöge der Gleichungen XVII. die übrigen mit den verschiednen Gröfsen δM_i multiplicirten Aggregate verschwinden; ebenso verschwindet das mit Δg multiplicirte Aggregat, weil es den Factor $M_0 M_0' + M_1 M_1' + \ldots . = 0$ erhält, und man findet:

$$M_0' \delta M_0 + M_1' \delta M_1 + \ldots . + M_6' \delta M_6 = \frac{1}{g-g'}\{M_0' p_0 + M_1' p_1 + \ldots . + M_6' p_6\}.$$

Vertauscht man die Gröfsen g', M_0', M_1' etc. des zweiten Systems mit den Gröfsen des 3ten, g'', M_0'', M_1'' etc., dann mit denen des 4ten u. s. f., so erhält man noch fünf ganz ähnliche Gleichungen. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\{\mu M_0^2 + \mu' M_1^2 + \ldots . + \mu^{vi} M_6^2\} = Q,$$

so erhält man endlich als siebente Gleichung

$$M_0 \delta M_0 + M_1 \delta M_1 + \ldots . + M_6 \delta M_6 = Q,$$

wie aus der Gleichung $M_0 \Delta M_0 + M_1 \Delta M_1 + \ldots . + M_6 \Delta M_6 = 0$ folgt. Multiplicirt man diese siebente Gleichung mit M_0, die sechs vorhergefundnen der Reihe nach mit den Factoren M_0', M_0'' etc. und addirt alle nach geschehner Multiplication, so werden die Unbekannten ΔM_i bis auf ΔM_0 sämmtlich eliminirt; ebenso bleibt nur ΔM_1 übrig, wenn man die Factoren M_1, M_1', M_1'' etc. wählt u. s. f. Wenn man die abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$\text{XXI.} \quad \left\{ \begin{aligned} (m_0, m_0) &= \frac{M_0' M_0'}{g-g'} + \frac{M_0'' M_0''}{g-g''} + \ldots . + \frac{M_0^{vi} M_0^{vi}}{g-g^{vi}}, \\ (m_0, m_1) &= \frac{M_0' M_1'}{g-g'} + \frac{M_0'' M_1''}{g-g''} + \ldots . + \frac{M_0^{vi} M_1^{vi}}{g-g^{vi}}, \\ (m_1, m_1) &= \frac{M_1' M_1'}{g-g'} + \frac{M_1'' M_1''}{g-g_1''} + \ldots . + \frac{M_1^{vi} M_1^{vi}}{g-g^{vi}}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned} \right.$$

wo immer $(m_k, m_{k'}) = (m_{k'}, m_k)$, so findet man auf diese Weise für die Variationen der Unbekannten M des ersten Systems,

$$\text{XXII.} \quad \begin{cases} \delta M_0 = (m_0, m_0)p_0 + (m_0, m_1)p_1 + \ldots + (m_0, m_6)p_6 + M_0 Q, \\ \delta M_1 = (m_1, m_0)p_0 + (m_1, m_1)p_1 + \ldots + (m_1, m_6)p_6 + M_1 Q, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Man hat jetzt nur noch in XX. und XXII. die Werthe

$$p_i = M_i\{(g - [i,i])\mu^{(i)} + \Delta[i,i]\}$$

zu substituiren und die ganz ähnlichen Ausdrücke zu bilden, welche sich für die übrigen Systeme ergeben.

Setzt man die Correctionen des $(h+1)$ten Systems,

$$\text{XXIII.} \quad \Delta g^{(h)} = B^{(h)}\mu + B_1^{(h)}\mu' + \ldots + B_6^{(h)}\mu^{\text{vi}}$$

und

$$\text{XXIV.} \quad \Delta M_k^{(h)} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}\mu^{(k)} = \delta M_k^{(h)} = C^{(h,k)}\mu + C_1^{(h,k)}\mu' + \ldots + C_6^{(h,k)}\mu^{\text{vi}},$$

so erhält man auf die im Vorigen angegebne Art die allgemeinen Ausdrücke

$$\text{XXV.} \quad B_i^{(h)} = M_0^{(h)2}(0,i) + M_1^{(h)2}(1,i) + \ldots + M_6^{(h)2}(6,i) + (g^{(h)} - [i,i])M_i^{(h)2}$$

und

$$\text{XXVI.} \quad C_i^{(h,k)} = (m_k, m_0)_h M_0^{(h)}(0,i) + (m_k, m_1)_h M_1^{(h)}(1,i) + \ldots$$
$$\ldots + (m_k, m_6)_h M_6^{(h)}(6,i) + (m_k, m_i)_h M_i^{(h)}\{g^{(h)} - [i,i]\} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}M_i^{(h)2}.$$

Hier ist, wenn man das Glied, das durch $g^{(h)} - g^{(h)}$ dividirt sein würde, fortläfst,

$$\text{XXVII.} \quad (m_k, m_{k'})_h = \frac{M_k M_{k'}}{g^{(h)} - g} + \frac{M_k' M_{k'}'}{g^{(h)} - g'} + \ldots + \frac{M_k^{\text{vi}} M_{k'}^{\text{vi}}}{g^{(h)} - g^{\text{vi}}}.$$

Es ist ferner

$$(i,i) = 0, \qquad [i,i] = (i,0) + (i,1) + \ldots + (i,6),$$

und die Gröfsen (i, i') sind die oben vor dem System V. angegebnen Zahlen.

Man sieht aus dem Obigen, dafs die 392 Gröfsen $B_i^{(h)}$ und $C_i^{(h,k)}$, welche die Aufgabe zu berechnen fordert, jede durch Addition von respective 7 oder 8 Termen erhalten werden. Diese Terme selbst sind unmittelbar durch die bereits berechneten Werthe von $g^{(h)}$, $M_k^{(h)}$ und durch die 196 Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gegeben.

Ich lasse jetzt die Tabelle für die Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ und dann die Tabelle für die Werthe der Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ selber folgen.

Tabelle für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$.

