

Progress in Mathematics
Vol. 62

Edited by
J. Coates and
S. Helgason

Birkhäuser
Boston · Basel · Stuttgart



Topologie Perdue

I Du côté de chez Rohlin

II Le côté de Casson

Lucien Guillou
Alexis Marin
editors

1986

Birkhäuser
Boston · Basel · Stuttgart

Editors:

Lucien Guillou
Université de Paris-Sud
Mathématique -- Bâtiment 425
Centre d'Orsay
F-91405 Orsay Cedex (France)

Alexis Marin
Université de Paris-Sud
Mathématique -- Bâtiment 425
Centre d'Orsay
F-91405 Orsay Cedex (France)

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Main entry under title:

A la recherche de la topologie perdue.

(Progress in mathematics ; vol. 62)

French and English.

Bibliography: p.

1. Topology -- Addresses, essays, lectures.

I. Guillou, Lucien. II. Marin, Alexis. III. Series:

Progress in mathematics (Boston, Mass.) ; vol. 62.

QA611.15.A2 1986 514 85-30844

ISBN 0-8176-3329-4

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

A la recherche de la topologie perdue / Lucien

Guillou ; Alexis Marin, ed. -- Boston ; Basel ;

Stuttgart : Birkhäuser, 1986.

(Progress in mathematics ; Vol. 62)

Enth.: 1. Du côté de chez Rohlin.

2. Le côté de Casson

ISBN 3-7643-3329-4 (Basel . . .)

ISBN 0-8176-3329-4 (Boston . . .)

NE: Guillou, Lucien [Hrsg.]; GT

Ce volume est dédié

à la mémoire de

V.A. ROHLIN

(1919-1984)

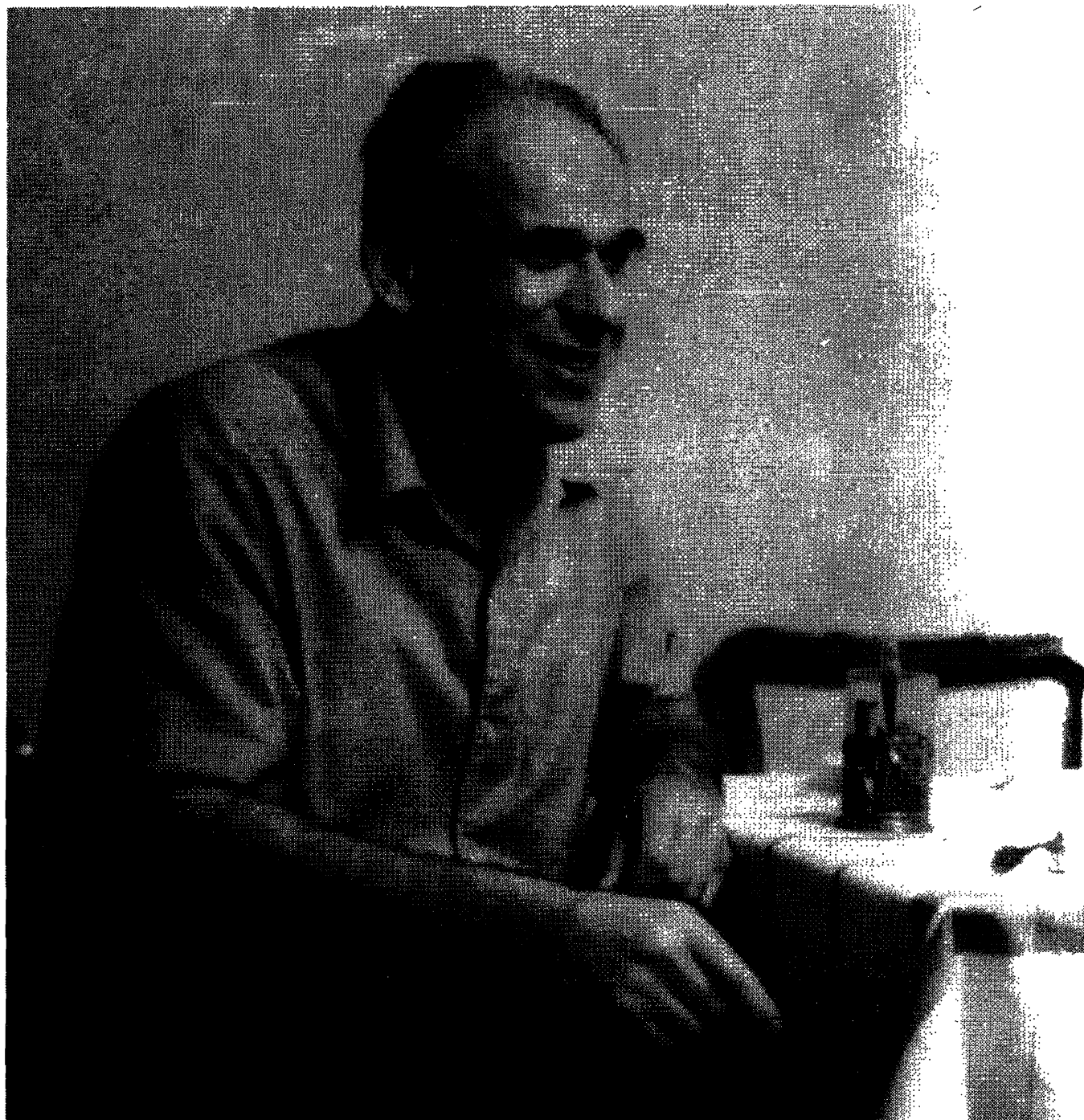


Table des matières

V. A. Rohlin (1919 - 1984).	ix
Travaux de V. A. Rohlin	xi
Introduction.	xv

I - Du côté de chez Rohlin

. Quatre articles de V. A. Rohlin (traduit du russe par S. Ochanine)	3
. Commentaires sur les quatres articles précédents de V. A. Rohlin, par L. Guillou et A. Marin	25
. Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, par L. Guillou et A. Marin	97
. An elementary proof of Rohlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, by Y. Matsumoto.	119
. CP^2/σ ou Kuiper et Massey au pays des coniques, par A. Marin	141

Appendice

. Une histoire des rapports entre Rohlin et son théorème (telle que racontée aux auteurs par O. Viro et V. Harlamov)	153
---	-----

II - Le côté de Casson

. On the G-signature theorem in dimension four, by C. Gordon .	159
. Cobordism of classical knots, by A. Casson and C. Gordon . .	181
. Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds, by A. Casson (notes prepared by L. Guillou). . .	201

Vladimir Abramovich Rohlin est né à Baku le 23 août 1919. Il commença ses études universitaires en 1935 au département de mécanique et mathématiques de l'université de Moscou. Ses professeurs furent A.I. Plesner (son conseiller scientifique officiel), L.S. Pontryagin, P.S. Alexandrov, A.N. Kolmogorov. En 1940, il terminait ses études dans ce département et restait là pour un 3ème cycle ("aspirantura", une période de trois ans durant laquelle on prépare sa "thèse de candidat"). En 1941, quand l'Allemagne attaqua l'U.R.S.S., Rohlin rejoignit le corps des volontaires du Peuple (unités militaires non entraînées). Son unité fut encerclée et Rohlin fait prisonnier par les allemands. Ensuite, il réussit à s'échapper, à rejoindre l'armée soviétique et finit la guerre comme traducteur militaire (Rohlin parlait couramment l'allemand). Immédiatement après la guerre Rohlin fut emprisonné par la sécurité de l'armée (comme ce fut le cas pour de nombreux anciens prisonniers de guerre) mais fut libéré à la fin de l'année 1946.

De 1947 à 1952, Rohlin travailla à l'institut mathématique Steklov de Moscou comme assistant chercheur dans le département de Pontryagin. Il soutint avec succès sa thèse de candidat ("Espaces de Lebesgue et leurs automorphismes") en 1948 et son doctorat ("les classes les plus importantes de systèmes dynamiques avec une mesure invariante") en 1951.

En 1952, Rohlin partit de Moscou pour Arkhangelsk où il fut professeur de mathématiques à l'institut des Bois et Forêts. De 1955 à 1957, il enseigna à l'institut pédagogique d'Ivanovo, et de 1957 à 1960 dans un institut similaire à Kolomna. En 1960 Rohlin quitta Kolomna pour Leningrad où il fut professeur au département de mathématiques et mécaniques de l'université de Leningrad pendant vingt et un ans. Il fut mis à la retraite en 1982 bien qu'il fût toujours un cher-

cheur très actif à ce moment. V.A. Rohlin est mort d'un arrêt du coeur le 3 décembre 1984.

Rohlin a travaillé dans différents domaines des mathématiques. Ses principaux champs d'activité furent la théorie de la mesure, la théorie ergodique, la topologie et la géométrie algébrique réelle. Au début, la théorie de la mesure et la théorie ergodique prévalurent. Dans les années 1940-1949 il accomplit nombre de travaux fondamentaux qui influencèrent grandement le développement ultérieur du sujet. La période suivante (1950-1958) débute avec ses plus célèbres investigations topologiques - elles sont présentées dans les papiers réunis dans ce volume. A la même époque il publia aussi des résultats fondamentaux sur le cobordisme et les classes caractéristiques. En 1958, alors que la notion d'entropie venait d'être introduite par Kolmogorov dans la théorie ergodique, Rohlin revint à cette dernière. Il organisa et dirigea un séminaire de théorie ergodique à l'université de Moscou, dont l'activité fut une étape décisive dans le développement de la théorie ergodique (il habitait alors à Kolomna à environ 100 km de Moscou, et devait prendre le train pour Moscou chaque semaine). A partir de 1965, Rohlin étudia principalement la topologie. Ses recherches concernent les classes caractéristiques, les variétés de basse dimension et la topologie des variétés algébriques réelles. L'état actuel de ce dernier sujet est largement dû à Rohlin.

Rohlin était un brillant conférencier. Ses conférences se remarquaient pour leur élégance et leur lucidité. Sa conversation et ses écrits frappaient par une attention soignée envers la langue. L'activité pédagogique de Rohlin fut à son sommet à Leningrad : avant son arrivée la topologie moderne y était inconnue et c'est Rohlin qui rendit la topologie très populaire parmi la communauté mathématique de Leningrad. Il créa le premier cours de topologie pour jeunes étudiants en U.R.S.S. et conçut un système complet d'études topologiques pour les futurs topologues. A Leningrad, Rohlin créa une école scientifique dont les membres travaillent maintenant dans différents domaines des mathématiques. Son contact et sa collaboration influencèrent aussi de nombreux autres mathématiciens. Sa largeur d'esprit et sa profonde compréhension des gens et des choses attiraient à lui de nombreuses personnes pourtant bien différentes. Sa perte sera durement ressentie à Leningrad aussi bien que dans la communauté mathématique internationale.

1. Spectral theory of linear operators, Uspeki Matem. Nauk (N.S.) 1, n° 1 (11), 71-191 (1946) (Russian) (avec A.I. Plessner), Amer. Math. Soc. Translat. II ser. 62, 1-28 (1967), MR 9, p. 43, Zbl. 185, p. 210.
2. Homotopy groups, Uspeki Matem. Nauk (N.S.) 1, n° 5-6 (15-16), 175-223 (1946) (Russian), MR 10, p. 393, Zbl. 61, p. 410.
3. On the classification of measurable decompositions, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 58, 29-32 (1947) (Russian), MR 9, p. 230, Zbl. 30, p. 243.
4. On the problem of the classification of automorphisms of Lebesgue spaces, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 58, 189-191 (1947) (Russian), MR 9, p. 230, Zbl. 30, p. 244.
5. Unitary rings, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 59, 643-646 (1948) (Russian), MR 9, p. 446, Zbl. 30, p. 398.
6. A 'general' measure-preserving transformation is not mixing, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 60, 349-351 (1948) (Russian), MR 9, p. 504, Zbl. 33, p. 066.
7. On the fundamental ideas of measure theory, Mat. Sbornik (N.S.) 25 (67), 107-150 (1949) (Russian), Amer. Math. Soc. Translat. n° 71, 55 pp. (1952), MR 11, p. 18, Zbl. 33, p. 169.
8. On the decomposition of a dynamical system into transitive components, Mat. Sbornik (N.S.) 25 (67), 235-249 (1949) (Russian), MR 11, p. 373, Zbl. 34, p. 065.
9. On dynamical systems whose irreducible components have a pure point spectrum, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 64, 167-169 (1949) (Russian), MR 10, p. 462, Zbl. 40, p. 212.
10. On the approximation of non periodic flows by periodic ones, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 64, 619-620 (1949) (Russian) (with A.A. Gurevic), MR 10, p. 549, Zbl. 40, p. 212.
11. On endomorphisms of compact commutative groups, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 13, 329-340 (1949) (Russian), MR 11, p. 40, Zbl. 32, p. 284.
12. Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Uspeki Matem. Nauk (N.S.) 4, n° 2 (30), 57-128 (1949) (Russian), Amer. Math. Soc. Translat. II ser. 49, 171-240 (1966), MR 11, p. 40, Zbl. 32, p. 284.
13. Summary of results in homotopy theory of continuous transformations of a sphere into a sphere, Uspeki Matem. Nauk (N.S.) 5, n° 6 (40), 88-101 (1950) (Russian), MR 12, p. 519, Zbl. 39, p. 192.
14. Approximation theorems for measurable flows, Izvestiya Akad. Nauk SSSR ser. Mat. 14, 537-548 (1950) (Russian) (with A.A. Gurevic), MR 12, p. 422, Zbl. 39, p. 338.
15. On a mapping of the $(n+3)$ -dimensional sphere into the n -dimensional sphere, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 80, 541-544 (1951) (Russian), MR 13, p. 674, Zbl. 44, p. 381.

16. Classification of mappings of an $(n+3)$ -dimensional sphere into the n -dimensional sphere, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81, 19-22 (1951) (Russian), MR 13, p. 674, Zbl. 43, p. 384.
17. A three dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81, 355-357 (1951) (Russian), MR 14, p. 72, Zbl. 44, p. 381.
18. New results in the theory of four-dimensional manifolds, Doklady Akad. Nauk SSR (N.S.) 84, 221-224 (1952) (Russian), MR 14, p. 573, Zbl. 46, p. 407.
19. Intrinsic definition of Pontryagin's characteristic cycles, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 84, 449-452 (1952) (Russian), MR 14, p. 306, Zbl. 49, p. 401.
20. Intrinsic homology, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 89, 789-792 (1953) (Russian), MR 15, p. 53, Zbl. 50, p. 397.
21. Characteristic cycles of smooth manifolds, Third congress of Soviet mathematicians, vol. 2, p. 55 (1956) (Russian).
22. Metric classification of measurable functions, Uspeki Mat. Nauk (N.S.) 12, n° 2 (74), 169-174 (1957) (Russian), MR 19, p. 946.
23. On Pontryagin characteristic classes, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 113, 276-279 (1957) (Russian), MR 20 # 1318, Zbl. 78, p. 368.
24. The combinatorial invariance of Pontryagin classes, Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 114, 490-493 (1957) (Russian), MR 21 # 865, Zbl. 78, p. 368.
25. Internal homologies, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 119, 876-879 (1958)(Russian), MR 21 # 2238, Zbl. 80, p. 165.
26. Relations between characteristic classes of four-dimensional manifolds, Kolomen Ped. Inst. Uč. Zap. Ser. Fiz. Mat. 2, n° 1, 3-17 (1958) (Russian), MR 24 # A 2972.
27. Spectral theory of dynamical systems, Third congress of Soviet mathematicians, vo. 3, 284-292 (1958) (Russian) (with S.V. Fomin), , Zbl. 88, p. 326.
28. Entropy of metric automorphism, Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 980-983 (1959) (Russian), MR 21 # 1599, Zbl. 96, p. 314.
29. Theory of intrinsic homologies, Uspeki Mat. Nauk 14, n° 4 (88), 3-20 (1959)(Russian), Amer. Math. Soc. Transl. (2) 30, 255-271 (1963), MR 22 # 11402, Zbl. 92, p. 156.
30. New progress in the theory of transformations with invariant measure, Uspeki Mat. Nauk 15, n° 4 (94), 3-26 (1960) (Russian), Russian Math. Surveys 15, n° 4, 1-22, MR 24 # A 2002, Zbl. 102, p. 330.
31. The entropy of an automorphism of a compact commutative group, Teor. Verojatnost. i Primenen. 6, 351-352 (1961) (Russian), Theor. Probab. applic. 6, 322-323 (1962), MR 27 # 2605, Zbl. 252 # 94012.
32. The structure and properties of invariant measurable partitions, Doklady Akad. Nauk SSSR, 141, 1038-1041 (1961) (Russian) (with Ja.G. Sinaĭ), Soviet. Math. Doklady 2, 1611-1614 (1962), MR 27 # 2604, Zbl. 161, p. 343.

33. Exact endomorphisms of a Lebesgue space, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Mat.* 25, 499-530 (1961) (Russian); *Amer. Math. Soc. Translat. II ser.* 39, 1-36 (1964); *MR* 26 # 1423, *Zbl.* 107, p. 330.
34. Entropy of a skew product of mappings with invariant measure, *Vestnik Leningrad Univ.* 17, n° 7, 5-13 (1962) (Russian) (with L.M. Abramov); *Amer. Math. Soc. Transl. II ser.* 48, 255-265 (1965); *MR* 25 # 4076, *Zbl.* 156, p. 61.
35. An axiomatic definition of the entropy of a transformation with invariant measure, *Doklady Akad. Nauk SSSR* 148, 779-781 (1963) (Russian); *Soviet Math. Doklady* 4, 188-191 (1963); *MR* 27 # 3780, *Zbl.* 127, p. 334.
36. Differential Topology, Fourth congress of Soviet Mathematicians, vol. 1, 218-219 (1963) (Russian).
37. Generators in ergodic theory, *Vestnik Leningrad Univ.* 18, n° 1, 26-32 (1963) (Russian, english summary); *MR* 33 # 1427, *Zbl.* 167, p. 328.
38. Metric properties of endomorphisms of compact commutative groups, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Mat.* 28, 867-874 (1964) (Russian); *Amer. Math. Soc. Transl. II, ser.* 64, 244-252 (1967); *MR* 29 # 5955, *Zbl.* 126, p. 61.
39. The embedding of non-orientable three-manifolds into five-dimensional Euclidean space, *Doklady Akad. Nauk SSSR* 160, 549-551 (1965) (Russian); *Sov. Math. Doklady* 6, 153-156 (1965); *MR* 32 # 1719; *Zbl.* 132, p. 201.
40. Diffeomorphisms of the manifold $S^2 \times S^3$, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Mat.* 29, n° 6, 1386-1387 (1965) (Russian); *Amer. Math. Soc. Transl. II ser.* 66, 228-229 (1968) (as a supplement to a paper of Novikov).
41. New examples of four dimensional manifolds, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 162, 273-276 (1965) (Russian); *Soviet Math. Doklady* 6, 660-663 (1965); *MR* 32 # 8412; *Zbl.* 132, p. 199.
42. Generators in ergodic theory II, *Vestnik Leningrad Univ.* 20, n° 13, 68-72 (1965) (Russian, English summary); *MR* 33 # 1428, *Zbl.* 167, p. 328.
43. Pontrjagin - Hirzebruch class of codimension 2, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Mat.* 30, 705-718 (1966) (Russian); *Amer. Math. Soc. Translat. II ser.* 71, 122-134 (1968); *MR* 35 # 2295, *Zbl.* 171, p. 222.
44. Surface and volume, *Encyclopedia of elementary mathematics*, book 5, 5-87 (1966) *Nauk* (Russian); *Zbl.* 145, p. 168.
45. Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure, *Uspeki Mat. Nauk* 22, n° 5 (137), 3-56 (1967) (Russian); *Russian Math. Surveys* 22, n° 5, 1-52 (1967); *MR* 36 # 349, *Zbl.* 174, p. 455.
46. Imbeddings and immersions in Riemannian geometry, *Uspeki Mat. Nauk.* 23, n° 4, 345 (1958) (Russian).
47. The normal Euler numbers of the projective plane and Klein bottle in four dimensional Euclidean space, *Doklady Akad. Nauk SSSR* 191, 27-29 (1970) (Russian); *Soviet Math. Doklady*, 11, 316-319 (1970); *MR* 44 # 2246, *Zbl.* 214, p. 226.
48. Homology in dimension two and two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds, *Uspeki Mat. Nauk* 25, n° 3, 258 (1970) (Russian).

49. Imbeddings and immersions in Riemannian geometry, *Uspeki Mat. Nauk* 25, n° 5 (1970), 3-62 (1970) (Russian) (with M.L. Gromov) ; *Russian Math. Surveys* 25, n° 5, 1-57 (1970) ; MR 44 # 7571, Zbl. 202, p. 210.
50. Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 5, n° 1, 48-60 (1971) (Russian) ; *Functional Anal. Appl.* 5, 39-48, (1971) ; MR 45 #7733, Zbl. 268 # 57 019.
51. Proof of a conjecture of Gudkov, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 6, n° 2, 62-64 (1972) (Russian) ; *Functional Anal. Appl.* 6, 136-138 (1972) ; MR 45 # 5131, Zbl. 259 # 140010.
52. Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 6, n° 4, 58-64 (1972) (Russian) ; *Functional Anal. Applic.* 6, 301-306 (1972) ; MR 47 # 232, Zbl. 295 # 14008.
53. Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem II, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 7, n° 2, 91-92 (1973) (Russian) ; *Functional Anal. Appl.* 7, 163-164 (1973) ; MR 48 # 9734, Zbl. 295 # 14009.
54. Recent work on the topology of real algebraic varieties, *Uspeki Mat. Nauk* , 29, n° 3, 180 (1974) (Russian).
55. Complex orientations of real algebraic curves, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 8, n° 4, 71-74 (1974) (Russian) ; *Functional Anal. Appl.* 8, 331-334 (1974) ; MR 51 # 4286, Zbl. 317 # 14028.
56. (with D.B. Fuchs) A beginning course in topology : geometrical chapters, Izdat. "Nauka" Moscow, 1977, 487 pp. ; trad. française : premier cours de topologie : chapitres géométriques, Editions Mir, 1981 ; MR 58 # 31080.
57. Complex topological characteristics of real algebraic curves, *Uspeki Mat. Nauk* 33 (1978), n° 5 (203), 77-89 (Russian) ; *Russian Math. Surveys* 33 (1978), n° 5, 85-98 ; MR 81m # 14024.
58. New inequalities in the topology of real plane algebraic curves, *Funkcional Anal. i Prilozen.* 14 (1980), n° 1, 37-43 (Russian) ; *Functional Anal. Appl.* 14 (1980), 29-33 ; MR 82e # 14066.

Introduction

Les articles rassemblés ici datant d'époques et de lieux variés, cette courte introduction propose quelques repères pour les mettre en perspective. Pour une introduction générale, avec de nombreuses références, aux variétés de dimension quatre voir Mandelbaum [Man, 1980]. Pour une histoire des rapports personnels entre Rohlin et son théorème voir l'appendice à la première partie de ce volume.

Sans doute le premier résultat spécifique à la dimension 4 est la remarque de Pontriaguine [P1, 1949] (indépendamment due aussi à Milnor [Mi, 1956] s'appuyant sur Whitehead [W2, 1949]) comme quoi deux variétés fermées, orientées, simplement connexes ont même type d'homotopie orienté si et seulement si elles ont des formes quadratiques d'intersection isomorphes (plus tard, Wall [Wa, 1964] montrera même que dans ce cas les deux variétés sont h-cobordantes). Ensuite Rohlin continuant le travail de Pontriaguine sur le calcul des groupes d'homotopies $\pi_{n+p}(S^n)$ pour $p=0,1,2$ (cf. par exemple [P2, 1955]) s'attaque au cas $p=3$ et, puisqu'il utilise la méthode dite de Thom-Pontriaguine, est naturellement amené à calculer le groupe de cobordisme des variétés orientées de dimension 4 et à noter qu'une variété lisse fermée simplement connexe admettant une structure spin (ce qui équivaut à dire que sa forme quadratique d'intersection ne prend que des valeurs paires) a une signature divisible par 16 [R1, 1952]. Il est à signaler que ce dernier résultat est strictement lié au fait que $\pi_{n+3}(S^n) \simeq \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. En fait, Rohlin commence par "prouver" que $\pi_{n+3}(S^n) \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ puisse corriger et obtient simultanément le bon résultat pour $\pi_{n+3}(S^n)$ et sa formule pour la signature. Ces résultats furent annoncés en 1952 dans une série de quatre notes aux comptes rendus de l'académie des sciences soviétiques. Ce sont ces notes qui sont ici traduites et largement commentées pour la raison que les méthodes géométriques qu'elles recèlent furent longtemps oubliées. En effet, l'importance des résultats de Rohlin n'a certainement pas échappée à ses contemporains, mais profitant des puissantes méthodes algébriques inaugurées par Serre [Se, 1951] pour calculer les groupes d'homotopie, ils renversèrent la vapeur et classiquement la formule de Rohlin se déduisit de la connaissance de $\pi_{n+3}(S^n)$. C'est la preuve que l'on trouve chez Milnor-Kervaire [MK, 1958] où le résultat est étendu aux variétés lisses fermées presque parallélisables de dimension $4n$. Signalons cependant une petite extension par Kervaire-Milnor [KM, 1961] du théorème de Rohlin qui mettait l'accent sur les sphères caractéristiques d'une variété de dimension 4 préparant ainsi les extensions à venir. Cette remarque avait aussi une saveur plus géométrique que la formulation de Rohlin et se révélera utile en relation avec l'invariant d'Arf des noeuds (voir Robertello [Rob, 1965]).

Le théorème de Rohlin donne bien sûr des restrictions sur les formes quadratiques réalisables comme formes quadratiques d'intersection d'une variété lisse fermée simplement connexe de dimension 4. Par exemple la forme E_8 ne peut être ainsi représentée. Mais aucune autre

restriction ne sera trouvée avant la contribution récente de Donaldson [D, 1983] qui dit qu'une forme définie n'est ainsi réalisable que si elle est standard. Pour sa part Freedman [F1, 1982] a montré que toute forme quadratique est réalisable comme forme d'intersection d'une (parfois deux) variété topologique fermée simplement connexe de dimension 4.

L'importance et l'ubiquité de ce résultat de Rohlin sont telles qu'on le retrouvait derrière la plupart des articles sur la dimension quatre mais aussi dans d'autres domaines, de manière parfois inattendue. Voici trois exemples importants :

1) Le résultat de Rohlin permet de définir le μ invariant d'une sphère d'homologie entière de dimension 3 comme suit (cf. [EK, 1963] ou [HNK, § 7]) : on sait^(*) qu'une telle sphère X borde une variété lisse de dimension 4, simplement connexe et dont la forme quadratique d'intersection est paire. Alors la signature de $Y, \sigma(Y)$, est divisible par 8 et on considère $\mu(X) = \frac{\sigma(Y)}{8} \bmod 2$ comme un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est défini indépendamment du choix de Y grâce à la formule de Rohlin. Les classes d'homologie cobordisme (H-cobordisme) des sphères d'homologie entière s'organisent en un groupe θ_3^H et μ induit une application bien définie et surjective $\mu : \theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De nombreux résultats épars ont été établis concernant ce μ -invariant (voir Mandelbaum [Man, 1980]). Citons le dernier résultat (hiver 1985) sur le sujet : il est dû à A. Casson (non publié) et utilise des idées et méthodes récentes. Il existe un invariant $\lambda(X) \in \mathbb{Z}$ associé à toute sphère d'homologie entière orientée X qui n'est pas un invariant de H-cobordisme mais vérifie $\lambda(X) = \mu(X) \bmod 2$. De plus $\lambda(-X) = -\lambda(X)$ si $-X$ désigne X munie de l'orientation opposée et $\lambda(X) = 0$ si X est une sphère d'homotopie. Une propriété supplémentaire un peu technique suffit à caractériser λ uniquement.

2) De manière plus surprenante, la formule de Rohlin et le μ -invariant sont au coeur de l'existence de variétés topologiques de dimension > 5 sans triangulation combinatoire [Sb, 1970] et de l'éventuelle possibilité de les trianguler malgré tout (de manière non combinatoire) [GS, 1976], [Ma, 1976].

3) Cappel et Shaneson [CS, 1976] ont construit une variété fermée de dimension 4 ayant le type d'homotopie simple de $\mathbb{R}P^4$ (en

(*) Voir les commentaires dans ce volume pour une preuve selon les méthodes originelles de Rohlin.

fait homéomorphe [F2]) mais non difféomorphe à $\mathbb{R}P^4$. La construction s'appuie sur l'existence d'un champ de repères particulier du tore T^3 qui était déjà au coeur des notes de Rohlin. Pour montrer que leur variété n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}P^4$, Cappel et Shaneson utilisent une formule étendant le théorème de Rohlin analogue à celle signalée ci-dessous mais la démontrent en s'appuyant sur le théorème de Rohlin.

Ce rôle fondamental du théorème de Rohlin conduisirent au début des années 70 divers topologues à en chercher une compréhension plus directe et plus géométrique. En particulier l'hypothèse spin fut supprimée et la formule généralisée en une congruence entre la signature de la variété et l'auto intersection et l'invariant d'Arf associés à une surface orientable caractéristique (c'est-à-dire duale à la deuxième classe de Stiefel-Whitney de la variété). Voir Casson (non publié), Freedman-Kirby [FK, 1978], Matsumoto [Mat, 1978].

Rohlin lui-même connaissait cette formule^(*) [R4, 1972] et l'utilisait pour démontrer des conjectures de Gudkov sur la topologie des courbes algébriques réelles. Motivés par les raisons ci-dessus et ce même problème nous avons étendu la formule au cas des surfaces caractéristiques non orientables [GM, 1977]. Extension dont Matsumoto a immédiatement donné sa propre preuve. Ces deux preuves entièrement géométriques et élémentaires sont réunies dans ce volume.

Le problème de la topologie des courbes algébriques réelles (1ère partie du 16ème problème de Hilbert) conduit naturellement à l'identification de la variété quotient de $\mathbb{C}P^2$ par l'involution complexe. Ici Marin reconnaît une variété difféomorphe à S^4 mettant un point final aux recherches de Massey [Mas 2, 1973] et Kuiper [Kui, 1974].

Bien avant tout cela, Whitney [Wy, 1940] dans un des premiers papiers sur la théorie des fibrés étudiait les plongements de surfaces F dans \mathbb{R}^4 et montrait que $F.F = 2\chi(F) \bmod 4$ où $\chi(F)$ désigne la caractéristique d'Euler de F et $F.F$ l'auto-intersection de F dans \mathbb{R}^4 (toujours nulle si F est orientable). Il conjecturait aussi que $F.F$ ne pouvait prendre que les valeurs : $2\chi-4, 2\chi, 2\chi+4, \dots, 4-2\chi$.

C'est d'abord Rohlin qui faisait une petite tentative contre cette conjecture [R2, 1970] en s'appuyant sur la remarque de Kervaire-Milnor signalée plus haut. Mais c'est Massey [Mas 1, 1969] qui démon-

(*) Depuis longtemps, voir l'appendice historique de Viro et Harlamov.

trait la conjecture grâce à une utilisation astucieuse d'un corollaire du théorème d'Atiyah-Singer [AS]. Aussitôt, Rohlin [R3, 1971] et Hsiang-Szczarba [HS, 1970], par la même méthode, obtenaient de nombreuses minorations du genre d'une surface réalisant une classe d'homologie d'une variété simplement connexe de dimension 4 (sans pour autant clore la question. Par exemple, pour savoir quelles classes d'homologie de $S^2 \times S^2$ sont réalisées par des sphères lisses plongées, il a fallu attendre les résultats de Donaldson, voir Kuga [Ku, 1984]).

Cette état de choses a naturellement conduit les topologues à donner des preuves directes, aussi élémentaires que possibles, des corollaires du théorème d'Atiyah-Singer utilisés. C'est ce que fait ici pour nous C. Gordon dans le cas de l'action d'un groupe fini sur une variété de dimension 4 (une telle preuve pour le cas d'une involution d'une variété lisse de dimension quelconque revient à Jänich et Ossa [JO, 1968] et pour le cas de l'action d'un groupe fini sur une variété de dimension quelconque à P. Gilmer (voir l'article de Gordon)).

Ce même théorème a été ensuite utilisé par A. Casson et C. Gordon pour étudier le groupe de concordance des noeuds classiques. L'exposition donnée ici, qui date de 1975, a fait l'objet d'une seconde présentation la complétant [CG, 1978]. L'appendice de P. Gilmer signale les développements qui ont suivi cet important article.

Enfin nous concluons le volume avec une rédaction de trois conférences fondamentales de A. Casson qui sont à l'origine des grands développements récents de Freedman et Quinn. Si la seconde conférence de Casson (qui fut peut-être pensée la première) rappelle la construction de la variété de Whitehead [W1, 1935], la première frappe par son originalité autant que par sa relative simplicité. Rappelons au lecteur que Freedman, suivant les idées de Casson et réalisant plusieurs prouesses techniques a obtenu une classification complète des variétés topologiques fermées simplement connexes [F1, 1982]. Tout ceci, ainsi que les développements associés de Quinn [Q, 1982], [E] se situe dans la ligne des arguments de la topologie différentielle de dimension 4 inaugurée par Rohlin (nourrie par l'affluent des idées de la topologie géométrique à la Bing) et en est un aboutissement. Plus récemment encore, l'introduction par Donaldson [D, 1983] d'objets élaborés par les physiciens dans le sujet, a fait éclater les idées que l'on se faisait sur les variétés lisses de dimension 4 (par exemple il existe une infinité de structures lisses sur \mathbb{R}^4 ! [G, 1985]). Voir [FU] et [L].

Références

- [AS] Atiyah M. and Singer I., The index of elliptic operators : III, Ann. of Math. 87 (1968), 546-604.
- [CS] Cappel S. and Shaneson J., Some new four-manifolds, Ann. of Math. (2) 104 (1976), 61-72.
- [CG] Casson A. and Gordon C., On slice knots in dimension three, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, 39-54.
- [D] Donaldson S., An application of gauge theory to four-dimensional topology, J. Diff. Geometry 18 (1983), 279-315.
- [E] Edwards R., The solution of the 4-dimensional annulus conjecture (after Frank Quinn), Contemporary Math., vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984, 211-264.
- [EK] Eells J. and Kuiper N., An invariant for certain smooth manifolds, Ann. Math. Pura Appl. (4) 60 (1962), 93-110.
- [F1] Freedman M., The topology of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geometry 17 (1982), 357-453.
- [F2] Freedman M., The disk theorem for four dimensional manifolds, Proceedings, International Congress, Warsaw 1983.
- [FK] Freedman M and Kirby R., Geometric proof of Rohlin's theorem, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, 85-97.
- [FU] Freed D. and Uhlenbeck K., Instantons and 4-manifolds, MSRI Series, vol. 1, Springer Verlag, 1984.
- [GS] Galewski D. and Stern R., Classification of simplicial triangulations of topological manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 916-918.
- [G] Gompf R., An infinite set of exotic \mathbb{R}^4 's, preprint from MSRI, Berkeley, California, 1985.

- [GM] Guillou L. et Marin A., Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 285 (1977), A95-A98.
- [HS] Hsiang W. and Szczarba R., On embedding surfaces in four manifolds, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 22, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 97-103.
- [HINK] Hirzebruch F., Neumann W. and Koch S., Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New York, 1971.
- [JO] Jänich K. and Ossa E., On the signature of an involution, Topology 8, (1969), 27-30.
- [KM] Kervaire M. and Milnor J., On 2-spheres in 4-manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961), 1651-1657.
- [Ku] Kuga K., Representing homology classes of $S^2 \times S^2$, Topology 23, (1984), 133-137.
- [Kui] Kuiper N., The quotient space of $\mathbb{CP}(2)$ by complex conjugation is the 4-sphere, Math. Ann. 208, (1974), 175-177.
- [L.] Lawson B. Jr., The theory of gauge fields in four dimensions, Lecture Notes for NSF-CBMS conference, Univ. of Calif. at Santa Barbara, 1983.
- [Man] Mandelbaum R., Four-dimensional topology : an introduction, Bull. A.M.S. 2 (1980), 1-159.
- [Mas 1] Massey W., Proof of a conjecture of Whitney, Pacific J. Math. 31, (1969), 143-156.
- [Mas 2] Massey W., The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4 sphere, Geom. Dedicata 2, (1973), 371-374.
- [Mat] Matsumoto Y., Secondary intersectional properties of 4-manifolds and Whitney's trick, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, 99-110.
- [Ma] Matumoto T., Variétés simpliciales d'homologie et variétés topologiques métrisables, Thèse Univ. de Paris-Sud, Orsay, 1976.
- [Mi] Milnor J., On simply connected 4-manifolds, Symp. Internat. de Top. Alg. (Mexico 1956) Mexico, 1958, 122-128.
- [MK] Milnor J. and Kervaire M., Bernouilli numbers, homotopy groups

and a theorem of Rohlin, Proc. Internat. Congr. Math. Edinburgh, 1958, 454-458.

- [P1] Pontriaguine L.S., On the classification of four-dimensional manifolds, Uspehi. Mat. Nank., 4 (1949), 157-158 (Russian)
- [P2] Pontriaguine L.S., Smooth manifolds and their applications in homotopy theory, Amer. Math. Soc. Translations, ser. 2, II, (1959), 1-114 (traduit de Trudy Inst. Steklov 45 (1955)).
- [Q] Quinn F., Ends of maps. III : dimensions 4 and 5, J. Diff. Geometry 17, (1982), 503-521.
- [Rob] Robertello R., An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math. 18, (1965), 543-555.
- [R1] Rohlin V., New results in the theory of 4-dimensional manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR 84 (1952), 221-224 (Russian) traduction française dans ce volume.
- [R2] Rohlin V., On normal Euler numbers of the projective plane and the Klein bottle in four-dimensional euclidean space, Dokl-Akad. Nauk SSSR 191 (1970), n°1 (Russian); English transl. : Soviet Math. Doklady 11, (1970), 316-319.
- [R3] Rohlin V., Two-dimensional submanifolds of four dimensional manifolds, Funktional-anal.i Prilozhen 5 (1971), 48-60 (Russian); English transl., Functional Anal. Appl. 5 (1971), 39-48.
- [R4] Rohlin V., Proof of Gudkov's hypothesis, Funktional anal. i Prilozhen 6 (1972), 62-64 (Russian); English transl. : Functional Anal. Appl. 6 (1972), 136-138.
- [Se] Serre J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, III : applications homotopiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 232 (1951), 142-144.
- [Si] Siebenmann L., Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem, Topology of Manifolds, Markham, Ill., 1970, 57-76.
- [Wa] Wall C.T.C., On simply connected 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39, (1964), 141-149.
- [W1] Whitehead J.H.C., A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. 6, (1935), 268-279.

- [W2] Whitehead J.H.C., On simply-connected 4-dimensional polyedra, Comment. Math. Helvet. 22 (1949), 48-92.
- [Wy] Whitney H., On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology, Michigan Univ. Press, Ann Arbor, Mich. 1940.



I

DE CHEZ ROHLIN

QUATRE ARTICLES DE V.A. ROHLIN

traduits du russe par

S. OCHANINE

- $R[15]^{(+)}$ - Sur une application de la $(n+3)$ -sphère dans la n -sphère
 $R[16]^{(+)}$ - Classification des applications de la $(n+3)$ -sphère dans la n -sphère
 $R[17]^{(+)}$ - Toute variété de dimension 3 borde une variété de dimension 4
 $R[18]^{(+)}$ - Nouveaux résultats dans la théorie des variétés de dimension 4

$(+)$ Ces chiffres renvoient à la liste des travaux de Rohlin.

1. Enoncé du résultat.

Nous allons désigner par $\pi_r(S^n)$ le r -ème groupe d'homotopie de la n -sphère S^n , par f_2 l'application de Hopf de S^3 dans S^2 [4] et par E l'opérateur de suspension de Freudenthal [3]. Posons :

$$\begin{aligned} f_n &= E^{n-2} f_2, & g_2 &= f_2 f_3, & h_2 &= f_2 f_3 f_4, & g_n &= E^{n-2} g_2 (= f_n f_{n+1}), \\ h_n &= E^{n-2} h_2 (= f_n f_{n+1} f_{n+2}) \quad (n \geq 3); \end{aligned}$$

et convenons de noter de la même manière l'application et sa classe d'homotopie. On sait que $\pi_3(S^2)$ est un groupe cyclique libre engendré par f_2 [6] et que $\pi_{n+1}(S^n)$ pour $n \geq 3$ et $\pi_{n+2}(S^n)$ pour $n \geq 2$ sont cycliques d'ordre 2 engendrés respectivement par f_n et g_n ([11], [3], [15]). On sait également que le groupe $\pi_5(S^2)$ est cyclique d'ordre 2 de générateur h_2 ([15], [6]), mais les groupes $\pi_{n+3}(S^n)$ pour $n \geq 3$ n'ont pas été calculés complètement. A l'inverse, on a entièrement déterminé le comportement de l'homomorphisme E sur $\pi_{n+3}(S^n)$ pour $n \geq 3$ ([7], [18], [3]), alors qu'il reste inconnu sur $\pi_5(S^2)$. Nous allons démontrer dans cette note que, pour $n \geq 3$, l'application h_n est homotopiquement triviale et que par conséquent $E \pi_5(S^2) = 0$.

