

Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature - 8.

Autor(en): **Habegger, Nathan**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **57 (1982)**

PDF erstellt am: **08.02.2015**

Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.5169/seals-43871>

Nutzungsbedingungen

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert. Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungshinweisen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature – 8

NATHAN HABEGGER

Quelles sont les formes bilinéaires symétriques unimodulaires qui peuvent être la forme d'intersection d'une variété close de dimension 4? Il résulte du théorème de Rochlin [1] que la signature d'une variété close simplement connexe de dimension 4 et dont la forme d'intersection est paire est divisible par 16. Dans cette note, nous présentons un exemple qui montre que l'hypothèse de simple connectivité est indispensable dans l'énoncé ci-dessus.

Le théorème de Rochlin dit que la signature d'une variété close de dimension 4 et presque parallélisable est divisible par 16. D'autre part une variété orientable M de dimension 4 est presque parallélisable si et seulement si sa deuxième classe de Stiefel–Whitney $w_2(M) \in H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ est nulle. Cette condition peut encore s'exprimer à l'aide de la forme d'intersection mod 2 comme suit: Soit $u_2 = u_2(M) \in H^2(M; \mathbf{Z}_2)$, la deuxième classe de Wu définie par la formule $\langle u_2 \cdot x, [M] \rangle = \langle \text{Sq}^2(x), [M] \rangle$ pour tout $x \in H^{n-2}(M; \mathbf{Z}_2)$. On rappelle la formule de Wu, $w = \text{Sq}(u)$, où $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots$ et $u = 1 + u_1 + u_2 + \dots$ sont respectivement les classes totales de Stiefel–Whitney et de Wu. Pour la suite, M désigne maintenant une variété close orientable de dimension 4. On a alors $w_1(M) = 0$ et la formule de Wu donne $w_2(M) = u_2(M)$. On a donc la formule $w_2 \cdot x = \text{Sq}^2(x) = x^2$ pour tout $x \in H^2(M; \mathbf{Z}_2)$. Ainsi pour M close orientable de dimension 4, on a $w_2 = 0$ si et seulement si $x^2 = 0$ pour tout $x \in H^2(M; \mathbf{Z}_2)$.

Soit $T^2 = T^2(M; \mathbf{Z})$ le sous-groupe de torsion de $H^2 = H^2(M; \mathbf{Z})$ et soit $\rho: H^2(M; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ la réduction mod 2. Les sous-espaces $\rho(T^2)$ et $\rho(H^2)$ sont mutuellement orthogonaux (pour le produit mod 2). En fait, pour des raisons de dimension (cf. [2]) chacun est le complément orthogonal de l'autre. Il s'ensuit que

$$(i) \quad w_2(M) \in \rho(H^2)$$

$$(ii) \quad w_2(M) \in \rho(T^2) \Leftrightarrow \text{la forme d'intersection sur } H^2/T^2 \text{ est paire.}$$

Ainsi pour M^4 simplement connexe ($T^2 = 0$) les conditions

$$(a) \quad M \text{ a forme d'intersection paire } (w_2 \in \rho(T^2))$$

$$(b) \quad M \text{ est presque parallélisable } (w_2 = 0)$$

sont équivalentes.

On trouve ainsi comme corollaire du théorème de Rochlin l'énoncé du début. Si M de dimension 4 est simplement connexe et possède une forme d'intersection

paire, alors sa signature est divisible par 16. Mais en général, la condition (a) ci-dessus est plus faible que (b) comme on peut voir sur l'exemple suivant:

Soit $\tilde{M} = S^2 \times S^2$ et $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2$ où \mathbf{Z}_2 agit sur \tilde{M} par $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. On a $\text{rang } H^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = 2$ donc $\text{rang } H^2(M) = 0$, c'est-à-dire $H^2(M) = T^2(M)$. D'autre part, à partir du plongement diagonal $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$ on obtient par passage aux quotients un plongement $\mathbf{RP}^2 \hookrightarrow M$ avec self-intersection 1. Si $x \in H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ est la duale de Poincaré de $i_*[\mathbf{RP}^2] \in H_2(M; \mathbf{Z}_2)$, on a $w_2 \cdot x = x^2 = 1$ et donc $w_2 \neq 0$.

La variété ci-dessus a signature zéro, puisque $H^2/T^2 = 0$. Cependant, sa construction nous a donné l'espoir qu'il puisse exister une variété avec forme d'intersection paire et signature $\equiv 8 \pmod{16}$. Voici un tel exemple: Soit M l'hypersurface de degré 4 dans \mathbf{CP}^3 donnée par l'équation $Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^4 + Z_3^4 = 0$. On définit une involution sur \mathbf{CP}^3 par $(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \mapsto (\bar{Z}_1, -\bar{Z}_0, \bar{Z}_3, -\bar{Z}_2)$. On vérifie aisément que c'est une involution sans points fixes qui laisse \tilde{M} invariant. Par passage aux quotients on obtient un plongement $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2 \xrightarrow{i} Q = \mathbf{CP}(3)/\mathbf{Z}_2$. On vérifie aisément que M est orientable avec fibré normal $v(i)$ non-orientable.