$(m_0, m_0)_0$	$(m_0, m_1)_0$	$(m_0, m_2)_0$	....
	$(m_1, m_1)_0$	$(m_1, m_2)_0$	....
$(m_0, m_0)_1$		$(m_2, m_2)_0$	....
$(m_1, m_0)_1$	$(m_1, m_1)_1$		....
.....	.....	.....	

(Die Tabelle ist nach dem obenstehenden Schema angeordnet; abwechselnd sind von jedem System aufser den Gröfsen der Diagonale selbst entweder nur die oberhalb und rechts oder die unterhalb und links von der Diagonale befindlichen Gröfsen angesetzt.)

Erstes System $h = 0$, $g = 5,29..$

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
	−0.038381	+0.0932013	+0.0816323	+0.00555445	+0.00194345	+0.00074331	−0.00052757	0
		−0.254815	−0.158150	−0.0095599	+0.00926369	+0.00509745	−0.00116569	1
0	+0 400512		−0 227941	−0 0118426	+0.00996476	+0.00551945	−0.00122876	2
1	+0.103056	−0 0202365		−0.0819272	+0.00362850	+0.00202784	−0.00043093	3
2	+0.0706072	+0.0689293	−0.0430341		+0.481014	+0.271865	−0.057300	4
3	+0.00423656	+0.0068831	+0.0013901	−0.0994045		+0.078887	−0.0213148	5
4	−0.0243357	+0.00135226	+0.00218915	+0.00159071	+0.190176		+0.341554	6
5	−0.00143356	+0.00045518	+0.00105073	+0.00103262	+0.1301316	−0.0014702		
6	+0.00021570	−0.00018029	−0.00023643	−0.00012470	−0.0147348	−0.0024856	+0.191003	

Zweites System $h = 1$, $g = 7.57..$

Drittes System $h = 2$, $g = 17.15..$

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
	+0.0856298	+0.0062117	−0.0166964	+0 0185156	+0.00000408	−0.00009422	+0.00000232	0
		−0.129747	+0.287524	−0.410526	−0.00001628	+0.00216940	−0.00005544	1
0	+0.0821214		−0.254544	+0.528834	−0.00032370	−0.00367375	+0.00010136	2
1	−0.0237752	+0.494346		−0.919560	+0.00161224	+0.00444043	−0.00014924	3
2	+0.0175162	−0.413029	+0.522900		+0.0203050	+0.1062406	−0.0033007	4
3	+0.0224095	−0.459062	+0.4840[illegible]8	+0.484324		−0.135726	+0.00327814	5
4	−0.00004716	+0 00097891	−0.00120111	−0.00043625	+0.0113278		+0.0673720	6
5	−0.00025452	+0.00521148	−0.00630574	−0.00679477	+0.1166629	−0.159867		
6	+0.00000755	−0.00015492	+0.00018770	+0.00018543	−0.0033845	+0.00374211	+0.0642776	

Viertes System $h = 3$, $g = 17.86..$

Fünftes System $h = 4$, $g = 3.71..$

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
	−0.597800	−0.089314	−0.057336	−0 00333806	+0.00471325	+0.00255334	−0.00025482	0
		−0.197562	−0.087600	−0.0062022	+0.00356312	+0.00210732	+0.00061137	1
0	+0.0593079		−0.167018	−0.0077934	+0.00321573	+0.00197753	+0 00089480	2
1	−0.0048745	+0.1252838		−0 0724343	+0.00057942	+0.00046129	+0.00063378	3
2	+0.0016626	−0.0659112	+0 1411840		+0 0102680	+0.0345275	+0.117865	4
3	−0.00015888	+0.0044668	−0.0148301	+0.208610		−0 0345415	+0.0733991	5
4	−0.00000062	−0 00004461	−0.00013197	−0.00007428	+0.0424132		+0.657883	6
5	−0 00000801	+0.00017589	−0.00037614	−0 00149407	+0.0214632	+0.0108917		
6	+0.00000021	−3.00000388	+0.00001077	+0 00003799	−0.00107892	+0.00041120	+0 0497284	

Sechstes System $h = 5$, $g = 22,42..$

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
Siebentes System $h = 6$, $g = 2{,}258$..							
−0.316359	−0.0349717	−0.0205206	−0.00120471	−0.00143487	−0.00065308	+0 00057511	0
	−0.1418967	−0.0663951	−0.0036527	−0.00408443	−0.00186829	+0.00127766	1
		−0.1246750	−0.0051820	−0.00512882	−0.00234842	−0.00005060	2
			−0.0654369	−0.00295476	−0.00135496	+0.00076140	3
				−0.535683	−0.243815	+0.123215	4
					−0.171855	+0.0627985	5
						−0.0290838	6

Tabelle der Coëfficienten der verschiednen μ in den Ausdrücken von $\delta M_0^{(h)} = \varDelta M_0^{(h)} + \frac{1}{2} M_0^{(h)} \mu$, $\delta M_1^{(h)} = \varDelta M_1^{(h)} + \frac{1}{2} M_1^{(h)} \mu'$, etc.