Remarquons d'abord que chacune des identités $h_n = 0$ ($n \geq 3$) entraîne toutes les autres. En effet, comme l'homomorphisme E est injectif sur $\pi_6(S^3)$ et sur $\pi_{n+3}(S^n)$ pour $n \geq 5$ ([7], [3]) et que dans $\pi_7(S^4)$ son noyau a une intersection nulle avec le sous-groupe $E \pi_6(S^3)$ [18], E^{n-3} est une injection de $\pi_6(S^3)$ dans $\pi_{n+3}(S^n)$ ($n \leq 4$). Nous allons donc nous contenter de démontrer l'identité $h_n = 0$ pour n grand

2. Construction d'applications selon Pontriaguine.

Toutes les variétés considérées seront désormais lisses et compactes (avec ou sans bord). Soit M^k , $k = r - n$, une sous-variété close de dimension k , connexe ou pas, de l'espace euclidien R^r clos en une sphère S^r par un point à l'infini. Supposons donné, en chaque point $a \in M^k$, un système $F_n(a)$ de vecteurs orthonormaux $v_1(a), \dots, v_n(a)$ normaux à M^k et qui dépendent continuellement de a . Le champ de repères $(F_n|_{M^k})$ définit de la manière suivante une application de S^r dans S^n :

un voisinage U^r de M^k se décompose naturellement en un produit de M^k et d'un disque V^n de dimension n , de sorte que tout $x \in U^r$ s'écrit : $x = \{a(x), \eta(x)\}$, où $a(x) \in M^k$ et $\eta(x) \in V^n$; on complète V^n par un point q pour en faire une sphère S^n et on pose $f(x) = \eta(x)$ si $x \in U^r$, et $f(x) = q$ si $x \in S^n - U^r$. Une construction analogue est possible pour le cas où M^k est une variété plongée dans le demi-espace R_1^r de R^r , ayant son bord M^{k-1} dans le bord R^{r-1} de R_1^r , à condition que la partie F_n^0 du champ F_n induite sur le bord M^{k-1} soit dans R^{r-1} . Nous obtenons une application du disque de dimension r dans S^n qui coïncide sur le bord S^{n-1} de ce disque avec l'application obtenue à partir du champ de repères $(F_n^0 | M^{k-1})$. Ce champ sera appelé bord du champ $(F_n | M^k)$.

3. Champ de repères de l'application h_n .

Soit e_1, \dots, e_{n+3} une base orthonormée de R^{n+3} ($n \geq 2$) et R_0^4 le sous-espace de R^{n+3} engendré par e_1, e_2, e_3, e_4 . On notera x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées dans cette base de R_0^4 . Soit T_0^2 le 2-tore plongé de la manière habituelle dans le sous-espace $x_4 = 0$ de R_0^4 :

$$x_1 = (4 + 2 \cos \alpha_2) \cos \alpha_1, \quad x_2 = (4 + 2 \cos \alpha_2) \sin \alpha_1, \quad x_3 = \sin \alpha_2^{(+)} \\ (0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 2\pi),$$

et soit T_0^3 le 3-tore, bord du voisinage unitaire de T_0^2 dans R_0^4 :

$$x_1 = [4 + (2 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2] \cos \alpha_1, \quad x_2 = [4 + (2 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2] \sin \alpha_1, \\ x_3 = (2 + \cos \alpha_3) \sin \alpha_2, \quad x_4 = \sin \alpha_3 \quad (0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 2\pi).$$

Notons $n(a)$ le vecteur normal unitaire extérieur à T_0^3 dans R_0^4 au point $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in T_0^3$ et posons :

$$u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ u_3 = e_6, \dots, u_n = e_{n+3}, \quad H_n^0(a) = \{u_1(a), \dots, u_n(a)\}.$$

On vérifie aisément que l'application de S^{n+3} dans S^n qui correspond au champ de repères $(H_n^0 | T_0^3)$ appartient à la classe h_n .

Considérons maintenant R^{n+3} comme bord du demi-espace R_1^{n+4} . D'après le n° 2, on aura prouvé $h_n = 0$ si l'on trouve dans R_1^{n+4} un champ de repères $(H_n | M^4)$ de bord $(H_n^0 | T_0^3)$.

La variété la plus simple de bord T_0^3 est le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque.

(+) Il faut lire $x_3 = 2 \sin \alpha_2$ (voir les formules suivantes) N.d.T.

Cette variété ne convient pas dans le rôle de M^4 , car le champ H_n^0 ne s'étend pas sur cette variété : son 2-tore axial est toujours pour H_n^0 un cycle caractéristique au sens de [17] [20] .

4. Construction de la variété M^4 .

Soient R^4 l'espace euclidien, T^2 , T^3 des tores plongés dans R^4 de la même manière que T_0^2 , T_0^3 le sont dans R_0^4 , et ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 des cercles sur T^3 définis respectivement par les équations $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Complétons R^4 par un point pour en faire une sphère S^4 et désignons par K^4 et E^4 respectivement les parties extérieure et intérieure à T^3 dans S^4 . E^4 est le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, avec T^2 pour tore axial. Poussons le cercle ζ_3 de T^3 à l'intérieur de K^4 , enlevons un voisinage de ce cercle, produit du cercle par un 3-disque et recollons à sa place le produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque par un difféomorphisme. Ce recollement peut se faire de deux façons homotopiquement différentes. La première façon transforme S^4 en un produit direct P^4 de deux 2-sphères, l'autre conduit à un produit tordu de ces deux sphères. Nous allons choisir la première manière et noter L^4 la partie de P^4 en laquelle se transforme alors K^4 . Dans L^4 , prenons une 2-sphère Σ^2 homologue^(†) au 2-tore $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ contenu dans T^3 ; enlevons un voisinage de Σ^2 , produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque, et recollons-le d'une manière homotopiquement différente. Alors P^4 se transformera en une variété Q^4 , alors que L^4 deviendra la variété cherchée M^4 de bord T^3 .

Les variétés M^4 et Q^4 ont les propriétés suivantes, qui seules seront essentielles pour la suite :

a) Pour tout recollement à M^4 du produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, le 2-tore axial de ce produit devient un cycle caractéristique [17][20]. En particulier, T^2 est un 2-cycle caractéristique de Q^4 .

b) Le nombre caractéristique de Pontriaguine X_{22} [12][13] de la variété Q^4 est nul.

5. Construction du champ $(H_n | M^4)$.

La construction explicite du champ $(H_n | M^4)$ dans R_1^{n+4} de bord $(H_n^0 | T_0^3)$ serait fastidieuse, et nous allons nous contenter de la preuve de son existence. Pour n suffisamment grand, il existe un plongement de Q^4 dans R^{n+4} qui envoie M^4

(†) Une telle 2-sphère n'existe pas ; cf. l'article IV et les commentaires (N.d.T.)

dans R_1^{n+4} , qui identifie canoniquement les tores $T^3 \subset Q^4$ et T_0^3 (en identifiant les points de T^3 et T_0^3 ayant les mêmes coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), et pour lequel les n -plans normaux à Q^4 aux points du tore T_0^3 tombent dans R^{n+3} . Comme T^2 est un 2-cycle caractéristique de la variété Q^4 , il existe un champ de repères $(G_n | M^4)$ sur M^4 . En modifiant, s'il le faut, le signe de l'un des vecteurs de ce champ, on obtient que son bord $(G_n^0 | T_0^3)$ soit orienté de la même manière que le champ $(H_n^0 | T_0^3)$, et en comparant $(G_n^0 | T_0^3)$ et $(H_n^0 | T_0^3)$, on obtient une application φ du tore T_0^3 dans la variété Γ_n des rotations de l'espace euclidien de dimension n . Aucun des champs G_n^0 et H_n^0 ne s'étend sur E^4 , et pour les deux, le tore T^2 est un cycle caractéristique (cf. n° 3 et n° 4 a)). Comme le groupe fondamental de Γ_n a deux éléments, cela entraîne que l'application φ est homotopiquement triviale sur le cercle ζ_3 . En enlevant E^4 et en recollant à M^4 à sa place le produit d'un 2-tore et d'un 2-disque de manière à ce que ce soit ζ_1 ou ζ_2 qui devienne homologue à 0, nous voyons que φ est homotopiquement triviale également sur ces cercles. Elle est de plus homotopiquement triviale en dimension 3 ce qui découle de la nullité de $X_{22}(Q^4)$ (cf. n° 4, b)). Mais toute application d'un 3-tore homotopiquement triviale en dimension 1 et 3 est homotopiquement triviale. Il en est ainsi de φ et on peut donc obtenir le champ $(H_n^0 | T_0^3)$ par déformation du champ $(G_n^0 | T_0^3)$. Le champ de repères $(H_n | M^4)$ de bord $(H_n^0 | T_0^3)$ qu'on cherche, s'obtient en prolongeant cette déformation en une déformation du champ $(G_n | M^4)$.

II. CLASSIFICATION DES APPLICATIONS DE LA $(n+3)$ -SPHERE

DANS LA n -SPHERE

R [16]

1. Considérations préliminaires.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode de Pontriaguine de réduction de problèmes homotopiques à des problèmes de champ de repères [15]. On s'appuie sur les définitions du n° 2 de ma note [1]. Les classes d'homotopie des applications sont notées de la même manière que les applications elles-mêmes. Fixons une base e_1, \dots, e_r de R^r et soient R_0^{k+1} le sous-espace de R^r engendré par e_1, \dots, e_{k+1} et S_0^k la sphère-unité de R_0^{k+1} . Les classes d'applications engendrées par les champs de repères $(F_n | M^k) \subset R^r$, $r = n+k$, où $M^k = S_0^k$, sont appelées sphériques et engendrent le sous-groupe sphérique $\pi_r^0(S^n)$ de $\pi_r(S^n)$. Le groupe $\pi_r^0(S^n)$ est canoniquement un groupe quotient du groupe $\pi_k(\Gamma_n)$, k -ème groupe d'homotopie de la variété Γ_n des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant $+1$. En effet, soient φ une application de S_0^k dans Γ_n , $n(a)$ le vecteur normal unitaire extérieur à S_0^k dans R_0^{k+1} au point $a \in S_0^k$, $F_n(a)$ le repère-image du repère $\{n(a), e_{k+2}, \dots, e_{k+n} = e_r\}$ par la matrice $\varphi(a)$ et f l'application de S^r dans S^n engendrée par le champ $(F_n | S_0^k)$. La classe de φ détermine celle de f et l'on écrit $f = D\varphi$. Alors D est un homomorphisme surjectif de $\pi_k(\Gamma_n)$ dans $\pi_r^0(S^n)$. La variété Γ_n admet un plongement canonique I dans Γ_{n+1} : la matrice $\|\gamma'_{ij}\| = I(\|\gamma_{ij}\|)$ est définie par $\gamma'_{ij} = \gamma_{ij}$, $\gamma'_{i,n+1} = \gamma'_{n+1,j} = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$); $\gamma'_{n+1,n+1} = 1$. Ce plongement est relié à l'opérateur de suspension de Freudenthal [3] par $ED = DI$. En particulier, $E\pi_r^0(S^n) \subset \pi_{r+1}^0(S^{n+1})$.

Passant au cas $k = 3$, nous allons considérer les points $x \in R^4$ comme quaternions ayant e_1, e_2, e_3, e_4 pour unités et noter xy et (x, y) respectivement le produit et le produit scalaire de deux quaternions x, y . Le groupe $\pi_3(\Gamma_3)$ est cyclique libre engendré par la classe de l'application φ_3 définie par : $\varphi_3(a) = \|\gamma_{ij}(a)\|$, $\gamma_{ij}(a) = (ae_{i+1}a^{-1}, e_{j+1})$ ($a \in S_0^3$; $i, j = 1, 2, 3$). Le groupe $\pi_6^0(S^3)$ est cyclique engendré par $f_3 = D\varphi_3$. La classe f_3 a été étudiée par Blakers et Massey [1]. Il découle de leurs résultats que f_3 n'est pas divisible par 2 et que l'ordre du groupe $\pi_6(S^3)$ est pair. On sait également que cet ordre est divisible par 3 [16]. Le groupe $\pi_3(\Gamma_4)$ est la somme directe de deux de ses sous-

groupes cycliques libres ayant pour générateurs φ_4, ψ_4 définis par $\varphi_4 = I\varphi_3$, $\psi_4(a) = \|\gamma_{ij}(a)\|$, $\gamma_{ij}(a) = (ae_i, e_j)$ ($a \in S_0^3$; $i, j = 1, 2, 3, 4$). Le groupe $\pi_7^0(S^4)$ est la somme de deux de ses sous-groupes cycliques engendrés par $f_4 = D\varphi_4 = Ef_3$ et $g_4 = D\psi_4$. On voit aisément que g_4 est la classe de l'application de Hopf de S^7 dans S^4 [5], de sorte que le sous-groupe $\{g_4\}$ est libre, et on sait que E est une injection du groupe $\pi_6(S^3)$ dans $\pi_7(S^4)$ et que le groupe $\pi_7(S^4)$ est somme directe des sous-groupes $E\pi_6(S^3)$ et $\{g_4\}$ [7]. Ainsi, $\pi_7^0(S^4)$ est somme directe des sous-groupes $E\pi_6^0(S^3)$ et $\{g_4\}$. Le groupe $\pi_3(I_n)$, $n \geq 5$, est cyclique libre engendré par $\psi_n = I^{n-4}\psi_4$. Le groupe $\pi_{n+3}^0(S^n)$, $n \geq 5$, est cyclique de générateur $g_n = D\psi_n = E^{n-4}g_4$, et on sait [3] que E est un isomorphisme de $\pi_{n+3}(S^n)$ sur $\pi_{n+4}(S^{n+1})$ pour $n \geq 5$. Enfin, le noyau de l'homomorphisme I de $\pi_3(I_4)$ dans $\pi_3(I_5)$ est cyclique de générateur $\chi_4 = \varphi_4 - 2\psi_4$, et il s'avère que le sous-groupe cyclique de $\pi_7^0(S^4)$ engendré par $h_4 = D\chi_4 = f_4 - 2g_4$ est le noyau de l'homomorphisme E sur le groupe $\pi_7(S^4)$ tout entier. On sait que ce noyau est cyclique et on a déterminé, en des termes différents des nôtres, un générateur h de ce noyau [18]. Nous utiliserons le fait que l'invariant de Hopf $\gamma(h) = \pm 2$. Notons que $\gamma(h_4) = \gamma(f_4) - 2\gamma(g_4) = -2$. Comme $Eh_4 = ED\chi_4 = DI\chi_4 = 0$, on a : $h_4 \in \{h\}$, $h_4 = \lambda h$, $\gamma(h_4) = \lambda \gamma(h)$, $\lambda = \pm 1$ et $h_4 = \pm h$.

2. Enoncé des principaux résultats.

Le groupe $\pi_6(S^3)$ est cyclique d'ordre 6 et engendré par f_3 . Le groupe $\pi_7(S^4)$ est somme directe du sous-groupe d'ordre 6 engendré par f_4 et du sous-groupe cyclique libre engendré par g_4 . Le groupe $\pi_{n+3}(S^n)$ pour $n \geq 5$ est cyclique d'ordre 12 de générateur g_n . En particulier, $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$ ($n \geq 3$).

En vertu de ce qui a été dit dans le n° 1, il suffit de prouver que :

- a) pour n grand, $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$;
- b) pour n grand, $12g_n = 0$.

Il découle des résultats de L.S. Pontriaguine [15] que, dans toute classe d'applications de S^r dans S^n , il en est une qui est engendrée par un champ $(F_n | M^k) \subset R^r$ et que tout champ $(F_n | M^k) \subset R^r$ qui engendre une application homotope à zéro, est le bord d'un champ (F_n', M^{k+1}) défini dans le demi-espace R_1^{r+1} (de bord R^r) de l'espace R^{r+1} . Il en découle aisément que les affirmations a) et b) sont équivalentes aux affirmations :

- a') pour n grand et tout champ $(F_n | M^3) \subset R^r$ tel que $M^3 \cap S_0^3 = \emptyset$,

il existe un champ $(G_n | M^4) \subset R_1^{n+4}$ de bord $(F_n | M^3) + (F_n^0 | S_0^3)$ composé du champ $(F_n^0 | M^3)$ et d'un certain champ $(F_n^0 | S_0^3)$;

b') il existe dans R_1^{n+4} un champ $(H_n | N^4)$ de bord $(H_n^0 | S_0^3)$ construit selon le schéma du n° 1 à partir d'une application de la classe $12\psi_n$.

3. Construction du champ $(G_n | M^4)$.

Soit M_1^4 une variété orientée dont le bord M_1^3 est difféomorphe à M^3 ; on peut prouver qu'une telle variété existe pour toute variété orientée close M^3 . Plongeons M_1^4 dans R^{n+4} de telle manière que le bord M_1^3 coïncide avec M^3 et que les plans normaux à M_1^4 aux points de ce bord tombent dans R^{n+3} , et essayons de prolonger F_n de M^3 à M_1^4 tout entier. Nous obtiendrons dans M_1^4 une classe $z^2 = z^2(M_1^4)$ d'homologie (absolue) modulo 2 dont chaque cycle peut être réalisé comme cycle caractéristique. Cette classe ne dépend pas du plongement de M_1^4 dans R^{n+4} satisfaisant aux conditions énoncées. Si la variété M_1^4 est close (le bord M_1^3 est vide), alors $z^2(M_1^4)$ est simplement la 2-classe caractéristique homologique [17][20]. Nous allons montrer qu'il existe un M_1^4 avec $z^2 = 0$. Le champ F_n pour une telle variété M_1^4 peut être étendu en un champ G_n défini sur M_1^4 dans le complément du voisinage sphérique V^4 d'un point. Posons $M^4 = M_1^4 - V^4$ et plongeons M_1^4 dans R^{n+4} de manière à ce que M^4 tombe dans R^{n+4} ; son bord $M_1^3 + S_1^3$, où S_1^3 est le bord du disque V^4 , coïncide avec $M^3 + S_0^3$ et les plans normaux à M_1^4 aux points de ce bord tombent dans R^{n+3} . Nous obtenons le champ voulu $(G_n | M^4)$.

Prenons d'abord un M_1^4 connexe arbitraire. On peut rendre nul le premier groupe d'homologie de M_1^4 par exemple en enlevant les voisinages d'un ensemble de chemins fermés à l'intérieur de M_1^4 formant une base de ce groupe, et en les remplaçant par des produits de 2-sphères et de 2-disques. On peut considérer alors la classe z^2 comme réduction modulo 2 d'une classe d'homologie entière Z^2 . Nous allons montrer que le nombre d'auto-intersection $i(Z^2, Z^2)$ de la classe Z^2 peut être rendu nul. Soient Q^4 le plan projectif complexe orienté, Q_1^4 le complément du voisinage sphérique d'un de ses points, Q^2 une droite projective orientée dans Q_1^4 et Σ^2 , σ^2 les classes d'homologie entière et d'homologie modulo 2 qu'elle définit. Choisissons une orientation de M_1^4 , enlevons de M_1^4 le voisinage sphérique de l'un de ses points et recollons à sa place Q_1^4 en prenant soin d'accorder les orientations. Nous obtenons une nouvelle variété \bar{M}_1^4 du type de M_1^4 , et on déduit facilement, du fait que σ^2 est la 2-classe caractéristique de la variété Q^4 , que $z^2(\bar{M}_1^4) = z^2(M_1^4) + \sigma^2$. Cette classe est la réduction modulo 2 de la classe entière

$\bar{Z}^2 = Z^2 + \Sigma^2$, et on a :

$$i(\bar{Z}^2, \bar{Z}^2) = i(Z^2, Z^2) + i(\Sigma^2, \Sigma^2) = i(Z^2, Z^2) \pm 1,$$

où le signe dépend de l'orientation de Q^4 . En répétant cette opération un nombre suffisant de fois et en choisissant une orientation convenable de Q^4 , on obtient une variété M_1^4 et une classe Z^2 telles que $i(Z^2, Z^2) = 0$.

Soit P^2 une surface orientée close à l'intérieur de M_1^4 qui représente Z^2 (cf. [20], §23). Comme $i(Z^2, Z^2) = 0$, un voisinage U^4 de P^2 se décompose en un produit de P^2 par un 2-disque (cf. [20], §18). Plongeons P^2 dans $R^3 \subset R^4$ comme sphère avec anses et faisons de R^4 une sphère S^4 en lui ajoutant un point. Soit E^4 un voisinage de P^2 dans R^4 et ξ le difféomorphisme naturel entre U^4 et E^4 . Prenons dans $S^4 - E^4$ un cercle enlacé avec P^2 , enlevons un voisinage de ce cercle et, après avoir recollé à sa place le produit d'une 2-sphère et d'un 2-disque de manière à transformer S^4 en un produit P^4 de deux 2-sphères, recollons $M_1^4 - U^4$ et $P^4 - E^4$ à l'aide de ξ . On obtient une nouvelle variété \bar{M}_1^4 du type de M_1^4 . Étendons F_n sur $M_1^4 - U^4$ et construisons un champ de repères quelconque sur $P^4 - E^4$ ayant la même orientation. Soient $C_1^1, \dots, C_p^1; C_1^2, \dots, C_p^2$ des bases de l'homologie du bord P^3 de $P^4 - E^4$ telles que $i(C_\alpha^1, C_\beta^2) = \delta_{\alpha\beta}$, et soient $C_{\alpha_1}^1, \dots, C_{\alpha_q}^1$ ceux des chemins C_1^1, \dots, C_p^1 sur lesquels les deux champs obtenus ne sont pas homotopes. À l'intérieur de $P^4 - E^4$, prenons une sphère Σ^2 homologue (dans $P^4 - E^4$) au cycle $C_{\alpha_1}^2 + \dots + C_{\alpha_q}^2$; enlevons un voisinage de Σ^2 (produit de Σ^2 par un 2-disque) et recollons le même voisinage d'une manière homotopiquement différente (cf. I, n° 4). Alors \bar{M}_1^4 se transforme en une variété du type de M_1^4 pour laquelle $z^2 = 0$.

Notons pour la suite que, dans le cas où M_1^4 est close, les opérations précédentes la transforment en une variété qui avec M_1^4 borde une variété orientée de dimension 5. Donc, si la classe caractéristique $z^2(M_1^4)$ d'une variété close M_1^4 est la réduction modulo 2 d'une classe entière Z^2 telle que $i(Z^2, Z^2) = 0$, alors il existe une variété close N_1^4 , telle que $z^2(N_1^4) = 0$, et qui borde avec M_1^4 une variété orientée de dimension 5.

4. Construction du champ $(H_n | N^4)$.

Nous allons montrer qu'il existe une variété close orientée N_1^4 dont la 2-classe caractéristique z^2 est nulle et dont le nombre caractéristique de Pontriaguine X_{22}

(†) Une telle 2-sphère n'existe pas ; cf. l'article IV et les commentaires (N.d. T.)

$([12][13])$ est ± 24 ⁽⁺⁾. Pour tout plongement d'une telle variété dans R^{n+4} , on peut construire un champ de repères H_n défini sur le complément d'un voisinage sphérique V^4 d'un de ses points. Posons $N^4 = N_1^4 - V^4$ et plongeons N_1^4 dans R^{n+4} de manière à ce que N^4 tombe dans R_1^{n+4} ; son bord orienté S_1^3 coïncide avec la sphère S_0^3 et les plans normaux à N_1^4 aux points de ce bord tombent dans R^{n+3} . Nous obtenons le champ voulu $(H_n | N^4)$. Le fait que son bord $(H_n^0 | S_0^3)$ correspond, selon le schéma du n° 1 à une application de S_0^3 dans Γ_n de la classe $12\psi_n$, découle de ce que $X_{22} = \pm 24$. En effet, on peut voir par un calcul que la multiplicité, au sens de Pontriaguine [13], de la singularité de type X_{22} qu'a au centre de V^4 le champ construit sur S_0^3 selon le schéma du n° 1 à partir d'une application de S_0^3 dans Γ_n de la classe $\lambda\psi_n$, est $\pm 2\lambda$, et dans notre cas cette multiplicité est X_{22} .

Soit Q_0^4 le plan projectif complexe orienté percé de 9 trous sphériques et soient Q_j^4 ($j = 1, \dots, 9$) des plans projectifs complexes percés d'un trou sphérique et ayant l'orientation opposée. Recollons Q_0^4, \dots, Q_9^4 en accordant les orientations on une variété close M_1^4 et notons Σ_j^2 ($j = 0, 1, \dots, 9$) la classe d'homologie entière d'une droite projective dans Q_j^4 . Posons $Z^2 = 3\Sigma_0^2 + \Sigma_1^2 + \dots + \Sigma_9^2$. La classe Z^2 réduite modulo 2 est la classe caractéristique z^2 de la variété M_1^4 et $i(Z^2, Z^2) = 9i(\Sigma_0^2, \Sigma_0^2) + i(\Sigma_1^2, \Sigma_1^2) + \dots + i(\Sigma_9^2, \Sigma_9^2) = \pm(9 - 1 - \dots - 1) = 0$. Donc (cf. la fin du n° 3), il existe une variété close N_1^4 telle que $z^2(N_1^4) = 0$ et qui borde avec M_1^4 une variété orientée de dimension 5. Cette dernière propriété entraîne que $X_{22}(N_1^4) = X_{22}(M_1^4)$ (cf. [12], théorème 3), alors que $X_{22}(M_1^4) = +24$ (cf. [13], §3, E). Ainsi, $z^2(N_1^4) = 0$ et $X_{22}(N_1^4) = \pm 24$.

5. Remarques.

Les techniques de ce travail permettent de démontrer facilement que $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{3}$ pour toute variété close orientée M^4 et que, si $z^2(M^4) = 0$, on a $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{24}$.

⁽⁺⁾ Le lien entre l'existence d'une variété de dimension 4 telle que $z^2 = 0$, mais $\lambda_{22} \neq 0$, et l'étude des applications de S^{n+3} dans S^n a été indiqué par Pontriaguine [12].

1. Énoncé du résultat.

Par variété, on entend dans cet article, une variété lisse compacte, avec ou sans bord. On dit qu'une variété M^k borde si elle est difféomorphe au bord d'une variété M^{k+1} , orientable si M^k est orientable. Le résultat de cet article est que toute variété close de dimension 3 borde. Ce théorème peut être appliqué à la classification des applications d'une $(n+3)$ -sphère dans une n -sphère (cf. II, n° 3) et a été conjecturé (dans le cas orientable) par L.S. Pontriaguine [12].

Nous ne considérerons que le cas orientable. Par la suite, la variété M^3 est supposée connexe.

2. Plan de la démonstration.

Le point de départ est le fait suivant :

A. Si une variété orientable close M^3 peut être plongée dans R^5 , alors M^3 borde.

Pour déduire de ce lemme le théorème général, nous allons définir deux opérations O_1 et O_2 qui transforment les variétés orientables closes en des variétés du même type et qui possèdent les propriétés suivantes :

B. Toute variété orientable close M^3 peut être transformée par un nombre fini d'opérations O_1 et O_2 en une variété qui se plonge dans R^5 .

C. Si l'une des variétés $O_1(M^3)$ ou $O_2(M^3)$ borde, il en est de même pour M^3 .

3. Définition des opérations O_1 et O_2 .

Soit K un tore solide dans M^3 avec les coordonnées différentiables α, ξ, η , où α est la coordonnée cyclique et $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. On retire l'intérieur de K et on transforme le tore $\xi^2 + \eta^2 = 1$ qui borde maintenant la variété en une bouteille de Klein en identifiant les points (α, ξ, η) et $(\alpha + \pi, \xi, -\eta)$. Alors M^3 est transformée en $O_1(M^3)$.

Soient K' et K'' deux tores solides disjoints ayant des systèmes de coordonnées (α, ξ, η) du type précédent et qui induisent des orientations opposées dans M^3 . On retire les intérieurs de K' et K'' et on identifie les tores $\xi^2 + \eta^2 = 1$ en identifiant les points ayant les mêmes coordonnées (α, ξ, η) . Alors M^3 est transformée en $O_2(M^3)$.

4. Démonstration du lemme B.

Un point $x \in M$ est dit point multiple d'une application f de l'ensemble M , s'il existe un point $y \in M$ tel que $y \neq x$, mais $f(y) = f(x)$. S'il n'existe qu'un seul y qui a cette propriété, on dit que x est un point double. Il découle des résultats de Whitney [21] qu'il existe une application lisse f de M^3 dans R^5 qui a les propriétés suivantes :

- a) le rang de f en chaque point de M^3 est égal à 3 ;
- b) tous les points multiples de f sont des points doubles et sont disposés sur des courbes lisses disjointes closes C_1, C_2, \dots, C_p ; $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2, \dots, C'_q, C''_q$ de telle manière que C_i recouvre deux fois $f(C_i)$ ($i = 1, \dots, p$) et $f(C'_j) = f(C''_j)$ ($j = 1, \dots, q$) ;
- c) les plans de dimension 3 tangents à $f(M^3)$ au point $f(x) = f(y)$ ($x \neq y$) ont une intersection de dimension 1 pour tout point double $x \in M^3$.

Soient K_i, K'_j, K''_j des voisinages toriques des courbes C_i, C'_j, C''_j dans M^3 ayant des coordonnées (α, ξ, η) (cf. n° 3). En retirant les intérieurs des tores K_i, K'_j, K''_j , on a un plongement de la variété \bar{M}^3 à bord, ainsi obtenue, dans R^5 . Si l'on effectue sur le bord de \bar{M}^3 les identifications décrites dans le n° 3 pour chaque i et chaque j , on obtient une variété close N^3 qui est le résultat de l'application à M^3 de p opérations du type O_1 et de q opérations du type O_2 . Les identifications correspondantes sur le bord de $f(\bar{M}^3)$ peuvent être effectuées dans R^5 , et nous obtenons ainsi un plongement de N^3 dans R^5 .

5. Démonstration du lemme C.

Supposons que $M_1^3 = O_1(M^3)$ est le bord d'une variété orientée M_1^4 . Dans le tore $\xi^2 + \eta^2 = 1$ dans M^3 , on pose $\xi = \cos \beta$, $\eta = \sin \beta$ et l'on considère que α et β sont les coordonnées de la surface B^2 (bouteille de Klein) liées par la relation $(\alpha, \beta) = (\alpha + \pi, -\beta)$. On inclut ce système de coordonnées dans un système de coordonnées différentiables α, β, s ($-1 \leq s \leq 1$; α et β cycliques comme précédemment) définies dans un voisinage fermé U^3 de B^2 dans M_1^3 et liées par la relation $(\alpha, \beta, s) = (\alpha + \pi, -\beta, -s)$, et telles que B^2 soit définie dans U^3 par l'équation $s = 0$. Il existe un voisinage de M_1^3 dans M_1^4 difféomorphe au produit de M_1^3 par un segment. En conséquence, on peut inclure le système de coordonnées α, β, s dans un système de coordonnées différentiables α, β, s, t ($-1 \leq t \leq 1$; α, β cycliques; $-1 \leq s \leq 1$) définies dans un voisinage fermé V^4 de B^2 dans M_1^4 et liées par la relations $(\alpha, \beta, s, t) = (\alpha + \pi, -\beta, -s, t)$ et de telle manière que U^3 soit défini dans V^4 par l'équation $t = 1$ et donc que B^2 soit définie par les équations $s = 0, t = 1$. Soit W^4 la partie de V^4 où $s^2 + t^2 \leq 1$ et soit P^3 le bord de W^4 : $s^2 + t^2 = 1$.

On pose dans W^4 , $s = \rho \sin \gamma$, $t = \rho \cos \gamma$ et l'on considère α, β, γ comme étant des coordonnées dans P^3 liées par la relation $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \pi, -\beta, -\gamma)$; B^2 est alors définie par $\gamma = 0$. On retire W^4 de M_1^4 et on la recolte d'une manière différente en utilisant le difféomorphisme $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \beta$ de son bord P^3 . Alors M_1^4 se transforme en une variété orientable M_2^4 (ayant le même bord M_1^3) et B^2 est définie dans P^3 par l'équation $\beta = 0$. Dans W^4 , cette équation définit une variété Q^3 de bord B^2 ; en découpant M_2^4 le long de Q^3 , on obtient une variété orientable de dimension 4 dont le bord est difféomorphe à M^3 .

Dans le cas où c'est $O_2(M^3)$ qui borde, la démonstration est analogue. La seule différence est dans le fait que c'est dans un voisinage d'un tore T^2 (et non d'une bouteille de Klein B^2) qu'on introduit les coordonnées α, β, s et t , et de plus celles-ci ne sont liées par aucune relation.

6. Démonstration du lemme A.

Kneser [8] a donné une méthode qui permet, par éliminations successives des singularités, de transformer un k -cycle dans une variété combinatoire de dimension $k+1$ en une variété de dimension k qui lui est homologue. Cette méthode, légèrement modifiée, permet également de transformer une membrane dans R^{k+2} dont le bord est une variété orientable M^k plongée dans R^{k+2} en une variété orientable M^{k+1} de bord M^k . Ceci a un sens combinatoire. En particulier, M^k est un sous-complexe de R^{k+2} et M^{k+1} est un sous-complexe d'une subdivision du complexe R^{k+2} . Dans ce sens combinatoire, on peut donc dire qu'une variété orientable close M^k dans R^{k+2} borde une variété orientable M^{k+1} .

Si maintenant on a un plongement lisse d'une variété orientable M^3 dans R^5 , nous le remplaçons par un plongement combinatoire proche M_1^3 ; construisons ensuite une variété orientable M_1^4 de bord M_1^3 et introduisons sur M_1^4 une structure différentiable [2]. Cette dernière peut être choisie de manière à ce qu'elle induise sur le bord la structure différentiable initiale.

On sait que toute surface close orientée est le bord d'une variété orientée de dimension 3 . Dans ma note III, il est démontré que toute variété close orientée de dimension 3 est le bord d'une variété orientée de dimension 4 . Le théorème analogue pour les variétés orientées de dimension 4 est faux ; par exemple, le plan projectif complexe ne peut être un bord. Dans cette note, on donne une condition homologique nécessaire et suffisante pour qu'une variété close orientée de dimension 4 puisse être le bord d'une variété orientée de dimension 5. Il s'avère que toute variété close orientée de dimension 4 devient un bord après qu'on lui ait ajouté un certain nombre de plans projectifs complexes convenablement orientés. A l'aide de ce résultat, on arrive à exprimer le nombre caractéristique de Pontriaguine ([12], [13]) en fonction des invariants homologiques de la variété. Des résultats analogues sont obtenus pour les variétés non-orientées. De plus, à partir des résultats de cette note, on corrige l'erreur contenue dans mes notes I et II consacrées au calcul du $(n+3)$ -ème groupe d'homotopie de la n -sphère.

1. Définitions.

Par variété, nous entendrons une variété lisse compacte, avec ou sans bord. Pour toute variété orientée M^k , on note $-M^k$ la même variété munie de l'orientation opposée, et à toute paire M^k, N^k de variétés orientées, on associe leur somme $M^k + N^k$ (réunion disjointe de M^k et N^k) et leur différence $M^k - N^k = M^k + (-N^k)$. Convenons de dire qu'une variété orientée M^k borde ou encore qu'elle est homologue à zéro, et de noter $M^k \sim 0$, s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation entre M^k et le bord d'une variété orientée M^{k+1} . Convenons ensuite de dire que deux variétés closes orientées M^k et N^k sont homologues, et de noter $M^k \sim N^k$, lorsque $M^k - N^k \sim 0$. En vertu de ces définitions, les variétés closes orientées de dimension k se répartissent en classes d'homologie et ces classes forment un groupe additif, le k -ème groupe d'homologie, que nous allons noter \mathfrak{Z}^k . Des considérations élémentaires montrent que les groupes \mathfrak{Z}^1 et \mathfrak{Z}^2 sont nuls, alors que le résultat de ma note III affirme la nullité de \mathfrak{Z}^3 .

Le groupe \mathfrak{Z}^4 n'est pas nul et il contient même un sous-groupe cyclique infini. En effet, soient P^4 le plan projectif complexe muni de son orientation naturelle,

s un nombre entier et sP^4 la variété composée de s exemplaires (disjoints) de la variété P^4 , si $s \geq 0$, ou de $-s$ exemplaires de la variété $-P^4$, si $s < 0$. Le nombre caractéristique de Pontriaguine de sP^4 est $3s$ (cf. [13], §3, E), alors qu'il est nul pour toute variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3). Les variétés sP^4 sont donc deux à deux non homologues.

Soit M^4 une variété close orientée arbitraire de dimension 4. Notons B le second groupe d'homologie réduit de M^4 et (x, y) , $x, y \in B$, le nombre d'intersection des classes d'homologie x et y . Alors (x, x) est une forme quadratique entière à discriminant ± 1 définie sur le réseau B . La signature de cette forme sera appelée signature de la variété M^4 et notée $\sigma(M^4)$. Il est clair que $\sigma(-M^4) = -\sigma(M^4)$.

2. Principaux résultats.

Une variété close orientée M^4 de dimension 4 borde si et seulement si sa signature $\sigma = \sigma(M^4)$ est nulle. Dans le cas général, M^4 est homologue à la variété σP^4 . Ainsi, le groupe d'homologie \mathbb{Z}^4 en dimension 4 est un groupe cyclique libre engendré par la classe d'homologie du plan projectif complexe P^4 . Le nombre caractéristique de Pontriaguine X_{22} de la variété est donné par :

$$X_{22}(M^4) = 3 \sigma(M^4).$$

Ces théorèmes sont des conséquences directes des 5 lemmes suivants :

- a) Pour tout M^4 , il existe un s tel que $M^4 \sim sP^4$;
- b) Si $M^4 \sim N^4$, alors $\sigma(M^4) = \sigma(N^4)$;
- c) $\sigma(sP^4) = s$;
- d) Si $M^4 \sim N^4$, alors $X_{22}(M^4) = X_{22}(N^4)$;
- e) $X_{22}(sP^4) = 3s$.

Les propositions d) et e), déjà citées, appartiennent à Pontriaguine. Le lemme b) est démontré à l'aide des théorèmes de dualité classiques. Le lemme c) est évident. La difficulté principale réside dans la démonstration du lemme a). Elle se déroule de la manière suivante. Il est facile de démontrer que, la variété M^4 étant donnée, il existe une variété connexe M_1^4 qui lui est homologue, dont le groupe fondamental est trivial et qui admet un plongement dans l'espace euclidien R^7 . Dans R^7 , on peut toujours construire sur M_1^4 un champ de vecteurs normaux dont les points singuliers sont isolés et sont d'indice ± 1 . En enlevant des voisinages sphériques des points singuliers et en les remplaçant par des plans projectifs complexes troués de la même

manière, on transforme M_1^4 en une variété $M_2^4 \subset R^7$ sur laquelle il existe un champ de vecteurs normaux sans point singulier. Il est clair que $M^4 \sim M_2^4 + mP^4$, où m est un nombre entier. Soit S^7 la sphère obtenue en ajoutant un point à R^7 et soient L^7 le complément d'un voisinage régulier de M_2^4 dans S^7 et U^5 le générateur du groupe d'homologie entière relative de L^7 en dimension 5 choisi en accord avec l'orientation de la variété M_2^4 . Il se trouve que parmi les cycles relatifs de la classe U^5 , on peut trouver une variété dont le bord est homologue, au sens du n° 1, à la variété $M_2^4 - nP^4$, où n est un nombre entier. Donc $M_2^4 \sim nP^4$ et $M^4 \sim M_2^4 + mP^4 \sim (m+n)P^4$.