Nous allons vérifier que la forme d'intersection de M est paire, $\text{signature}(M) = -8$, $\text{rang } H^2(M; \mathbf{Z}) = 10$. D'après la classification des formes symétriques unimodulaires paires indéfinies (cf [4]), on obtient la

PROPOSITION. *Toute forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire telle que $|\text{signature}| \leq 4/5 \text{ rang}$ est la forme d'intersection d'une variété close de dimension 4.*

La variété \tilde{M} a les propriétés suivantes (cf. [3]). \tilde{M} est simplement connexe, $\text{rang } H^2(\tilde{M}; \mathbf{Z}) = 22$, $\text{signature}(\tilde{M}) = -16$. On a $-16 = \text{signature}(\tilde{M}) = \langle p_1(\tilde{M})/3, [\tilde{M}] \rangle = \langle p_1(M)/3, 2[M] \rangle = 2 \text{ signature}(M)$, donc $\text{signature } M = -8$. D'autre part $\text{rang } H^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = \frac{1}{2}(\text{rang } H^2(\tilde{M}) + 2) = 12$ et donc $\text{rang } H^2(M) = 10$.

Il reste à voir que la forme d'intersection de M est paire. D'après ce qui précède, il suffit de voir que $w_2(M) \in \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$. De l'équation fibré $T_M + v(i) = i^*T_Q$ déduit de l'inclusion $M \xrightarrow{i} Q$ on tire $w_2(M) + w_2(v(i)) = i^*w_2(Q)$. Nous allons montrer que $H^2(Q, \mathbf{Z}_2) = \rho(T^2(Q, \mathbf{Z}))$ et $w_2(v(i)) = 0$. Il s'ensuit que $w_2(M) = i^*w_2(Q) \in i^*\rho(T^2(Q, \mathbf{Z})) \subset \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$.

Soit $\mathbf{CP}(1) \hookrightarrow \mathbf{CP}(3)$ donné par $Z_2 = Z_3 = 0$. Par passage aux quotients, on obtient $\mathbf{RP}^2 = \mathbf{CP}(1)/\mathbf{Z}_2 \hookrightarrow Q$. Rappelons que pour $\tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement à deux feuilles, on a la suite exacte courte de complexes de chaînes: $0 \rightarrow C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \rightarrow C(\tilde{X}) \otimes \mathbf{Z}_2 \rightarrow C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0$. On obtient donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(\mathbf{CP}(1); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\cong} & H_2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) & \rightarrow & H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) & \rightarrow & H_1(\mathbf{CP}(1); \mathbf{Z}_2) = 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ H_2(\mathbf{CP}(3); \mathbf{Z}_2) & \rightarrow & H_2(Q; \mathbf{Z}_2) & \rightarrow & H_1(Q; \mathbf{Z}_2) & \rightarrow & H_1(\mathbf{CP}(3); \mathbf{Z}_2) = 0 \end{array}$$

Il s'ensuit que $H_2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_2(Q; \mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Par dualité, $H^2(Q; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}(H_1(Q; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) & \rightarrow & H^2(Q; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^2(Q; \mathbf{Z}_2) \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Ext}(H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\rho} & H^2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \end{array}$$

établit que $\rho(T^2(Q; \mathbf{Z})) = H^2(Q; \mathbf{Z}_2)$.

Comme $j_*[\mathbf{RP}^2]$ engendre $H_2(Q; \mathbf{Z}_2)$ et que l'intersection de \mathbf{RP}^2 et M est zéro (\tilde{M} est de degré 4), il s'ensuit que $i_*[M] = 0$ dans $H_4(Q; \mathbf{Z}_2)$. La classe d'Euler du fibré normal $v(i)$ est donc aussi triviale, ce qui montre que $w_2(v(i)) = 0$.

Je voudrais remercier M. Michel Kervaire pour l'intérêt qu'il a pris pendant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

- [1] MILNOR, J. and KERVAIRE, M., *Bernoulli Numbers, Homotopy Groups and a Theorem of Rochlin*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1958) 454–458.
- [2] MASSEY W. S. and PETERSON, F. P., *On the dual Stiefel-Whitney classes of a manifold*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 8 (1963), 1–13.
- [3] KULKARNI R. and WOOD, J., *Topology of Nonsingular Complex Hypersurfaces*, Advances in Mathematics 35, 239–263 (1980).
- [4] SERRE, J. P. *Cours d'Arithmétique*, Presse Universitaire de France (1970).

*Section de Mathématiques
de l'Université de Genève
2–4, rue du Lièvre
CH–1211 Genève 24*

Recu le 3 septembre 1981