Angewendete Controlle: Die Summe der in Einer Zeile stehenden Coëfficienten mufs = der Hälfte des entsprechenden M sein.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
				Erstes System.			
δM_0	$+0{,}4545\,\mu$	$-0{,}1514\,\mu'$	$+0{,}0266\,\mu''$	$+0{,}0048\,\mu'''$	$+0{,}1366\,\mu^{\mathrm{VI}}$	$+0{,}0062\,\mu^{\mathrm{V}}$	$+0{,}0001\,\mu^{\mathrm{VI}}$
δM_1	+0,0605	+0,5222	−0,1262	−0,0107	−0,3108	−0,0146	−0,0004
δM_2	+0,0421	+0,2740	+0,1154	−0,0119	−0,3172	−0,0148	−0,0004
δM_3	+0,0027	+0,0196	+0,0033	+0,0104	−0,0290	−0,0014	+0,0000
δM_4	−0,0037	−0,0004	+0,0036	+0,0004	+0,0094	−0,0129	−0,0011
δM_5	−0,0018	−0,0008	+0,0014	+0,0001	+0,0114	−0,0124	−0,0004
δM_6	+0,0004	−0,0008	−0,0007	−0,0001	−0,0023	+0,0028	+0,0012
				Zweites System.			
$\delta M'_0$	$-0{,}2199\,\mu$	$-0{,}4896\,\mu'$	$+0{,}0861\,\mu''$	$+0{,}0155\,\mu'''$	$+0{,}4394\,\mu^{\mathrm{IV}}$	$+0{,}0203\,\mu^{\mathrm{V}}$	$+0{,}0005\,\mu^{\mathrm{VI}}$
$\delta M'_1$	−0,0339	+0,3762	−0,2179	+0,0085	+0,2094	+0,0093	+0,0002
$\delta M'_2$	+0.0039	−0,2501	+0,5976	−0,0038	−0,0246	−0,0011	−0,0000
$\delta M'_3$	+0,0016	−0,0105	+0,0285	+0,0455	−0,0409	−0,0017	−0,0000
$\delta M'_4$	+0,0016	+0,0026	−0,0027	−0,0005	−0,0019	−0,0043	−0,0007
$\delta M'_5$	+0,0008	+0,0015	−0,0026	−0,0002	+0,0076	−0,0107	−0,0001
$\delta M'_6$	−0,0002	−0,0002	+0,0001	+0,0000	−0,0013	+0,0012	+0,0009
				Drittes System.			
$\delta M''_0$	$+0{,}0253\,\mu$	$-0{,}0528\,\mu'$	$-0{,}0381\,\mu''$	$-0{,}0032\,\mu'''$	$+0{,}0794\,\mu^{\mathrm{IV}}$	$+0{,}0032\,\mu^{\mathrm{V}}$	$+0{,}0001\,\mu^{\mathrm{VI}}$
$\delta M''_1$	+0,0470	+1,0569	+0,6681	+0,0680	−2,0356	−0,0825	−0,0019
$\delta M''_2$	−0,0866	−1,3939	−1,0638	−0,0979	+2,8167	+0,1149	+0,0026
$\delta M''_3$	+0,1305[3]	+2,6672	+1,9900	+0,4561	−4,7524	−0,1934	−0,0044
$\delta M''_4$	+0,000003	−0,000748	+0,00712	−0,000760	−0,001084	+0,001337	−0,000286
$\delta M''_5$	−0,00075	−0,1746	−0,01376	−0,00310	+0,03319	−0,00194	+0,00037
$\delta M''_6$	+0,00002	+0,00046	+0,00034	+0,00009	−0,00108	+0,00006	+0,00020

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
				Viertes System.			
$\delta M_0'''$	−0,0213 μ	−0,0908 μ'	−0,0691 μ''	−0,0040 μ'''	+0,1697 μ^{iv}	+0,0070 μ^{v}	+0,0002 μ^{vi}
$\delta M_1'''$	+0,0979	+1,9275	+1,5329	+0,0952	−3,3325	−0,1358	−0,0031
$\delta M_2'''$	−0,0883	−2,0075	−1,5504	−0,1336	+3,4071	+0,1385	+0,0031
$\delta M_3'''$	−0,0948	−1,9348	−1,4454	+0,2850	+3,4507	+0,1404	+0,0032
$\delta M_4'''$	+0,00022	+0,00481	+0,00445	−0,00011	−0,00986	+0,00037	−0,00022
$\delta M_5'''$	+0,00108	+0,02369	+0,01678	−0,00194	−0,03897	−0,00325	+0,00024
$\delta M_6'''$	−0,00003	−0,00071	−0,00054	+0,00012	+0,00103	+0,00009	+0,00013
				Fünftes System.			
δM_0^{IV}	+0,00610 μ	−0,00665 μ'	−0,00334 μ''	−0,00013 μ'''	−0,00762 μ^{iv}	+0,01366 μ^{v}	+0,00105 μ^{vi}
δM_1^{VI}	−0,00007	+0,00847	−0,00281	−0,00012	−0,01010	+0,00914	+0,00071
δM_2^{IV}	−0.00008	−0,00221	+0,01029	−0,00011	−0,01034	+0,00777	+0,00060
δM_3^{IV}	−0,00001	−0,00020	−0,00033	+0,00553	−0,00306	+0,00077	+0,00006
δM_4^{IV}	−0,00002	+0,00009	+0,00009	+0,00002	+0,55413	−0,10874	−0,00834
δM_5^{IV}	−0,00007	+0,00013	+0,00024	+0,00008	−0,23584	+0,46921	−0,01436
δM_6^{IV}	+0,00003	+0,00042	+0,00090	+0,00028	−0,00786	+0,07222	−0,16882
				Sechstes System.			
δM_0^{V}	+0,0000586 μ	+0,0000704 μ'	+0,0000797 μ''	−0,0000054 μ'''	−0,0001570 μ^{iv}	−0,0000241 μ^{v}	−0,0000044 μ^{vi}
δM_1^{V}	−0,000038	−0,001284	−0,001781	+0,000085	+0,002211	+0,000572	+0,000063
δM_2^{V}	+0,0000453	+0,0019986	+0,0032785	−0,0003530	−0,0037987	+0,0001901	−0,0001257
δM_3^{V}	+0,0000217	+0,0004211	+0,0020730	+0,0064524	−0,0037660	−0,0014915	−0,0005046
δM_4^{V}	−0,00000	−0,00007	−0,00015	−0,00007	+0,01602	−0,24730	+0,00569
δM_5^{V}	−0	−0,00004	−0,00010	−0,00005	+0,12280	+0,32065	+0,00219
δM_6^{V}	0	+0,000002	+0,000006	+0,000003	+0,011406	−0,003022	−0,016984
				Siebentes System.			
δM_0^{VI}	+0,0004798 μ	−0,0001761 μ'	−0,0000940 μ''	−0,0000021 μ'''	−0,0001471 μ^{iv}	+0,0000428 μ^{v}	+0,0001419 μ^{vi}
δM_1^{VI}	−0,000044	+0.001218	−0,000143	−0,000001	−0,000428	−0,000333	+0,000419
δM_2^{VI}	−0,000030	−0,000280	+0,001662	+0,000002	−0,000486	−0,000535	+0,000529
δM_3^{VI}	−0,0000021	−0,0000327	−0,0000611	+0,0009840	−0,0002600	−0,0004441	+0,0003086
δM_4^{VI}	0	−0,0004	−0,0008	−0,0002	+0,1293	−0,0958	+0,0561
δM_5^{VI}	−0,00002	−0,00015	−0,00037	−0,00011	−0,05413	+0,07293	+0,03586
δM_6^{VI}	0	+0,0001	+0,0002	+0,0001	−0,0015	+0,0151	+0,4752