Remarque. Notre connaissance des groupes d'homologie \mathbb{Z}^k pour $k > 4$ se réduit pour l'essentiel, à ce que l'on sait des nombres et des résidus caractéristiques de Pontriaguine ([12], [13]). Comme les nombres et les résidus caractéristiques de la somme de deux variétés sont la somme des nombres et des résidus caractéristiques des deux variétés, et que ces nombres et résidus sont nuls pour une variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3), chaque nombre caractéristique en dimension k définit un homomorphisme du groupe \mathbb{Z}^k dans le groupe des entiers, alors que chaque résidu caractéristique définit un homomorphisme dans le groupe des entiers modulo 2. A l'exception de la caractéristique d'Euler (qu'il convient de considérer ici comme résidu) et du nombre caractéristique X_{22} de dimension 4 trouvé dans le présent travail, aucun de ces invariants n'a été calculé. Seules les variétés de dimension divisible par 4 ont des nombres caractéristiques (cf. [12], §6, D). Il est intéressant de noter que la définition de la signature donnée ci-dessus pour les variétés de dimension 4 admet également une généralisation aux variétés de dimension divisible par 4 (il faut alors entendre par B le $(k/2)$ -ème groupe d'homologie réduit de la variété M^k), et que la signature d'une telle variété est nulle, si la variété borde.

3. Le cas non-orienté.

Négligeons maintenant les orientations et considérons les variétés closes de dimension k qu'elles soient orientables ou pas. Si la variété M^k est difféomorphe au bord d'une variété M^{k+1} (orientable ou non orientable), nous allons dire que M^k est homologue à zéro modulo 2 et écrire $M^k \sim 0 \pmod{2}$. A toute paire de variétés M^k, N^k correspond leur somme $M^k + N^k$, et on dira que M^k et N^k sont homologues modulo 2, et on écrira $M^k \sim N^k \pmod{2}$, si cette somme est homologue à zéro modulo 2. Les classes d'homologie modulo 2 des variétés closes de dimension k forment un groupe additif, le k -ème groupe d'homologie modulo 2, que nous allons noter h^k . Tous les éléments non nuls du groupe h^k sont évidemment d'ordre 2. Des considérations élémentaires montrent que le groupe h^1 est nul, alors que le

groupe h^2 a deux éléments (son générateur est la classe du plan projectif réel P^2 : si la caractéristique d'Euler d'une variété M^2 est paire, $M^2 \sim 0 \pmod{2}$, sinon $M^2 \sim P^2 \pmod{2}$). Il découle des résultats de ma note III que le groupe h^3 est nul. Il s'avère que le groupe h^4 a deux éléments⁽⁺⁾ et qu'il est engendré par la classe du plan projectif complexe P^4 . Une variété close M^4 est homologue à zéro modulo 2 si et seulement si sa caractéristique d'Euler est paire. Si elle est impaire, $M^4 \sim P^4 \pmod{2}$.

4. Le $(n+3)$ -ème groupe d'homotopie de la n -sphère.

Au calcul de ce groupe sont consacrées mes notes I et II. Elles contiennent une erreur qui a conduit à des résultats incorrects. Cette erreur sera maintenant corrigée.

Nous utiliserons les notations $\pi_r(S^n)$, $\pi_r^0(S^n)$, f_n ($n \geq 3$) et g_n ($n \geq 4$) de la note II et la notation h_n ($n \geq 2$) de la note I. Dans I, on affirme que $h_n = 0$ pour $n \geq 3$. En réalité, la classe h_n n'est nulle pour aucune valeur de n . La preuve s'appuie sur les résultats de la présente note. En effet, on peut prouver par les méthodes de la note I que $h_n = 0$ ($n \geq 3$) est équivalent à l'existence d'une variété close orientée Q^4 ayant les deux propriétés suivantes (cf. I, n° 4) :

a) Il existe dans Q^4 un tore lisse T^2 qui d'une part a un voisinage E^4 décomposable en un produit de T^2 et d'un 2-disque, et qui d'autre part est un 2-cycle caractéristique de la variété Q^4 et le reste si on enlève E^4 de Q^4 et on le remplace d'une manière (lisse) différente ;

b) $X_{22}(Q^4) = 0$.

D'après les résultats de la présente note, la condition b) est équivalente à l'affirmation que la variété Q^4 borde, et on peut démontrer que ceci contredit la condition a). L'erreur de la note I apparaît dans le n° 4 à l'endroit où intervient la sphère Σ^2 . En réalité, il n'existe pas de sphère Σ^2 ayant les propriétés annoncées. Cette erreur est répétée dans la note II (n° 3, paragraphe 3) où elle a entraîné l'affirmation erronée $12g_n = 0$. En réalité, la construction décrite au n° 4 de II, conduit à l'égalité $12g_n = h_n (\neq 0)$. Comme $2h_n = 0$, on a $24g_n = 0$. L'égalité $\pi_{n+3}(S^4) = \pi_{n+3}^0(S^4)$ prouvée au n° 3 de II reste vraie (dans sa démonstration, au lieu d'appliquer implicitement l'égalité $h_n = 0$, il convient d'utiliser l'égalité $h_n = 12g_n$). Donc, les générateurs des groupes $\pi_{n+3}(S^n)$ ($n \geq 3$) sont correctement indiqués dans II, mais leurs ordres sont en réalité deux fois plus grands :

$\pi_6(S^3)$ est un groupe cyclique d'ordre 12 de générateur f_3 , le groupe $\pi_7(S^4)$ est somme directe de son sous-groupe cyclique d'ordre 12 engendré par f_4

(+) Ceci est faux ; cf. les commentaires (N.d.T.)

et du sous-groupe cyclique libre engendré par g_4 , le groupe $\pi_{n+3}(S^4)$ pour $n \geq 5$ est cyclique d'ordre 24 et est engendré par g_n .[†]

5. Une relation entre les cycles caractéristiques.

Nous avons identifié l'ordre de l'élément g_n comme étant la moitié de la valeur minimale que peut prendre le nombre caractéristique X_{22} d'une variété orientée M^4 de dimension 4 dont la classe caractéristique $z^2(M^2)$ de dimension 2 est nulle (cf. II, n° 4). Comme cette valeur minimale du nombre X_{22} est 48 ; on a : $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{48}$ et $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$ pour toute variété M^4 telle que $z^2(M^4) = 0$ (cf. II, n° 5).

Ce théorème a une application intéressante. Whitehead [19] et Pontriaguine [14] ont démontré que le type d'homotopie d'une variété close M^4 connexe et simplement connexe est déterminé par le type arithmétique de la forme quadratique (x, x) (cf. n° 1). Cependant, la question de l'existence d'une variété dont la forme (x, x) a le type arithmétique donné (étant entendu, bien sûr, qu'on se limite aux formes entières de discriminant +1), restait ouverte. Nous pouvons donner une réponse négative à cette question. Par exemple, la forme (x, x) ne peut pas être définie positive, de rang 8 de discriminant +1 et ne prendre que des valeurs paires (une telle forme a été construite par A. Korkine et G. Zolotareff [9]). En effet, si la forme (x, x) d'une variété M^4 simplement connexe ne prend que des valeurs paires, alors $z^2(M^4) = 0$ (cf. [22]) et par conséquent $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$, donc $\sigma(M^4) \neq 8$.

[†] Dans leur note [10], Massey et Whitehead affirment également que $h_n \neq 0$ ($n \geq 3$) et que les groupes $\pi_6(S^3)$ et $\pi_{n+3}(S^n)$ ($n \geq 5$) sont respectivement d'ordre 12 et 24 (la structure exacte des groupes $\pi_{n+3}(S^n)$ n'est pas déterminée dans [10]). A la lecture de la note, on voit que ces résultats sont obtenus par des méthodes complètement différentes des miennes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLAKERS A.L., MASSEY W.S., The homotopy groups of a triad, I, Ann. Math., 53 (1951), 161-205.
- [2] CAIRNS S.S., Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold, Ann. Math., 45 (1944), 218-219.
- [3] FREUDENTHAL H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen, I, Compos. Math., 5 (1938), 299-314.
- [4] HOPF H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104 (1931), 637-666.
- [5] HOPF H., Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., 25 (1935), 427-440.
- [6] HUREWICZ W., Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 38 (1935), 112-119.
- [7] HUREWICZ W., STEENROD N.E., Homotopy relations in fiber spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27 (1941), 60-64.
- [8] KNESER H., Ein topologisches Zerlegungssatz, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 27 (1924), 601-616.
- [9] KORKINE A., ZOLOTAREFF G., Sur les formes quadratiques, Math. Ann., 6 (1873), 366-389.
- [10] MASSEY W.S., WHITEHEAD G.W., The Eilenberg-MacLane groups and homotopy groups of spheres, Bull. AMS, 57 (1951), 491.
- [11] PONTRYAGIN L. (= PONTRIAGUINE L.S.), A classification of continuous transformations of a complex into a sphere, I, Comptes-rendus (Doklady de l'Acad. Sci. URSS, 19 (1938), 147-179.
- [12] PONTRYAGIN L.S., Characteristic cycles on differentiable manifolds, Mat. Sbornik, 21 (1947), 233-284.
- [13] PONTRYAGIN L.S., Vector fields on manifolds, Mat. Sbornik, 24 (1949), 129-162.
- [14] PONTRYAGIN L.S., On the classification of four-dimensional manifolds, Uspehi. Mat. Nauk., 4 (1949), 157-158.
- [15] PONTRYAGIN L.S., Homotopy classification of the mappings of an $(n+2)$ -dimensional sphere on an n -dimensional one, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 70 (1950), 957-959.
- [16] SERRE J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, III, Applications homotopiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 232 (1951), 142-144.

- [17] STIEFEL E.L., Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helv.* 8 (1936), 305-353.
- [18] WHITEHEAD G.W., A generalisation of the Hopf invariant, *Ann. Math.*, 51 (1950), 192-237.
- [19] WHITEHEAD J.H.C., On simply connected, 4-dimensional polyhedra, *Comment. Math. Helv.*, 22 (1949), 48-92.
- [20] WHITNEY H., On the topology of differentiable manifolds, *Lectures in Topology*, pp. 101-141, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA, 1941.
- [21] WHITNEY H., The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space, *Ann. Math.*, 45 (1944), 247-293.
- [22] WU WEN-TSUN, Classes caractéristiques et i -carrés d'une variété, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), 508-511.

COMMENTAIRES SUR LES QUATRE ARTICLES PRECEDENTS DE V.A. ROHLIN

par

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

A la fin des années 40, Pontriaguine ramène le calcul des groupes $\pi_{n+i}(S^n)$ à des problèmes de cobordisme pour des variétés de dimension i dans S^{n+i} munis de trivialisations de leur fibré normal. Il obtient ainsi $\pi_{n+i}(S^n)$ pour $0 \leq i \leq 2$ ^(†).

A sa suite, Rohlin prouve en 1951 que toute variété orientée close de dimension trois borde et calcule géométriquement le groupe $\pi_{n+3}(S^n)$. Le résultat qu'il donne est faux (à cause d'une utilisation abusive du lemme de Whitney en dimension quatre). Mais l'année suivante, il établit, toujours par des méthodes géométriques, que la signature réalise un isomorphisme entre le groupe de cobordisme des variétés orientées closes de dimension quatre et les entiers. Fort de ce résultat, il corrige son calcul de $\pi_{n+3}(S^n)$ et obtient le célèbre théorème de Rohlin : la signature d'une variété close presque parallélisable de dimension quatre est divisible par seize.

Entre temps le calcul de $\pi_{n+3}(S^n)$ a été effectué par des méthodes de théorie de l'homotopie (Serre ; Massey-Whitehead), puis Thom a ramené le calcul des groupes de cobordisme à celui de groupes d'homotopie d'espaces de Thom qui se calculent à l'aide de suites spectrales. Dès lors, toutes les démonstrations des résultats de Rohlin ont utilisé ces machines homotopico-algébriques. Ceci est dommage car les articles de Rohlin n'utilisent que de la géométrie et donnent des démonstrations bien plus claires et économiques de ces résultats. D'autre part, et nous y insistons dans les commentaires, ces articles résument l'essentiel des méthodes géométriques utilisées jusqu'à ces dernières années en dimension quatre (en fait jusqu'à la révolution Casson-Freedman-Donaldson : les années 80 !).

Serge Ochanine a traduit du russe les articles de Rohlin, mais même en français ces articles restent très denses et d'un abord difficile. Le but de ces commentaires est donc de faciliter au lecteur de 1984 leur lecture en démontrant les affirmations de Rohlin qui ne semblent pas immédiates.

(†) Un exposé détaillé de tout cela, pouvant servir d'introduction aux textes de Rohlin, est : L.S. Pontriaguine, Smooth manifolds and their applications in homotopy theory, Amer. Math. Soc. Translations, ser. 2, II (1959), 1-114 (traduit de Trudy Inst. Steklov 45 (1955)).

Nous avons écarté un système de renvoi en bas de page du texte de Rohlin pour reprendre les commentaires article par article. Ceci a l'inconvénient de nous obliger souvent à paraphraser le texte original et à être long ; nous avons cependant cherché à renvoyer le plus possible en appendice ceux des commentaires dont la lecture n'est pas indispensable à la compréhension du texte de Rohlin. Nous renvoyons aux introductions de chaque chapitre pour un résumé de leur contenu.

Nous suggérons au lecteur le chemin suivant : lisez les articles de Rohlin, si vous avez compris, fermez les commentaires, ils ne vous apporteront rien. Sinon, lisez les commentaires, puis relisez Rohlin. Vous vous apercevrez que tout y est dit en 17 pages.

Nous tenons à remercier Vlad Sergiescu, pour, il y a presque dix ans, nous avoir donné une esquisse de traduction qui nous a permis de comprendre, sans théorie d'homotopie, le théorème de Rohlin. Saluons aussi Serge Ochanine pour sa traduction précise et Francis Bonahon pour avoir rongé, en bon cobaye, les premières versions de ces commentaires. Admirons enfin la belle frappe que Bernadette Barbichon a donné des articles et des commentaires.

Table des matières

I .	<u>Sur les deux premiers articles.</u>	3
1.	Le tore T_0^3 et le champ de repères H_n^0	4
2.	La variété M^4 et le champ H_n	5
.	Appendice A : l'application de Hopf et ses suspensions	11
.	Appendice B : la variété L^4	14
.	Appendice C : surfaces caractéristiques	19
.	Appendice D : la variété M_1^4 , les surfaces d'Enriques et les surface $K3$	21
II .	<u>Sur le troisième article.</u>	
1.	Cercles de points doubles d'une immersion générique	27
2.	La méthode de Kneser pour lisser les cycles d'une variété combinatoire.....	32
III .	<u>Sur le quatrième article.</u>	
1.	le groupe Ω_4	55
2.	le groupe h_4	61
3.	corrections aux deux premiers articles de Rohlin	62
.	Exercices : . Ω_4 , Ω_3 , h_3	66
.	$\Omega_3^{\text{spin}} = 0$	67
.	$\Omega_4^{\text{spin}} \rightarrow \Omega_4$ est injectif	69
.	variétés de dimension quatre plongées dans \mathbb{R}^7 ..	70
.	noeuds $S^3 \subset S^6$	71

Soit T_0^3 le tore de dimension trois plongé de manière standard dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+3} . Après avoir décrit le champ de n -repères H_n^0 normal à T_0^3 que Rohlin considère, nous reprenons en détail la construction d'une variété M^4 , de bord T_0^3 , plongée dans $\mathbb{R}_1^{n+4} (= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+3})$, et munie d'un champ de repères normal qui étendrait H_n^0 : c'est la partie géométrique de la première note qui se trouve exposée dans les paragraphes 4 et 5. Une telle construction conclurait à la nullité de l'élément $h_n \in \pi_{n+3}(S^n)$ obtenu par construction de Pontriaguine sur le champ de repère H_n^0 . Nous rejettons dans l'appendice A la vérification de l'affirmation de Rohlin selon laquelle h_n est la composée de trois suspendues de l'application de Hopf. Ceci permettra au lecteur de relire la première note et de comprendre la deuxième note dont les méthodes géométriques sont analogues.

La faute de la première note (en fait, h_n est d'ordre 2 !) réside en ce que dans la construction de M^4 on a supposé que la classe d'homologie d'un tore plongé dans une variété L^4 simplement connexe est représentée par une sphère plongée. Comme la variété L^4 est explicitement donnée, il est tentant de regarder de plus près ce contre-exemple au lemme de Whitney, c'est ce que nous ferons dans l'appendice B où nous verrons que L^4 s'obtient par chirurgie d'indice zéro sur les anneaux boroméens, le tore T^2 étant la chirurgisée de la fibre de l'enlacement fibré que constituent les anneaux boroméens.

L'appendice C est un rappel des définitions et des propriétés des surfaces caractéristiques.

Le lecteur aura remarqué que l'exemple fondamental qui intervient dans la deuxième note est la variété M_1^4 , l'éclaté d'un plan projectif en neuf points. Nous en donnerons la description suivante dans l'appendice D : La variété M_1^4 est la réunion d'un plombage E_8 et de la variété obtenue en attachant à $T^2 \times D^2$ trois anses le long de trois axes du tore $T^3 = \partial(T^2 \times D^2)$ "les framing étant -1". (En choisissant les neuf points comme les points fixes d'un pinceau de cubique, $T^2 \times D^2$ est un voisinage d'une cubique lisse du pinceau et les anses proviennent de deux cycles évanescents pour le pinceau et d'un diviseur exceptionnel.) Ceci nous permettra de donner une décomposition analogue des surfaces d'Enriques et des surfaces $K3$.

1. LE TORE T_0^3 ET LE CHAMP DE REPERES H_n^0 .

Soit T_0^2 un tore de révolution dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Le tore T_0^3 est le bord d'un tube E autour de T_0^2 dans \mathbb{R}^4 . Un point a de T_0^3 est repéré par ses coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha_3 : T_0^3 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est une trivialisation du tube E telle que $\alpha_3^{-1}(0)$ soit le bord d'un collier extérieur à T_0^2 dans \mathbb{R}^3 et (α_1, α_2) provient, via la projection du tube E , $\pi : T_0^3 \rightarrow T_0^2$, du système de coordonnées parallèle-méridien sur le tore T_0^2 . Pour tout point a de T_0^3 , on désigne par $n(a)$ le vecteur normal unitaire sortant.

Soit e_1, e_2, \dots, e_{n+3} la base canonique de \mathbb{R}^{n+3} ($n \geq 2$) . On considère $H_n^0 = \{u_1, \dots, u_n\}$ le champ de repères normal à T_0^3 dans \mathbb{R}^{n+3} défini par :

$$\begin{cases} u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ u_i = e_{3+i} \text{ pour } 3 \leq i \leq n . \end{cases}$$

Rohlin considère ce champ de repères car il produit par la construction de Pontriaguine l'élément h_n de $\pi_{n+3}(S^n)$ représenté par la composition de trois suspensions successives de l'application de Hopf :

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n+3} & \xrightarrow{E^{n+1}f_2} & S^{n+2} & \xrightarrow{E^{n-1}f_2} & S^{n+1} & \xrightarrow{E^{n-2}f_2} & S^n \\ & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{h_n} & & \uparrow \end{array}$$

(ici $f_2 : S^3 \rightarrow S^2$ est l'application de Hopf et E est la suspension).

Comme la vérification de ce fait est indépendante des arguments géométriques de Rohlin, nous la rejettons à l'appendice A. Nous allons expliquer comme Rohlin "prouve" que h_n est nul, en faisant border au couple (T_0^3, H_n^0) un couple (M^4, H_n) où M^4 est une sous-variété propre du demi-espace $\mathbb{R}_1^{n+4} (= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+4} \mid x_0 \geq 0\})$ de bord T_0^3 , et H_n un champ de repères normal à M^4 étendant H_n^0 .

Rohlin commence par énoncer, à la fin du §3, la proposition suivante :

PROPOSITION. Pour tout plongement propre $\varphi : T^2 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+4}$, tel que $\varphi(\partial(T^2 \times D^2)) = T_0^3$, l'âme $\varphi(T^2 \times 0)$ est un cycle d'obstruction à étendre le champ de repère H_n^0 .

Démonstration. Soit $\varphi_0 : T^2 \times \partial D^2 \rightarrow T_0^3$ la restriction de φ au bord. On peut supposer que φ_0 conserve l'orientation. Identifions $T^2 \times \partial D^2$ à $T^2 \times T^1 = T_0^3$;

le difféomorphisme φ_0 est alors homotope à un difféomorphisme linéaire φ_1 . Par la construction de Pontriaguine, on obtient une sous-variété M^2 de $\varphi(T^2 \times D^2)$ de bord $\varphi_1(* \times \partial D^2)$ et munie d'un champ de repères normal $\{v_1, v_2\}$ dans $\varphi(T^2 \times D^2)$ dont la restriction au bord est $\{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\}$ (+).

Considérons le couple (C, H_{n+2}^0) où C est le cercle $\varphi_1(* \times \partial D^2)$ et H_{n+2}^0 est le champ de repères $\{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}), u_1, \dots, u_n\}$. L'âme $\varphi(T^2 \times 0)$ est un cycle d'obstruction à étendre le champ de repères H_n^0 si et seulement si H_n^0 ne s'étend pas au-dessus de M^2 ; cela a donc lieu si et seulement si le couple (C, H_{n+2}^0) ne borde pas. Rappelons le lemme de Pontriaguine :

LEMME 1. (C, H_{n+2}^0) est un cercle dans \mathbb{R}^{n+3} muni d'un champ de repères normal H_{n+2}^0 , $n \geq 1$. Soit v_1 un champ de repères tangent à C . Alors, le couple (C, H_{n+2}^0) ne borde pas si et seulement si l'application $f: C \rightarrow V_{n+3}$; $f(x) = (v_1, H_{n+2}^0)$ représente l'élément nul de $\pi_1(V_{n+3})$. (V_{n+3} est l'espace des repères de \mathbb{R}^{n+3} , il est isomorphe à $GL(n+3, \mathbb{R})$.)

Dans le cas qui nous occupe, l'invariant de Pontriaguine de (C, H_{n+2}^0) est la restriction à $\varphi_1(* \times \partial D^2)$ de :

$$F: T_0^3 \rightarrow V_{n+3}$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_3}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}), u_1, \dots, u_n).$$

Comme φ_1 est un difféomorphisme linéaire préservant l'orientation, F est homotope à $F_0: F_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, u_1, \dots, u_n)$. En regardant sur la base canonique de T_0^3 , on voit que F induit zéro sur le π_1 (*). Ceci achève la démonstration de l'affirmation du §3. \square

Démonstration du lemme 1.

Soit M^2 une surface orientable connexe bordant le cercle C dans \mathbb{R}_1^{n+4} . Le fibré normal à M^2 dans \mathbb{R}_1^{n+4} est trivial (car il est orientable et M^2 a le type d'homotopie d'un complexe de dimension un). L'obstruction à étendre le champ de repères H_{n+2}^0 à M^2 est donc un élément γ_0 de $\pi_1(V_{n+2})$ ($\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car $n+2 \geq 3$).

(+) Le couple $(\varphi_0(* \times \partial D^2), \{(T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_0(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}))\})$ borde $(\varphi(* \times D^2), \{T\varphi(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\})$, comme le difféomorphisme φ_1 est homotope à φ_0 le couple $(\varphi_1(* \times D^2), \{T\varphi_1(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}), T\varphi_2(\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\})$ borde $(M^2, \{v_1, v_2\})$.

(*) Le lecteur pourra se reporter, pour le vérifier, au dernier paragraphe de l'appendice A

L'obstruction à étendre le champ de repères (e_0, v_0) en un champ de repères tangent à M^2 est un élément γ_1 de $\pi_1(V_2)$ ($\cong \mathbb{Z}$) ; cet élément est impair car il est égal à la caractéristique d'Euler de M^2 . Soit $\bar{f} : C \rightarrow V_{n+4}$ donné par $\bar{f}(x) = (e_0, f(x))$ et considérons $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ les images de γ_0 et γ_1 dans $\pi_1(V_{n+4})$ par les inclusions canoniques. On a dans $\pi_1(V_{n+4})$, $\bar{f} = \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1$. Le lemme suit de ce que $\pi_1(V_{n+3}) \rightarrow \pi_1(V_{n+4})$ est un isomorphisme et que $\bar{\gamma}_1$ représente l'élément non nul. \square

2. CONSTRUCTION DE LA VARIÉTÉ M^4 ET DU CHAMP H_n .

Soit K^4 l'extérieur du tube E dans la sphère S^4 , le compactifié d'Alexandroff de R^4 ($S^4 = R^4 \cup \infty$). La chirurgie transformant K^4 en la variété L^4 simplement connexe peut se voir plongée dans D^5 ($= R^5 \cup \infty$) de la manière suivante :

Soit d un disque fibre du tube E et $c : S^4 \times [0, 2] \rightarrow D^5$ un collier du bord. Considérons $\mathfrak{L} = c(K \times [0, 2] \cup d \times 2)$; la variété L^4 sera le bord d'un voisinage régulier lisse de \mathfrak{L} , pincé sur $c(T_0^3 \times [0, 1])$ ⁽⁺⁾. La variété $P^4 = L^4 \cup E$ est le bord d'un voisinage régulier du complémentaire d'un 2-disque dénoué dans D^5 ; elle est donc difféomorphe à $S^2 \times S^2$. On désigne par \tilde{n} le champ de vecteurs normal à L^4 dans R_1^5 étendant n (voir la figure 1).

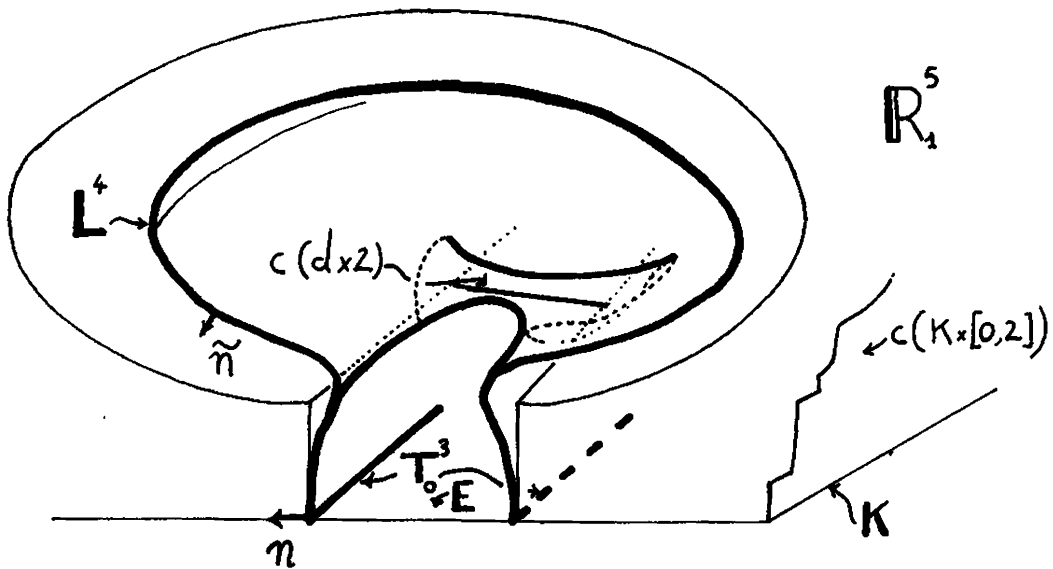


Figure 1 : la variété L^4

(+) On peut prendre pour L^4 le bord de l'ensemble des points à distance $\leq \epsilon$ de \mathfrak{L} , où $\epsilon : D^5 \rightarrow [0, \epsilon_0]$ est une fonction C^∞ telle que $\epsilon^{-1}(0) = c(S^4 \times [0, 1])$ et $\epsilon^{-1}(\epsilon_0) = D^5 - c([0, 3/2[)$ et ϵ_0 assez petit.

LEMME 2. Soit, dans L^4 , le deux tore $\tau = \{c((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \frac{1}{2}) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$.
Il y a sur $L^4 - \tau$ un champ de repères \tilde{H}_n étendant H_n^0 pour lequel τ soit un cycle
d'obstruction.

Démonstration. Soit $f: L^4 - \tau \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie par :

a) $f(x) = \pi$ pour x hors de $c(T_0^3 \times [0, 1])$;

$$b) e^{if(c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t))} = \frac{(1-t)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} - t}{\|(1-t)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} - t\|} \text{ pour } c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) \text{ dans } c(T_0^3 \times [0, 1]) - \tau .$$

(voir la figure 2).

Il suffit de poser $\tilde{H}_n = \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$, où, pour $a \in L^4$:

$$\tilde{u}_1(a) = \tilde{n}(a) \cos(f(a)) - e_5 \sin(f(a))$$

$$\tilde{u}_2(a) = \tilde{n}(a) \sin(f(a)) + e_5 \cos(f(a))$$

$$\tilde{u}_i(a) = e_{i+3}, \dots \text{ pour } 3 \leq i \leq n .$$

□

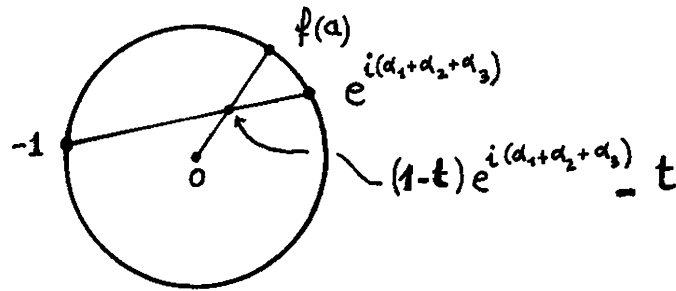


Figure 2 : construction de \tilde{H}_n ; la fonction f .

Rohlin suppose alors que la classe d'homologie du tore τ dans la variété simplement connexe L^4 se représente par une sphère plongée Σ^2 . Nous sommes en dimension quatre et le lemme de Whitney ne s'applique pas ; nous verrons en fait, dans le quatrième article, qu'une telle sphère n'existe pas. Supposons cependant, comme Rohlin, l'existence de Σ^2 et suivons la suite de l'argument.

Montrons tout d'abord comment on obtiendrait aujourd'hui la variété M^4 et le champ H_n (en fait H_2). Nous expliquerons ensuite les arguments de Rohlin.

Remarquons tout d'abord que la sphère Σ^2 borde un disque Δ^3 plongé dans R_1^6 et ne coupant la variété L^4 qu'en son bord :

La sphère Σ^2 borde certainement un disque D dans R_1^5 ; poussons l'intérieur de D au-dessus de R_1^5 et mettons-le en position générale, nous obtenons un disque D' immergé dans R_1^6 de bord Σ et dont l'intérieur est dans $R_{1+}^6 (= \{x_0, \dots, x_5\} \in R_1^6 \mid x_5 > 0\})$. On peut supposer que le nombre algébrique de points doubles de D' est

zéro. Le lemme de Whitney fournit alors le disque Δ^3 .

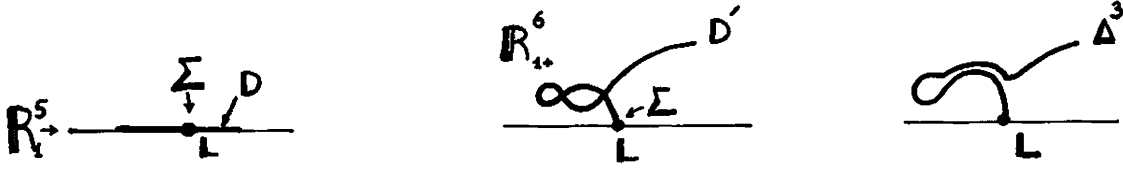


Figure 3 : construction du disque Δ^3

Le disque Δ^3 permet de faire une chirurgie plongée sur la sphère Σ ; soit $M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}_1^6$ la variété obtenue par cette chirurgie. Le champ de repères H_2^0 s'étend au complémentaire du cercle co-âme de la chirurgie ⁽⁺⁾ ; comme ce cercle est de codimension trois dans M^4 et $\pi_i(V_2) = 0$ pour $i \geq 2$, le champ H_2 s'étend en fait en un champ de repères H_2 normal à M^4 .

La technique de la chirurgie plongée n'existait pas en 1951, et Rohlin nous offre une toute autre construction.

La construction de M^4 selon Rohlin.

Soit V un tube autour de la sphère Σ^2 . Comme l'auto-intersection de Σ^2 est nulle, il y a un isomorphisme de tube entre V et un tube produit $\Sigma^2 \times D^2$.

Soit $\psi : \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma^2 \times S^1$ le difféomorphisme défini par :

$$\psi(x, y) = (xy, y)$$

(ici, on a identifié la sphère Σ^2 à $\mathbb{C} \cup \infty$ et le cercle S^1 au cercle unité de \mathbb{C}).

Soit $\bar{\psi}$ le difféomorphisme correspondant de ∂V . Rohlin pose alors :

$$M^4 = L^4 - \mathring{V} \bigcup_{\bar{\psi}} V' \quad \text{et} \quad Q^4 = P^4 - \mathring{V} \bigcup_{\bar{\psi}} V' = V^4 \cup E,$$

où V' est un deuxième exemplaire du tube V .

Rohlin dégage alors les propriétés suivantes des variétés M^4 et Q^4 :

Propriété a). Pour tout recollement à M^4 du produit d'un 2-tore et d'un 2-disque, le 2-tore axial de ce produit devient un cycle caractéristique.

Propriété b). Le nombre caractéristique X_{22} de la variété Q^4 est nul.

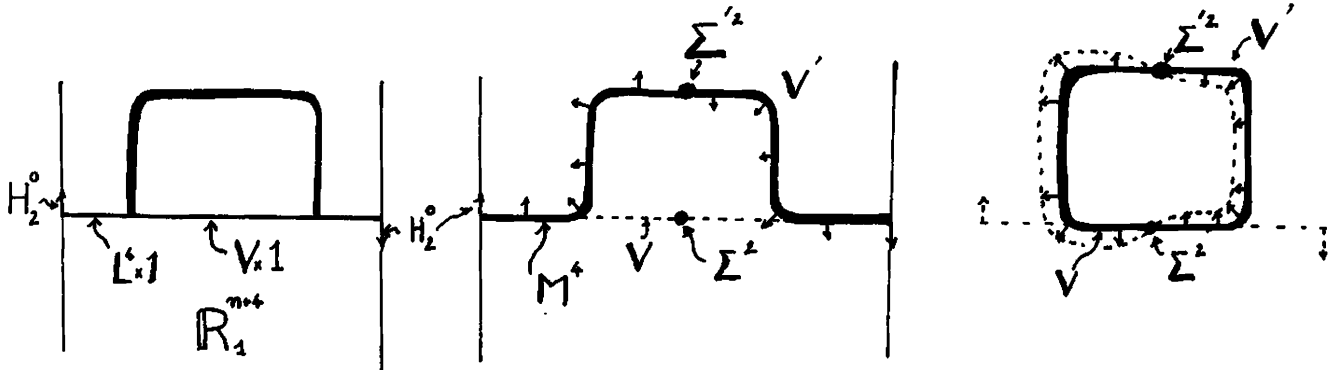
(+) car la sphère Σ^2 est homologue au tore τ et H_2^0 s'étendait au complémentaire de τ par le lemme 2.

Démonstration des propriétés a) et b).

Remarquons tout d'abord que $V \underset{\psi}{\cup} V'$ est le S^2 fibré non trivial sur la sphère S^2 , V et V' étant les restrictions de ce fibré à deux des hémisphères de la base S^2 . En collant à $Q \times [0,1]$, le long de $V \times 1$, un exemplaire de $S^2 \times D^3$, le D^3 -fibré non trivial sur la sphère S^2 , on obtient un cobordisme orienté entre P^4 et Q^4 . La propriété b) en découle car le nombre de Pontriaguine $X_{22}^{(+)}$ est un invariant de cobordisme orienté et P^4 , un produit de sphère, borde.

Plongeons le cobordisme précédent dans \mathbb{R}_1^{n+4} , par un plongement étendant l'inclusion de $Q^4 \times 1$ dans \mathbb{R}_1^{n+4} . La propriété a) découlera alors de la Proposition et de ce que le champ H_n^0 s'étend au deux squelette de M^4 .

En effet, comme la sphère Σ^2 est homologue au tore τ^2 , le champ de repère H_n^0 s'étend au complémentaire de V dans L^4 , l'âme Σ^2 de V étant un cycle d'obstruction. Mais $L^4 - \overset{\circ}{V} = M^4 - \overset{\circ}{V}'$. Si l'âme $\Sigma^{2'}$ de V' était aussi un cycle d'obstruction, on pourrait (en arrondissant les angles en $\partial V = \partial V'$) construire un champ de repères normal à $V \underset{\psi}{\cup} V'$ dont un cycle d'obstruction serait $\Sigma^2 \cup \Sigma^{2'}$, or ce cycle est nul en homologie modulo deux ; cela contredit le fait que la seconde classe de Stiefel-Whitney de $V \underset{\psi}{\cup} V' (\cong S^2 \times S^2)$ est non nulle (c'est le dual de Σ^2) (voir la figure 4). \square



Si H_2^0 ne s'étendait pas au 2-squelette de M^4 , on aurait $w_2(V \underset{\psi}{\cup} V') = 0$!

Figure 4

(1) En langage moderne, $X_{22}(Q^4) = \langle P_1(M^4), [M^4] \rangle$ est le premier nombre de Pontriaguine. Les notations originelles de Pontriaguine provenaient d'une description explicite des classes de Pontriaguine en terme des cycles de Schubert dans la grassmannienne.

Les indications précédentes devraient permettre au lecteur de comprendre la construction du champ H_n donnée au §5 ; indiquons cependant la variation suivante de l'argument (qui utilise la définition moderne des classes de Pontriaguine).

Comme nous venons de le voir, le champ H_n^0 s'étend au 2-squelette de M^4 . Puisque $\pi_2(V_n) = 0$, il s'étend aussi au complémentaire d'un point m_0 de M^4 et l'obstruction à l'étendre à M^4 est un élément x de $\pi_3(V_n)$. Complexifions ; comme le champ H_n^0 se déduit du champ (n, e_5, \dots, e_{n+3}) par une application $g : T_0^3 \rightarrow SO(2) \subset GL(n, \mathbb{R})$ et que l'inclusion $SO(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ est nulle en homotopie, le complexifié du champ H_n^0 s'étend en un champ de repères défini sur $Q^4 - m_0$, l'obstruction à l'étendre à Q^4 est le complexifié $x_{\mathbb{C}} \in \pi_3(V_n(\mathbb{C}))$ de x . Or, $\pi_3(V_n(\mathbb{C}))$ est isomorphe à \mathbb{Z} pour $n \geq 2$ et $x_{\mathbb{C}}$ représente le nombre de Pontriaguine de Q^4 , il est donc nul par la propriété b). On conclut que x lui-même est nul de ce que, pour $n \geq 5$, $\pi_3(V_n(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_3(V_n(\mathbb{C}))$ est injective. (Si $n = 3, 4$, on peut aussi conclure à la nullité de x en utilisant que la classe d'Euler du fibré normal à Q^4 dans \mathbb{R}^{n+4} est nulle et la description explicite des stabilisations $\pi_3(V_i) \rightarrow \pi_3(V_{i+1})$ pour $i = 3$ et 4 (cf. § 23-6 du livre de Steenrod, the topology of fiber bundle).)

APPENDICE A

DESCRIPTION DE L'APPLICATION DE HOPF ET DE SES SUSPENSIONS

Considérons S^3 la sphère unité de \mathbb{C}^2 et S^2 la sphère de Gauss $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{CP}^1$. L'application de Hopf $H: S^3 \rightarrow S^2$ est la restriction à la sphère S^3 de la projection canonique $\pi: \mathbb{C}^2 - 0 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{CP}^1$ définie par $\pi(X, Y) = \frac{Y}{X}$.

La projection stéréographique de pôle $(0, i)$ de S^3 sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ fixe le cercle $\mathcal{C}_0 = H^{-1}(0)$. Une équation paramétrique de \mathcal{C}_0 est :

$$X = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad Y = 0.$$

Soit $n(\alpha) = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$ le vecteur normal unitaire extérieur à \mathcal{C}_0 dans $\mathbb{C} \times 0$ la base réelle canonique de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ est $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (i, 0)$ et $e_3 = (0, 1)$. Le cercle $\mathcal{C}_\epsilon = H^{-1}(\epsilon)$ est l'intersection avec S^3 de la droite complexe d'équation $\epsilon X - Y = 0$. Cette droite coupe $\mathbb{C} \times 0$ avec nombre d'intersection $+1$ et donc le nombre d'enlacement $\ell(\mathcal{C}_\epsilon, \mathcal{C}_0)$ des deux cercles \mathcal{C}_ϵ et \mathcal{C}_0 vaut $+1$. Le champ de repère produit par la construction de Pontriaguine sur l'application de Hopf est donc paramétré par $F_2: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow V_{2,3}$, où $V_{p,n}$ est l'espace des p -uples de vecteurs indépendants dans \mathbb{R}^n . $F_2(\alpha) = (\cos \alpha \cdot n(\alpha) - \sin \alpha \cdot e_3, \sin \alpha \cdot n(\alpha) + \cos \alpha \cdot e_3)$ (voir la figure 5).

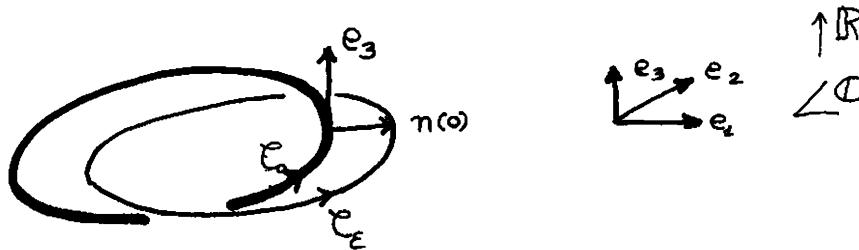


Figure 5

Soit f_2 l'application produite par la construction de Pontriaguine sur le champ de repère F_2 et $f_n = E^{n-2} f_2$ la $n-2$ -ème suspension de f_2 .

Pour simplifier les calculs, nous prendrons pour modèle de la sphère S^n le compactifié d'Alexandroff ${}^{\circ}B^2 \times {}^{\circ}I^{n-2} \cup \infty$ de ${}^{\circ}B^2 \times {}^{\circ}I^{n-2}$, où $I =]-1, 1[$ et ${}^{\circ}B^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

L'application f_{n+2} est alors définie par les formules suivantes :

- Si $x = ((1+x_1) \cos \alpha, (1+x_1) \sin \alpha, x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) \in S^1 \times \overset{\circ}{B}^2 \times 2\overset{\circ}{I}^n$
 $(\alpha \in S^1 ; (x_1, x_2) \in \overset{\circ}{B}^2 ; (x_3, \dots, x_{n+2}) \in 2\overset{\circ}{I}^n)$

$$f_{n+2}(x) = (2 \cos \alpha \cdot x_1 - 2 \sin \alpha \cdot x_2, 2 \sin \alpha \cdot x_1 + 2 \cos \alpha \cdot x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) \in 2(\overset{\circ}{B}^2 \times \overset{\circ}{I}^n)$$

- Sinon, $f_{n+2}(x) = \infty$.

En substituant, on obtient pour $h_n = f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$:

- Si, écrit en colonne,

$$x = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \cos(\beta - \alpha)) \cos \alpha \\ (1 + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \cos(\beta - \alpha)) \sin \alpha \\ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \cos(\gamma - \beta)) \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{1}{4} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \sin(\gamma - \beta) \\ \frac{1}{4} (1 + \cos \gamma u_1 + \sin \gamma u_2) \\ x_6 \\ \vdots \\ x_{n+3} \end{bmatrix}$$

avec $(u_1, u_2) \in \overset{\circ}{B}^2$, $(x_6, \dots, x_{n+3}) \in 2\overset{\circ}{I}^n$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^1 \times S^1 \times S^1$

$$h_n(x) = (2u_1, 2u_2, x_6, \dots, x_{n+3}) \in 2(\overset{\circ}{B}^2 \times \overset{\circ}{I}^{n-2}) .$$

- Sinon, $h_n(x) = \infty$.

En faisant une homothétie de rapport 4 et le changement de variable,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \beta - \alpha, \quad \alpha_3 = \gamma - \beta, \quad \text{et donc } \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ;$$

on obtient les formules de Rohlin :

$h_n^{-1}(0)$ est le tore T_0^3 plongé de la manière habituelle dans $\mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+3}$:

$$x_1 = (4 + 2(1 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 ;$$

$$x_2 = (4 + 2(1 + \cos \alpha_3) \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 ;$$

$$x_3 = 2(1 + \cos \alpha_3) \sin \alpha_2 ;$$

$$x_4 = \sin \alpha_3 ; \quad x_i = 0 \text{ pour } i \geq 5$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in T^3$.

Si $n(a)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à T_0^3 dans \mathbb{R}^4 au point a de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, le champ de repère normal produit par h_n est :

$$u_1(a) = n(a) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - e_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$u_2(a) = n(a) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + e_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$u_3 = e_6, \dots, u_n = e_{n+3} .$$

Terminons cet appendice en remarquant que, si l'on restreint le plongement décrit ci-dessus de T^3 dans T_0^3 à l'un de ses facteurs, disons le cercle des α_k défini par $\alpha_i = \alpha_j = 0$ ((i, j, k) étant une permutation de $(1, 2, 3)$), les vecteurs $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ et $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}$ sont constants, alors que $(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}, n(a))$ décrit une base du plan e_1, e_{n+1} ; cette base effectue un tour complet quand α_k varie de 0 à 2π . Il en est de même de la fonction de \mathbb{R}/\mathbb{Z} dans $SO(2) \hookrightarrow GL(n)$ qui fait passer du champ de repère

$$(n(a), e_5, \dots, e_{n+3}) \text{ au champ } H_n^0 = (u_1, \dots, u_n) \text{ (elle associe } \begin{pmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \\ -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k \end{pmatrix} \text{ à } \alpha_k)$$

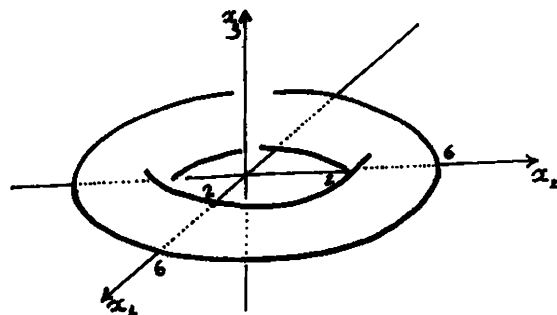
Cela démontre que l'application $F_0 : T^3 \rightarrow V_{n+3}$ induit zéro sur le π_1 . Rappelons que l'on a considéré cette application pour la démonstration de l'affirmation du § 3 ; elle est donnée par :

$$F_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, u_1, \dots, u_n \right) .$$

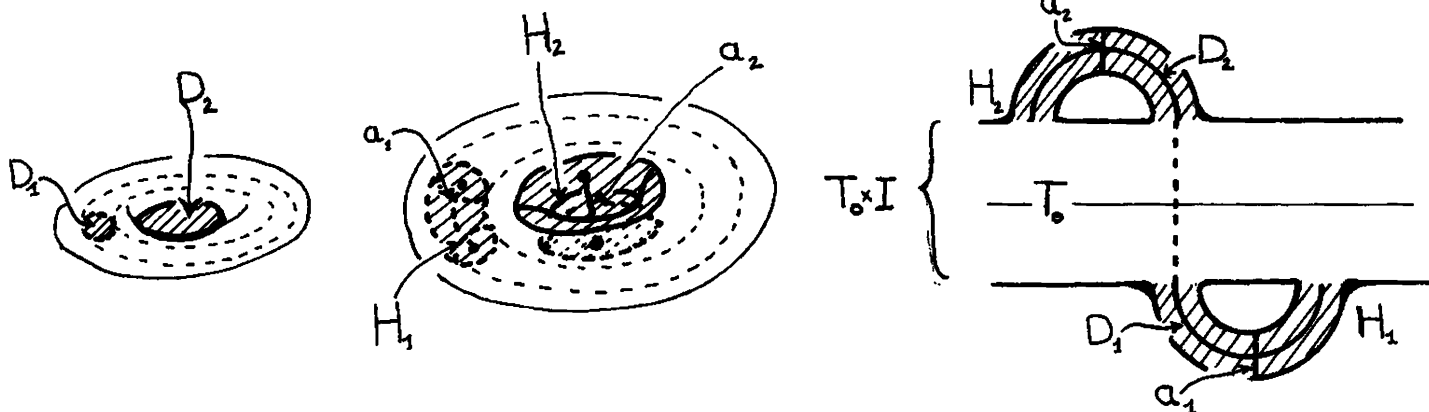
APPENDICE B.

QUELQUES DESSINS DE LA VARIÉTÉ L^4 ET DU TORE τ . UNE DECOMPOSITION EN ANSES DE L^4 .

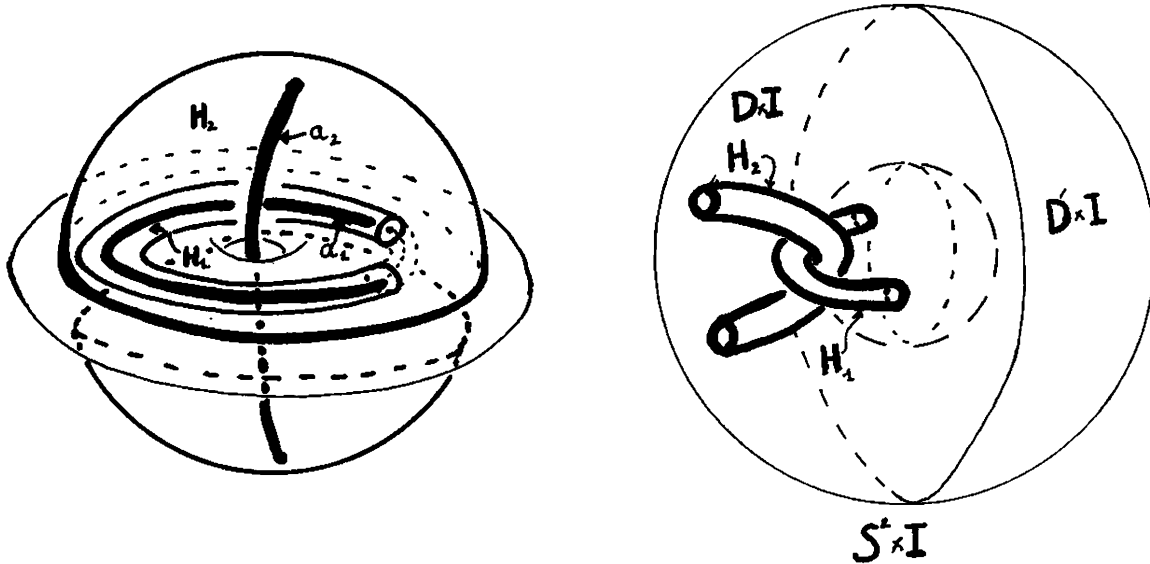
Considérons le tore standard T_0^2 dans $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \infty = S^3$ tel que Rohlin le décrit au paragraphe 3.



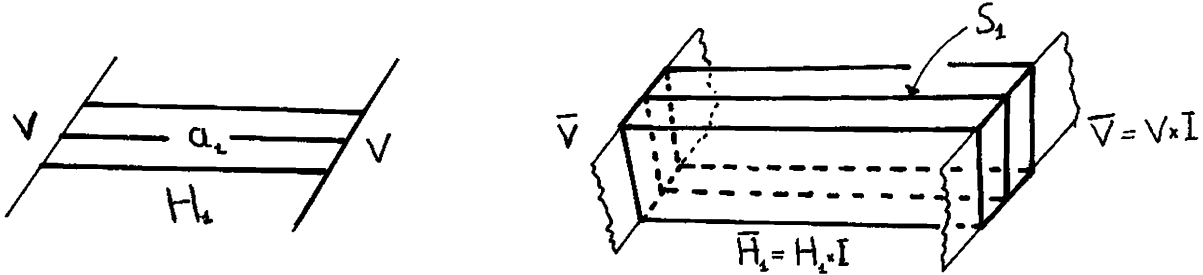
Soit V le tube unité autour de T_0^2 , il est difféomorphe à $T_0^2 \times I$. Dans le complémentaire de V , il y a deux disques D_1 et D_2 de bord un méridien de $T_0 \times -1$ et un parallèle de $T_0 \times 1$ respectivement. Des bicolliers autour de D_1 et D_2 forment deux anses d'indice deux, H_1 et H_2 ; notons a_1 et a_2 leurs co-âmes :



$V \cup H_1 \cup H_2$ est difféomorphe à une sphère épaissie $S^2 \times I$ plongée de manière standard dans S^3 . Faisons apparaître cette sphère épaissie en retournant la figure précédente comme un gant :

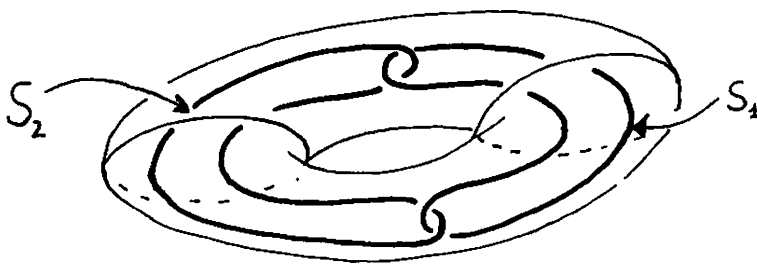


Epaississons la situation précédente en considérant la sphère S^3 comme l'équateur de S^4 . Le voisinage V devient $\bar{V} = V \times I$ et les anses H_1 et H_2 deviennent $\bar{H}_1 = H_1 \times I$ et $\bar{H}_2 = H_2 \times I$. La réunion $\bar{V} \cup \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2$ est difféomorphe à $S^2 \times I \times I \cong S^2 \times D^2$; le complémentaire est un tube $D^3 \times S^1$ autour du cercle enlaçant T_0^2 dans S^4 . Remplaçons ce tube par $S^2 \times D^2$ pour créer $P^4 (\cong S^2 \times S^2)$. Soit $\bar{H}_3 = D_+^2 \times D^2$ une anse d'indice 2 remplissant la moitié de $S^2 \times D^2$. Le complémentaire dans P^4 de $\bar{V} \cup \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 \cup \bar{H}_3$ est alors $D_-^2 \times D^2$ un disque de dimension quatre. Décrivons l'enlacement de S^3 sur lequel s'attachent les anses duales de \bar{H}_1, \bar{H}_2 et \bar{H}_3 .

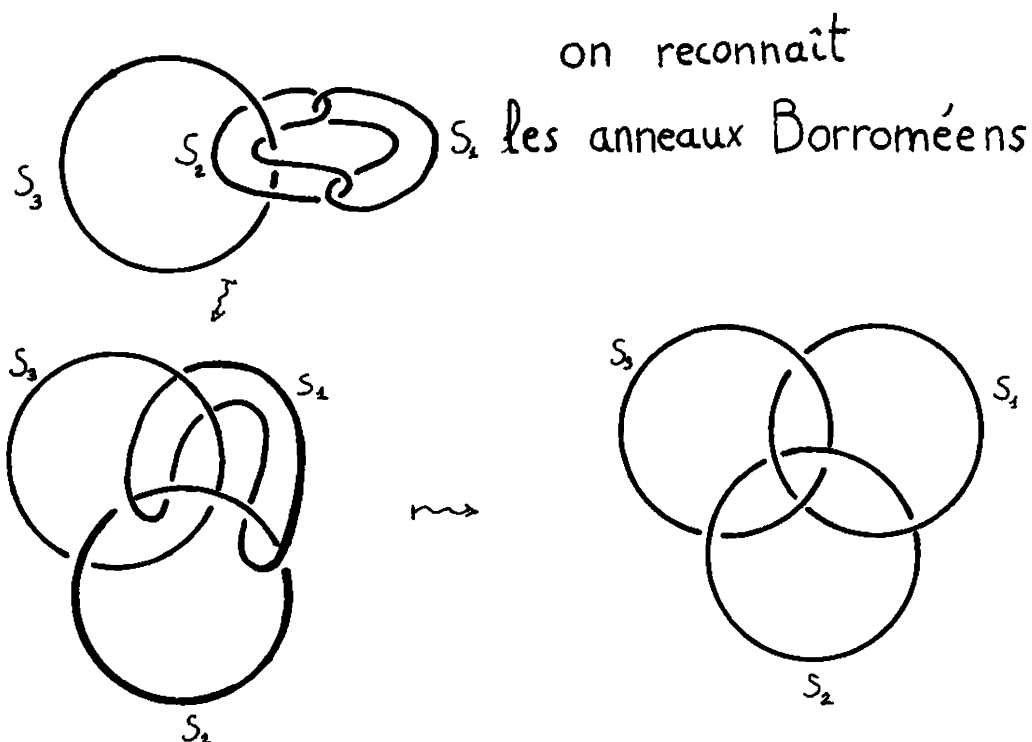


Pour \bar{H}_1 et \bar{H}_2 , les cercles d'attachement S_1 et S_2 des anses duales sont les doubles des co-âmes de H_1 et H_2 .

Elles sont situées comme suit dans la moitié $S^1 \times D^2$ de $S^1 \times S^2$



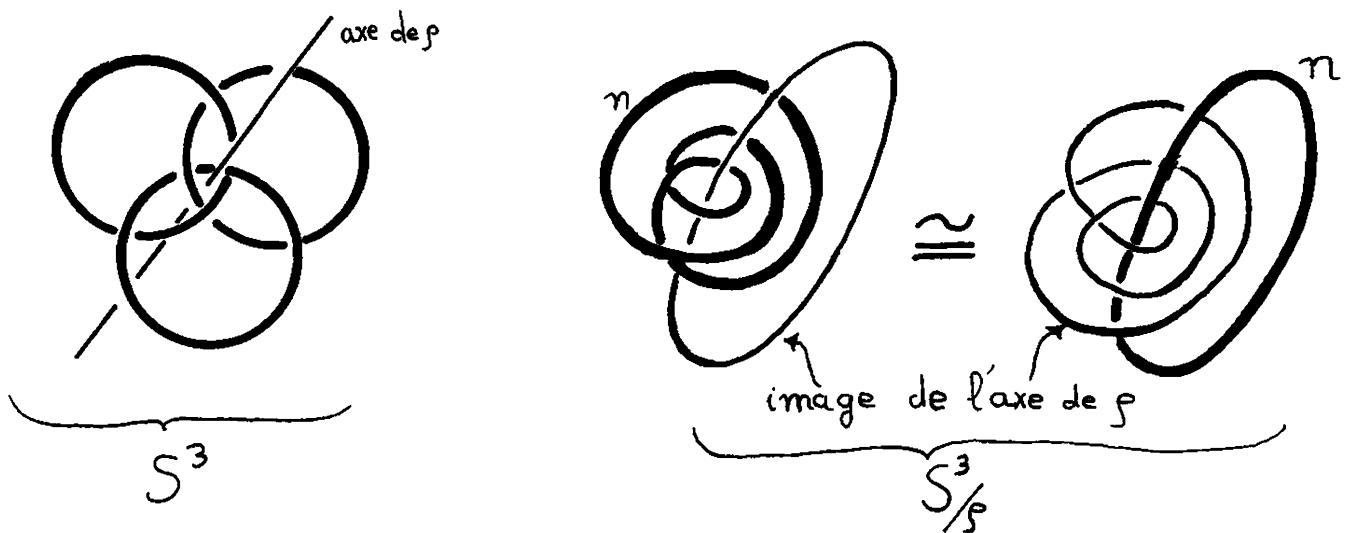
Le cercle d'attachement S_3 de l'anse duale de \bar{H}_3 est $* \times \partial D$; l'enlacement obtenu est :



Les trivialisations des tubes autour de chacun des trois anneaux ont nombre d'enlacement 0 : On peut le suivre dans le "cinéma" précédent ou remarquer que ce sont les seules trivialisations qui donnent une homologie de rang trois sur le bord de la variété L^4 obtenue par chirurgie (rappelons que $\partial L^4 = T_0^3$).

Nous allons maintenant faire apparaître la structure de tore sur le bord de L^4 vue comme trois anses à nombre d'enlacement 0 attachées sur les anneaux borroméens.

Soit ρ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de S^3 qui permute les trois anneaux borroméens. L'image de chacun des trois anneaux dans le quotient S^3/ρ est un noeud trivial n . Le complémentaire de n admet une fibration en disques telle que chaque disque coupe l'image de l'axe de ρ transversalement en trois points. Le complémentaire des anneaux borroméens est donc fibré ; la fibre F est un revêtement cyclique d'ordre 3 ramifié sur trois points du disque, c'est un tore à 3 trous. Cette fibration s'étend en une fibration en tores de ∂L^4 la variété chirurgisée avec fibre $\hat{F} = F \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$, où les D_i sont des disques dans le bord de l'anse duale de \bar{H}_1 . La fibre \hat{F} est invariante par l'extension naturelle de ρ à L^4 et représente le tore τ^2 d'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ dans T_0^3 .



Terminons cet appendice par quelques exercices.

1) Calculer la monodromie de la fibration des anneaux borroméens. En déduire que la monodromie de la fibration correspondante de ∂L^4 est l'identité : vous aurez vérifié directement que la variété de dimension 3 présentée par la donnée de chirurgie



est le tore T^3 .

2) Il s'agit de déterminer les difféomorphismes de T_0^3 qui s'étendent à L^4 et d'en déduire qu'une variété obtenue en collant $T^2 \times D^2$ à L^4 est difféomorphe soit à $P^4 = S^2 \times S^2$, soit au "produit tordu" de deux 2-sphères $S^2 \times S^2 \cong \mathbb{CP}^2 \# (-\mathbb{CP}^2)$.

a) Prouver que si un difféomorphisme du tore T_0^3 s'étend à L^4 , il fixe la classe d'homologie modulo deux du tore τ . [Indication : Tout difféomorphisme du tore T_0^3 conserve la structure Spin provenant du champ de repère H_n^0 (voir App. C), une extension de φ doit conserver l'obstruction à étendre à L^4 cette structure Spin.]

b) Prouver qu'un difféomorphisme agissant par une permutation des coordonnées de T_0^3 s'étend à L^4 (utiliser la présentation en anses de L^4).

c) Prouver que le difféomorphisme linéaire de T_0^2 de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ s'étend en un difféomorphisme de S^4 induisant $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ sur T_0^3 . [Soit $V_1 = S^1 \times D^2$ un des deux tores solides bordant T_0^2 dans S^3 (l'autre est $V_2 = D^2 \times S^1$). Considérer l'épaissi $\bar{V}_1 = S^1 \times D^3$ de V_1 , remarquer que $S^4 - \bar{V}_1 \cong D^2 \times S^2$ et utiliser le fait que $\pi_1(\text{SO}(3))$ est d'ordre 2.]

En déduire que $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ s'étend à L^4 .

d) En faisant dans $S^4 - T_0^2$ des "twists de Dehn" autour de V_1 et de V_2 , montrer que :

i) les difféomorphismes linéaires de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ s'étendent à S^4 mais non à L^4 .

ii) le difféomorphisme linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ s'étend à L^4 .

e) Dédurre de b) et c) qu'un difféomorphisme linéaire s'étend à L^4 si sa matrice est congrue modulo 2 à une matrice de permutation. Dédurre alors de d) que, pour un difféomorphisme linéaire, la condition nécessaire de a) est aussi suffisante.

f) Prouver que tout difféomorphisme φ du tore T^3 est isotope à un difféomorphisme linéaire. [Supposer que φ induise l'identité sur le H_1 ; se ramener par un argument de cercle le plus intérieur au cas où $\varphi(T^2 \times 0) \cap T^2 \times 0 = \emptyset$; se ramener alors au cas où φ induit l'identité sur $T^2 \times 0$; reprendre l'argument pour se ramener au cas où φ induit l'identité sur $T^2 \times 0 \cup T^1 \times 0 \times T^1 \cup 0 \times T^2$; conclure en utilisant le théorème de Cerf : $\text{Diff}^+(S^3)$ est connexe.]

g) Soit φ un difféomorphisme de T^3 et M_φ^4 la variété obtenue en collant L^4 à $T^2 \times D^2$ au moyen de φ :

$$M_\varphi^4 = L^4 \cup_{\varphi} T^2 \times D^2 = L^4 \cup T^2 \times D^2 / \{ \partial L^4 = T_0^3 \ni x \sim \varphi(x) \in T^3 = T^2 \times \partial D^2 = \partial(T^2 \times D^2) \}.$$

Prouver que :

i) Si $p_1 \circ \varphi : \tau^2 \rightarrow T^2$ est de degré impair, M_φ^4 est difféomorphe à $P^4 = M_{\text{id}}^4 (\cong S^2 \times S^2)$; et il y a un difféomorphisme entre $L^4 \cup_{\varphi} T^2 \times D^2$ et $L^4 \cup_{\text{id}} T^2 \times D^2$ qui préserve la décomposition (avec $p_1 : T^2 \times D^2 \rightarrow T^2$ la projection naturelle).

ii) Si $p_1 \circ \varphi : \tau^2 \rightarrow T^2$ est de degré pair, M_φ^4 est difféomorphe au "produit tordu" $S^2 \times S^2$ de deux 2-sphères ($S^2 \times S^2 \cong \mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$) et il y a entre deux tels M_φ un difféomorphisme préservant la décomposition.

APPENDICE C.SURFACES CARACTERISTIQUES

Soit M^4 une variété orientable de dimension quatre. Une surface F^2 dans M^4 est caractéristique si elle est un cycle d'obstruction à trivialisier la restriction au 2-squelette du fibré tangent à M : Il y a une trivialisat[i]on t du fibré tangent M hors de F et pour tout disque D transverse à F l'obstruction à étendre t au-dessus de D est l'élément non nul de $\pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (rappelons que comme M est orientable, son fibré tangent se réduit à $SO(4)$). Ceci revient à dire qu'elle est duale de la seconde classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ de M .

Rohlin utilise la même notion pour le fibré normal. On voit que c'est la même chose en appliquant à $N = M - F$ la remarque suivante.

Remarque. Soit N^n une sous-variété de \mathbb{R}^N , $2 < n < N-2$. Il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie de trivialisat[i]on des restrictions au 2-squelette de N des fibrés tangent τN et normal νN de N . Cette bijection associe à la trivialisat[i]on t de $\tau N|_{N[2]}$ la classe d'une trivialisat[i]on t' de $\nu N|_{N[2]}$ telle que $t \oplus t'$ soit homotope à la trivialisat[i]on standard de $\tau \mathbb{R}^N$ (si $n \leq 2$, il faut remplacer le fibré tangent par le fibré tangent stable).

Par exemple, la bijection précédente fait correspondre à la trivialisat[i]on $(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial}{\partial \alpha_3})$ de T_0^3 , invariante par translation, le champ de repère normal H_n^0 que Rohlin considère.

Une classe d'homotopie de trivialisat[i]on de la restriction au 2-squelette du fibré tangent stable d'une variété est une structure Spin sur cette variété.

Il y a une autre définition d'une surface caractéristique d'une variété orientable M^4 : Une surface F^2 est caractéristique dans M^4 si, pour tout cycle modulo 2, Σ^2 de M^4 , on a $\Sigma \cdot \Sigma \equiv \Sigma \cdot F \pmod{2}$ (le point désignant l'intersection homologique). L'équivalence des deux définitions est la formule de Wu dont nous allons donner la démonstration géométrique suivante :

Supposons le cycle Σ^2 représenté par une surface G^2 . Soit τG le fibré tangent à G et νG le fibré normal à G dans M . Comme la variété ambiante M est orientable, les fibrés τG et νG ont tous deux même obstruction w_1 à l'orientabilité. Soit C et C' deux cercles transverses représentant cette obstruction. Soit X un champ de vecteurs tangent à G et Y un champ de vecteurs normal à G , chacun

non nul hors d'un voisinage d'un point (g_X et g_Y respectivement) de $G - C \cup C'$.

Soit X' un champ de vecteurs tangent non nul hors de $g_X \cup C$ et formant là avec X une base de τG ; soit Y' un champ de vecteurs normal non nul hors de $g_Y \cup C'$ et y formant une base de νG . Hors de $\{g_X, g_Y, C \cap C'\}$, les trois vecteurs $X, Y, X'+Y'$ sont indépendants, ils se complètent en un champ de repères tangent à M défini sur $G - \{g_X, g_Y, C \cap C'\}$. L'obstruction à étendre ce champ à G est $\Theta(X) + \Theta(Y) + C \cap C' \bmod (2)$ où $\Theta(X)$, l'obstruction à étendre X , est la caractéristique d'Euler $\chi(G)$ de G , et $\Theta(Y)$ l'obstruction à étendre Y , est $G \cdot G$. Mais, pour une surface G^2 , on a $\chi(G) + (w_1(G))^2 = 0 \bmod (2)$; l'obstruction à trivialisé la restriction à G^2 du fibré tangent à M est donc $G^2 \cdot G^2$, ce qui établit l'équivalence des deux définitions. \square

Remarque. Dans la deuxième définition, il faut tenir compte de tous les cycles modulo 2 et non seulement de ceux qui sont réduction modulo 2 de cycles entiers : Pour la surface d'Enriques dont nous allons donner une description dans l'appendice D, la surface vide n'est pas caractéristique bien que $\Sigma \cdot \Sigma \equiv 0 \bmod (2)$ pour tout cycle entier Σ . Cependant, si $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, tout élément de $H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est réduction modulo 2 d'un élément de $H_2(M; \mathbb{Z})$.

APPENDICE D .LA VARIÉTÉ M_1^4 DE ROHLIN,LES SURFACES D'ENRIQUES ET LES SURFACES $K3$.

Dans le second article, Rohlin a besoin d'une variété M_1^4 de signature -8 et possédant une surface caractéristique d'auto-intersection nulle. Pour l'obtenir, il fait la somme connexe d'un plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 et de 9 exemplaires de $-\mathbb{CP}^2$, le plan projectif complexe muni de l'orientation opposée : $M_1^4 = \mathbb{CP}^2 \# 9(-\mathbb{CP}^2)$ la surface caractéristique F est une surface représentant la classe d'homologie $f = (3, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^9 \cong H_2(\mathbb{CP}^2) \oplus (H_2(-\mathbb{CP}^2))^9 \cong H_2(M_1^4)$. (On a choisi \mathbb{CP}^1 muni de son orientation complexe comme générateur de $H_2(\mathbb{CP}^2)$; pour $X = (x_0, x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^9 = H_2(M_1^4)$, on a :

$$X^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^9 x_i^2, \text{ donc on a modulo 2, } X^2 \equiv x_0 - \sum_{i=1}^9 x_i \equiv 3x_0 - \sum_{i=1}^9 x_i = X \cdot f,$$

et la classe d'homologie f est caractéristique ; d'autre part, $f^2 = 3^2 - \sum_{i=1}^9 1 = 0$.)

La variété M_1^4 .

Soient dans \mathbb{CP}^2 deux cubiques C_0 et C_∞ d'équations $F_0 = 0$ et $F_\infty = 0$ telles que la courbe générique C_t du pinceau engendré ^(†) par C_0 et C_∞ soit lisse. Ce pinceau définit une application rationnelle $\varphi : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$ définie pour X dans \mathbb{CP}^2 hors de $C_0 \cap C_\infty$ par : $\varphi(X)$ est l'unique t tel que $X \in C_t$. On obtient après 9 éclatements de \mathbb{CP}^2 une surface algébrique $\hat{\mathbb{CP}}^2$ sur laquelle l'application φ devient bien définie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{composée de} \\ 9 \text{ éclatements} \end{array} \right\} \pi \begin{array}{ccc} & \hat{\mathbb{CP}}^2 & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{CP}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

La variété $\hat{\mathbb{CP}}^2$ est diffeomorphe à la variété M_1^4 de Rohlin et la transformée stricte \hat{C}_{t_0} d'une courbe lisse du pinceau est dans la classe d'homologie de f . En effet, un éclatement en un point X lisse d'une courbe C sur une surface

(†) Elle est d'équation $F_t = F_0 + t F_\infty = 0$.

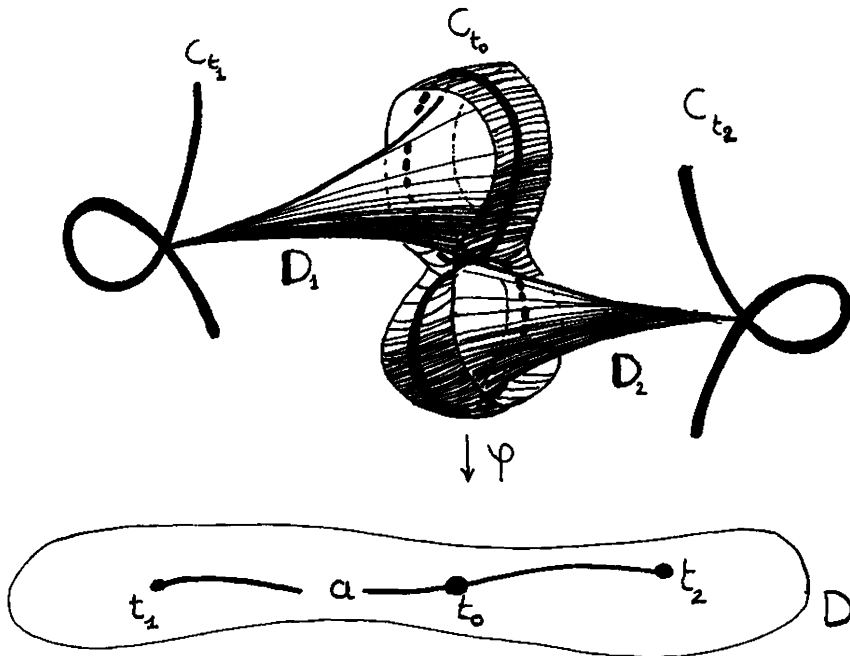
algébrique M correspond à faire une somme connexe de paire $(M, C) \# (-\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1)$.

Comme toutes les cubiques lisses sont difféomorphes par un difféomorphisme ambiant de \mathbb{CP}^2 , on déduit de ce qui précède que le type de difféomorphisme de la paire $(\hat{\mathbb{CP}}^2, \hat{C}_t)$ ne dépend pas du choix du pinceau. Le jeu maintenant consiste à étudier la topologie de $(\hat{\mathbb{CP}}^2, \hat{C})$ en choisissant un pinceau explicite.

Comme la fibre \hat{C}_{t_0} est lisse, elle a un voisinage en produit difféomorphe à $C_{t_0} \times D^2 \cong T^2 \times D^2$; posons $N_1^4 = M_1^4 - \text{int}(C_{t_0} \times \frac{1}{2} D^2)$, c'est une variété de bord le tore de dimension trois T^3 .

PROPOSITION 1. Les difféomorphismes de T^3 qui s'étendent à N_1^4 sont ceux qui préservent l'orientation.

Démonstration. On choisit un pinceau tel qu'une base de l'homologie d'une fibre générique C_{t_0} soit représentée par deux cycles évanescents se contractant vers deux fibres singulières ordinaires ⁽⁺⁾ C_{t_1} et C_{t_2} . Soient D_1 et D_2 des disques que ces cycles évanescents parcourent au cours de leur contraction, tels que $\varphi(D_1) \cup \varphi(D_2)$ soit un arc a plongé, joignant t_1 à t_2 , passant par t_0 et ne rencontrant aucune valeur critique de φ autre que t_1 et t_2 :

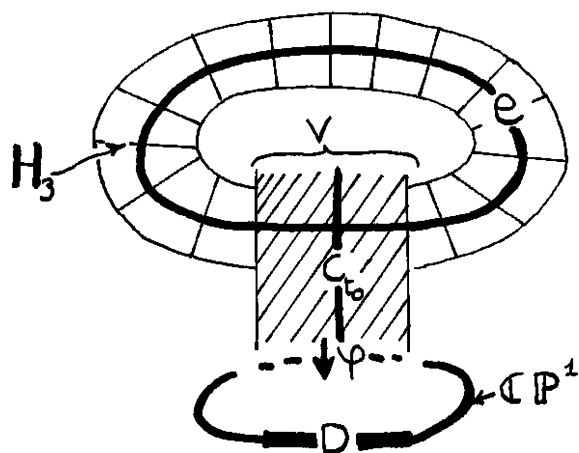


(+) c'est-à-dire irréductibles avec un seul point singulier qui est quadratique non dégénéré.

Ajoutons à $C_{t_0} \times D^2$ deux anses H_1 et H_2 d'indice 2 le long des disques D_1 et D_2 . Soit $V = C_{t_0} \times D^2 \cup H_1 \cup H_2$ la variété obtenue, on peut faire en sorte que V soit la préimage par φ d'un disque D contenant l'arc a dans son intérieur.

Soient e un diviseur exceptionnel de $\hat{\mathbb{C}P}^2$ rencontrant transversalement les fibres génériques et $D_3 = e - \overset{\circ}{V}$. Ajoutons à $C_{t_0} \times D^2$ une troisième anse d'indice 2 le long du disque D_3 pour former :

$$P = C_{t_0} \times D^2 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 = V \cup H_3.$$



Posons enfin $Q = P - \text{int}(C_{t_0} \times \frac{1}{2} D^2)$; le bord de Q est :

$$\partial Q = \partial_+ Q \cup \partial_- Q \quad \text{où} \quad \partial_+ Q = C_{t_0} \times \frac{1}{2} \partial D^2 = T^3.$$

Dans le tore $T^3 = C_{t_0} \times \partial D^2$, les cercles d'attachement sont des parallèles disjointes aux axes de coordonnées, les trivialisations des tubes autour de ces cercles diffèrent de -1 de la trivialisation invariante par translation.

Comme la signature de N_1^4 est non nulle (elle vaut -8), un difféomorphisme de N_1^4 préserve l'orientation. La proposition découle alors du lemme suivant :

LEMME. Tout difféomorphisme préservant l'orientation de $T^3 = \partial_+ Q$ s'étend en un difféomorphisme de Q identité sur Q_- .

Démonstration. En faisant tourner à l'intérieur de V la fibre C_{t_0} autour des fibres singulières C_{t_1} et C_{t_2} , on produit des difféomorphismes de Q identité sur $\partial_- Q$ et induisant sur $T^3 = \partial_+ Q$ des difféomorphismes linéaires α_1 et α_2 de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La variété Q a un difféomorphisme β d'ordre 3 induisant sur $T^3 = \partial_+ Q$ un difféomorphisme α isotope à la permutation circulaire des coordonnées. (Si on

choisit pour cercles d'attachement des anses H_1, H_2, H_3 les cercles d'équation $Y = Z = 0$, $Z = X = \frac{1}{3}$, $X = Y = \frac{2}{3}$, le difféomorphisme β donné par

$\beta(X, Y, Z) = (Z + \frac{1}{3}, X, Y + \frac{1}{3})$ permute les cercles d'attachement et les trivialisations des anses : il s'étend à Q .) En conjuguant α_1 et α_2 par des puissances de β , on réalise toutes les matrices élémentaires et donc par composition tout $SL(n, \mathbb{Z})$. Le lemme suit alors de ce que tout difféomorphisme du tore T^3 préservant l'orientation est isotope à un difféomorphisme linéaire de $SL(n, \mathbb{Z})$ (voir les exercices de l'appendice B). \square

PROPOSITION 2. La variété Q décrite dans la démonstration de la proposition 1 admet un plongement dans N_1^4 telle que le complémentaire $N_1^4 - Q$ soit un plombage E_8 défini négatif.