9.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ erhält man aus XXVII. vermittelst der Gleichung $\sum_k M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} = 0$ die Formel

$$\text{XXVIII.} \quad \sum_k M_k^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

durch welche je sieben von den Gröfsen $(m_k, m_{k'})$, welche zu demselben System gehören und in derselben Vertical- oder Horizontalreihe befindlich sind, mit einander verbunden werden. Die Gröfsen $B_i^{(h)}$, $C_i^{(h,\,k)}$ selbst controllirt man leicht durch die Formeln

$$\text{XXIX.}\quad \begin{cases} \sum_i B_i^{(h)} = g^{(h)}, \\ \sum_i C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_k^{(h)}. \end{cases}$$

Da, um $\Delta M_k^{(h)}$ aus $\delta M_k^{(h)}$ zu erhalten, von dem Coëfficienten $C_k^{(h,k)}$, mit welchem $\mu^{(h)}$ multiplicirt ist, die Gröfse $\frac{1}{2} M_k^{(h)}$ abzuziehen ist, so zeigen diese Formeln, ***dafs in der Variation von $g^{(h)}$ die Summe der in die Variationen der Planetenmassen multiplicirten Coëfficienten der Gröfse $g^{(h)}$ selber gleich wird, und dafs die Summe der in die Variationen der Massen multiplicirten Coëfficienten in der Variation der Gröfse $M_k^{(h)}$ verschwindet.*** Die Formeln XXIX. ergeben sich daraus, dafs

$$\sum_i (i', i) = [i', i'], \quad \sum_i M_i^{(h)2} = 1.$$

Man hat daher aus XXV. die Gleichung

$$\sum_i B_i^{(h)} = \sum_{i'} M_{i'}^{(h)2} \cdot g^{(h)} = g^{(h)},$$

und aus XXVI. und XXVIII.,

$$\sum_i C_i^{(h,k)} = \sum_{i'} (m_k, m_{i'})_h M_{i'}^{(h)} \cdot g^{(h)} + \tfrac{1}{2} M_k^{(h)} \sum_i M_i^{(h)2} = \tfrac{1}{2} M_k^{(h)},$$

wie zu beweisen ist. Aus der letzten Gleichung sieht man, dafs durch die zweite der Gleichungen XXIX. zugleich die Controlle der für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gefundnen Werthe gegeben wird.

Zur Controlle der für die Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ berechneten Werthe kann man auch noch die Gleichungen

$$\text{XXX.}\quad \sum_k M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = \tfrac{1}{2} M_i^{(h)2},$$

$$\text{XXXI.}\quad \sum_h M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = 0$$

anwenden, in deren letztrer, wenn $i = k$, für 0 rechter Hand $\frac{1}{2}$ gesetzt werden mufs. Substituirt man den für $C_i^{(h,k)}$ gegebnen Ausdruck XXVI., so ergiebt sich die erste dieser Gleichungen aus XXVIII. Die zweite folgt durch Substitution des für $C_i^{(h,k)}$ gegebenen Ausdrucks vermittelst der Gleichungen

$$\text{XXXII.}\quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

$$\text{XXXIII.}\quad \sum_h g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = -\tfrac{1}{2} \sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}.$$

Die erste dieser Formeln ergiebt sich daraus, dafs wenn man den Werth

$$(m_k, m_{k'})_h = \sum_{h'} \frac{M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}}$$

substituirt, wo h' nur die sechs von h verschiedenen Werthe annehmen darf, sich in der Doppelsumme je zwei durch $g^{(h)}-g^{(h')}$ und $g^{(h')}-g^{(h)}$ dividirte Terme gegenseitig aufheben. Um die Formel XXXIII. zu beweisen, bemerke ich, dafs die dortige Summe gleich wird der Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} \frac{g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)}-g^{(h')}},$$

welche sich auf die Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}$$

reducirt, wenn man in letztrer die Combination $h=h'$ wieder ausschliefst und jede Combination verschiedner Werthe von h und h' nur einmal nimmt. Giebt man jedem der Accente h und h' *alle* Werthe von 0 bis 6, so dafs man h und h' auch dieselben Werthe annehmen läfst, so mufs man für die vorstehende Doppelsumme den folgenden Ausdruck setzen:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')} - \tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}, \end{aligned}$$

welcher sich, wenn k und k' verschieden sind, auf die in der Formel XXXIII. angegebene Gröfse

$$-\tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}$$

reducirt. Die vorstehende Gleichung zeigt aufserdem, ***dafs man, wenn $k'=k$, in* XXXIII. *zu dem Ausdrucke rechts die Gröfse $\frac{1}{2}$ zu addiren hat.***

Man hat noch, wenn h und h'', k und k'' von einander verschieden sind, die Formeln:

$$\text{XXXIV.} \quad \sum_k \{M_k^{(h'')} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h'',k)}\} = M_i^{(h)} M_i^{(h'')},$$

$$\text{XXXV.} \quad \sum_h \{M_{k''}^{(h)} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h,k'')}\} = 0.$$

Um die erste dieser Formeln zu beweisen, mufs man die Gleichung

$$\text{XXXVI.} \quad \sum_k M_k^{(h'')} \{m_k, m_{k'}\}_h = \frac{M_{k'}^{(h'')}}{g^{(h)}-g^{(h'')}}$$

zu Hülfe nehmen, welche man durch Substitution von XXVII. leicht erhält. Zum Beweise der Formel XXXV. dienen die Gleichungen

$$\text{XXXVII.} \begin{cases} \sum_h \{M_{k''}^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h + M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_{k''}, m_{k'})_h\} = 0, \\ \sum_h g^h \{M_{k''}^{(h)} M_i^{(h)} (m_k, m_i)_h + M_k^{(h)} M_i^{(h)} (m_{k''}, m_i)_h\} = -\sum_h \cdot M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} \cdot M_{k'}^{(h)2}, \end{cases}$$

welche man ähnlich wie XXXII. und XXXIII. findet.