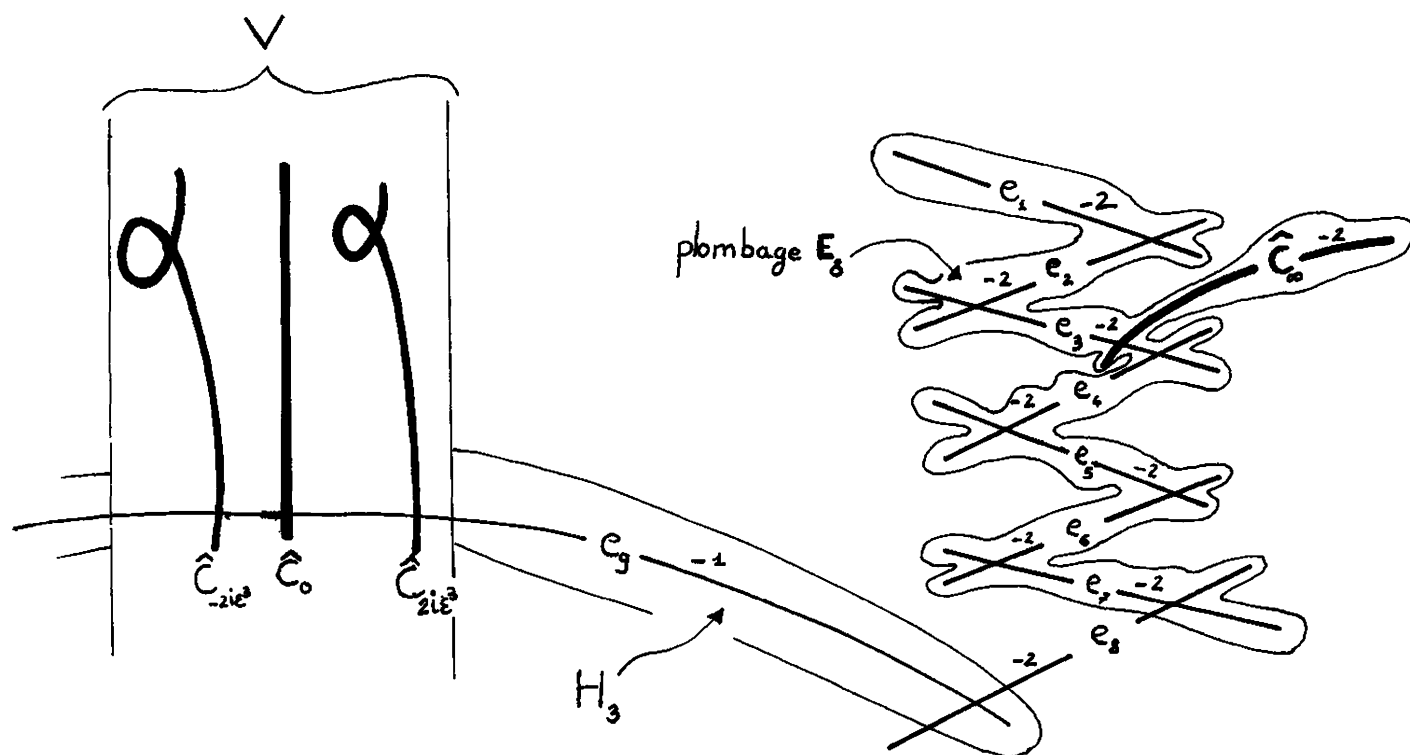
COROLLAIRE. Le bord intérieur $\partial_- Q$ de Q est une sphère de Poincaré.

Démonstration de la proposition 2. Il s'agit d'étudier explicitement un pinceau particulier.

Soient $\epsilon > 0$ fixé et t dans \mathbb{C} ; considérons le polynôme $f_{\epsilon t}(x) = x^3 + 3\epsilon^2 x - t$. Pour $t \neq \pm 2i\epsilon^3$, ce polynôme a trois racines distinctes. Si $t = t_0$ est réel, une des racines x_{t_0} est réelle, les deux autres x_{t_0+} et x_{t_0-} sont complexes ($\text{Im}(x_{t_0+}) > 0$). Quand t parcourt le segment $[t_0, \pm 2i\epsilon^3]$, les racines x_0 et x_{\pm} vont se confondre.

Considérons le pinceau des cubiques $C_{\epsilon t}$ d'équation $F_{\epsilon t}(X, Y, Z) = ZY^2 - X^3 - 3\epsilon^2 Z^2 X + tZ^3$, ou, en coordonnées affines, $y^2 = x^3 + 3\epsilon^2 x - t$. Le nombre ϵ étant fixé, posons $C_t = C_{\epsilon t}$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, par exemple $t_0 = 1$, et γ_{0+} et γ_{0-} les deux courbes de C_{t_0} définies par $\gamma_{0\pm} = \{(x, y, 1) \in C_{t_0} \mid x \in [x_{t_0}, x_{t_0\pm}]\}$. Ce qui précède prouve que γ_{0+} et γ_{0-} sont deux cycles évanescents formant une base de $H_1(C_{t_0})$ et allant mourir sur les courbes singulières $C_{2i\epsilon^3}$ et $C_{-2i\epsilon^3}$. Les 9 points fixes du pinceau sont au-dessus du point à l'infini $(0, 1, 0)$ sur l'axe des y et forment une chaîne linéaire de points infiniment proches; soient e_1, \dots, e_9 les diviseurs exceptionnels correspondants. Les fibres singulières de $\varphi: \hat{\mathbb{CP}}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ sont : $\varphi^{-1}(-2i\epsilon^3) = \hat{C}_{-2i\epsilon^3}$, $\varphi^{-1}(2i\epsilon^3) = \hat{C}_{2i\epsilon^3}$ et $\varphi^{-1}(\infty) = \hat{C}_{\infty} \bigcup_{i=1}^8 e_i$

et l'on a dans $\hat{\mathbb{CP}}^2$ la configuration suivante :



Le complémentaire de Q dans $\hat{\mathbb{C}P}^2$ est un voisinage régulier de $\hat{C}_\infty \bigcup_{i=1}^7 e_i$, c'est un plombage E_8 défini négatif. \square

Remarque. Le lecteur pourra faire tendre ϵ vers 0 dans les constructions précédentes et reconnaître la sphère de Poincaré sous les trois manifestations suivantes :

- bord d'un plombage E_8 ,
- $\partial_- Q$,
- résultat de la chirurgie d'indice 1 sur le noeud de trèfle

$$k = \{(x, y) \mid y^2 = x^3\} , \text{ où } S^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\} .$$

Pour que les orientations coïncident, il faut prendre un plombage E_8 défini positif (dans $\mathbb{C}P^2$ la variété Q et le plombage E_8 défini négatif sont de part et d'autre de leur bord commun).

Les surfaces d'Enriques et K3 .

Une surface d'Enriques est une surface elliptique obtenue en faisant deux transformations logarithmiques d'ordre 2 sur deux fibres lisses de la surface elliptique $\varphi: \hat{\mathbb{C}P}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ obtenue à partir d'un pinceau de cubiques (voir par exemple Griffith-Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience, p. 594-600).

Supposons que les deux fibres C_+ et C_- sur lesquelles on va faire les transformations logarithmiques soient dans un voisinage en produit autour d'une courbe lisse C_0 que l'on a supposé trivialisé de la forme $C_0 \times 2D^2$ de façon à ce que C_\pm corresponde à $C_0 \times \pm 1$ (ici $aD^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$). Les deux transformations logarithmiques ont pour effet de remplacer $C_0 \times 2D^2$ par

$R = C_0 \times (2D^2 - \frac{1}{2}D^2) / (x, y) \sim (x + \tau, y^{-1})$, où τ est un élément d'ordre 2 dans le groupe de la courbe elliptique C_0 ; en identifiant C_0 à T^2 , on peut prendre $\tau = (\frac{1}{2}, 0)$.

Ceci donne la décomposition suivante de la surface d'Enriques : $E = N_1^4 \cup R$.

Remarque. En faisant opérer sur $C_0 \times D^2$ des difféomorphismes de monodromie, on peut changer à volonté l'élément τ . Cet argument de monodromie était d'ailleurs implicitement utilisé quand on a écrit que les transformations logarithmiques sur C_+ et C_- correspondent au même τ lorsque l'on identifie C_+ et C_- avec C_0 à l'aide de la trivialisatation du tube $C_0 \times 2D^2$.

Le revêtement double d'une surface d'Enriques est une surface K3; sur notre exemple, elle est difféomorphe à

$$K = N_1^4 \cup C_0 \times (2D^2 - \frac{1}{2}D^2) \cup N_1^4 \cong N_1^4 \cup_{\psi} N_1^4,$$

où le difféomorphisme de recollement $\psi : T^3 = \partial N_1^4 \rightarrow \partial N_1^4 = T^3$ est donné par $\psi(x, y, z) = (x + \frac{1}{2}, y, -z)$.

Remarque. Si on recolle au moyen de $\psi' : T^3 = \partial N_1^4 \rightarrow \partial N_1^4 = T^3$, $\psi'(x, y, z) = (x, y, z)$, on remarque que l'on obtient la même variété $K^{(+)}$ mais que celle-ci est un revêtement de $\widehat{\mathbb{CP}}^2$ ramifié sur deux fibres lisses : c'est la résolution du revêtement double de \mathbb{CP}^2 ramifié sur la réunion de deux cubiques lisses. Le lecteur est invité à montrer qu'elle est difféomorphe au revêtement double de \mathbb{CP}^2 ramifié sur une sextique lisse et plus généralement à trouver des difféomorphismes explicites entre les exemples de surfaces K3 algébriques qu'il a rencontrées.[‡] (Pour de tels exemples, voir les chapitre VIII et IX (et surtout leurs exercices) du livre de Beauvillé, Surfaces algébriques complexes, Astérisque n° 54.)

(+) ψ' est isotope à ψ ; d'ailleurs la proposition 1 permet de remplacer ψ par n'importe quel difféomorphisme de degré -1 .

(‡) On sait grâce à la théorie des périodes des surfaces K3 que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes.

1. CERCLES DE POINTS DOUBLES D'UNE IMMERSION GNERIQUE

La partie la plus importante des commentaires sur le troisième article est l'explication de la méthode de Kneser pour lisser les cycles combinatoires de codimension inférieure ou égale à deux dans une variété.

Nous nous contentons ici d'explicitier les modèles pour les cercles de points doubles d'immersions génériques que Rohlin utilise pour "éliminer ces points doubles".

Rohlin prend une variété orientée M^3 de dimension trois. Pour montrer qu'elle borde une variété orientée W^4 de dimension quatre, il considère une immersion générique $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ et introduit, près des cercles de points doubles, les modifications ϕ_1 et ϕ_2 lui permettant de construire une variété N^3 cobordante à M , et possédant un plongement dans \mathbb{R}^5 . La variété N peut être triangulée comme sous-polyèdre de \mathbb{R}^5 ; le fait qu'elle borde résultera alors de la méthode de Kneser-Rohlin appliquée à la trace X d'une contraction de N en l'origine de \mathbb{R}^5 :

$$X = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid \exists x \in N, t \in [0,1] \text{ tel que } y = tx\}.$$

Cette trace X est une chaîne polyédrale de codimension un dans \mathbb{R}^5 et de bord homologique $\partial X = N$. Le théorème de Rohlin-Kneser (théorème 3 du chapitre suivant) permet de remplacer X par une sous-variété W de \mathbb{R}^5 de bord N .

La modification ϕ_2 n'a pas de mystère : c'est une simple "chirurgie ronde plongée, d'indice un" (Rohlin utilise implicitement son analogue en dimension quatre lorsqu'il calcule Ω_4 dans le quatrième article); la modification ϕ_1 est moins connue. Nous analyserons donc les cercles de points doubles ; nous décrirons explicitement des modèles plongés des modifications ϕ_1 et ϕ_2 et remarquerons que le cas qui conduit à la modification la plus subtile ϕ_1 ne peut se produire en dimension quatre, ce qui explique que, quand il calcule Ω_4 dans le quatrième article, Rohlin considère triviale cette partie de la démonstration, alors qu'il y consacre l'essentiel de la rédaction du troisième article.

§1. CERCLES DE POINTS DOUBLES D'IMMERSIONS GÉNÉRIQUES.

Soit $f: M^{n+1} \rightarrow V^{2n+1}$ une immersion générique ⁽⁺⁾ entre deux variétés closes orientées de dimension $n+1$ et $2n+1$ respectivement.

L'ensemble singulier Σ de f est une collection de cercles sur laquelle la restriction de f , $f|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow f(\Sigma)$, est un revêtement double (explicitement $\Sigma = \{x \in M \mid \exists x' \neq x, f(x') = f(x)\}$).

Soit c une composante connexe de $f(\Sigma)$ que l'on identifie à $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \cong [0, \pi]/0 \sim \pi$. Soit T une tranche transverse au cercle c en le point paramétré par $0 = \pi$. Il y a un voisinage $\mathcal{U}(c)$ dans la variété V tel que si on le découpe le long de la tranche T , on obtient une variété $\mathcal{U}^T(c)$ difféomorphe au produit $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; de plus, l'image réciproque $f^{-1}(f(M) \cap \mathcal{U}^T(c))$ est difféomorphe à $\{0, 1\} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^n$, l'application f étant donnée dans ces cartes par la formule $f(u, t, x) = (t, ux, (1-u)x)$, $u \in \{0, 1\}$, $t \in [0, \pi]$, $x \in \mathbb{R}^n$ (la composante " $u = 0$ " va sur le "facteur vertical" $[0, \pi] \times 0 \times \mathbb{R}^n$ de $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la composante " $u = 1$ " allant sur le "facteur horizontal" $[0, \pi] \times \mathbb{R}^n \times 0$ (voir la figure 1)).

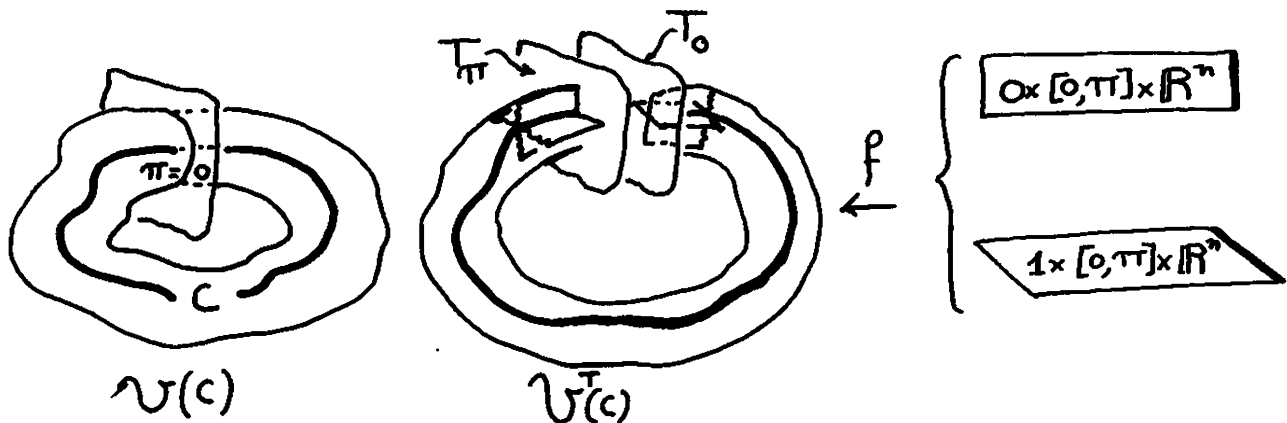


Figure 1

Remarquons que, comme la variété M est orientable, le cercle $f^{-1}(c)$ a un voisinage en produit dans M et les identifications sur le bord de la carte $\{0, 1\} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^n$ pour obtenir un voisinage de $f^{-1}(c)$ peuvent être choisies comme :

(+) Une immersion $f: M^{n+1} \rightarrow V^{2n+1}$ est générique si pour deux points distincts x et x' de M tels que $f(x) = f(x')$, les images $Tf_x(T_x M)$ et $Tf_{x'}(T_{x'} M)$ par l'application tangente à f des espaces tangents en x et x' sont transverses dans $T_{f(x)} V$, l'espace tangent à V en $f(x) = f(x')$.

- (*) 1) $(u, \pi, x) \sim (1-u, 0, x)$ si le revêtement f_1 est non trivial sur c .
 2) $(u, \pi, x) \sim (u, 0, x)$ sinon.

Les identifications qui produisent $\nu(c)$ à partir de $\nu^T(c)$ sont alors :

cas 1) $(\pi, y, z) \sim (0, z, y)$

cas 2) $(\pi, y, z) \sim (0, y, z)$.

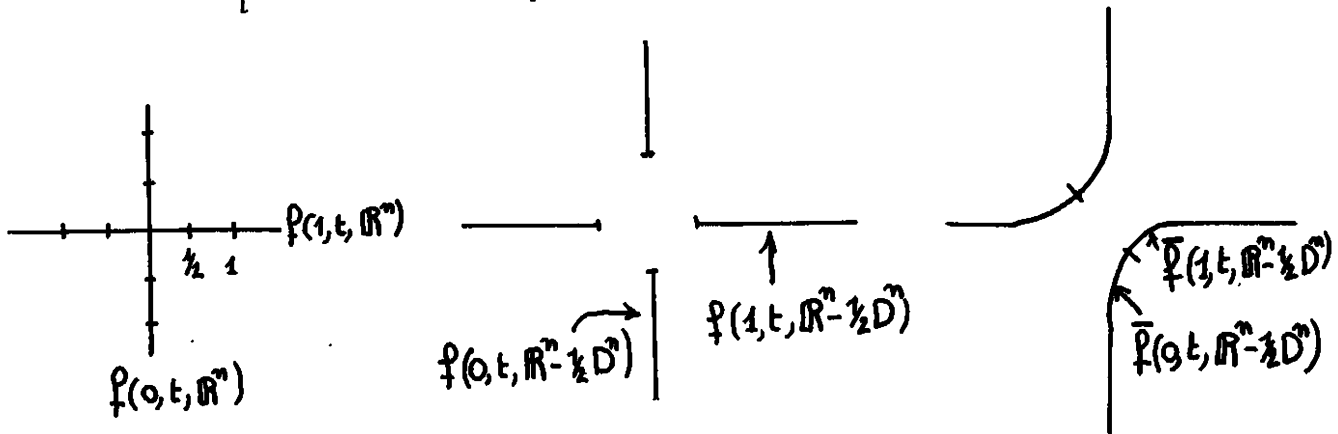
Dans les deux cas l'application f est donnée par : $f(u, t, x) = (t, ux, (1-u)x)$.

Dans le cas 1), la monodromie de recollement de $\nu^T(c)$ est l'application $(y, z) \rightarrow (z, y)$ qui échange les coordonnées du produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; comme la variété ambiante V est orientable, cette monodromie conserve l'orientation et la codimension n de l'immersion doit être paire : nous avons établi que le cas 1) ne peut se produire que si la dimension de la variété M est impaire.

Précisons que les coordonnées ci-dessus ont été choisies dans l'orientation de la variété M ^(†).

§2. LA VERSION AMBIANTE DES MODIFICATIONS Θ_1 et Θ_2 de ROHLIN.

L'idée des modifications Θ_1 et Θ_2 est de faire une élimination dépendant continuellement du point t de c de la singularité de point double isolé formée par $f(M)$ dans une tranche T_t normale à c au point t (figure 2).



Les modifications Θ_1 et Θ_2 vues dans une tranche T_f

Figure 2

(†) Si l'on veut tenir compte de l'orientation de la variété ambiante V , il faudra distinguer dans chacun des cas ci-dessus deux sous-cas suivant que les coordonnées produites donnent ou non l'orientation de V . Comme l'orientation de V ne joue aucun rôle ici (seule son orientabilité a été utilisée pour montrer que si M est de dimension paire seul le 2e cas se produit), nous n'entrerons pas dans cette distinction plus fine.

Précisément, Rohlin enlève à la variété M les tores solides K_i correspondant aux points dont la coordonnée x vérifie $|x| \leq \frac{1}{2}$ (un seul tore dans le cas 1) et deux dans le cas 2)) ; il produit alors un plongement de la variété N obtenue par identification sur le bord de $M - \overset{\circ}{K}$ en remplaçant, sur $M - \overset{\circ}{K}$, l'immersion f par le plongement g . En notant, pour $m \in f^{-1}(v(c))$, $m = (u, t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, le plongement g est défini par :

$$1) \text{ Si } m \notin f^{-1}(v(c)) \text{ ou } |x| \geq 1, \quad g(m) = f(m).$$

$$2) \text{ si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \quad \begin{aligned} g(0, t, x) &= (t, \varphi(|x|)(-x_1, x_2, \dots, x_n), x) \\ g(1, t, x) &= (t, x, \varphi(|x|)(-x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

où $\varphi: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une application C^∞ telle que :

$$\begin{cases} \varphi(\frac{1}{2}) = 1; \varphi'(\frac{1}{2}) = -1; \varphi^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0 \text{ pour } n \geq 2; \\ \varphi(1) = 0; \varphi^{(n)}(1) = 0 \text{ pour } n \geq 1; \\ \varphi'(t) < 0 \text{ pour } t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{voir la figure 3})$$

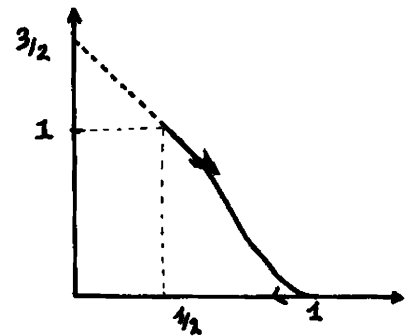


Figure 3 : le graphe de φ

Pour $|x| = \frac{1}{2}$, l'application g identifie $(u; t; x_1, x_2, \dots, x_n)$ à $(1-u; t; -x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ce sont les identifications qui produisent la variété N .

Pour ceux qui préfèrent des équations implicites, donnons, dans le cas $n = 2$, l'équation suivante de la partie d'un plongement de N se trouvant dans la carte $v(c)$:

$$0 = F(t, y, z) = y \cdot z + \varphi(|y|^2 + |z|^2)$$

(où on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et prolonge φ par : $\begin{cases} \varphi(t) = 3/2 - t \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1 \end{cases}$)

Le point de vue "anses rondes" et "anses rondes tordues" qui résulte des formules et des dessins ci-dessus nous permet de voir que les modifications Θ_1 et Θ_2 conservent la classe de cobordisme orienté de M :

Pour Θ_2 , il suffit d'ajouter à $M \times I$ une "anse ronde" $H = [0, 1] \times [0, \pi] \times D^n / (u, 0, x) \sim (u, \pi, x)$ en identifiant les points de H paramétrés par $(0, t, x)$ et $(1; t; x_1, x_2, \dots, x_n)$ aux points de $M \times 1$ paramétrés par $((0; t; x); 1)$ et $((1; t; -x_1, x_2, \dots, x_n); 1)$.

Pour la modification Θ_1 , on fait la même chose avec l'"anse ronde tordue" $\tilde{H} = [0, 1] \times [0, \pi] \times D^n / (u; 0; x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (1-u; \pi; -x_1, x_2, \dots, x_n)$: c'est une variété orientable et l'image de la partie $\partial([0, 1]) \times [0, \pi] \times D^n / \sim$ du bord de \tilde{H}

sur laquelle se fait le recollement est connexe ; on a donc bien un cobordisme orienté.

§3. LES FORMULES DE ROHLIN.

Rohlin utilise le même cobordisme : la variété qu'il nomme W^4 est le fibré tordu en disques, ayant une section, sur la bouteille de Klein B^2 ; la variété Q^3 est la restriction de ce fibré à une courbe unilatérale de B^2 : la variété W^4 découpée le long de Q^3 est un fibré en disques sur le ruban de Möbius M^2 ; c'est notre anse tordue \tilde{H} (avec nos coordonnées, la fibration est l'application $\pi : \tilde{H} \rightarrow M^2$ donnée par :

$$\pi(u; t; x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (u, x_1) ,$$

où on prend $[0, 1] \times D^1 / (1, x) \sim (0, -x)$ comme modèle pour la bande de Möbius M^2 , et on prend le carré $D^1 \times D^1$ comme modèle du disque D^2 co-âme de \tilde{H}). La variété W^4 découpée le long de Q^3 est un cobordisme orienté entre le bord d'un voisinage régulier de Q^3 : un tore solide, et le fibré en cercles associé au fibré en disques sur M^2 .

Le jeu que Rohlin effectue avec les coordonnées angulaires consiste à montrer que le fibré en cercles associé à ce fibré en disque est difféomorphe au fibré non trivial en intervalles sur la bouteille de Klein (par lequel on remplace le tore K de la variété M pour former N). Ce fait se voit directement :

Soit en remarquant qu'un fibré (en cercles) sur la bande de Möbius M est un voisinage régulier de sa restriction à l'âme de M ; ici cette restriction est une bouteille de Klein dont un voisinage régulier dans le fibré (en cercles) non trivial sur la bande de Möbius est un fibré non trivial en intervalles.

Soit en considérant les deux espaces comme fibrés, non triviaux et d'espace total orientable, en anneaux sur le cercle. (Il suffit de composer les fibrations définissant ces espaces avec les fibrations $M^2 \rightarrow S^1$ et $B^2 \rightarrow S^1$ respectivement.). Sur notre modèle, la fibration sur la bouteille de Klein B^2 est $(u, t, x) \mapsto (t, x)$ (cas $n = 2$ de notre modèle).

2. LA METHODE DE KNESER POUR LISSER LES CYCLES D'UNE VARIETE COMBINATOIRE

Une tentative de démonstration combinatoire de $\Omega_4 = \mathbb{Z}$

INTRODUCTION.

La courbe C_0 d'équation $x.y = 0$ a une singularité isolée et peut être approchée par des courbes lisses C_ϵ d'équation $x.y = \epsilon$. La méthode de Kneser ($[K]$) que nous allons présenter est une généralisation de cette déformation de lissage au cas où, au lieu d'avoir des singularités isolées de variétés algébriques, on a seulement un sous-polyèdre d'une variété combinatoire qui vérifie certaines hypothèses homologiques.

Enonçons l'un des résultats que l'on obtient par cette méthode.

THEOREME 2. Soit K^n un sous-complexe fini orienté ⁽⁺⁾ de dimension n d'une variété triangulée M^{n+1} de dimension $n+1$. On suppose que la chaîne \bar{K} définie par les n simplexes (orientés) de K est un cycle à coefficients entiers. Alors, il existe une subdivision de M et un sous-complexe N de cette subdivision qui est une sous-variété orientée localement plate de M et homologue sur les entiers au cycle \bar{K} .

Dans le cas où M est orientable, on montre aujourd'hui ce théorème en utilisant la transversalité de Thom: Le dual pour Poincaré de l'élément de $H_n(M, \mathbb{Z})$ défini par le cycle K est un élément de $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z})$ (si M est non compacte, la remplacer par un voisinage compact de K), on représente alors ce dernier élément par une application f de M sur le cercle S^1 , constante sur le bord ∂M et transverse à un point de S^1 (distinct de $f(\partial M)$). Remarquons que dans le cas où la variété M n'est pas orientable, une "démonstration moderne" de ce théorème n'est pas aussi aisée, alors qu'il ne suffit que de très légères modifications de la méthode de Kneser ($[K]$) qui

(+) Chaque simplexe de dimension maximale n est muni d'une orientation.

date de 1924) pour attraper, dans tous les cas (que la variété M soit orientable ou non), le théorème de lissage cohomologique : tout élément de $H^1(M; \mathbb{Z})$ se représente par une sous-variété de codimension un, plate et transversalement orientée.

Mais l'intérêt d'exposer cette méthode aujourd'hui est autre. Rohlin, dans l'article ([R]) où il montre que le groupe de cobordisme des variétés orientables de dimension trois est nul, énonce une méthode de Kneser à bord qui peut être vue comme le commencement d'une "machine combinatoire" de Kneser qui permettra de lisser les cycles de codimension deux ; il est naturel d'essayer de poursuivre ; on se trouve bloqué à l'étape suivante, mais on récolte une démonstration du calcul du groupe de cobordisme Ω_4 semblable à celle de $\Omega_3 = 0$. Cependant, nous ne réussirons pas à donner une démonstration combinatoire du théorème de Rohlin, et devrons soit nous restreindre aux variétés différentiables, soit utiliser le théorème de Wall d'unicité des fibrés normaux PL en codimension deux ; mais ce théorème n'a pas de démonstration satisfaisante (on utilise le théorème de Schönflies en petite dimension, la théorie des anses de Smale en grande dimension, et on a besoin du théorème de Cerf : $\text{Diff}(S^3)$ est connexe, pour faire le pont !). Nous noterons que le théorème de Rohlin implique le théorème de Wall élémentairement (par des arguments qui sont les mêmes pour toutes les dimensions) et demandons donc une démonstration combinatoire et élémentaire dans le sens précédent du théorème de Rohlin.

Au paragraphe 1, nous exposerons la construction fondamentale. Le paragraphe 2 est consacré à l'analogue non orientable du théorème 2 énoncé ci-dessus ; le théorème 2 sera démontré au paragraphe 3. Le théorème de Rohlin (lissage, en fixant le bord, d'un polyèdre K , orienté, dont le bord homologique est une sous-variété localement plate de codimension deux) sera "établi" au paragraphe 4 ; ce résultat permettra, dans le paragraphe 5, d'établir l'analogue du théorème 2 en codimension 2. Le paragraphe 6 sera consacré à la difficulté technique, signalée plus haut, rencontrée dans la preuve du théorème de Rohlin ; nous échouons au paragraphe 7 en tentant de généraliser le théorème de Rohlin en codimension deux, mais récupérerons la démonstration de $\Omega_4 = \mathbb{Z}$ annoncée plus haut. Nous terminerons enfin par des exercices indiquant, entre autres, comment obtenir les résultats sur $H^1(M, \mathbb{Z})$, $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H^2(M, \mathbb{Z})$ en utilisant la méthode de Kneser.

§ 1. LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE

Commençons par rappeler certaines notions de topologie combinatoire. Soit σ un simplexe d'un complexe simplicial K . Le site de σ dans K (ou l'étoile de σ dans K , en anglais star) est le sous-complexe de K formé de toutes les faces des simplexes dont σ est une face, on le note $St(\sigma, K)$. La lice de σ dans K (en anglais link) est le sous-complexe formé des faces, disjointes de σ , des simplexes dont σ est une face, on la note $L(\sigma, K)$. Si K' désigne la première subdivision barycentrique de K et σ_i sont les simplexes de plus grande dimension de $\sigma' = \sigma \cap K'$, toutes les lices $L(\sigma_i, K')$ sont égales, on note cette lice commune $L(\sigma, K')$; la réunion des sites $St(\sigma_i, K')$ forme le site de σ dans K' que l'on note $St(\sigma, K')$.

Nous utiliserons les faits connus suivants :

- (1) Le site de σ dans K' est isomorphe au joint de σ et de la lice de σ dans K' : $St(\sigma, K') \cong \sigma * L(\sigma, K')$ (l'isomorphisme est simplicial si σ est triangulé par $\sigma \cap K'$). Il en résulte que la frontière du site de σ dans K' est isomorphe au joint du bord de σ et de la lice de σ dans K' :

$$\partial St(\sigma, K') \cong \partial \sigma * L(\sigma, K') .$$

- (2) Un sous-complexe K^n d'une variété combinatoire M^{n+q} est une sous-variété localement plate de M si et seulement si pour tout simplexe σ^p de K la paire de lices $(L(\sigma, M), L(\sigma, K))$ est une paire de sphères dénouée (de dimension $(n-p-1+q, n-p-1)$).

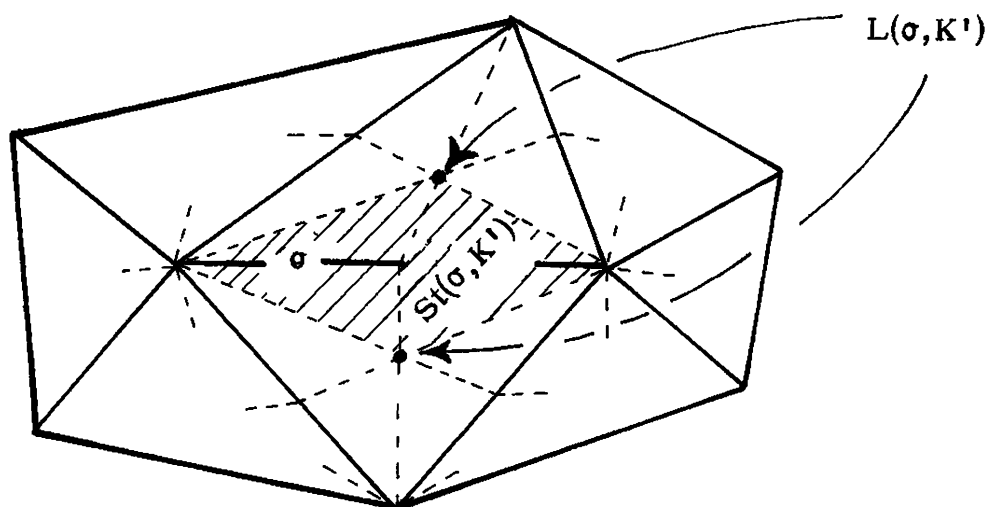


Figure 1 . Site et Lice

Soit K^n un sous-complexe de dimension n d'une variété triangulée M^{n+q} de dimension $n+q$. Nous dirons que K a des singularités de codimension c si $K - K^{[n-c]}$ est une sous-variété localement plate de M ($K^{[n-c]}$ désigne le $n-c$ squelette du complexe K). Cette propriété se traduit techniquement de la manière suivante :

Pour tout i , $0 \leq i \leq c$, et tout $n-i$ simplexe σ^{n-i} de K , la paire des lices de σ dans M' et K' ($= K \cap M'$), $(L(\sigma, M'), L(\sigma, K'))$ est PL isomorphe à la paire standard de sphères dénouées (S^{i-1+q}, S^{i-1}) . Un simplexe pour lequel cette propriété est violée est dit singulier.

Nous pouvons maintenant présenter la construction fondamentale :

Soit σ un $(n-c)$ simplexe d'un sous-complexe ayant des singularités en codimension c . La liche $L(\sigma, K')$ est alors une sous-variété localement plate V^{c-1} de dimension $c-1$ de la liche $L(\sigma, M')$ qui est une sphère de dimension $q+c-1$ ^(†).

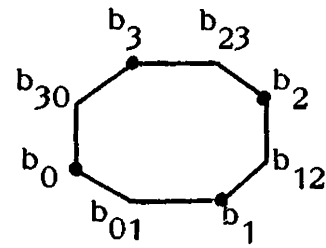
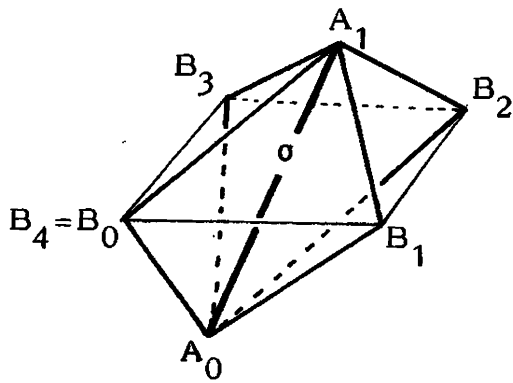
Si la liche V borde W^c une sous-variété localement plate de la sphère $L(\sigma, M')$, Kneser élimine la singularité du complexe K en remplaçant K par :

$$K_1 = K - \text{St}(\sigma, K') \cup \partial\sigma * W \quad (\text{voir la figure 2}).$$

Désignons par M_1 une subdivision de M qui triangule K_1 comme un sous-complexe. Hors du site $\text{St}(\sigma, M')$ le complexe K_1 , tout comme K , a des singularités en codimension c . Sur $\text{St}(\sigma, M') - \partial\sigma$, K_1 est une sous-variété localement plate ^(‡). Donc, les seuls simplexes τ qui peuvent voir leur paire de liche $(L(\tau, M'_1), L(\tau, K'_1))$ modifiée sont ceux de $\partial\sigma$, mais ils sont de codimension $c+1$. Bien sûr, pour gagner quelque chose, il faut effectuer cette modification simultanément sur tous les $n-c$ simplexes singuliers de K , ce qui peut se faire en ayant pris soin de subdiviser une fois de plus (pour tous les simplexes σ^{n-c} de $K^{[n-c]} \cap K'$, les sites $\text{St}(\sigma, K')$ n'ont en commun que des points de $\partial\sigma$).

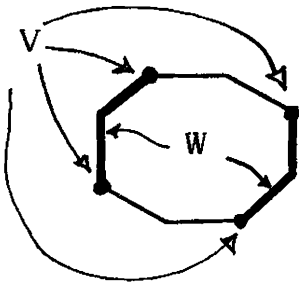
(†) Démonstration de cette affirmation : soient τ^j un j simplexe de $V = L(\sigma, K)$ et $\bar{\tau}$ le $(n-c+j+1)$ simplexe du site $\text{St}(\sigma, K')$ dont τ est la face opposée à σ . La paire de lices $(L(\tau, L(\sigma, M')), L(\tau, L(\sigma, K')))$ est simplicialement isomorphe à la paire $(L(\bar{\tau}, M'), L(\bar{\tau}, K'))$ qui est dénouée car K est singulier en codimension c et $\bar{\tau}$ est hors de $K^{[n-c]}$ ($\dim \bar{\tau} = n-c+j+1 \geq n-c+1$ car $j \geq 0$).

(‡) car $W \cap K = \partial W = V$ puisque $\text{St}(\sigma, M') \cap K = \text{St}(\sigma, K')$ (c'est pour avoir cette propriété que l'on a travaillé dans la première subdivision barycentrique).



σ est le segment A_0A_1 ; $St(\sigma, M)$ est l'octaèdre union des quatre tétraèdres $A_0A_1B_iB_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) ; $St(\sigma, K)$ est l'union des quatre triangles $A_0A_1B_i$.

$L(\sigma, M')$ est un octogone
 $(b_{i,i+1})$ est le barycentre de $A_0A_1B_iB_i$
 b_i est le barycentre de $A_0A_1B_i$
 $L(\sigma, K')$ est formé des quatre points b_0, b_1, b_2, b_3 .



W est l'union des segments $b_1b_{12}b_2$ et $b_3b_{30}b_0$

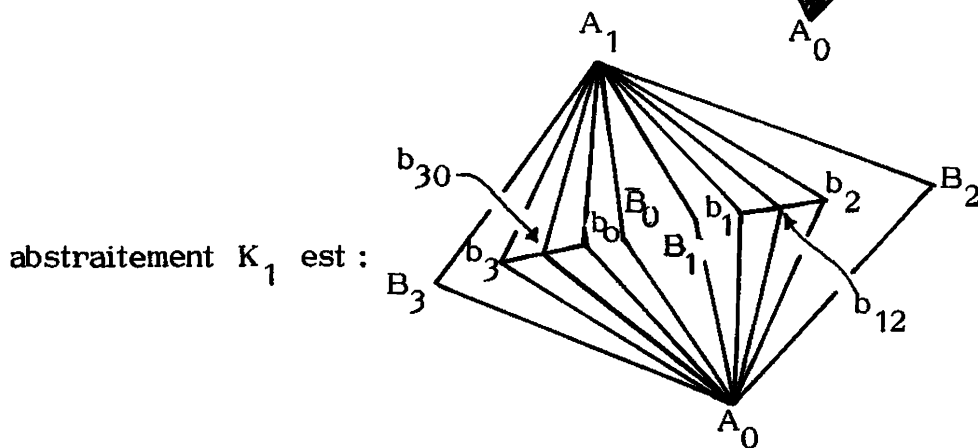
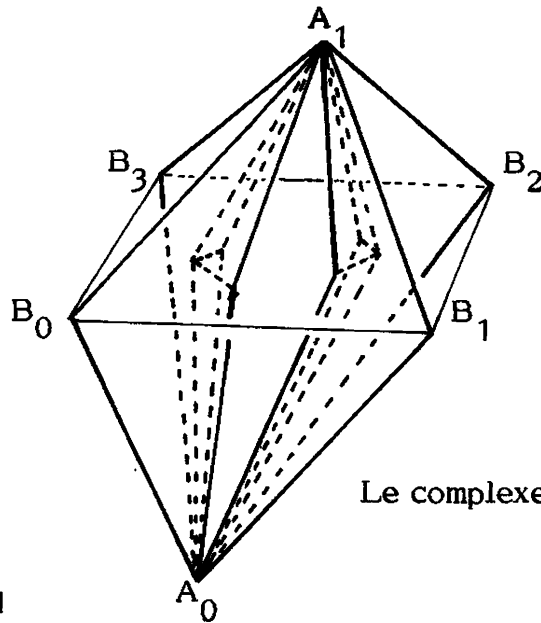


Figure 2. La construction fondamentale dans un cas où $n = 2, q = 1, c = 1$.

Remarquons le lien entre cette construction et la déformation C_ϵ de l'introduction : Si une hypersurface algébrique d'équation $f = 0$ possède une singularité isolée au point x , on peut prendre pour variété W la fibre de Milnor de la singularité, que l'on sait isotope à $St(x, M') \cap \{f^{-1}(\epsilon)\}$.

Tout le problème dans la suite est de trouver des hypothèses garantissant l'existence de la variété W : un problème de "surface de Seifert" pour une sous-variété localement plate de la sphère.

§ 2 . LE THEOREME DE KNESER (COEFFICIENTS ENTIERS MODULO 2)

THEOREME 1. Soit une variété de dimension $(n+1)$ M ayant une triangulation T et soit K^n un sous-complexe fini de dimension n de T qui soit un cycle modulo 2 . Alors, il y a une sous-variété localement plate N de M , homologue à K modulo deux et qui est un sous-complexe du $2n$ -ème subdivisé barycentrique $T^{(2n)}$ de T .

Démonstration. Supposons construit un sous-complexe K_i de $M_i = T^{(2i)}$ qui soit singulier en codimension $i+1$ et homologue modulo deux à K (on commence la récurrence avec $K_0 = K$ et on posera $N = K_n$).

Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ les $n-(i+1)$ simplexes de $K_i^{[n-(i+1)]} \cap K_i'$ où $K_i^{[n-(i+1)]}$ est le $n-(i+1)$ squelette de K_i et K_i' est le subdivisé barycentrique de K_i . Soit V_j la lice $L(\sigma_j, K_i'')$; elle borde une sous-variété localement plate W_j de la sphère $L(\sigma_j, M_i'')$: Si $i = 0$, puisque $K_0 = K$ est un cycle modulo deux, chaque V_j est formé d'un nombre pair de points et donc borde une réunion disjointe d'arcs W_j dans le cercle $L(\sigma_j, M_i'')$ (voir la figure 2) ; si $i > 0$, c'est parce que toute variété de codimension un disconnecte une sphère simplement connexe.

Comme les sites $St(\sigma_j, M_i'')$ ne se touchent qu'aux bords des simplexes σ_j , on peut appliquer simultanément dans les sites de tous les σ_j les modifications de Kneser pour obtenir :

$$K_{i+1} = (K_i - \bigcup_{j=1}^N St(\sigma_j, K_i'')) \bigcup_{j=1}^N \partial \sigma_j * W_j .$$

La réunion des joints $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j * W_j$ fournit une homologie modulo deux entre K_i et K_{i+1} . \square

§ 3. LE THEOREME DE KNESER (COEFFICIENTS ENTIERS)

Démonstration du théorème 2. Supposons construit un sous-complexe orienté de dimension n , K_i , d'une subdivision M_i de M qui soit singulier en codimension $i+1$ et homologue sur les entiers à K (on commence la récurrence avec $K_0 = K$ et l'on posera $N = K_n$).

Nous utiliserons les mêmes notations que dans la démonstration précédente et choisissons une orientation pour chaque $n-(i+1)$ simplexe σ_j . Comme le complexe K_i est orienté, la lice $L(\sigma_j, K_i'')$ est une sous-variété orientée V_j de codimension un de la sphère $L(\sigma_j, M_i'')$.

AFFIRMATION. Il existe une sous-variété W_j orientée, de codimension zéro de la sphère $L(\sigma_j, M_i'')$ telle que $W_j \cap V_j = \partial W_j \neq \emptyset$ et les orientations coïncident.

En effet, pour $i = 0$, puisque K est un cycle sur les entiers, V_j est formé d'un nombre pair $2k$ de points disposés sur un cercle, k d'entre eux exactement étant affectés d'une orientation positive; il y a donc un arc dans le complémentaire dont les extrémités sont d'orientations opposées. Pour $i > 0$, il suffit de prendre une composante de V_j la plus intérieure.

On effectue la modification de Kneser partielle sur les W_j en posant :

$$K_i^1 = (K_i - \bigcup_{j=1}^N \text{St}(\sigma_j, K_i'')) \bigcup_{j=1}^N \partial \sigma_j * W_j \bigcup_{j=1}^N \sigma_j * (V_j - \partial W_j).$$

La réunion des joints $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j * W_j$ fournit une homologie entre K_i et K_i^1 (voir figure 3)

Le complexe K_i^1 peut encore être singulier en codimension $i+1$, mais il est plus simple que K_i : définissons la complexité de K_i comme étant le maximum des nombres de composantes connexes de V_j , la lice $L(\sigma_j, K_i'')$, σ_j parcourant les simplexes singuliers de dimension $n-(i+1)$. Remarquons que pour toute subdivision de K_i^1 , les seuls simplexes singuliers de dimension $(n-(i+1))$ sont des simplexes $\tau^{n-(i+1)}$ qui sont inclus dans un σ_j et que, pour un tel simplexe, la lice $L(\tau, K_i^{1''})$ est PL isomorphe à $V_j - \partial W_j$, donc K_i^1 a une complexité moindre que celle de K_i et, par récurrence, on obtient K_i^k de complexité nulle et on pose $K_{i+1} = K_i^k$.

Remarquons que les théorèmes 1 et 2 admettent des formes relatives : Si le complexe K est, près d'un fermé une sous-variété localement plate (orientée pour le théorème 2), on peut imposer à la variété N d'être égale à K près de ce fermé il suffit de n'effectuer les modifications de Kneser qu'aux simplexes σ_j singuliers (ceux pour lesquels la paire de lice $(L(\sigma_j, M_i''), L(\sigma_j, K_i''))$ n'est pas une paire de sphères dénouée).

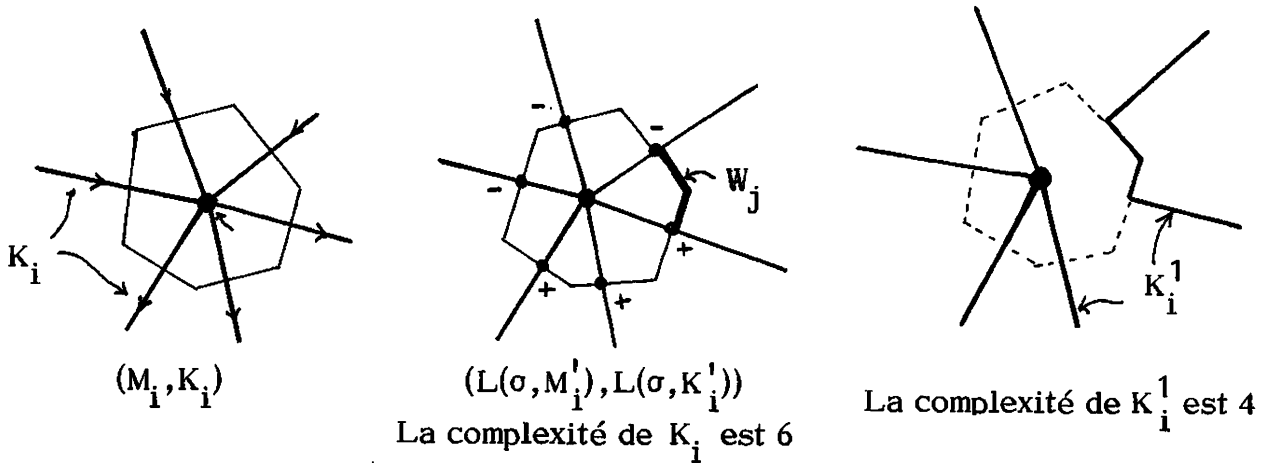


Figure 3. La modification de Kneser partielle

§ 4. LE THEOREME DE ROHLIN

THEOREME 3. Soit K^n un sous-complexe fini, orienté, de dimension n d'une variété triangulée M^{n+1} de dimension $n+1$. On suppose que le bord de la chaîne \bar{K} définie par les n simplexes orientés de K est une sous-variété localement plate Q^{n-1} de M .

Alors, il y a une subdivision de M et un sous-complexe de cette subdivision qui est une sous-variété localement plate, N , de M , de bord la sous-variété Q et homologue, modulo Q et sur les entiers à la chaîne \bar{K} .

Démonstration. Tout d'abord, nous dirons que le complexe K est singulier en codimension c si $K - K^{[n-c]}$ est une sous-variété localement plate de bord $Q - K^{[n-c]}$ cela se traduira techniquement par :

i) Pour tout $(n-i)$ simplexe de Q ($0 \leq i < c$), la lice $L(\sigma, K')$ est un disque localement plat dans la sphère $L(\sigma, M')$ de bord $L(\sigma, Q')$ (rappelons que, puisque Q est une sous-variété localement plate, cette dernière lice est une sphère dénouée).

ii) Pour les $(n-i)$ simplexes de $K - Q$ ($0 \leq i \leq c$), la même condition qu'au paravant.

Supposons construit un sous-complexe orienté K_i d'une subdivision M_i de M , singulier, en codimension $i+1$ et homologue modulo Q à K (le bord homologique de K_i est donc la sous-variété Q). Nous utiliserons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 2.

La lice $L(\sigma_j, K_i'')$ est une sous-variété localement plate et orientée V_j de la sphère $L(\sigma_j, M_i'')$, qui n'a un bord non vide que si $i \geq 1$ et si le simplexe σ_j est dans

Q , auquel cas le bord de V_j est $L(\sigma_j, K_i'' \cap Q)$ qui est une sphère dénouée S_j .

Supposons d'abord $i \geq 1$ et σ_j dans Q .

AFFIRMATION. Il y a un disque D_j de dimension i localement plat dans $L(\sigma_j, M_i'')$ de bord S_j et tel que :

a) Sur un voisinage régulier R_j de S_j , les variétés V_j et D_j coïncident.

b) Le cycle $(D_j \cup V_j) - \overset{\circ}{R}_j$ est trivial en homologie entière dans $E_j = L(\sigma_j, M_i'') - \overset{\circ}{R}_j$, l'extérieur de R_j .

Complément. a) Si σ_j n'est pas dans Q , l'affirmation est vraie pour

$D_j = R_j = \emptyset$ (vraie aussi si $i = 0$).

b) Si $i = 0$ et σ_j est dans Q , l'affirmation est vraie avec R_j un voisinage régulier de D_j .

Le complément n'est que la traduction de ce que, sur les entiers, le bord homologique de K_i est la sous-variété Q pour $i = 0$ et pour $i \geq 1$, $H_i(L(\sigma_j, M_i'')) = 0$. Pour l'affirmation, comme la sphère S_j est dénouée, elle borde un disque D_j de dimension i . Par existence de collier de S_j dans D_j et V_j , et de bicollier autour de D_j et V_j dans $L(\sigma_j, M_i'')$, on peut, dans un voisinage de S_j , interpréter D_j et V_j comme les traces de deux sections de deux fibrés normaux à S_j dans $L(\sigma_j, M_i'')$. Faisant appel au théorème de Wall ([W]) d'unicité des fibrés normaux en codimension deux, on peut, après une isotopie de D_j , supposer que les deux fibrés sont égaux et donc les deux sections diffèrent par une application de S_j dans le cercle S^1 . Comme les deux sections sont homologues sur les entiers (car D_j et V_j sont orientables), l'application de comparaison est triviale en homotopie ; les deux sections sont isotopes et l'on peut réaliser la condition a) (c'est ici que l'on utilise la condition d'orientabilité; voir dans les exercices 3b) et 3c) ce qui se passe sans la condition d'orientabilité).

Comme E_j a le type d'homotopie d'un cercle, la condition b) est automatiquement vérifiée pour $i \geq 2$, et pour $i = 1$, il suffit de faire des sommes connexes de l'arc D_j avec des cercles bords de petits disques transverses à S_j (ou si l'on préfère, enrouler D_j autour de S_j (voir la figure 4)).

Terminons, à l'aide de l'affirmation, la démonstration du théorème 3.

Soit $\check{\sigma}_j$ le barycentre du simple σ_j et $e_j = \check{\sigma}_j * L(\sigma_j, M_i'')$ la cellule duale de σ_j . Considérons $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$ ($[\frac{1}{2}, 1]$ étant la "moitié extérieure" de l'intervalle $[0, 1]$ de joint ; voir la figure 5). Dans le bord de $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$, considérons la sous-variété $T_j = (V_j \cap E_j) \times 1 \cup (V_j \cap \partial E_j) \times [\frac{1}{2}, 1] \cup (D_j \cap E_j) \times \frac{1}{2}$. Avec l'orientation

qu'elle hérite de V_j , la variété T_j borde homologiquement dans $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$, donc par la version relative du théorème 2 signalée à la fin du paragraphe précédent, T_j borde dans $E_j \times [\frac{1}{2}, 1]$ une sous-variété W_j' . Posons alors :

$$W_j = W_j' \cup (V_j - \overset{\circ}{E}_j) \times [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\text{et } K_{i+1} = K_i - \left(\bigcup_{j=1}^N \text{St}(\sigma_j, K_i'') \right) \bigcup_{j=1}^N (\partial \sigma_j * W_j) \bigcup_{j=1}^N \sigma_j * (D_j \times \frac{1}{2}) .$$

La réunion $\bigcup_{i=1}^N \sigma_j * W_j$ est une homologie entière entre K_i et K_{i+1} .

(Remarquons que, contrairement à ce qui se passe dans les théorèmes précédents, les joints $\sigma_j * W_j$ ne sont pas plongés dans $L(\sigma_j, K_i'')$ bien que les deux réunions dans la formule définissant K_{i+1} le soient.)

Signalons l'exercice 3a) où une démonstration plus naïve est présentée.

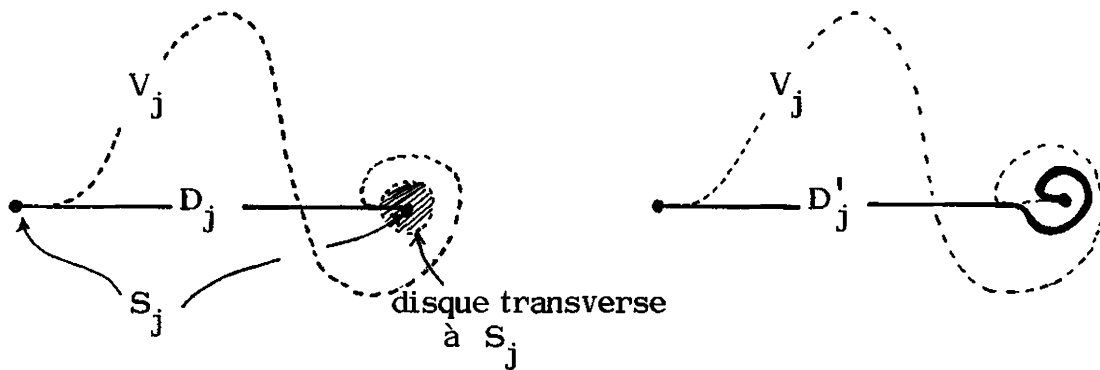


Figure 4. L'enroulement de D_j autour de S_j

COROLLAIRE. Soit Q^{n-1} une sous-variété orientée localement plate de codimension deux de M^{n+1} dont la classe fondamentale est nulle dans $H_{n-1}(Q, \mathbb{Z})$. Alors, il y a dans M une surface de Seifert S pour Q : une sous-variété S orientée de dimension n , localement plate dans M dont le bord soit Q .

Démonstration. On applique le théorème 3 à un complexe K^n qui réalise une homologie à zéro de M . \square

Remarque. Dans le cas classique où $M^{n+1} = S^3$ et Q est un enlacement orienté, on peut choisir un point x_0 dans S^3 d'où l'on voit l'enlacement Q immergé avec

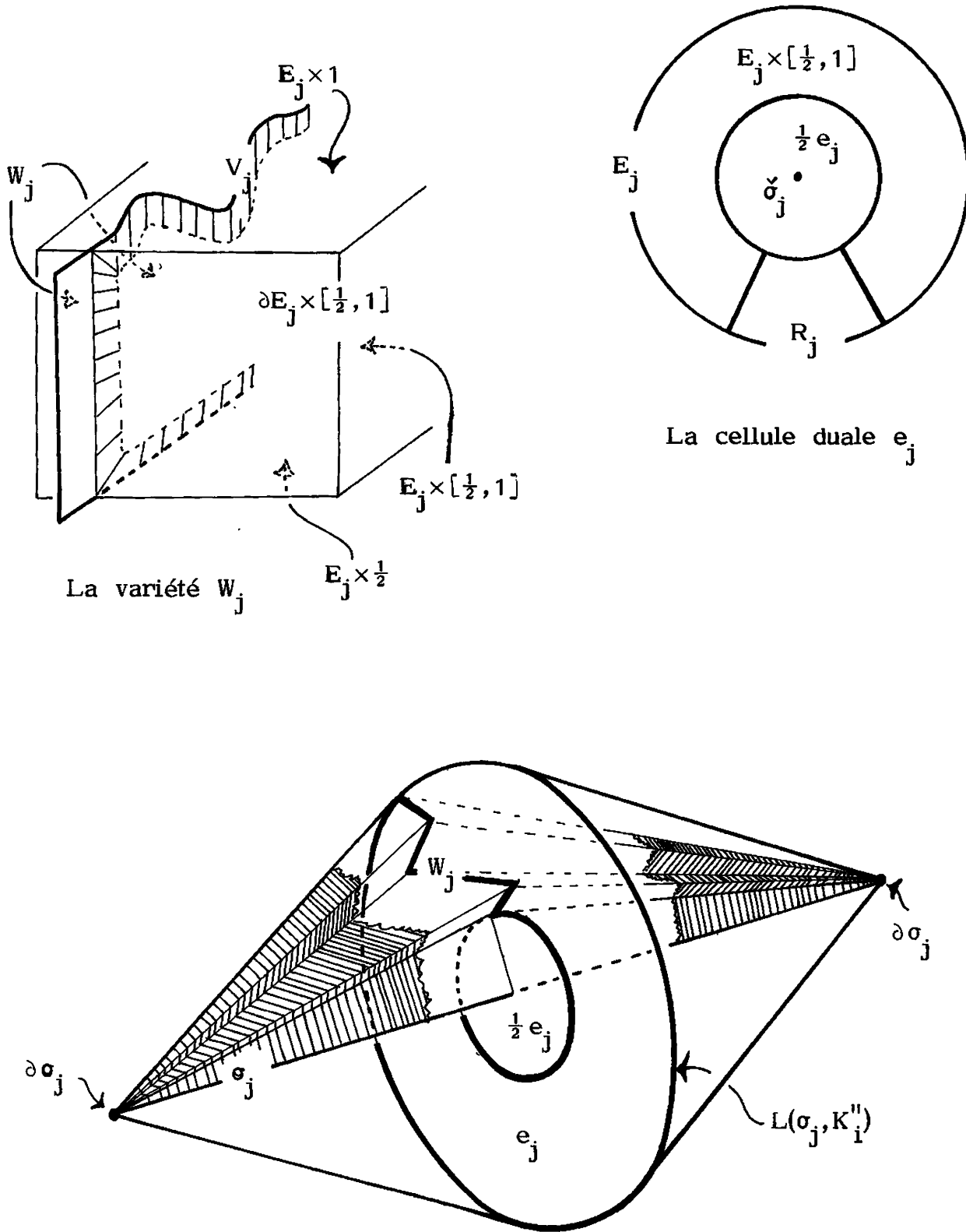
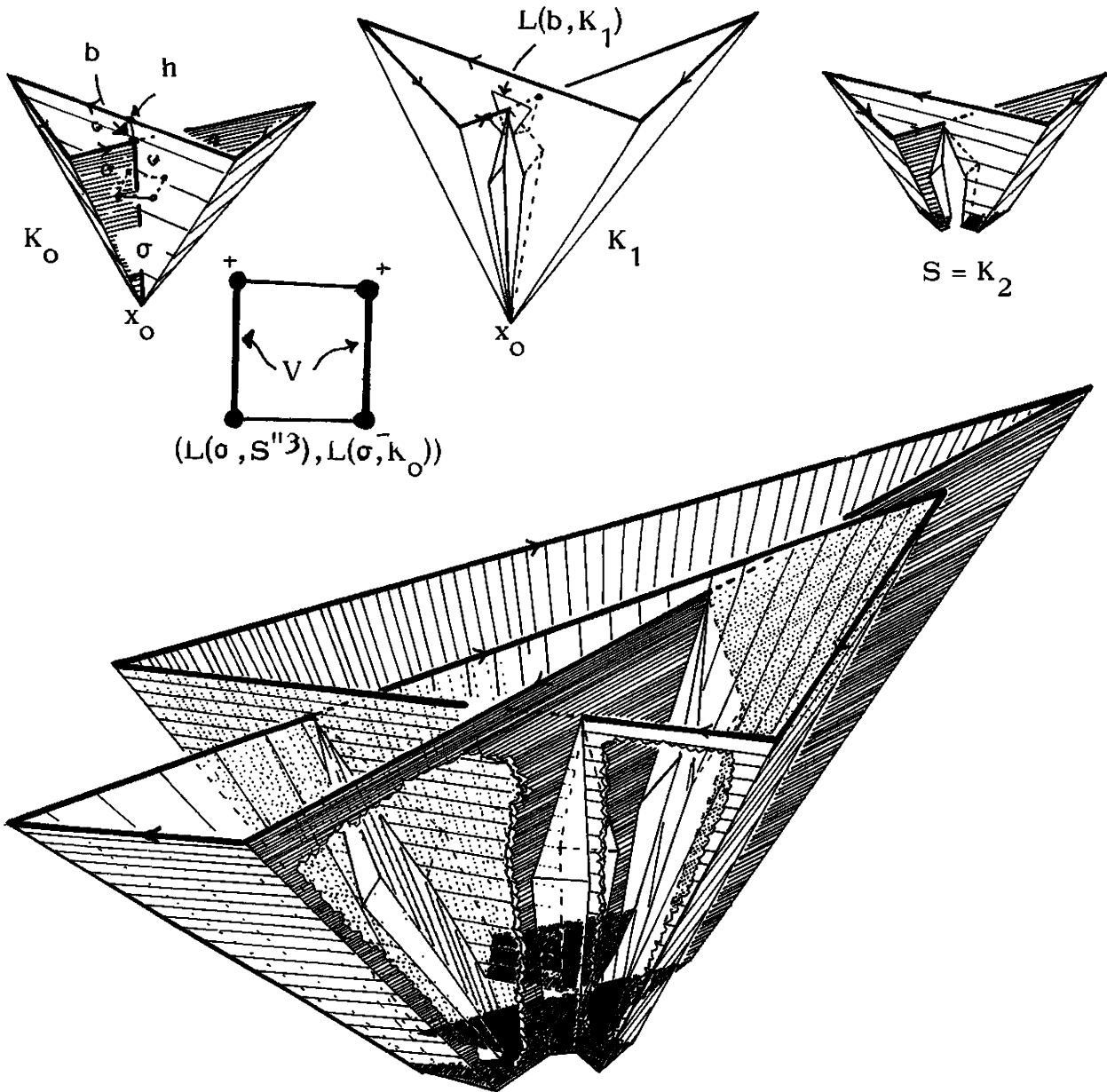


Figure 5. La construction finale de la démonstration du théorème 3.

seulement des points doubles transverses. Prenons pour K le cône sur Q issu de ce point (voir la figure 6). La démonstration se simplifie car si l'on applique aux arêtes singulières de K (qui sont hors de l'enlacement Q) la modification de Kneser (celle du théorème 2 ; comme la lice a quatre points, on peut le faire en une seule fois !), le complexe K devient une sous-variété localement plate sauf au point de cône. On lui applique la modification de Kneser et l'on obtient la première démonstration de construction de surface de Seifert due à Frankl et Pontriaguine ([FP]) ; on remarquera qu'elle donne la même surface que l'algorithme de Seifert ([S]).



On a percé deux fenêtres dans la surface de Frankl-Pontriaguine du noeud de trèfle (pour voir ce qui se passe "à l'intérieur")

Figure 6. La construction de Frankl-Pontriaguine

§ 5. LA METHODE DE KNESER EN CODIMENSION DEUX

THEOREME 4. Soit K^n un sous-complexe fini, orienté, de dimension n d'une variété triangulée M^{n+2} de dimension $n+2$. On suppose que la n -chaîne \bar{K} à coefficients entiers définie par K est un cycle.

Alors, il y a une subdivision de M et un sous-complexe N de cette subdivision qui est une sous-variété, orientée, localement plate de M , homologue sur les entiers au cycle \bar{K} .

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème 2. Nous utilisons les mêmes notations. Remarquons que, puisque le complexe K_i est orienté, une orientation du simplexe σ_j ($\in (K_i^{[n-i]})'$) détermine une orientation de la lice $V_j = L(\sigma_j, K_i'')$. Le corollaire du théorème 3 permet de construire une surface de Seifert orientée W_j pour V_j ; la suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2. \square

§ 6. RETOUR SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME DE ROHLIN

L'enchaînement des théorèmes 2, 3 et 4 semble être le début d'une récurrence pour lisser les cycles de toute codimension. On sait depuis Thom que ce rêve est impossible; il nous semble cependant intéressant de mettre en marche la "machine de Kneser" et de tirer des informations géométriques des faits qui la font caler: nous tenterons au paragraphe 7 une démonstration d'un théorème de Rohlin en codimension deux qui échouera, mais nous fournira un calcul du groupe de cobordisme Ω_4 .

Un argument du § 4 ne se généralisera pas, c'est l'utilisation du théorème de Wall. Ce paragraphe est consacré à l'étude du théorème de Wall, et à une version affaiblie du théorème de Rohlin n'utilisant pas le théorème de Wall; c'est cette version que nous généraliserons au § 7.

6.1. Une esquisse des arguments géométriques du théorème de Wall.

Par la théorie des immersions, Wall réduit son théorème au fait que si un noeud différentiable de codimension deux (S^{n+2}, Σ^n) est trivial dans la catégorie PL, il est trivial dans la catégorie différentiable (Σ^n est une variété différentiable PL isomorphe à la sphère S^n standard). Esquissons la démonstration que Wall donne de ce fait.

Par unicité des voisinages réguliers PL et le théorème de lissage de Hirsch,

un tube autour de Σ^n est difféomorphe à $S^n \times D^2$ en position standard dans S^{n+2} ; en prenant une section du tube, on trouve Σ^n et $S^n \times 1$ plongés dans $S^n \times S^1$. A l'aide d'une grande translation du revêtement infini cyclique $S^n \times \mathbb{R}$, on a deux relèvements disjoints de S^n et Σ^n dans $S^n \times \mathbb{R}$; soit A la région compacte comprise dans $S^n \times \mathbb{R}$ entre ces exemplaires de S^n et de Σ^n . En enroulant le revêtement infini cyclique autour de Σ^n , on peut voir A plongé dans S^n et former $\Delta^{n+1} = \Sigma^n \times I \cup A \cup D^{n+1}$ un disque d'homotopie bordant Σ^n (voir la figure 7).

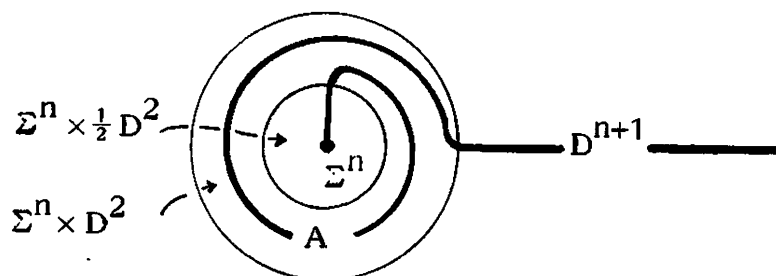


Figure 7 . L'enroulement de Wall

Si $n \neq 3, 4$, on conclut par le théorème de Schönflies ⁽⁺⁾ qui est vrai dans ces dimensions (élémentairement par Schönflies et Alexander pour $n = 1, 2$, et par la théorie des anses de Smale pour $n \geq 5$). Wall traite les cas restants ($n = 3$ est le plus difficile) par un brillant rétablissement qui utilise d'une manière essentielle la théorie des anses et le théorème de Cerf : $\text{Diff}(S^3)$ est connexe.

Ce théorème utilise donc les résultats les plus profonds de la topologie différentielle et surtout est non élémentaire dans le sens suivant : bien que vrai en toute dimension, les arguments pour le prouver sont différents suivant les dimensions.

6.2. Le théorème de Rohlin implique le théorème de Wall.

Il est tout d'abord clair que l'affirmation du paragraphe 4 implique le théorème de Wall : Considérons V^{n+1} une surface de Seifert lisse pour le noeud (S^{n+2}, Σ^n) . Par l'affirmation, Σ^n borde un disque D^{n+1} qui est localement plat presque différentiable et égal à V près de Σ^n (donc près de son bord Σ^n , le disque D^{n+1} est une sous-variété lisse de S^{n+2}). En appliquant le théorème de lissage en codimension 1 de Hirsch, il y a une isotopie presque différentiable fixe près du noeud Σ^n qui pousse D^{n+1} sur une sous-variété lisse de S^{n+2} . Il n'y a qu'une structure lisse sur un disque PL compatible avec la structure PL (grâce à la théorie d'obstruction

(+) Indiquons au lecteur l'exercice 5 où un autre lien entre le problème de Schönflies et les fibrés normaux en codimension deux est établi.

au lissage de Munkres, ou si l'on préfère au théorème de structure en produit de Hirsch). Le noeud Σ^n bordant un disque différentiable est donc trivial.

Voyons maintenant que la forme relative du théorème de Rohlin ^(†) implique le théorème de Wall.

Considérons $(S^{n+2}, \Sigma^n) \times I$ l'épaissi du noeud (S^{n+2}, Σ^n) . Soit V une surface de Seifert lisse pour Σ^n et D un disque presque différentiable trivialisant le noeud PL. Près de $S^{n+2} \times 0$, considérons l'épaissi $V \times [0, \epsilon]$ de V et près de $S^{n+2} \times 1$ l'épaissi $D \times (1-\epsilon, 1]$ de D et complétons sur la partie restante de $S^{n+2} \times I$ par K , une homologie modulo Σ^n entre ces deux surfaces de Seifert. La forme relative du théorème de Rohlin nous donne une sous-variété localement plate W de $S^{n+1} \times I$ de bord $\partial W = V \times 0 \cup \Sigma^n \times I \cup D \times 1$.

Soit (E, F) un voisinage régulier de $\Sigma^n \times I$ dans la paire $(S^{n+2} \times I, W)$. Par existence de voisinage en collier de $\Sigma^n \times I$ dans W et unicité de voisinage régulier de $\Sigma^n \times I$ dans $S^{n+2} \times I$, la paire (E, F) est isomorphe à $(\Sigma^n \times D^2 \times I, \Sigma^n \times I \times I)$, et donc son "bord" $(\partial E, F \cap \partial E) \cong (\Sigma^n \times D^2 \times I, \Sigma^n \times I)$ est une concordance entre $\partial E_0 \cap V$ et $\partial E_1 \cap D$ ($E_i = E \cap S^{n+2} \times i$). En voyant E_0 inclus dans $\overset{\circ}{E}_1$, on construit un disque D_1 égal à V (donc lisse) sur E_0 et égal à D hors de E_1 . (Rappelons que par unicité de voisinage régulier, $E_1 - \overset{\circ}{E}_0 \cong \partial E_0 \times I$.) (voir la figure 8).

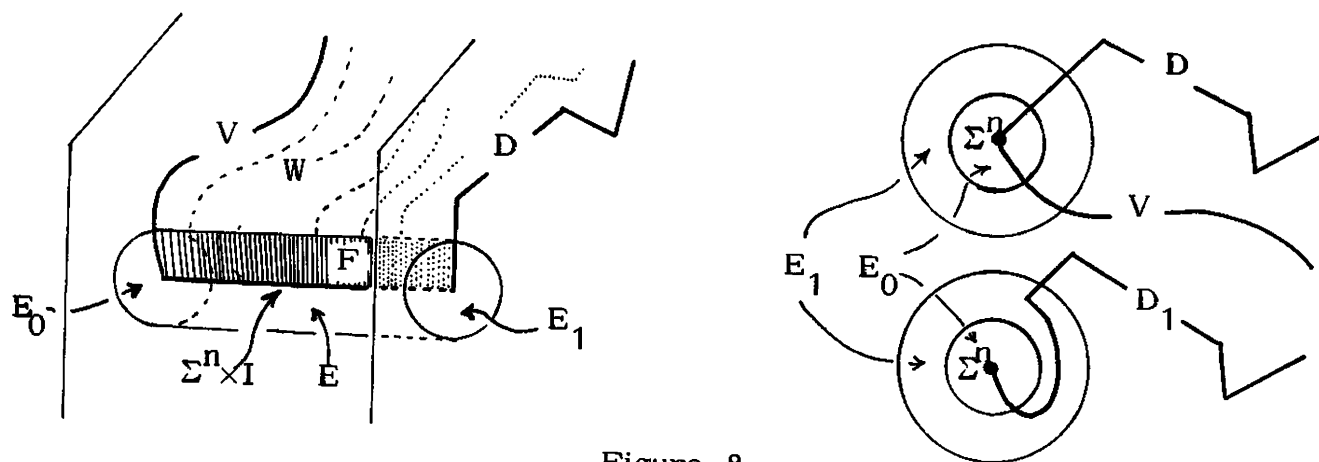


Figure 8

(†) On impose $N = K$ près d'un sous-ensemble de K auprès duquel le complexe K est une sous-variété localement plate. Cette forme relative du théorème 3 a lieu comme pour les théorèmes 1 et 2 et pour exactement les mêmes raisons (voir la remarque clôturant le paragraphe 3).

La fin de la démonstration est identique à celle du premier paragraphe de 6.2. On a laissé au lecteur dans l'esquisse précédente le soin d'appliquer les théorèmes de triangulation de Whitehead pour les changements de catégorie implicites entre presque différentiable et linéaire par morceaux. Remarquons aussi que ces théorèmes de Whitehead, comme le théorème de lissage de Hirsch (corollaire du théorème de structure en produit) que l'on a utilisé ici, sont, contrairement aux arguments de Wall, élémentaires en notre sens.

Rappelons que Rohlin a énoncé son théorème en 1951 ^(†) et n'avait à sa disposition ni le théorème de Wall, ni surtout ce que Wall utilise ; malgré de nombreuses tentatives, nous ne sommes pas arrivés à donner de démonstration élémentaire du théorème de Rohlin (et par là même du théorème de Wall) ^(‡). Nous allons élucider cette difficulté en prouvant de manière élémentaire une forme affaiblie du théorème de Wall au point suivant.

6.3. Une méthode de Kneser lisse.

Il s'agit de faire toutes les constructions pour avoir à effectuer les modifications de Kneser sur des paires de lices qui sont des paires de variétés C^∞ lisses car, dans la catégorie C^∞ , il y a existence et unicité des fibrés normaux (et ce élémentairement).

Pour cela, il faut modifier les hypothèses des théorèmes 1, 2 et 3, en demandant à la variété ambiante d'être C^∞ et aussi, pour le théorème 3, il faut que la sous-variété Q soit une sous-variété lisse. Le complexe K devra être un sous-complexe d'une triangulation C^∞ de M possédant une subdivision barycentrique pour laquelle les cellules duales sont des sous-variétés C^∞ . Ceci s'obtient relativement facilement

(†) Bien qu'il énonce son théorème en toute dimension, Rohlin ne l'utilise que pour un complexe de dimension quatre dans \mathbb{R}^5 ; en ce cas, la démonstration de l'affirmation que l'on peut tirer du premier paragraphe de 6.2 et de 6.1 n'utilise que le théorème d'Alexander-Schönfliess et n'est pas anachronique.

(‡) En suivant la machine de théorie des immersions dans l'article de Wall [W], le lecteur astucieux pourra par une double récurrence établir d'un seul coup les théorèmes de Rohlin et Wall, mais, du moins pour la récurrence que nous avons montée, elle s'appuie sur une faute de frappe dans l'article de Wall : les obstructions pour la théorie de lissage des sous-variétés de Haefliger sont dans $H^i(M, \Gamma_{i-1}^2)$ pour existence et $H^i(M, \Gamma_i^2)$ pour unicité et non, comme l'écrit Wall page 6, $H^{i+1}(M, \Gamma_{i-1}^2)$ pour existence et $H^i(M, \Gamma_{i-1}^2)$ pour unicité !

de la manière suivante : on munit la variété d'une métrique riemannienne C^∞ et l'on part d'une triangulation quelconque. Alors, il y a un $\epsilon > 0$ dépendant de la triangulation de départ telle que la triangulation a des subdivisions arbitrairement fines dont tous les simplexes sont d'épaisseur ^(†) supérieur à ϵ .

Soit K une telle subdivision et σ un simplexe de cette subdivision de sommets k_0, k_1, \dots, k_p . On note $e(\sigma)$ l'ensemble des points à même distance de tous les k_i et plus près de chaque k_i que des autres sommets de K . Alors, si la subdivision K est suffisamment fine, les $e(\sigma)$ sont des sous-variétés lisses isomorphes à un polyèdre convexe. Les $e(\sigma)$ forment les cellules duales pour une subdivision de K isomorphe à la subdivision barycentrique. (Sans subdiviser, le résultat est encore vrai c'est un lemme célèbre de Munkres ([M] théorème 1.4).) On prendra alors pour lisse $L(\sigma, M)$ une sphère lisse située dans l'intérieur de $e(\sigma)$ et se déformant radialement sur le bord de $e(\sigma)$.

On modifie la définition d'être singulier en codimension $i+1$ en demandant à K_i d'être une sous-variété C^∞ hors du squelette de dimension $n - (i+1)$ de K_i . On remarquera alors que pour tout simplexe σ_j de dimension $n - (i+1)$, la lisse $L(\sigma_j, K_i'')$ est l'intersection transverse de $K - K^{[n-(i+1)]}$ avec $L(\sigma_j, M'')$ et que, si l'on prend soin d'arrondir les coins de K_{i+1} situés en $K_i \cap (\partial \sigma_j * L(\sigma_j, M'') - \partial \sigma_j)$, le complexe K_{i+1} construit par la modification de Kneser est singulier en codimension $i+2$.

Nous laissons au lecteur courageux le soin de rédiger les modifications des arguments des paragraphes 1 à 5 suivant l'esquisse ci-dessus (c'est en vue de ces modifications que l'on a préféré la preuve écrite du théorème 3 à celle indiquée dans l'exercice 3a)).

Nous indiquerons dans l'exercice 4 comment, en utilisant des triangulations de Munkres, on peut bâtir "à la Kneser" la théorie d'Haefliger d'obstruction à lisser une sous-variété PL localement plate d'une variété lisse.

(†) C'est le rapport du diamètre sur la distance du barycentre au bord du simplexe.

§ 7. LA NON-TRIVIALITE DE Ω_4 FAIT ECHOUER UNE TENTATIVE DE DEMONSTRATION DU THEOREME DE ROHLIN EN CODIMENSION 2

Soit K^n un sous-complexe orienté de dimension n d'une variété lisse M^{n+2} de dimension $n+2$; on suppose que le bord de la chaîne \bar{K} définie par les n simplexes orientés de K est une sous-variété lisse Q^{n-1} de M . Tentons de lisser K en suivant la méthode du paragraphe 4 modifiée comme indiqué dans le paragraphe précédent, pour que les paires de lices soient des paires de variétés C^∞ . On peut construire un complexe K_i lisse hors du $n-(i+1)$ squelette de K , de bord Q et homologue modulo Q à K , et ce pour $i = 0, 1, 2, 3$. Pour $i = 3$, il faut utiliser dans la démonstration de l'affirmation que les deux sections du fibré normal à $L(\sigma_j, Q)$, une sphère de dimension deux dans $L(\sigma_j, M)$ une sphère de dimension cinq, sont isotopes ^(†) car elles diffèrent par une application de S^2 dans S^2 nulle en homologie donc triviale en homotopie.

A l'étape suivante, les deux sections diffèrent par une application de S^3 dans S^2 . Or $\pi_3(S^2)$ est infini cyclique, engendré par l'application de Hopf. Remarquons que le cylindre de l'application de Hopf est un plan projectif troué plongé dans la sphère S^6 vue comme le joint de S^3 et S^2 , le bord est une sphère S^3 non nouée. On peut donc remplacer le disque D par une somme connexe de plans projectifs troués.

Si la variété Q dont on était parti est de dimension quatre, on vient de voir qu'on peut lisser K hors du zéro squelette de Q et que, quitte à faire des sommes connexes avec des plans projectifs, on peut lisser K . On vient de donner pour le calcul du groupe de cobordisme orienté de dimension quatre, une démonstration analogue à celle que Rohlin a donnée pour le groupe de cobordisme orienté de dimension trois.

Remarque sur le rôle du § 6. Si on n'avait pas pris soin de travailler dans la catégorie lisse, on ne pouvait pas faire le dernier argument : Il n'y a pas unicité du fibré normal pour une sphère de dimension trois dans S^6 .