Die Gleichungen XXIX. ergeben sich auch aus der Betrachtung, dafs wenn sich in dem System der Gleichungen VIII. sämmtliche Zahlencoëfficienten in dem gleichen Verhältnisse ändern, die Wurzeln g sich in demselben Verhältnisse ändern, die Werthe der Unbekannten $M_k^{(h)}$ aber ungeändert bleiben werden. Hieraus kann man zufolge der §. 5. gemachten Bemerkung schliefsen, dafs, wenn in den Ausdrücken für $\varDelta g^{(h)}$ und $\varDelta M_k^{(h)}$ die Variationen $\mu = \mu' \ldots\ldots = \mu^{\text{VI}} = 1$ gesetzt werden, sich $\varDelta g^{(h)}$ in $g^{(h)}$ verwandeln und $\varDelta M_k^{(h)}$ verschwinden mufs, woraus die angeführten Gleichungen von selber folgen. Ebenso ergeben sich die Gleichungen XXX., XXXI., XXXIV., XXXV. a priori daraus, dafs

$$\sum_k M_k^{(h)2} = 1, \qquad \sum_h M_k^{(h)2} = 1,$$
$$\sum_k M_k^{(h)} M_k^{(h'')} = 0, \qquad \sum_h M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} = 0,$$

und daher die Variationen dieser Summen,

$$\sum_k . M_k^{(h)} \varDelta M_k^{(h)}, \qquad \sum_h . M_k^{(h)} \varDelta M_k^{(h)},$$
$$\sum_k \{M_k^{(h)} . \varDelta M_k^{(h'')} + M_k^{(h'')} . \varDelta M_k^{(h)}\}, \qquad \sum_h \{M_k^{(h)} . \varDelta M_{k''}^{(h)} + M_{k''}^{(h)} . \varDelta M_k^{(h)}\}$$

verschwinden müssen.

10.

Zur leichtern Vergleichung mit den von Herrn *Leverrier* gefundnen Resultaten sollen noch aus den gefundnen Zahlenwerthen die Coëfficienten in den Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N abgeleitet werden. Man gelangt zu denselben vermittelst der Formel

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{M_i}{M_k} \sqrt{\frac{m^{(k)} \sqrt{a_k}}{m^{(i)} \sqrt{a_i}}},$$

woraus

$$\varDelta \frac{N_i}{N_k} = \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\varDelta M_i}{M_i} - \frac{\varDelta M_k}{M_k} - \tfrac{1}{2}(\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}$$
$$= \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k} - (\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}.$$

Führt man aus XXII. die Werthe der Gröfsen δM ein, so hebt sich der mit Q multiplicirte Term fort. Man kann daher, wenn man, wie hier, blofs $\frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k}$ braucht, in den Werthen XXVI. der Gröfsen C den *achten* Term fortlassen. Auch bei den Variationen von $\frac{N_i}{N_k}$ findet der Satz Statt, *dafs die Summe der Coëfficienten der Variationen der Planetenmassen verschwindet,* welcher eine schliefsliche Controlle über alle gemachten Rechnungen giebt. Um zu sehen, wie weit diese Controlle erfüllt wird, habe ich in der letzten Columne die Summe der in jeder Horizontalreihe enthaltnen Coëfficienten der μ, μ' etc., welche in den absolut strengen Werthen verschwinden soll, in Einheiten der letzten Decimalstelle hinzugefügt.

Zusammenstellung der sieben Systeme Auflösungen der Gleichungen V. nebst den Variationen der Werthe der Unbekannten für eine Änderung der Planetenmassen in dem Verhältnisse $1:1+\mu^{(h)}$.

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Massen.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation.							
		μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
				Erstes System.					
g	5,2988733	−0,1635	+2,4341	+0,9768	+0,0389	+1,9184	+0,0920	+0,0022	
$\frac{N_0}{N_3}$	+103,29933	−78,8504	−200,8713	−28,2320	+6,3283	+287,4875	+13,7627	+0,3828	+76
$\frac{N_1}{N_3}$	+10,200668	+0,1261	−6,2507	−8,4272	+0,1210	+13,7368	+0,6731	+0,0209	0
$\frac{N_2}{N_3}$	+6,416474	+0,0039	−1,3578	−4,0906	−0,0786	+5,2484	+0,2664	+0,0092	+9
$\frac{N_4}{N_3}$	−0,0121377.56	−0,0019	+0,0212	+0,0084	−0,0002	−0,0075	−0,0186	−0,0015	−1
$\frac{N_5}{N_3}$	−0,0106745.14	−0,0013	+0,0169	+0,0066	−0,0003	−0,0046	−0,0165	−0,0009	−1
$\frac{N_6}{N_3}$	+0,0042589.93	+0,0007	−0,0105	−0,0041	−0,0000	+0,0018	+0,0115	+0,0004	−2
				Zweites System.					
g'	7,5747191	+0,4451	+0,3000	+1,2452	+0,1565	+5,1805	+0,2416	+0,0058	
$\frac{N'_0}{N'_3}$	−7,8168589	+2,2665	−14,7849	+7,2402	+0,5134	+4,5186	+0,2409	+0,0053	0
$\frac{N'_1}{N'_3}$	+7,3129033	−0,6047	−1,6959	−6,9033	−0,0089	+8,8286	+0,3747	+0,0093	−2
$\frac{N'_2}{N'_3}$	+5,8086635	−0,1654	−0,8968	−4,1052	−0,1124	+5,0638	+0,2107	+0,0055	+2
$\frac{N'_4}{N'_3}$	−0,0036768.09	+0,0006363	−0,0000285	+0,0014652	−0,0000147	−0,0002942	−0,0015458	−0,0002159	+24
$\frac{N'_5}{N'_3}$	−0,0038477.59	+0,0005197	−0,0001260	+0,0011321	−0,0000661	+0,0003481	−0,0017259	−0,0000821	−2
$\frac{N'_6}{N'_3}$	+0,0008227.714	−0,0001899	−0,0000260	−0,0004623	−0,0000136	−0,0004926	+0,0011596	+0,0000250	+2