Rappelons que le groupe (pour la somme connexe) des sphères différentiables

(†) Dès cette dimension, nous ne pouvons utiliser le théorème d'Haefliger et Wall d'unicité du fibré normal dans le domaine stable; on a déjà besoin ici des modifications du § 6.3. Nous verrons cependant dans l'exercice 6 que les arguments de 6.1 et 6.2 donnent l'unicité dans ce cas limite. A l'étape suivante, on ne peut s'en tirer, la non-unicité produit des noeuds différentiables non triviaux de S^3 dans S^6 (voir la remarque à la fin de ce paragraphe).

de dimension trois nouées dans S^6 est isomorphe aux entiers. Soient $S^3 \subset S^6$ et V une surface de Seifert pour ce noeud ; le fibré normal à V dans S^6 est de dimension deux et a $f \in H^2(V; \mathbb{Z})$ comme classe d'Euler. Alors, l'isomorphisme entre le groupe des noeuds et \mathbb{Z} est donné par :

$$[\partial V] \mapsto \frac{\text{signature de } (V) - f \circ f}{8} . \quad (+)$$

Soit ∂V un noeud différentiable non trivial ; comme en codimension trois, il n'y a pas de noeud PL, le noeud ∂V borde un disque D . On interprète des colliers de ∂D dans D et ∂V dans V comme deux sections de deux fibrés PL normaux au noeud. S'il y avait unicité des fibrés normaux, on pourrait supposer que ces deux fibrés coïncident. Quitte alors à remplacer le disque D par une somme connexe V' de plans projectifs troués, plongés comme cylindre de l'application de Hopf (qui vérifie $\text{signature}(V') = f' \circ f'$), on peut supposer que les deux sections (collier intérieur à V et V' respectivement) coïncident. L'argument de la démonstration du théorème 3 fournirait alors un cobordisme W entre V et V' , ce cobordisme étant en produit sur le bord ; donc :

$$\begin{cases} \text{signature}(V) = \text{signature}(V') \\ f \circ f = f' \circ f' \end{cases} ,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\text{signature}(V) - f \circ f \neq 0$.

On a vérifié une fois de plus le "fait expérimental" suivant : Il faut passer par la catégorie différentiable pour montrer qu'une variété PL orientée de dimension quatre et de signature nulle borde une variété orientée de dimension cinq.

EXERCICES

0) Faire fonctionner la méthode de Kneser pour les sous-complexes infinis, localement finis.

1) Soit M une variété triangulée.

a) Soit C^1 un 1-cocycle à valeurs entières qui ne prend (sur chaque arête de la triangulation) que les valeurs $-1, 0, 1$. Soit N la réunion des cellules duales des arêtes σ telles que $C^1(\sigma) \neq 0$.

Prouver que N est une sous-variété combinatoire localement plate et normalement orientée de M .

Indication : C^1 donne naissance à une unique application $f : M \rightarrow S^1 = [0, 1] / \sim$ cellulaire et linéaire sur chaque simplexe de M . Remarquer alors que $N = f^{-1}(\frac{1}{2})$.

b) Soit C^1 un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit N défini comme en a).

Prouver que N est une sous-variété combinatoire localement plate de M .

(+) cf. les commentaires sur le 4e article, exercices.

Indication : Prouver que la restriction de C^1 à chaque simplexe se relève un 1-cocycle à valeurs entières ne prenant que les valeurs -1 , 0 et 1 .

c) Soit C^1 un 1-cocycle à valeurs entières sur M . Prouver qu'il y a une subdivision de M et un cocycle pour cette subdivision représentant la même classe de $H^1(M; \mathbb{Z})$ que C^1 et ne prenant que les valeurs -1 , 0 et 1 .

2.)
a) Montrer que l'on peut, à partir du § 3, remplacer la condition "le complexe K est orienté et est un cycle" (relatif pour le théorème de Rohlin) par "chaque simplexe de dimension maximum n de K est muni d'une orientation normale telle que, pour tout simplexe σ de dimension $n-1$ de K , la somme des orientations obtenue sur la lisse $L(\sigma, M)$ est nulle (dans le cas du théorème de Rohlin, nulle si $\sigma \in K-Q$ et égale à 1 si $\sigma \in Q$, étant supposé que Q est muni d'une orientation normale).

Etablir ainsi la version cohomologique de la méthode de Kneser.

b) Donner une démonstration moderne des théorèmes prouvés dans l'exercice 2.a) (qui ne sont différents des théorèmes du texte que dans le cas où M est non orientable).

Indication : Utiliser la transversalité de Thom sur des applications de M dans \mathbb{RP}^∞ , S^1 et \mathbb{CP}^2 représentant les éléments de $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H^1(M; \mathbb{Z})$, $H^2(M; \mathbb{Z})$.

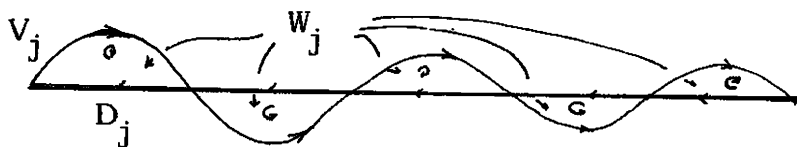
Trouver une "démonstration moderne" des théorèmes du texte quand M est non orientable.

b) a) Une autre démonstration du théorème de Rohlin.

a.1. Par les méthodes du § 3, se ramener au cas où, pour chaque simplexe σ_j de $K^{[n-(i+1)]} \cap Q$, la lisse $L(\sigma_j, K_i'')$ est connexe et où il n'y a pas d'autres $n-(i+1)$ simplexes singuliers.

a.2. Remplacer, dans l'affirmation du § 4, la condition "le disque D_j est égal à la variété V_j près du bord" par "le disque D_j est transverse à la variété V_j " et modifier la condition homologique pour qu'elle s'applique à cette situation.

Prouver que $D_j \cup V_j$ est le bord orienté d'une région W_j que cette réunion découpe. (Attention, les orientations des composantes de W_j ne sont pas compatibles avec une orientation ambiante.) La connexité de V_j est indispensable pour cet argument.



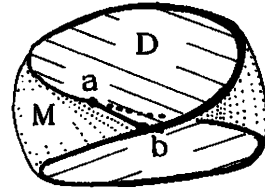
a.3. Prouver que $K_{i+1} = (K_i - \bigcup_{i=1}^N \text{St}(\sigma_j, M''_i)) \bigcup_{i=1}^N (\partial\sigma_j * W_j) \bigcup_{i=1}^N (\sigma_j * D_j)$

a les propriétés requises.

b) Considérer le noeud torique trivial $(2, 1)$;

il borde un disque D et une bande de Möbius M

se coupant en un segment $[a, b]$ (voir la figure).



Soit K^3 le polyèdre borné, limité par $D \cup M$ dans \mathbb{R}^3 . On considère $N^3 = K \bigcup_D \text{cône sur } D$; c est un polyèdre de dimension trois dont le bord, comme

chaîne à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est un plan projectif $M \cup \text{cône sur } (\partial M) \cong \mathbb{RP}^2$.

b.1 (pour les illusionnistes). Prouver que la lice $L(b, N^3)$ est un disque, en laissant supposer que "par symétrie" il en est de même pour $L(a, N^3)$; "démontrer" que N^3 est une variété combinatoire.

b.2. Demasquer l'illusionniste en montrant que $L(a, N^3)$ est une bande de Möbius.

c) Utilisant ce phénomène et les idées de a), donner une preuve de ce que le groupe de cobordisme des surfaces est engendré par la classe du plan projectif \mathbb{RP}^2 . Cette preuve n'utilise pas la classification des surfaces.

4) Soit N^n une sous-variété PL localement plate d'une variété C^∞ , M^{n+q} . Toutes les triangulations ont les propriétés dégagées au §6 (" C^∞ et à cellules duales sous-variétés C^∞ ") et triangulent N comme sous-complexe.

On suppose que hors du $(n-c)$ -squelette de N , la sous-variété N est une sous-variété C^∞ .

a) Soit σ_j un $n-c$ simplexe de $N' \cap N^{[n-c]}$. Prouver que la paire de lices $(L(\sigma_j, M''), L(\sigma_j, N''))$ est un lissage du noeud standard PL $(S^{n+q-c-1}, S^{n-c-1})$. Prouver que la cochaîne qui associe à un $n-i$ simplexe σ_j de $N' \cap N^{[n-c]}$ la classe de concordance de ce lissage et 0 aux autres $n-c$ simplexes de N' est une cochaîne (il faudra en particulier expliciter comment ses coefficients sont tordus).

b) Soit σ_k un $n-(c-1)$ simplexe de N' . Prouver que, en modifiant la paire de sites $(\text{St}(\sigma_k, M''), \text{St}(\sigma_k, N''))$ (qui est une paire de boules lisses standard $(B^{n+q-c-1}, B^{n-c-1})$) par un lissage arbitraire (mais identité sur le bord), on peut modifier la cochaîne construite en a) par un cobord.

En déduire la théorie d'obstruction de Haefliger au lissage des sous-variétés PL d'une variété C^∞ ($[H]$).

c) Si on est en codimension un, les coefficients de la théorie d'obstruction sont nuls ; il est tentant d'essayer d'appliquer cette méthode concrète de lissage au cas où la sous-variété N a un bord qui est une sous-variété C^∞ de codimension 2, et en exigeant de ne pas bouger le bord N au cours du lissage (par les remarques du § 6, cela donnerait une démonstration élémentaire du théorème de Wall !).

Faire cette tentative et voir que, lorsque l'on fait la construction sur un simplexe de Q , on trouve comme obstruction une classe de concordance de disque de Seifert C^∞ du noeud trivial.

Dans l'exercice suivant, nous verrons que la nullité des classes d'isotopies des disques de Seifert lisses implique le théorème de Schönflies.

6) a) Par isotopie d'Alexandre, prouver qu'un isomorphisme PL $h : S^{n+q} \rightarrow S^{n+q}$ tel que $h|_{S^n} = \text{id}|_{S^n}$ est isotope à l'identité à travers des isomorphismes fixant S^n (se ramener au cas où h est l'identité au voisinage d'un point de S^n).

b) Soient D_1^{n+1} et D_2^{n+1} deux disques de Seifert PL du noeud trivial (S^{n+2}, S^n) . Prouver qu'il y a un isomorphisme PL $h : S^{n+2} \rightarrow S^{n+2}$ identité sur S^n et tel que $h(D_1) = D_2$ (utiliser des colliers autour de D_1 et D_2 et l'unicité des disques de codimension zéro).

A partir de ce point, une démonstration en toute dimension, pour illusionnistes, du théorème de Schönflies.

c) Par le théorème de Wall d'unicité des fibrés normaux PL en codimension deux, se ramener au cas où l'isotopie h_t , découlant de b) et a), respecte un voisinage régulier E de S^n .

d) Soit $F = S^{n+2} - \overset{\circ}{E}$ et F_n le revêtement cyclique à n feuilles de F .

Prouver qu'il y a un entier n et deux relevés du disque D_1 dans F_n , D_1 et D_1' , tels que si h_{nt} est le relevé de l'isotopie construite en c), la trace de $h_{nt}(D_1)$ ne coupe pas $D_1' \times [0, 1]$.

Soit dans F_n le relevé $h_{n1}(D_1)$ de D_2 . Par extension des isotopies, prouver que la région comprise entre $h_{n1}(D_1)$ et D_1' est en produit.

En déduire que, dans le cas où D_1 et D_2 sont disjoints, la région qu'ils délimitent dans F est un disque.

e) Soit $\varphi : S^n \rightarrow S^{n+1}$ un plongement PL localement plat. Voyant la sphère S^{n+1} comme la réunion des hémisphères nord D_+ et sud D_- , déduire de ce qui précède une "démonstration" du théorème de Schönflies.

f) Démasquer l'illusionniste : on ne peut effectuer l'étape c) car Wall ne prouve pas l'unicité à un paramètre des fibrés normaux en codimension deux. Dans la catégorie différentiable, cette unicité a lieu. "Le théorème de Wall ne permet pas d'affirmer que, en codimension deux, les sous-variétés PL sont aussi bonnes que les sous-variétés lisses".

Question. Y a-t-il des contre-exemples à l'unicité à paramètres des fibrés normaux PL en codimension 2 ?

6) a) Toute section d'un fibré normal PL à une sphère S^2 dans S^5 , non enlacée avec la section nulle borde un disque (par la forme relative du théorème 4, lui faire border une surface de Seifert V . Sachant que $\hat{V} = V \cup D^3$ borde une variété spin n'ayant que des anses d'indice 2, faire la chirurgie plongée sur V pour la transformer en un disque.)

b) Dédire de 6.a), 5.a) et l'analogue de 5.b) en codimension trois, l'unicité des fibrés normaux à S^2 dans S^5 .

REFERENCES

- [FP] FRANKL F. und PONTRYAGIN L., Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, Math. Ann. 102 (1930), p. 785-789.
- [H] HAEFLIGER A., Lissage des immersions II, à paraître (depuis 1967 !).
- [K] KNESER H., Ein Topologisches Zerlegungssatz, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 27 (1924), p. 601-616.
- [M] MUNKRES J., Concordance is equivalent to smoothability; Topology 5 (1966), p. 371-389.
- [R] ROHLIN V.A., Toute variété de dimension trois borde une variété de dimension quatre, Dokl. Akad. Nauk SSSR 81 (1951), p. 355-357 (en russe) ; traduction dans ce volume.
- [S] SEIFERT H., Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann. 110 (1934), p. 571-592.
- [W] WALL C.T.C., Locally flat PL submanifolds with codimension two, Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), P. 5-8.

Dans cet article, Rohlin calcule le groupe de cobordisme orienté de dimension quatre Ω_4 (qui est engendré par la classe de $\mathbb{C}P^2$ et isomorphe à \mathbb{Z} , l'isomorphisme étant $\varphi: \Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi([M^4]) = \sigma(M) = \frac{X_{22}(M)}{3} (= \frac{\langle [M], P_1(M) \rangle}{3})$), et il utilise ce calcul pour corriger les deux premiers articles. Nous suivrons le plan de Rohlin : Au, § 1, nous expliquerons comment Rohlin construit un cobordisme orienté d'une variété de dimension quatre quelconque à une somme connexe de plans projectifs complexes. Le § 2 est consacré au calcul du groupe de cobordisme non orienté des variétés de dimension quatre (Rohlin énonce un résultat faux qu'il a corrigé ultérieurement). Dans le § 3, nous expliquerons la correction des deux premiers articles et, en particulier, l'affirmation de Rohlin selon laquelle $\Omega_4 = \mathbb{Z}$ implique que la composée de trois suspendues successives de l'application de Hopf est non nulle dans $\pi_{n+3}(S^n)$, contrairement à ce qui a été "démontré" dans le premier article. Nous terminerons par une série d'exercices portant sur les quatre articles de Rohlin et indiquant comment on peut obtenir à l'aide des méthodes géométriques de Rohlin pratiquement tous les énoncés produits depuis 1951 et portant sur les différents types de cobordismes des variétés de dimension inférieure ou égale à quatre, les structures spins sur ces variétés et les corollaires qui en découlent en théorie des noeuds différentiables.

§1. CALCUL DU GROUPE DE COBORDISME ORIENTE Ω_4 (§2 du texte)

Après avoir remarqué qu'il suffit de montrer que la classe de $\mathbb{C}P^2$ est un générateur de Ω_4 , Rohlin considère une variété M^4 orientée de dimension quatre et affirme :

A) Il existe une variété M_1^4 cobordante à M et admettant un plongement dans l'espace euclidien \mathbb{R}^7 .

En effet, un théorème de Whitney assure l'existence d'une immersion en position générale $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$. Nous avons vu dans les notes sur le troisième article que les cercles de points doubles de $f(M^4)$ ont, dans M^4 , des revêtements triviaux : des chirurgies rondes plongées d'indice un ⁽⁺⁾ fournissant un cobordisme de M à une sous-variété M_1 de \mathbb{R}^7 .

B) La deuxième étape consiste à montrer que : Une somme connexe M_2 de la variété M_1 avec des plans projectifs admet un plongement dans \mathbb{R}^7 dont le fibré normal a une section partout non nulle.

La classe d'Euler du fibré normal à une sous-variété orientée d'un espace euclidien est nulle : le fibré normal à M_1^4 dans \mathbb{R}^7 a donc une section qui est non nulle sur le 3-squelette de M_1 . L'obstruction à trouver une section non nulle définie sur tout M_1 est un élément de $\pi_3(S^2)$. Ce dernier groupe est cyclique engendré par l'application de Hopf $h: S^3 \rightarrow S^2$. Il existe donc une section s du fibré normal à M_1 dans \mathbb{R}^7 , non nulle hors d'une réunion disjointe et finie de boules B_i de M_1 , telle que l'obstruction à l'étendre en une section non nulle sur la boule B_i soit l'application de Hopf h ou son opposée $-h$: si $B_i \times D^3$ est une carte, définie sur la boule B_i , d'un tube T_1 autour de M_1 dans \mathbb{R}^7 , la section s est donnée sur ∂B_i par $s(x) = (x, \pm h(x))$. Le cylindre de l'application de Hopf (ou de son opposée) est homéomorphe au plan projectif troué (muni de l'orientation complexe ou de l'orientation opposée) et admet un plongement dans le bord du tube T_1 , qui se recolle avec $s(M_1 - \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{B}_i)$ pour fournir la variété M_2 cherchée. La variété M_2 étant sous-variété du bord du tube T_1 , son fibré normal a une section partout non nulle (un champ de vecteur extérieur à ∂T_1 par exemple).

Voici quelques formules justifiant les affirmations précédentes. Si un point du plan projectif troué \mathbb{CP}_0^2 est repéré par ses coordonnées homogènes $[X_0, X_1, X_2]$ ($|X_0|^2 \leq |X_1|^2 + |X_2|^2$), si la sphère S^3 est la sphère unité de \mathbb{C}^2 :

$S^3 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |X_1|^2 + |X_2|^2 = 1\}$ et si la sphère S^2 est la sphère de Gauss $S^2 = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$, l'homéomorphisme entre le cylindre de l'application de Hopf, $C(h) = S^3 \times [0, 1] \amalg S^2 / (x, 0) \sim h(x)$, et le plan projectif troué \mathbb{CP}_0^2 est donné par $[(X_1, X_2), t] \mapsto [t, X_1, X_2]$ ($(X_1, X_2) \in S^3$, $t \in [0, 1]$).

(+) Ce sont les modifications Θ_2 du troisième article.

Le plongement de \mathbb{CP}_0^2 dans le bord du tube T_1 est donné par

$$[X_0, X_1, X_2] \mapsto \left(\frac{2X_0X_1}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}, \frac{2X_0X_2}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}; X_1/X_2 \right)$$

$$\text{où } \left(\frac{2X_0X_1}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2}, \frac{2X_0X_2}{|X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2} \right) \in B_i^4 = \{Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |Y_1|^2 + |Y_2|^2 \leq 1\}$$

$$\text{et } X_1/X_2 \in \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{CP}^1 = S^2.$$

Il sera utile pour la suite de voir M_2 comme un éclatement de M_1 . Pour ceci, supposons que près du bord, $\partial B_1 \times S^2$, de la carte $B_1 \times S^2$, la section s est donnée par $s(Y_1, Y_2) = (Y_1, Y_2; Y_1/Y_2)$. Une équation de la variété M_2 dans $B_1 \times S^2$ est

$$0 = f(Y_1, Y_2; Z) = Y_1 - ZY_2, \text{ ou si l'on préfère en coordonnées homogènes}$$

$$0 = F(Y_1, Y_2, [X_0, X_1]) = X_0Y_1 - X_1Y_2.$$

Suivant que la carte de la boule B_1 est ou non dans l'orientation de la variété M_1 , on obtient des modèles pour les cas où l'obstruction est l'application de Hopf $h: S^3 \rightarrow S^2$, $h(Y_1, Y_2) = Y_2/Y_1$, ou son opposée.

C) La troisième étape consiste à construire dans le bord d'un tube T_2 autour de M_2 une sous-variété M_3 difféomorphe à une somme connexe de M_2 et de plans projectifs complexes et telle que sa classe fondamentale $[M_3]$ soit nulle dans $H_4(S^7 - \overset{\circ}{T}_2)$ l'homologie du complémentaire du tube T_2 dans la sphère $S^7 = \mathbb{R}^7 \cup \infty$.

Supposons ceci réalisé, il existe alors une sous-variété orientée N^5 de $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$ de bord M_3 ; comme M_3 est difféomorphe à une somme connexe de la variété M de départ et de plans projectifs complexes, ceci prouve que le groupe de cobordisme orienté de dimension quatre est engendré par le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 . La variété N peut s'obtenir :

1) Soit en lissant par la méthode de Kneser une chaîne U_5 de $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$ dont le bord homologique est la variété M_3 ;

2) Soit par la méthode de Thom : il y a une application $f: \partial T_2 \rightarrow \mathbb{CP}(n)$ transverse à $\mathbb{CP}(n-1)$ et telle que $f^{-1}(\mathbb{CP}(n-1)) = M_3$ ^(†). Si X est le générateur de

(†) L'application f est la construction de Thom sur une application $f_0: M_3 \rightarrow \mathbb{CP}(n-1)$ classifiant le fibré normal à M_3 dans ∂T_2 (rappelons que $\mathbb{CP}(n) - \text{pt}$ est isomorphe à l'espace total du fibré canonique sur $\mathbb{CP}(n-1)$ et donc $\mathbb{CP}(n)$ est homéomorphe à l'espace de Thom de ce fibré.)

$H^2(\mathbb{CP}(n), \mathbb{Z})$, la classe $f^*(X) \in H^2(\partial T_2; \mathbb{Z})$ s'étend en une classe $Y \in H^2(S^{7-\circ}_2; \mathbb{Z})^{(\dagger)}$. Si n est suffisamment grand ($n \geq 3$ suffit ici), il y a une extension φ de f à $S^{7-\circ}_2$ telle que $Y = \varphi^*(X)$. On peut supposer φ transverse à $\mathbb{CP}(n-1)$ et poser $N = \varphi^{-1}(\mathbb{CP}(n-1))$.

Il nous reste à expliquer la troisième étape.

Soit M'_2 un exemplaire de la variété M_2 dans le bord du tube ∂T_2 qui est l'image de M_2 par une section partout non nulle. Notons $\pi: \partial T_2 \rightarrow M_2$ la projection du tube.

AFFIRMATION 1. Il existe une surface orientée F^2 dans M_2^4 telle que le cycle $M'_2 \cup \pi^{-1}(F)$ soit nul en homologie dans $S^{7-\circ}_2$. ($\pi^{-1}(F)$ est orientée par l'orientation somme directe de celle de F et de celle du fibré normal à M'_2 dans ∂T_2).

AFFIRMATION 2. Il existe une sous-variété M_3 de ∂T_2 homologue dans ∂T_2 à $M'_2 \cup \pi^{-1}(F)$ et difféomorphe à une somme connexe de la variété M_2 et de plans projectifs complexes. Plus précisément, il y a un ensemble fini $\{m_1, \dots, m_p\}$ de points de M_2 tel que $\pi^{-1}(m_i) = \pi^{-1}(m_i) \cap M_3$ est une sphère d'auto-intersection ± 1 dans M_3 et $\pi: M_3 - \pi^{-1}(\{m_1, \dots, m_p\}) \rightarrow M_2 - \{m_1, \dots, m_p\}$ est un difféomorphisme.

Démonstration de l'affirmation 2.

a) L'idée est d'enrouler la section s autour de la surface F comme cela est suggéré dans la figure suivante.

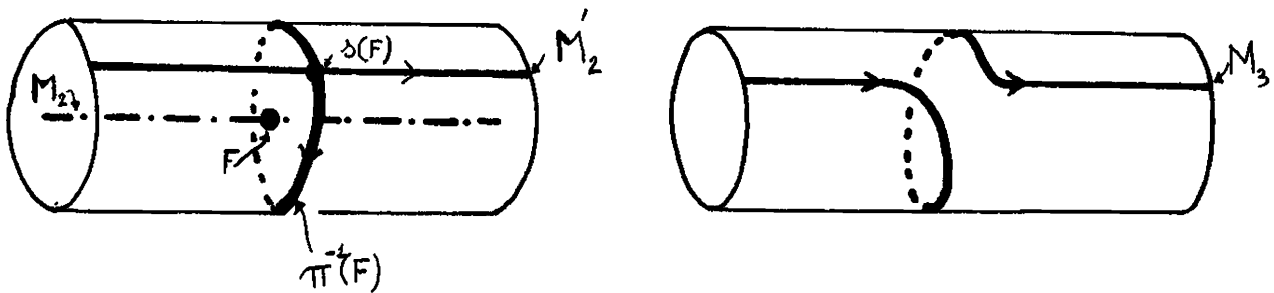


Figure 1 : l'enroulement

(†) Cela découle de ce que, comme $f^*(X)$ est dual pour Poincaré de $[M_3] \in H_4(\partial T_2)$, Y sera le dual pour Poincaré de $U_5 \in H_5(S^{7-\circ}_2, \partial T_2; \mathbb{Z})$, où U_5 est une homologie à zéro de M_3 dans $S^{7-\circ}_2$.

Cette figure est quelque peu trompeuse car, sur la figure, la codimension de F dans M_2 est un π , et donc les fibrés normaux à $s(F)$ dans $s(M_2) = M_2'$ et $\pi^{-1}(F)$ sont triviaux. Ce n'est pas toujours le cas et les éclatements vont être imposés par le fait que ces deux fibrés normaux ne sont pas nécessairement isomorphes.

b) Commençons par introduire des modèles. Soit ν le fibré normal à $M_2' = s(M_2)$ dans ∂T_2 , il est orienté. Considérons-le comme un fibré en droites complexes. Le tube T_2 est une somme directe de ν et d'un fibré trivial de dimension réelle un et le bord de T_2 s'identifie au projectifié du fibré ν : $\partial T_2 - \{-s(M_2)\} \cong E(\nu)$ et $\partial T_2 \cong E(\nu) \cup -s(M_2)$ où chaque fibre $\pi^{-1}(m) \cong \mathbb{C}$ est compactifié en une sphère de Gauss par $\infty_m = -s(m)$. Pour les formules qui vont suivre, il vaut mieux introduire des coordonnées homogènes et voir ∂T_2 comme le fibré en droites projectives complexe projectifié du fibré $\nu \oplus \epsilon$ où ϵ est un fibré complexe trivial de rang 1. Un point P de ∂T_2 est représenté par ses coordonnées homogènes

$$[X_p, T_p] \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_p \in E(\nu) \quad , \quad \nu(X_p) = p = \pi(P) \\ T_p \in E(\epsilon) \quad , \quad \epsilon(T_p) = p = \pi(P) \\ (X_p, T_p) \neq (0, 0) \\ \text{et } [X_p, T_p] = [X'_p, T'_p] \text{ si et seulement si il y a un } \lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda \neq 0 \text{ tel que } X'_p = \lambda X_p \text{ et } T'_p = \lambda T_p \end{cases}$$

(on désigne par $E(\xi)$ l'espace total d'un fibré ξ).

Soit μ le fibré normal à $s(F)$ dans M_2' lui aussi considéré comme un fibré en droites complexe induisant son orientation et supposons que son espace total est plongé dans M_2' au moyen d'un tube autour de la surface $s(F)$. Sur $E(\mu)$, on a la restriction du fibré ν et le fibré $\mu^*(\mu)$; soit t la section canonique du fibré $\mu^*(\mu)$, elle est non nulle hors de la section nulle

$$(\mu^*(\mu) = \{(x, y) \in E(\mu) \times E(\mu) \mid \mu(x) = \mu(y)\}; t(x) = (x, x) \text{ }).$$

Par abus de notation, on désignera par $\mu^*(\mu)$ un fibré sur M_2' étendant $\mu^*(\mu)$ et tel que la section canonique t s'étende en une section non nulle sur $M_2' - s(F)$.

c) En utilisant les notations précédentes, une équation du cycle $s(M_2) \cup \pi^{-1}(F)$ est :

$$[X_p, T_p] \in s(M_2') \cup \pi^{-1}(F) \text{ si et seulement si } X_p \otimes t(p) = 0 \in \nu \otimes \mu^*(\mu).$$

Soit ϵ une section du fibré $\nu \otimes \mu^*(\mu)$, transverse à la section nulle près de la surface F et à support dans un voisinage de F . La variété M_3 cherchée est M_ϵ d'équation :

$$[X_p, T_p] \in M_\epsilon \text{ si et seulement si } X_p \otimes t(p) = \epsilon(p) \otimes T_p \in \nu \otimes \mu^*(\mu) \\ (\cong (\nu \otimes \mu^*(\mu)) \otimes \epsilon) \text{ }.$$

Cette équation définit une sous-variété de ∂T_2 telle que si $\{m_1, \dots, m_p\}$ est l'ensemble des zéros de ϵ sur F , la restriction $\pi: M_3 - \pi^{-1}(\{m_1, \dots, m_p\}) \rightarrow M_2 - \{m_1, \dots, m_p\}$ est un isomorphisme et $\pi^{-1}(m_i) = \pi^{-1}(m_i) \cap M_3$ est une sphère S_i d'auto-intersection ± 1 dans $M_3^{(+)}$. La variété M_3 est homologue à $M_2' \cup s(F)$ car, quand t décrit $[0, 1]$, $M_{t\epsilon}$ balaye une homologie entre $M_0 = M_2' \cup s(F)$ et $M_\epsilon = M_3$. \square

Démonstration de l'affirmation 1.

Comme $H_4(S^7) = 0$, par position générale, il existe une chaîne polyédrale C telle que :

- 1) le bord homologique ∂C de C est $M_2' = s(M_2)$;

- 2) près de son bord, la chaîne C est dans $S^7 - \overset{\circ}{T}_2$;

- 3) $C - \partial C$ est transverse au tube T_2 .

Soit F une surface dans M_2 homologue au cycle $\Sigma = M_2 \cap (C - \partial C)$. Le cycle $\partial T_2 \cap (C - \partial C)$ ($= \pi^{-1}(\Sigma)$ par la condition de transversalité 3)) est donc homologue dans ∂T_2 à $\pi^{-1}(F)$. L'affirmation découle de ce que $C - \overset{\circ}{T}_2$ est une chaîne de bord $\partial T_2 \cap C = M_2' \cup (\partial T_2 \cap (C - \partial C))$. \square

(+) Si $\pi(P) = p$ n'est pas dans F , $t(p)$ est non nul et l'équation définit un unique $[X_p, T_p] \in \pi^{-1}(P)$.

Si $\pi(P) = p_0$ est dans F , soit u une coordonnée complexe pour F autour de p_0 et v une coordonnée de fibre du fibré normal μ . L'équation devient : $Xv = \epsilon(u, v)T$, où ϵ est une fonction telle que, si $\epsilon(u, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial u} \epsilon(u, 0)$ inversible (condition de transversalité), on a bien l'équation d'une variété lisse M_ϵ . De plus, si $v = 0$ et $\epsilon(u, 0) = 0$, on peut choisir les cartes de sorte que $\epsilon(u, 0) = \epsilon u$: " M_3 est un éclatement algébrique de M_2 ". Le signe de l'auto-intersection du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(u, 0)$ est -1 ou $+1$ suivant que la carte (u, v) est ou non dans l'orientation de M_3 .

§2. CALCUL DU GROUPE DE COBORDISME NON-ORIENTE n_4 (§3 du texte)

Le résultat que Rohlin énonce dans le §3 est faux : l'espace projectif réel \mathbb{RP}^4 et le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 sont indépendants dans n_4 (ils sont détectés par les nombre de Stiefel-Whitney $(w_1)^4$ et $(w_2)^2$). Rohlin dévoile cette faute dans un article ultérieur (Homologies intrinsèques, Doklady 1953, 89 n° 5, p. 789-792) et y énonce le résultat correct : n_4 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les générateurs étant \mathbb{RP}^4 et \mathbb{CP}^2 .

La démonstration devrait être la suivante : Soit M^4 une variété de dimension quatre et $P^3 \subset M^4$ une sous-variété duale de la première classe de Stiefel-Whitney. Soit s une section, transverse à la section nulle, du fibré normal à P dans M et soit $S = s^{-1}(0)$. Dans le cas où $M = \mathbb{RP}^4$, on peut prendre $P = \mathbb{RP}^3$ et $S = \mathbb{RP}^2$; comme \mathbb{RP}^2 engendre le groupe n_2 de cobordisme des variétés de dimension deux, on peut, quitte à rajouter cet exemple, supposer que S borde une variété de dimension trois G^3 . La variété P est orientable (voir exercice n° I 0)), et donc le fibré normal à S dans P est le fibré d'orientation de S et s'étend en le fibré d'orientation ν de G^3 . Le fibré normal à P^3 dans M^4 s'étend en un fibré μ sur l'espace total de ν qui, hors de G^3 , est trivial. Collons l'espace total $E(\mu)$ du fibré μ à $M^4 \times [0, 1]$; nous obtenons un cobordisme de M^4 à M'^4 dont l'hypersurface caractéristique associée P' a un fibré normal trivial. Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que P' borde une variété H^4 orientable (d'après le 3e article) pour obtenir un cobordisme de M' à une variété orientable M'' (voir la figure 2).

On vient en fait de répéter les arguments géométriques de la suite exacte de Rohlin :

$$\Omega_n \longrightarrow n_n \longrightarrow \Omega_{n-1} \oplus n_{n-2},$$

où la deuxième flèche associe à la classe de M^n les classes de P^{n-1} duale de $w_1(M)$ et de S^{n-2} l'auto-intersection de P dans M (la première flèche est l'oubli).

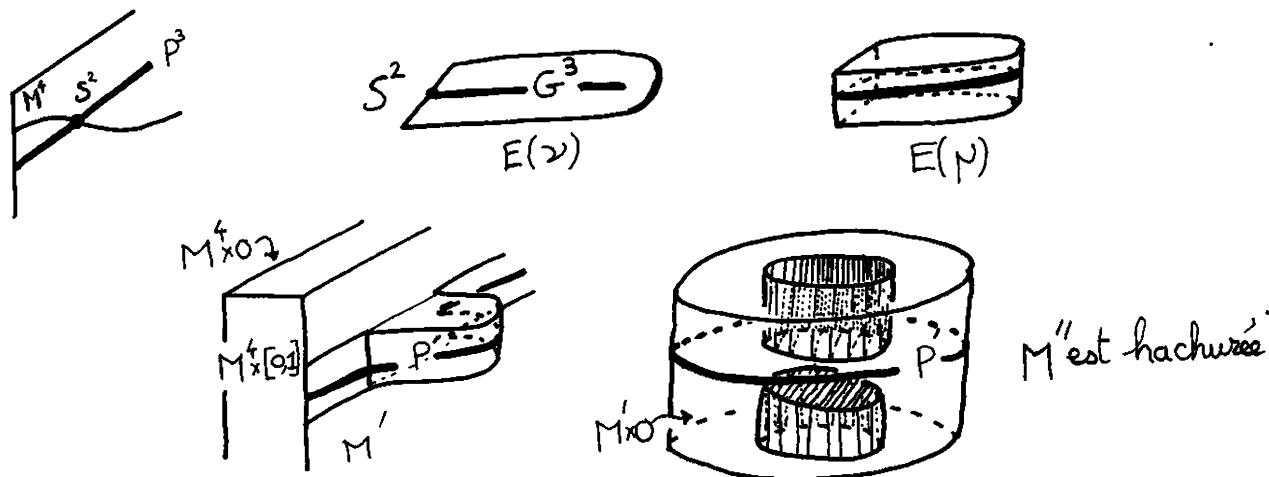


Figure 2

§3. CORRECTION DES DEUX PREMIERS ARTICLES (§4 du texte).

A. Correction du premier article, $h_n \neq 0$.

Soit h_n la classe dans $\pi_{n+3}(S^n)$ de la composée de trois suspendues successives de l'application de Hopf ($n \geq 2$). Dans le premier article, Rohlin a montré que la nullité de h_n est équivalente à l'existence d'une variété orientée fermée Q^4 telle que :

a) Il y a dans Q^4 un tore T^2 possédant un voisinage en produit $E^4 = T^2 \times D^2$ tel que T^2 est une surface caractéristique dans Q^4 et reste surface caractéristique dans la variété obtenue en enlevant E^4 de Q^4 et en le recollant d'une manière différente.

b) Le nombre de Pontriaguine $X_{22}(Q^4)$ est nul.

Rohlin remarque alors que, grâce au calcul de Ω_4 , la condition b) est équivalente à

b') Q^4 est le bord d'une variété orientable N^5 .

Le fait que h_n est non nul est donc réduit à l'affirmation suivante :

AFFIRMATION. Les conditions a) et b') sont contradictoires.

Démonstration de l'affirmation de Rohlin.

PROPOSITION. Il existe une sous-variété G^3 de N^5 telle que :

1) Le bord de G^3 est le tore T^2 .

2) Il y a sur le 2-squelette de $N - G$, une trivialisation du fibré tangent à N dont G est un cycle d'obstruction.

Démonstration de l'affirmation à l'aide de la proposition.

Par dualité de Poincaré, le noyau de $H_1(T^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(G^3; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est de rang un. Soit C une courbe simple fermée dans le tore T^2 dont la classe d'homologie modulo 2 engendre ce noyau et soit $F \subset G^3$ une surface connexe de bord C . La restriction à F du fibré normal à G^3 dans N^5 a une section s partout non nulle ^(†). Soit F' et C' les images de F et de C par cette section (on choisit la courbe C' dans $T^2 \times S^1$, le bord du tube E^4 autour de T^2 dans Q^4). Soit φ un difféomorphisme de $T^2 \times S^1$ tel que $\varphi(* \times S^1) = C'$ ^(‡).

(†) car la surface F a le type d'homotopie d'un complexe de dimension un.

(‡) Un tel difféomorphisme existe car la courbe C est isotope à une courbe linéaire dans le 2-tore T^2 ; la courbe C' sera alors isotope à une courbe linéaire dans le 3-tore $T^3 = T^2 \times S^1$.

Dans la variété $X^4 = Q^4 - \overset{\circ}{E}^4 \cup_{\varphi} E^4$, le tore T^2 n'est pas caractéristique car la trivialisation de la restriction du fibré tangent à la courbe $* \times \partial D^2$ s'étend à $* \times D^2$ puisqu'elle s'étend à la surface F . Ceci contredit la condition a). \square

Démonstration de la proposition. Puisque le tore T^2 est caractéristique dans la variété Q^4 , il y a au-dessus du 2-squelette de $Q - T$ une trivialisation t du fibré tangent stable de Q dont T réalise un cycle d'obstruction.

Soit $K^3 \hookrightarrow N^5$ une chaîne modulo 2 de bord homologique T^2 , obtenue comme cycle d'obstruction à étendre à N^5 la trivialisation t . Il s'agit de prouver que l'on peut prendre pour K^3 une sous-variété G^3 de N^5 .

La chaîne K^3 est en codimension deux mais à coefficient modulo 2. La méthode de Kneser en codimension deux ne peut s'appliquer brutalement car elle exige une chaîne orientée (à coefficients entiers). Cependant, les premières étapes de la méthode fonctionnent (car tant un nombre pair de points dans la sphère S^2 , tant un enlacement dans la sphère S^3 possèdent une surface de Seifert ; voir les notes sur la méthode de Kneser). Nous pouvons donc supposer que hors de son zéro squelette, le complexe K^3 est une sous-variété. En connectant par un arbre tous les sommets près desquels K^3 n'est pas une sous-variété, et en contractant cet arbre, on peut supposer qu'il n'y a qu'un seul point x_0 de K^3 près duquel K^3 n'est pas une sous-variété.

La lice^(†) de x_0 dans K^3 est alors une surface M^2 sous-variété de la lice de x_0 dans N^5 , une sphère de dimension quatre. On peut supposer que la surface M^2 est connexe : il suffit de rajouter à K^3 des cônes issus de x_0 sur des épaisseurs b_i dans $I(x_0, N^5)$ d'arcs a_i joignant les composantes de M^2 (voir la figure 3).

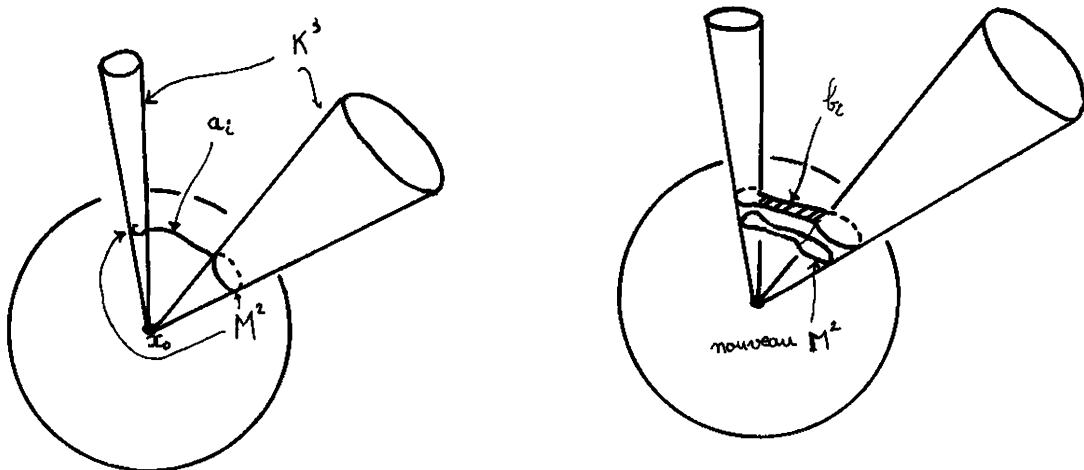


Figure 3 : Rendre la surface M connexe

(†) Lice est la traduction que l'on a donné du terme anglais "link" dans les notes sur la méthode de Kneser.