Bezeichnung der Unbekannten	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation. μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
		Drittes System.							
g''	17,1525573	+0,1917	+3,6056	+4,2063	−0,0189	+8,7689	+0,3900	+0,0091	
$\frac{N''_0}{N''_3}$	+0,0561438	−0,01741	−0,36213	−0,26764	+0,00591	+0,61579	+0,02490	+0,00057	−1
$\frac{N''_1}{N''_3}$	−0,4454850	+0,13647	+3,31162	+2,04252	−0,04525	−5,22801	−0,21246	−0,00486	+3
$\frac{N''_2}{N''_3}$	+0,4034470	−0,14956	−2,79710	−2,50683	+0,02231	+5,21399	+0,21236	+0,00486	+3
$\frac{N''_4}{N''_3}$	−0,0000411.09	+0,0000092	+0,0001684	+0,0001571	−0,0000280	−0,0003189	+0,0000196	−0,0000074	0
$\frac{N''_5}{N''_3}$	−0,0002686.22	+0,0000306	+0,0005403	+0,0003745	−0,0001810	−0,0008814	+0,0001045	+0,0000125	0
$\frac{N''_6}{N''_3}$	+0,0000157.209								
		Viertes System.							
g'''	17,8632966	+0,0979	+2,2138	+3,1417	+0,2519	+11,6387	+0,5075	+0,0118	
$\frac{N'''_0}{N'''_3}$	−0,0245767	−0,00961	−0,19241	−0,14548	−0,02174	+0,35440	+0,01449	+0,00034	−1
$\frac{N'''_1}{N'''_3}$	+0,2099933	+0,08115	+1,40463	+1,25978	+0,19087	−2,81892	−0,11484	−0,00264	+3
$\frac{N'''_2}{N'''_3}$	−0,2315229	−0,07137	−1,55987	−0,95916	−0,21690	+2,69524	+0,10957	+0,00249	0
$\frac{N'''_4}{N'''_3}$	−0,0000119.17	+0,0000026	+0,0000582	+0,0000588	−0,0000096	−0,0001148	+0,0000089	−0,0000040	+1
$\frac{N'''_5}{N'''_3}$	−0,0001337.88	+0,0000153	+0,0003501	+0,0002358	−0,0001418	−0,0005319	+0,0000651	+0,0000074	0
$\frac{N'''_6}{N'''_3}$	+0,0000073.1946								
		Fünftes System.							
g^{IV}	3,7136434	+0,0001	+0,0031	+0,0067	+0,0021	+0,6602	+2,8276	+0,2137	
$\frac{N^{IV}_0}{N^{IV}_6}$	−0,8166526	+0,00440	+0,88379	+0,44205	+0,01628	+1,04609	−2,10609	−0,28651	+1
$\frac{N^{IV}_1}{N^{IV}_6}$	−0,5439845	+0,00357	+0,10098	+0,14480	+0,00548	+0,54837	−0,66862	−0,13456	+2
$\frac{N^{IV}_2}{N^{IV}_6}$	−0,5382496	+0,00334	+0,09917	+0,06898	+0,00413	+0,49005	−0,54178	−0,12388	+1
$\frac{N^{IV}_3}{N^{IV}_6}$	−0,6201246	+0,00098	+0,02120	+0,03416	−0,00056	+0,36689	−0,30473	−0,11793	+1
$\frac{N^{IV}_4}{N^{IV}_6}$	−1,4263523	−0,00017	−0,00304	−0,00635	−0,00196	+0,57698	−0,32348	−0,24197	+1
$\frac{N^{IV}_5}{N^{IV}_6}$	−1,1251482	−0,00015	−0,00263	−0,00552	−0,00170	+0,64753	−0,47272	−0,16480	+1

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation.							
		μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
					Sechstes System.				
g^{V}	22,4273091	0	+0,0012	+0,0028	+0,0011	+17,5264	+4,5608	+0,3351	
$\frac{N_0^V}{N_6^V}$	−0,0568966.3	−0,0021	−0,0709	−0,0802	+0,0054	+0,1181	+0,0259	+0,0037	−1
$\frac{N_1^V}{N_6^V}$	+0,2141503.5	+0,0239	+0,5891	+1,1142	−0,0535	−1,2411	−0,3954	−0,0370	+2
$\frac{N_2^V}{N_6^V}$	−1,3413225	−0,0246	+0,2553	−1,7815	+0,1916	+1,1733	+0,1326	+0,0531	−2
$\frac{N_3^V}{N_6^V}$	−8,6001745	−0,0293	−0,5661	−2,7830	−0,0543	−0,6597	+3,5131	+0,5795	+2
$\frac{N_4^V}{N_6^V}$	+8,8225143	+0,0002	+0,0025	+0,0058	+0,0026	−3,2775	+3,2773	−0,0111	−2
$\frac{N_5^V}{N_6^V}$	−27,373541	+0,0004	−0,0025	−0,0056	−0,0025	−21,9435	+22,3477	−0,3939	+1
					Siebentes System.				
g^{VI}	2,2584168	0	+0,0001	+0,0004	+0,0001	+0,9452	+1,3695	−0,0569	
$\frac{N_0^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0137320.0	−0,00030	−0,00493	−0,00263	−0,00006	−0,00410	+0,00099	+0,01104	+1
$\frac{N_1^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0151102.33	−0,00048	−0,00173	−0,00157	−0,00001	−0,00468	−0,00389	+0,01237	+1
$\frac{N_2^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0164237.12	−0,00029	−0,00268	−0,00057	+0,00002	−0,00462	−0,00536	+0,01350	0
$\frac{N_3^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0231931.91	−0,00005	−0,00077	−0,00145	−0,00002	−0,00609	−0,01081	+0,01920	+1
$\frac{N_4^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0603080.14	−0,00001	−0,00013	−0,00029	−0,00009	−0,01590	−0,03378	+0,05021	+1
$\frac{N_5^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0581604.21	−0,00001	−0,00009	−0,00021	−0,00007	−0,02911	−0,01972	+0,04923	+2

Herr *Leverrier* ist auch bei Berechnung der Variationen $\Delta\frac{N_i}{N_k}$, so wie bei Berechnung der Gröfsen $\frac{N_i}{N_k}$ selber, so verfahren, dafs er das vollständige System von *sieben* Gleichungen in zwei Systeme von *vier* und *drei* Gleichungen zerlegt, jedes mit eben so vielen Unbekannten, und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des ersten Systems die Variationen der drei Unbekannten des zweiten und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des zweiten Systems die Variationen der vier Unbekannten des ersten Systems vernachlässigt, und keine weitern Correctionen für diese Vernachlässigungen anbringt. Er variirt nämlich die Coëfficienten der für die Wurzeln g von ihm gebildeten biquadratischen und cubischen Gleichung und berechnet daraus die Variationen Δg, und dann mit diesen durch die strenge Auflösung eines Systems von respective vier und drei lineären Gleichungen die Variationen $\Delta\frac{N_i}{N_k}$. Zur Controlle braucht auch Herr *Leverrier* den Satz, dafs in jeder Variation $\Delta\frac{N_i}{N_k}$ die Summe der in die sieben μ multiplicirten Gröfsen verschwinden mufs. Aber diese Controlle ist bei ihm nicht, wie bei unsern strengen Formeln, entscheidend, da sie nach dem von ihm befolgten Gange der Rechnung eintreffen mufs, wie bedeutend auch der durch den Einflufs der von ihm vernachlässigten Glieder verursachte Fehler sein möge. In der That finden zwischen den Zahlencoëfficienten der vorstehenden und der von Herrn *Leverrier* gefundenen Ausdrücke der $\Delta\frac{N_i}{N_k}$ nicht unbedeutende Unterschiede Statt, während die Werthe der g und $\frac{N_i}{N_k}$ selber eine viel bessere Übereinstimmung zeigen.

Zur Vergleichung der Genauigkeit der beiderlei Resultate sind die in μ'' multiplicirten Variationen von $\frac{N''_0}{N''_3}$, $\frac{N''_1}{N''_3}$ etc. in die Gleichungen substituirt worden, welche sich aus III. zur Bestimmung dieser Variationen ergeben *). Setzt man nämlich wieder

$$(i,i) = 0,\quad (i,0)+(i,1)+\ldots+(i,6) = [i,i]$$

so folgt aus den Gleichungen III.

$$(g''-[0,0])\frac{N''_0}{N''_3}+\overline{|0,1|}\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots+\overline{|0,6|}\frac{N''_6}{N''_3} = 0,$$

$$\overline{|1,0|}\frac{N''_0}{N''_3}+(g''-[1,1])\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots+\overline{|1,6|}\frac{N''_6}{N''_3} = 0,$$

etc.

und hieraus, wenn man die Planetenmassen variirt:

$$+\overline{|0,1|}\frac{N''_1}{N''_3}\cdot\mu'+\ldots+\overline{|0,6|}\frac{N''_6}{N''_3}\mu^{\mathrm{VI}}$$
$$+(g''-\overline{|0,0|})\Delta\frac{N''_0}{N''_3}+\overline{|0,1|}\Delta\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots+\overline{|0,6|}\Delta\frac{N''_6}{N''_3}$$
$$+\frac{N''_0}{N''_3}\{\Delta g''-(0,1)\mu-\ldots-(0,6)\mu^{\mathrm{VI}}\} = 0,$$

*) Ich habe das dritte System gewählt, weil in den Variationen desselben die Abweichungen besonders erheblich sind; so werden in dem Ausdrucke von $\Delta\frac{N''_2}{N''_3}$ die Coëfficienten der verschiedenen μ bei *Leverrier* und nach den hier geführten Rechnungen:
—0,16284; —3,06732; —2,71193; —0,02085; 5,73826; 0,21778; 0,00690;
—0,14956; —2,79710; —2,50683; +0,02231; 5,21399; 0,21236; 0,00486.

$$\boxed{1,0}\frac{N''_0}{N''_3}\mu+\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_3}\mu''+\dots+\boxed{1,6}\frac{N''_6}{N''_3}\mu^{\text{vi}}$$
$$+\boxed{1,0}\Delta\frac{N''_0}{N''_3}+(g''-[1,1])\Delta\frac{N''_1}{N''_3}+\dots+\boxed{1,6}\Delta\frac{N''_6}{N''_3}$$
$$+\frac{N''_1}{N''_3}\{\Delta g''-(1,0)\mu-(1,2)\mu''-\dots-(1,6)\mu^{\text{vi}}\}=0,$$

etc.

Diese Gleichungen müssen für die in jedes einzelne μ multiplicirten Terme besonders erfüllt werden. Bezeichnet man z. B. die Coëfficienten von μ'' in $\Delta g''$ und $\Delta\frac{N''_k}{N''_3}$ mit γ und ν_k, wo $\nu_3=0$, so müssen die 7 Gröfsen γ und ν_k den 7 Gleichungen

$$\boxed{0,2}\frac{N''_2}{N''_3}+(\gamma-(0,2))\frac{N''_0}{N''_3}+(g''-[0,0])\nu_0+\boxed{0,1}\nu_1+\dots+\boxed{0,6}\nu_6=0,$$
$$\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_3}+(\gamma-(1,2))\frac{N''_1}{N''_3}+\boxed{1,0}\nu_0+(g''-[1,1])\nu_1+\dots+\boxed{1,6}\nu_6=0,$$

etc.

genügen, von denen die dritte für die beiden ersten Terme blofs den einen $\frac{N''_2}{N''_3}\cdot\gamma$ enthalten wird. Wenn man in diese Gleichungen für die Gröfsen γ und ν_k die von Herrn *Leverrier* und die nach der hier geführten Rechnung gefundnen Zahlenwerthe substituirt, so werden die Gröfsen linker Hand, welche in den verschiednen Gleichungen verschwinden sollen,

bei *Leverrier:*

−0,211; −0,195; −0,064; −0,237; +0,001; +0,001; 0;

hier: +0,0002; +0,0003; +0,0003; +0,0002; −0,0001; +0,0001; 0.

Man sieht hieraus, mit wie viel gröfsrer Schärfe die durch Anwendung der strengen Formeln gefundnen Resultate den Gleichungen, durch welche die Correctionen bestimmt werden, Genüge leisten.

11.

Aus den Variationen der Verhältnisse der zu demselben System gehörigen N berechnet Herr *Leverrier* für jedes System die Variation einer dieser Gröfsen selber, welches um die übrigen zu finden ausreicht, und aufserdem die Variationen der 7 Winkel β (§. 5.). Man erhält aber einen mehr symmetrischen Gang der Rechnung, wenn man, ohne die Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N einzuführen, deren Berechnung hier nur der Vergleichung der beiderlei Resultate halber angestellt worden ist, die Variationen der Gröfsen N und der Winkel β unmittelbar aus den Variationen der Gröfsen M ableitet, was auf folgende Weise geschieht.

Die Formeln VI. und die am Ende des §. 5. gefundenen Formeln,

$$N_i = \frac{KM_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}}, \quad K\sin\beta = A, \quad K\cos\beta = B,$$

ergeben

$$\text{XXXVIII.} \quad \varDelta\beta = \frac{B\varDelta A - A\varDelta B}{K^2}, \quad \frac{\varDelta K}{K} = \frac{A\varDelta A + B\varDelta B}{K^2},$$

$$\text{XXXIX.} \quad \varDelta N_i = N_i\left\{\frac{\varDelta K}{K} + \frac{\delta M_i}{M_i} - \mu^{(i)}\right\},$$

$$= N_i\frac{\varDelta K}{K} + \frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} - N_i\mu_i,$$

wo ich wieder $\delta M_i = \varDelta M_i + \frac{1}{2}M_i\mu^{(i)}$ eingeführt habe, weil die Werthe dieser Gröfsen in der oben am Schlufs von §. 8. aufgestellten Tabelle gegeben worden sind. Aus den Formeln (§. 5.)

$$A^{(i)} = HM_0^{(i)} + H'M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$B^{(i)} = LM_0^{(i)} + L'M_1^{(i)} + \ldots.$$

folgen, da $\varDelta H^{(i)} = \frac{1}{2}H^{(i)}\mu^{(i)}$, $\varDelta L^{(i)} = \frac{1}{2}L^{(i)}\mu^{(i)}$, die Gleichungen

$$\varDelta A^{(i)} = H\delta M_0^{(i)} + H'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$\varDelta B^{(i)} = L\delta M_0^{(i)} + L'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$

Setzt man daher

$$\frac{BH^{(i)} - AL^{(i)}}{K^2} = D_i, \quad \frac{AH^{(i)} + BL^{(i)}}{K^2} = F_i,$$

$$\frac{B'H^{(h)} - A'L^{(h)}}{K^2} = D'_i, \quad \frac{A'H^{(h)} + B'L^{(h)}}{K^2} = F'_i,$$

etc etc.,

so wird zufolge XXXVIII.

$$\varDelta\beta = D_0\delta M_0 + D_1\delta M_1 + \ldots. + D_6\delta M_6,$$
$$\varDelta\beta' = D'_0\delta M'_0 + D'_1\delta M'_1 + \ldots. + D'_6\delta M'_6,$$

etc.

$$\frac{\varDelta K}{K} = F_0\delta M_0 + F_1\delta M_1 + \ldots. + F_6\delta M_6,$$

$$\frac{\varDelta K'}{K'} = F'\delta M'_0 + F'_1\delta M'_1 + \ldots. + F'_6\delta M'_6,$$

etc.

Nennt man $e_0^{(i)}$ und $\varpi_0^{(i)}$ die Anfangswerthe von $e^{(i)}$ und $\varpi^{(i)}$ und setzt

$$e_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = E^{(i)},$$

so hat man

$$D_i = \frac{E^{(i)}}{K}\sin(\varpi_0^{(i)}-\beta), \qquad F_i = \frac{E^{(i)}}{K}\cos(\varpi_0^{(i)}-\beta),$$

$$D'_i = \frac{E^{(i)}}{K'}\sin(\varpi_0^{(i)}-\beta'), \qquad F'_i = \frac{E^{(i)}}{K'}\cos(\varpi_0^{(i)}-\beta'),$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Nach Berechnung der Gröfsen $\frac{\varDelta K}{K}$ findet man durch die obige Formel XXXIX. die Variationen $\varDelta N_i$, wenn man noch die Gröfsen $\frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} = \frac{N_i}{M_i}\delta M_i$ aus den für die Gröfsen δM_i gefundnen Ausdrücken bestimmt.

Da in dem Ausdrucke von $\delta M_i^{(h)}$ die Coëfficienten der einzelnen μ die Summe $\frac{1}{2}M_i^{(h)}$ haben, so erhält diese Summe in $\frac{\varDelta K^{(h)}}{K^{(h)}}$ den Werth $\frac{1}{2}$ und verschwindet in den Ausdrücken von $\varDelta\beta^{(h)}$ und $\varDelta N_i^{(h)}$, was man auch leicht *a priori* beweiset.

Berlin, den 9ten August 1845.