La sous-variété $K^3 - L(x_0, K^3)$ réalise un cobordisme du tore T^2 à la surface M^2 ; on en déduit que l'auto-intersection de la surface M^2 dans la sphère $S^4 = L(x_0, N)$ est nulle. En ce cas, la surface M^2 borde une surface de Seifert W^3 dans S^4 : on procède comme dans l'étape c) du calcul de Ω_4 effectué au §1^(†). Il suffit alors de poser $G^3 = (K^3 - L(x_0, N)) \cup W$. Le cône $x_0 * W$ réalise l'homologie modulo 2 entre K^3 et G^3 .

B. Correction de la démonstration de l'égalité $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$ [$\pi_{n+3}^0(S^n)$ est l'image du J-homomorphisme $J: \pi_3(SO(n)) \rightarrow \pi_{n+3}(S^n)$].

Dans le deuxième article, Rohlin a montré que toute variété stablement parallélisée de dimension trois, M^3 , est cobordante, comme variété stablement parallélisée à une variété stablement parallélisée en produit $P^2 \times S^1$ où P^2 est une surface orientable^(‡).

AFFIRMATION. Une variété stablement parallélisée en produit $P^2 \times S^1$ est cobordante comme variété stablement parallélisée à une union disjointe de tores T^3 .

Démonstration. Soit N^3 la trace d'une chirurgie d'indice zéro ou un sur P telle que, si elle est d'indice un, son cercle d'attachement sépare P . Alors, la parallélisation s'étend à l'âme de la chirurgie donc à N^3 . Ceci permet de se ramener d'abord au cas où P est de genre supérieur ou égal à un, puis au cas où P est une union disjointe de tores.

(†) Pour l'enroulement, les dimensions sont celles que l'on voit sur la figure 1. Dans les formules qui suivent les fibrés réels de rang 1 remplacent les fibrés complexes de rang 1. Il faut remarquer de plus que, comme la sphère S^4 est orientable, le fibré $\nu \otimes \mu^*(\mu)$ est trivial et on peut choisir la section ϵ sans zéros sur F^1 (ici F^1 est la courbe de la surface M^2 autour de laquelle on veut enrouler). Pour le lissage, on utilise soit la méthode de Kneser à coefficients modulo 2, soit la méthode de Thom en utilisant $\mathbb{RP}(n)$ au lieu de $\mathbb{CP}(n)$ (il faut $n \geq 4$ ici).

(‡) Esquissons l'argument: M^3 est bord d'une variété simplement connexe Q^4 (car $\pi_3 = 0$). La deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(Q^4)$ est représentée par une surface orientable P^2 (car comme $H_1(Q^4) = 0$, la réduction modulo 2 $\rho: H^2(Q^4; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(Q^4; \mathbb{Z}/2)$ est surjective). En faisant des sommes connexes de paires de (Q^4, P^2) avec des $(\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1)$, on peut supposer que P^2 a un voisinage en produit $E^4 \approx P^2 \times D^2$. La variété stablement parallélisée $Q^4 - E^4$ fournit le cobordisme cherché.

Démonstration de l'égalité $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$.

Elle se réduit aux deux lemmes suivants :

LEMME 1. Si $h_n \in \pi_{n+3}(S^n)$ est la composée de trois suspendues successives de l'application de Hopf, $h_n \in \pi_{n+3}^0(S^n)$.

LEMME 2. Modulo $\pi_{n+3}^0(S^n)$, toute parallélisation stable du tore T^3 est congrue à la parallélisation triviale ou à h_n .

Démonstration des lemmes 1 et 2. On remarque tout d'abord que deux parallélisations stables sur une variété M^3 connexe qui coïncident sur le 1-squelette de M^3 sont homotopes dans le complémentaire d'une boule de M^3 (car $\pi_2(SO(n)) = 0$) ; elles diffèrent donc par un élément de $\pi_3(SO(n))$, les éléments de $\pi_{n+3}(S^n)$ qu'elles définissent sont donc congrus modulo $\pi_{n+3}^0(S^n)$.

Ceci suffit à établir le lemme 2, car, si la restriction à l'un des facteurs de T^3 de la parallélisation stable est triviale, la parallélisation est congrue modulo $\pi_{n+3}^0(S^n)$ à une parallélisation qui s'étend au tore solide $T^2 \times D^2$ correspondant ; sinon la parallélisation est congrue modulo $\pi_{n+3}^0(S^n)$ à h_n . \square

Pour établir le lemme 1, il suffit de considérer la variété M_1^4 du deuxième article. Cette variété contient un tore caractéristique T^2 ayant un voisinage en produit $T^2 \times D^2$; il suffit de remarquer que la restriction à chacun des facteurs du tore $T^3 = \partial(T^2 \times D^2)$ d'une parallélisation stable définie sur $M_1^4 - T^2$ est non triviale. Pour le troisième facteur, c'est parce que le tore T^2 est caractéristique ; pour les deux autres, cela se voit sur le modèle que nous avons proposé pour M_1^4 à l'appendice D des commentaires sur le premier article : M_1^4 est l'éclaté $\widehat{\mathbb{CP}^2}$ de \mathbb{CP}^2 en neuf points fixes d'un pinceau C_t de cubiques ; le tore T^2 est l'image directe \widehat{C}_0 de C_0 une cubique lisse du pinceau. Une base de l'homologie du tore T^2 est représentée par des cycles évanescents, ils bordent donc dans M_1^4 des disques qui ont une auto-intersection -1 si on les pousse par un champ de vecteurs qui, sur le bord, est tangent au tore T^2 : la parallélisation stable induite sur les deux premiers facteurs de T^3 est aussi non triviale et h_n est congrue modulo $\pi_{n+3}^0(S^n)$ à cette parallélisation stable de T^3 , qui est nulle car elle s'étend à $M_1^4 - \widehat{T^2 \times D^2}$. \square

EXERCICES

I. LES GROUPES DE COBORDISMES Ω_4 , Ω_3 , n_3 .

0) Soit M^n une variété de dimension n , V^{n-1} une sous-variété duale de $w_1(M)$, prouver que V est orientable. [Indication : sinon le fibré ν normal à V dans M serait le fibré d'orientation (pourquoi ?) et $M = (M - \widehat{E(\nu)}) \cup E(\nu)$ serait orientable.]

Ce résultat dû à Rohlin se trouve dans l'article "Le plongement d'une variété de dimension 3 non orientable dans un espace euclidien de dimension 5", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 160 (1965), pp. 549-551 (en russe) ; traduction anglaise Sov. Math. Dokl. 6 (1965), pp. 153-156. Cet article est splendide surtout si on le compare à la seule alternative existant dans la littérature pour plonger dans \mathbb{R}^5 une variété de dimension 3 non orientable (cette alternative de Wall utilise la suite spectrale d'Adams !). Il est bien dommage que cet article soit méconnu. (Il semble que pour le critique des Math. Reviews, un isomorphisme de fibré est l'identité sur la base, alors que Rohlin permet, dans cet article, n'importe quel difféomorphisme sur la base.)

1) Donner une démonstration de $\Omega_3 = 0$ en s'inspirant des méthodes du 4e article. Deux possibilités :

a) Plonger M^3 dans \mathbb{R}^6 et enrouler une section du fibré normal autour de cercles pour la faire border homologiquement (puis géométriquement) dans le complémentaire de M dans S^6 (on évite ainsi les modifications Θ_1 et Θ_2).

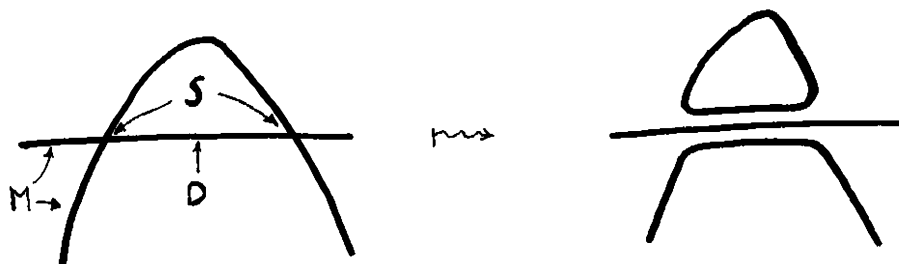
b) Soit, M^3 étant plongée dans \mathbb{R}^5 , enrouler une section du fibré normal pour la faire border homologiquement dans le complémentaire de M dans S^5 .

2) Variantes de $\Omega_4 = \mathbb{Z}$. Il s'agit de se passer de l'opération de chirurgie ronde Θ_2 .

a) Plonger M dans \mathbb{R}^8 . Par enroulement sur des cercles, trouver une section qui borde homologiquement dans le complémentaire de M dans S^8 . Lisser une homologie hors de son 0-squelette par la méthode de Kneser en utilisant que toute variété orientable de dimension i dans S^{3+i} , $0 \leq i \leq 3$, borde une surface de Seifert orientable. On arrive à un cobordisme de M à une variété qui se plonge dans S^7 . Continuer comme Rohlin le fait dans le 4e ou le 3e article (voir le dernier paragraphe des notes sur la méthode de Kneser).

b) (d'après Melvin) Si M , simplement connexe, est immergée dans \mathbb{R}^7 , prouver qu'un cercle C de points doubles borde un disque D dans M^4 disjoint des

autres cercles de points doubles. Eliminer alors les points doubles de C par une chirurgie plongée d'indice deux :



3) Le groupe de cobordisme non orientable n_3 est nul.

a) Démontrer qu'une variété non orientable de dimension 3 borde par un argument de suite exacte de Rohlin.

b) Démonstration collant aux méthodes des 3e et 4e articles.

b.1) Montrer que toute variété de dimension 3 est cobordante à une variété M plongée dans \mathbb{R}^5 (pour éliminer les points doubles d'une immersion en position générale, seul un cas nouveau apparaît : cercle de points doubles à revêtement trivial, chacune des composantes ayant un voisinage non orientable dans la variété de départ).

b.2) Prouver qu'il y a un cercle C plongé dans M hors duquel le fibré normal à M a une section non nulle, l'obstruction à étendre cette section à un disque transverse au cercle C étant $\pm 2 \in \pi_1(SO(2))$.

b.3) Eclater M le long du cercle C pour trouver une variété M_1 plongée dans \mathbb{R}^5 dont le fibré normal à une section partout non nulle, la variété M_1 étant cobordante à $M \cup V$ où V est l'espace total d'un fibré en plans projectifs réels sur le cercle. Prouver qu'un tel fibré est toujours trivial, donc $V \approx S^1 \times \mathbb{R}P^2 = \partial(D^2 \times \mathbb{R}P^2)$. Opérer alors sur M_1 comme dans l'exercice 1.b) (mais en utilisant l'homologie modulo 2).

Remarque : Il semble nécessaire d'opérer ainsi car la méthode de Kneser à bord ne fonctionne pas dans le cas non orientable.

II. LE GROUPE DE COBORDISME Ω_3^{Spin} DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 MUNIES D'UNE STRUCTURE SPIN EST NUL.

La nullité du groupe de cobordisme spin en dimension 3 est équivalente à la surjectivité du J -homomorphisme $J : \pi_3(SO(n)) \rightarrow \pi_{n+3}(S^n)$ pour $n \geq 3$ (dans la terminologie de Rohlin, $\pi_{n+3}(S^n) = \pi_{n+3}^0(S^n)$). Rohlin a montré ce fait dans le 2e article

(corrigé par le 4e article). Les exercices suivants permettent de voir ce résultat plus directement en suivant la démonstration du 3e article.

1) a) Soit M^3 une variété de dimension 3 munie d'une structure spin s .
Montrer que l'on peut choisir l'immersion de M dans \mathbb{R}^5 de façon à ce que la variété plongée M_1 , se déduisant de M par les opérations Θ_1 et Θ_2 , possède une structure spin s_1 telle que (M_1, s_1) est spin cobordante à (M, s) (immerger $M \times D^2$ dans la structure spin donnée).

b) Remarquer que si une variété M^3 est plongée dans \mathbb{R}^5 , le nul cobordisme construit dans le 3e article est une variété spin (mais la structure spin induite sur le bord peut être différente de la structure spin donnée !).

c) Soient s et s' deux structures spin sur une variété M de dimension 3. Prouver que la variété spin $(M, s) \amalg (M, -s')$ est spin cobordante à $(F \times S^1, s'')$ où $F \times S^1$ est l'espace total d'un S^1 fibré sur une surface F d'espace total orientable et de classe d'Euler nulle.

Prouver que : (i) $(F \times S^1, s'') \amalg (\mathbb{RP}^2 \times S^1, s''')$ est spin cobordante à une union de $(\mathbb{RP}^2 \times S^1, s''')$;

(ii) $\mathbb{RP}^2 \times S^1$ est difféomorphe à $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ la somme connexe de deux exemplaires de \mathbb{RP}^3 ;

(iii) toute structure spin sur \mathbb{RP}^3 borde (un fibré sur la sphère S^2 de classe d'Euler ± 2 suivant la structure).

Conclure que $\Omega_3^{\text{Spin}} = 0$.

2) a) Soit M un sous-fibré non orientable d'un fibré trivial $S^1 \times D^2$ sur le cercle. Soit M' le fibré orthogonal. Soit $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ le difféomorphisme qui, en identifiant $S^1 \times D^2$ à $M \oplus M'$, s'écrit $\text{id} \oplus -\text{id}$.

a.1) Prouver qu'il y a un entier n tel que le difféomorphisme f soit isotope à $(z, t) \mapsto (z, z^{2n+1} t)$.

a.2) En déduire qu'un difféomorphisme de \mathbb{RP}^3 de degré -1 échange les deux structures spin de \mathbb{RP}^3 (il faudra d'abord définir l'image d'une structure spin par un difféomorphisme, préservant ou non l'orientation).

b) Donner une démonstration par l'absurde de a.2) (construire une variété spin de dimension 4 de signature ± 2).

III. INJECTIVITE DE L'OUBLI $\Omega_4^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_4$.

Soit M une variété de dimension 4 munie d'une structure spin et de signature nulle.

a) Prouver qu'il y a une variété M_1 de dimension quatre, simplement connexe, spin cobordante à M et plongée dans \mathbb{R}^7 .

b) i) Prouver que le fibré normal à M_1 dans \mathbb{R}^7 a une section partout non nulle. [Indication : considérer sa première classe de Pontriaguine.]

Soit E un tube autour de M_1 dans \mathbb{R}^7 .

ii) Prouver qu'il y a une section s du fibré normal dont l'image est dans ∂E , qui borde homologiquement dans le complémentaire $\overset{\circ}{E}$ et dont l'auto-intersection géométrique dans ∂E consiste en deux exemplaires parallèles F_0 et F_1 d'une surface F d'auto-intersection nulle dans M_1 . [Indication : enrouler une section donnée par b.i) autour d'une surface $G \subset M_1$, prouver que M_1 spin entraîne que $[G]$ est un double dans $H^2(M; \mathbb{Z})$, utiliser que la signature de M_1 est nulle pour conclure que l'auto-intersection de G dans M_1 est nulle.]

c) Soit W^5 une surface de Seifert bordant $s(M_1)$ dans \mathbb{R}^7 et \tilde{G}^3 l'auto-intersection de W dans \mathbb{R}^7 : \tilde{G} est orientable et $\partial \tilde{G} = F_0 \cup F_1$. Soit G obtenue en collant F_0 à F_1 par l'"identité" ; attention ! G n'est pas orientable.

1) Montrer que M_1 est spin cobordante au bord $\partial \xi_G$ d'un fibré en disque ξ_G sur G .

2) Construire un cobordisme V de G à H tel que :

- i) le fibré ξ_G s'étend en un fibré ξ_V dont la restriction à H est triviale.
- ii) la structure spin sur le bord de ξ_G s'étend en une structure spin sur le bord de ξ_V : elle induit donc une structure spin sur $\partial \xi_H = H \times S^1$ qui est spin cobordante à la structure de départ.

Construire une variété spin K^4 de bord H telle que la structure spin sur $H \times S^1$ s'étende à $K \times S^1$.

d) Procéder abstraitement.

Soit Q^5 une variété bordant M^4 (car signature $(M^4) = 0$). Construire une chaîne polyédrale G^3 dans Q^5 représentant $w_2(Q^5)$. Appliquer la méthode de Kneser comme dans la proposition de 3. A pour lisser G^3 , prouver que le $w_1(G^3)$ est représenté par une surface F orientable à fibré normal trivial dans G^3 , continuer alors comme en c).

IV. CONTROLE DES ECLATEMENTS, THEOREME DE HAEFLIGER-BOECHAT, NOEUDS DE S^3 DANS S^6 .

1) Soit M^4 une sous-variété de dimension 4 de \mathbb{R}^7 . Soit s une section de son fibré normal non nulle dans le complémentaire d'un point x_0 ; soit ξ le fibré de rang 2 défini dans le complémentaire de x_0 comme supplémentaire de la section s ; soit enfin F une surface représentant la classe d'Euler de ξ .

a) Prouver que F est un cycle caractéristique de M ($[F]_2 = w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}); [F]$ la réduction modulo 2 de $[F] \in H^2(M; \mathbb{Z})$).

b) Prouver que l'obstruction à étendre s en une section partout non nulle est $-\frac{F \bullet F + 3\sigma(M)}{4} \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$. L'éclatement consiste alors à faire la somme connexe avec $\frac{F \bullet F + 3\sigma(M)}{4}$ plans projectifs complexes avec l'orientation opposée : la signature de la variété éclatée est $\frac{\sigma(M) - F \bullet F}{4}$. [Indication : calculer la première classe de Pontriaguine du fibré normal à M .]

c) Prouver que si on avait enroulé la section s autour d'une surface disjointe de x_0 et représentant une classe $X \in H^2(M; \mathbb{Z})$, il aurait fallu éclater $F \bullet X + X^2$ points (la signature devient : $\frac{\sigma(M) - F \bullet F - 4F \bullet X - 4X \bullet X}{4} = \frac{\sigma(M) - (F + 2X)^2}{4}$)

Prouver que la classe d'Euler du fibré normal à la section éclatée est $F + 2X - \Sigma$ "diviseurs exceptionnels".

2) Théorème de Haefliger-Boechat.

a) Dédire de 1) que si M admet un plongement dans \mathbb{R}^7 , il y a une surface caractéristique $F \in H^2(M; \mathbb{Z})$ telle que : $F \bullet F = \text{signature de } M$.

b) Réciproquement, si M^4 simplement connexe possède une surface caractéristique F telle que $F \bullet F = \text{signature de } M$, prouver que M admet un plongement dans \mathbb{R}^7 : Soit ξ le fibré de rang 2 sur M de classe d'Euler F et ν le fibré de rang 3 obtenu en tordant $\xi \oplus \epsilon$ de $-\sigma(M) \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^2) = P_* (\pi_3(SO(3)))$ ($P : SO(3) \rightarrow S^2$ est l'évaluation sur le premier vecteur de base).

b.1) Prouver que l'espace total $E(\nu)$ de ν est parallélisable et qu'il y a une application $f : (E(\nu), \partial(E(\nu))) \rightarrow (S^4 \times D^3, S^4 \times S^2)$ de degré un (pour la deuxième projection, utiliser la construction de Thom sur le fibré normal à une "section éclatée" obtenue à partir de la section $(0, 1)$ de ν sur le complémentaire de σ points dans M (où $\nu \cong \xi \oplus \epsilon$)).

b.2) Ajouter $k = \text{rg } H_2(M)$ anses d'indice 3 pour obtenir une équivalence d'homotopie $\varphi : V^7 = (E(\nu) \bigcup_{i=1}^k D^3 \times D^4, \partial) \rightarrow (S^4 \times D^3, \partial)$. Prouver que V^7 est difféomorphe à $S^4 \times D^3$. Conclure.

3) Noeuds différentiables de S^3 dans S^6 .

Soit un noeud formé par une sphère S^3 plongée différentiablement dans S^6 .

i) Prouver qu'il y a une surface de Seifert V^4 pour ce noeud et qu'après d'éventuelles sommes connexes avec le cylindre de l'application de Hopf ou de son opposée, deux telles surfaces de Seifert sont cobordantes.

ii) Soit F la classe d'Euler du fibré normal à V^4 dans S^6 . Prouver que $\frac{\text{signature de } V - F \bullet F}{8} \in \mathbb{Z}$ est un invariant qui ne dépend que du noeud et que tous les entiers sont réalisés. (Pour la réalisation, utiliser une immersion générique de l'espace total d'un fibré en disque de classe d'Euler 3 sur le plan projectif troué \mathbb{CP}_0^2 ; comme \mathbb{CP}_0^2 est l'espace total d'un fibré en disque sur la sphère S^2 , une immersion générique est un plongement.)

iii) Prouver qu'un noeud d'invariant zéro est trivial. [Faire la chirurgie plongée sur une surface de Seifert simplement connexe, de signature nulle, en remarquant que l'on peut choisir, pour V , une somme connexe de plans projectifs $V = \#_n \mathbb{CP}^2 \#_n -\mathbb{CP}^2$ tels que la classe F soit une classe diagonale (c'est une conséquence des théorèmes de Wall : 1) Il existe m, n tels que $V \#_m \mathbb{CP}^2 \#_n -\mathbb{CP}^2$ est difféomorphe à $\#_k \mathbb{CP}^2 \#_\ell -\mathbb{CP}^2$.

2) le groupe des difféomorphismes de $V = \#_p \mathbb{CP}^2 \#_p -\mathbb{CP}^2$ est transitif sur les éléments primitifs, caractéristiques, de norme 0 de $H^2(V, \mathbb{Z})$.]

UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

INTRODUCTION.

C'est un problème fondamental et non résolu que de savoir quelles formes quadratiques peuvent être réalisées comme formes d'intersection $H_2(M; \mathbb{Z}) \times H_2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ d'une variété orientée fermée lisse M^4 de dimension quatre. Récemment, M. Freedmann [Fr] a montré que toute forme quadratique peut être ainsi réalisée par une variété topologique et dans le cas lisse, Donaldson [D] a montré que, parmi les formes définies positives, seule la forme triviale est représentable. En général, si M^4 est une variété fermée orientée de dimension quatre et si F^2 est une surface fermée orientable dans M^4 représentant dans $H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un élément dual à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$, l'algèbre nous dit que $\sigma(M) - F.F = 0 \bmod 8$ [MH, II §5] où $F.F$ représente l'autointersection de la classe d'homologie de F et $\sigma(M)$ la signature de la forme d'intersection sur $H_2(M; \mathbb{R})$. Dans le cas où M est lisse, Rohlin [R2] a donné une formule explicite calculant $\sigma(M) - F.F \bmod 16$ en fonction de l'invariant d'Arf d'une certaine forme quadratique $q: H_2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci généralisait son vieux résultat de 1952 [R1] disant que $\sigma(M) = 0 \bmod 16$ si $F = \emptyset$ (résultat qui disait déjà que certaines formes quadratiques ne sont pas représentables comme ci-dessus par des variétés lisses, par exemple E_8 , cf. [MH, II §6]).

Nous donnons ici une formule semblable dans le cas où F n'est pas nécessairement orientable. Ces surfaces caractéristiques non orientables se rencontrent naturellement dans l'étude du 16e problème de Hilbert ([Mar1] [A']) . D'ailleurs, le papier [R2] de Rohlin est consacré à ce problème.

Notre but principal ici est d'énoncer et de prouver notre généralisation d'une manière simple et directe, sinon la plus élégante, à la suite de nos commentaires aux travaux de Rohlin [GM3] . Nous renvoyons à l'article de Matsumoto [Mat] pour un point de vue et une preuve un peu différents. Le papier de Freedman et Kirby [FK] qui donne une preuve de la formule de Rohlin contient aussi des motivations et commentaires que nous ne répétons pas. (+)

Signalons enfin que les articles récents de T. Fiedler [Fi] et Turaev [T] traitent de questions voisines.

(+) Notre formule a été annoncée en 1977 [GM1] et nous avons donné une première version du présent texte en 1980 [GM2] (elle contient malheureusement quelques bêtises)

I. - ENONCE DU RESULTAT.

Nous travaillons dans la catégorie des variétés lisses compactes. Soit M^n une variété de dimension n et soit V^{n-2} une sous-variété de codimension 2. On dit que V^{n-2} est caractéristique si il existe une trivialisation du fibré tangent à $M - V$ au-dessus du 2-squelette de M qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à F pour une triangulation du couple (M, V) , cf. [GM3, I appendice C]. On note $i : V \hookrightarrow M$ l'inclusion de V dans M .

Soit M^4 une variété fermée, orientée de dimension 4 et soit F^2 une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable) dans M telle que $i_*(H_1(F^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors, on peut définir une forme quadratique naturelle $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, associée à la forme d'intersection homologique sur F , telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin [R2] ait lieu :

THEOREME. On a : $\sigma(M) - F.F = 2\alpha(M, F) \bmod 16$ où $\sigma(M)$ désigne la signature de la variété orientée M , $F.F$ l'auto-intersection de F dans M (cf. [W]) et $\alpha(M, F)$ l'invariant de Brown de la forme quadratique q associée au couple (M, F) (cf. [B] et le paragraphe suivant).

Rappelons que $F.F$ peut être commodément défini comme suit : Soit s une section, n'ayant que des zéros simples, du fibré normal à F dans M ; on pousse légèrement F selon s pour obtenir une surface F' et un difféomorphisme $\varphi : F \rightarrow F'$. Maintenant $F \cap F' = \{x \in F \mid \varphi(x) = x\}$ est fini. Etant donné $a \in F \cap F'$, on choisit une orientation locale θ près de a pour F , ce qui définit une orientation locale $\varphi(\theta)$ près de a pour F' . Si l'orientation $\theta \oplus \varphi(\theta)$ près de a pour M coïncide avec l'orientation donnée de M , nous donnons le signe $\epsilon(a) = +1$ à a et le signe -1 dans le cas contraire. Clairement, $\epsilon(a)$ ne dépend pas du choix de θ près de a .

Alors, $F.F = \sum_{a \in F \cap F'} \epsilon(a)$.

Remarque. Si la surface F est orientable, la forme quadratique q prend ses valeurs dans $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\alpha(M, F)$ qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant de Arf de q : on retrouve la formule connue de Rohlin [R2]. Rappelons que le cas $F = \emptyset$ est très célèbre, il date de 1952 et est aussi dû à Rohlin [R1].

II. - LES FORMES QUADRATIQUES SUR LES $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ESPACES ET L'INVARIANT DE BROWN

(cf. [B], [BLLV, appendices])

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension finie n , muni d'une forme bilinéaire $(x, y) \mapsto x \cdot y$ symétrique, non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DEFINITION 1. Une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une application $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2x \cdot y ,$$

où $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est l'unique homomorphisme non nul.

Remarques et exemples.

1) On a $q(0) = q(0+0) = q(0) + q(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 = q(0) + q(0)$, d'où $q(0) = 0$.

2) Sur $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n'y a qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée : le produit du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et on a :

$$0 = q(1+1) = q(1) + q(1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2q(1) + 2 , \text{ donc } q(1) = \pm 1 .$$

Il y a donc deux formes quadratiques, q_+ et q_- , sur un espace de dimension un

3) Si $\bar{q} : V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme quadratique ordinaire sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. [MH, Appendix 1]), alors $q = 2\bar{q}$ est une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

DEFINITION 2. Une forme quadratique $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est neutre s'il existe un sous-espace $H \subset V$ de dimension moitié sur lequel q est nulle (et alors H est égal à son orthogonal pour la forme bilinéaire).

On définit de la manière usuelle la somme orthogonale de deux formes quadratiques ; remarquons que si $V = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition orthogonale pour la forme bilinéaire, alors $q = q|_{V_1} \oplus q|_{V_2}$.

En quotientant le semi-groupe des formes quadratiques ainsi obtenu par le semi-groupe des formes neutres, on obtient le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (cf. [BLLV, appendices]).

Si $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une forme quadratique et si $x \in V$, on pose $\psi(x) = \exp\left(\frac{i\pi}{2} q(x)\right) = i^{q(x)}$.

DEFINITION 3. L'invariant multiplicatif de Brown de la forme quadratique q est le nombre complexe :

$$\gamma(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{x \in V} \psi(x) \quad (\text{où } n = \dim V) \quad .$$

PROPOSITION. L'application γ établit un isomorphisme entre le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et le groupe des racines huitièmes de l'unité.

En notations additives, on écrira :

$$\alpha : WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad , \quad \text{où } \gamma = \epsilon \circ \alpha \quad ,$$

avec $\epsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \{\text{racines huitièmes de l'unité}\}$ donné par $\epsilon(1) = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Remarque. Si la forme bilinéaire est isotrope, i.e. vérifie $x.x = 0$ pour tout x de V la forme quadratique q ne prend que des valeurs paires : $0 = q(2x) = q(x) + q(x)$; de sorte que $q = 2\bar{q}$, où $\bar{q} : V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme quadratique ordinaire, ψ ne prend que les valeurs $+1$ et -1 et l'invariant de Brown γ de q est le classique invariant d'Arf de \bar{q} qui vaut $+1$ si la forme représente plus souvent 0 que 1 , et -1 dans le cas contraire .

Démonstration de la proposition.

LEMME 1. $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1)\gamma(q_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Preuve. } \gamma(q_1 \oplus q_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1+n_2} \sum_{x \in V_1, y \in V_2} i^{q_1(x)} i^{q_2(y)} = \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1} \sum_{x \in V_1} i^{q_1(x)}\right] \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_2} \sum_{y \in V_2} i^{q_2(y)}\right] = \gamma(q_1)\gamma(q_2) \quad . \end{aligned}$$

LEMME 2. Si la forme quadratique q est neutre, $\gamma(q) = 1$.

Preuve. Soit $H \subset V$ un sous-espace de dimension moitié sur lequel q s'annule.

Soit $V = H \oplus L$ une décomposition en somme directe. Alors, si $n = \dim V$:

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h \in H, \ell \in L} \psi(h+\ell) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h \in H, \ell \in L} \psi(\ell)(-1)^{\ell \cdot h} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[\sum_{\ell \in L - \{0\}} \left(\sum_{h \in H} (-1)^{\ell \cdot h} \psi(\ell) \right) + \text{card}(H) \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{card}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (2^{n/2}) = 1 \quad . \end{aligned}$$

La quatrième égalité suit de ce que la forme bilinéaire étant non dégénérée, pour $\ell \neq 0$, la forme linéaire φ sur H donnée par $\varphi(h) = \ell \cdot h$ est non nulle (H est égal à son orthogonal) et donc prend la valeur 0 autant de fois que la valeur 1 ($\dim(\text{Ker } \varphi) = \dim H - 1$) .

LEMME 3. Si la forme bilinéaire n'est pas isotrope, V se décompose en une somme orthogonale d'espaces de dimension un.

Preuve. Puisque l'application $x \rightarrow x.x$ est linéaire, la non dégénérescence fournit $c \in V - \{0\}$ tel que pour tout $x \in V$, $c.x = x.x$. Si $\dim V \geq 2$, il existe y distinct de c tel que $y.y = 1$ (si $c.c = 1$ et $y.y = 0$, alors $(c+y).(c+y) = 1$) et V se décompose en $(y) \oplus (y)^\perp$. Puisque y est distinct de c , la restriction de la forme bilinéaire à $(y)^\perp$ est non isotrope (si $z.z = c.z = 0$ pour tout $z \in (y)^\perp$, alors $c \in ((y)^\perp)^\perp = (y)$). On termine par induction sur $\dim V$.

LEMME 4. Si q est une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors $4(\oplus q) = q \oplus q \oplus q \oplus q$ est isométrique à $4(\oplus (-q))$. Et donc $8(\oplus q)$ est neutre.

Preuve. Soit $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$ et soient $\varphi_i : V \rightarrow W$, $i = 1, 2, 3, 4$, les applications $\varphi_1(x) = (0, x, x, x)$; $\varphi_2(x) = (x, 0, x, x)$; $\varphi_3(x) = (x, x, 0, x)$; $\varphi_4(x) = (x, x, x, 0)$. On a $4(\oplus q)(\varphi_i(x)) = 3q(x) = -q(x)$, et $\varphi_i(V)$ orthogonal à $\varphi_j(V)$ pour $i \neq j$.

L'isomorphisme cherché est $\bigoplus_{i=1}^4 \varphi_i : V \oplus V \oplus V \oplus V \rightarrow W$.

Pour conclure la preuve de la proposition, on note que puisque $q_+ \oplus q_-$ est neutre, le lemme 3 appliqué à $q \oplus q_+ \oplus q_-$ montre que $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est cyclique, engendré par la classe de q_+ (exemple 2) et d'ordre un diviseur de huit par le lemme 4. Les lemmes 1 et 2 assurent que γ est un homomorphisme. Finalement, on vérifie que $\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ est une racine huitième primitive de l'unité. \square

Remarque. Il est maintenant facile d'établir que l'invariant de Brown d'une forme quadratique, son rang et l'isotropie ou l'anisotropie de la forme bilinéaire associée déterminent sa classe d'isométrie.

III. - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA FORME QUADRATIQUE

$$q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

On se place maintenant dans la situation du paragraphe I.

DEFINITION 4. Une membrane P^2 pour la surface caractéristique F est une surface compacte (non nécessairement orientable) immergée dans M , plongée et normale à F près de son bord $\partial P \subset F$, et dont l'intérieur est transverse à F .

Soit f une immersion générique $P^2 \hookrightarrow M$ dont l'image $f(P)$ est une membrane. Le bord de $f(P)$ consiste en des courbes simples fermées de F ; notons \mathcal{O}

l'obstruction à étendre le fibré normal en droites à ces courbes dans F en un sous-fibré de rang un du fibré normal $\nu(f)$ de l'immersion. Rappelons que $\nu(f)$ est défini par la suite exacte $0 \rightarrow \tau(P) \rightarrow f^*(\tau(M)) \rightarrow \nu(f) \rightarrow 0$, où $f^*(\tau(M))$ est le retiré du fibré tangent à M au-dessus de P par f . On vérifie aisément que deux immersions de même image donnent lieu à des fibrés normaux isomorphes et donc que l'obstruction σ ne dépend pas du choix de f . Cette obstruction habite $H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$, les coefficients étant tordus par la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\nu(f))$. Son évaluation sur la classe fondamentale $[P, \partial P] \in H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ est un entier encore noté σ . On pose alors : $q'(P^2) = \sigma + 2P.F \bmod 4$, où $P.F$ désigne le nombre de points d'intersection transverse de l'intérieur de P (i.e. de $f(P)$) avec F .

Remarque 1. Une définition plus géométrique, et souvent plus efficace dans les applications, de l'obstruction σ est la suivante :

Soit \tilde{P} une surface compacte et $j: \tilde{P} \rightarrow \nu(f)$ une immersion telle que :

- (i) $p \circ j: \tilde{P} \rightarrow P$ est un revêtement ramifié à deux feuillets où p désigne la projection de l'espace total du fibré $\nu(f)$ sur sa section nulle P .
- (ii) j est transverse à P (vu comme la section nulle de $\nu(f)$), et $j(\tilde{P}) \cap P$ ne contient aucun des points doubles de $j(\tilde{P})$ ou de P .
- (iii) $f(\partial \tilde{P})$ est le bord d'un tube autour de ∂P dans F .

Pour chaque point a de l'intersection $P \cap j(\tilde{P})$, une orientation locale θ de P induit (via le revêtement $p \circ j$) une orientation locale θ' de $j(\tilde{P})$. Si l'orientation $\theta \oplus \theta'$ coïncide avec celle de l'espace total du fibré $\nu(f)$, on attache le signe $\epsilon(a) = +1$ à a et le signe -1 dans le cas contraire. Clairement, $\epsilon(a)$ ne dépend pas du choix de l'orientation θ près de a .

$$\text{Alors, l'obstruction } \sigma = \sum_{a \in P \cap j(\tilde{P})} \epsilon(a) .$$

L'existence d'une telle immersion j peut s'obtenir en désingularisant l'image de deux sections de $\nu(f)$ en position générale l'une par rapport à l'autre et par rapport à la section nulle de $\nu(f)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la somme ci-dessus ne dépend pas des choix de \tilde{P} et j (soit directement, soit en montrant l'égalité ci-dessus !).

Remarque 2. Si P n'a pas de composantes fermées, la membrane P est homotopiquement équivalente à un bouquet de cercles, donc, par stabilité, on peut écrire $\nu(f)$ comme une somme directe avec un sous-fibré trivial de rang un. Maintenant deux tels sous-fibrés triviaux de $\nu(f)$ induisent deux sous-fibrés homotopes de $\nu(f)|_{\partial P}$ qui est

un fibré trivial. En effet, si nous décrivons nos deux sous-fibrés triviaux de $\nu(f)$ par des sections sans zéros s et s' et si $d(s|_{\partial P}, s'|_{\partial P})$ est la différence primaire dans $H^1(\partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t) \cong \mathbb{Z}^{(+)}$, on a $([S, §36]) \quad \delta(d(s|_{\partial P}, s'|_{\partial P})) = \sigma(s|_{\partial P}) - \sigma(s'|_{\partial P})$ où δ est le cobord $H^1(\partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t) \xrightarrow{\cong} H^2(P, \partial P; \pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ et $\sigma(s|_{\partial P})$ est l'obstruction primaire à étendre $s|_{\partial P}$. Donc $d(s|_{\partial P}, s'|_{\partial P}) = 0$, ce qui prouve que $s|_{\partial P}$ et $s'|_{\partial P}$ sont homotopes.

Soient s_0 la restriction à ∂P d'une section sans zéros d'un sous-fibré trivial de rang un de $\nu(f)$ et s_1 la section sans zéros au-dessus de ∂P donnée par le fibré normal en droite à ∂P dans F . On a $\delta d(s_1, s_0) = \sigma(s_1) - \sigma(s_0) = \sigma(s_1)$. Puisque δ est un isomorphisme, on peut identifier notre obstruction σ à $d(s_1, s_0)$. Ceci explique la relation entre notre définition de la forme quadratique q' et celle de Y. Matsumoto [Mat].

Remarque 3. Les explications de la remarque 1 (ou les calculs de la remarque 2) montrent que si ∂P est connexe, l'obstruction σ est paire si et seulement si ∂P admet un voisinage annulaire dans F . En général, si toutes les composantes connexes de ∂P ont des voisinages annulaires dans F , alors $\sigma = 2\sigma(v)$, où $\sigma(v)$ est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal à ∂P^2 dans F en un champ de vecteurs (sans zéros) normal à P^2 dans $\nu(f)$ (le facteur 2 vient de ce que la flèche naturelle $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ est de degré 2).

En particulier, si la surface caractéristique F est orientable, on obtient $q'(P^2) = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \bmod 4$. On retrouve la définition de Rohlin [R2].

PROPOSITION 1. $q'(P^2)$ ne dépend que de la classe d'homologie modulo 2 de ∂P^2 dans F . Ceci permet de définir une application $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

LEMME. Supposons que (M^4, F^2) soit bord de (V^5, G^3) où V^5 est une variété orientée compacte de dimension 5 et G^3 une sous-variété caractéristique (non nécessairement orientable). Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial \Delta$, et soit P une membrane pour F (dans M) de bord $\partial P = \partial \Delta$. Alors, $q'(P) = 0$.

Preuve de la proposition 1 (à partir du lemme).

Si P_0 et P_1 sont deux membranes dont les bords représentent la même classe d'homologie modulo 2, on applique le lemme à l'union disjointe $(M \times \{0\}, F \times \{0\}) \sqcup (M \times \{1\}, F \times \{1\})$ de deux copies de (M, F) avec $V^5 = M \times [0, 1]$, $G^3 = F \times [0, 1]$ et Δ^2 une désingularisation d'un cycle modulo 2 qui réalise une homologie dans $F \times [0, 1]$ entre $\partial P_0 \subset F \times \{0\}$ et $\partial P_1 \subset F \times \{1\}$

(+) Dans le cas où ∂P est connexe ; l'extension facile au cas général est laissée au lecteur.

(l'existence de Δ^2 s'obtient facilement par les méthodes de Kneser, cf. [GM3, II.2]). On obtient alors dans $\partial V : q(P_0 \times \{0\} \cup P_1 \times \{1\}) = 0 = q(P_1) - q(P_0)$ puisque, avec l'orientation de ∂V , $M \times 0$ hérite l'orientation opposée à celle de M . Ceci prouve la première assertion. Pour la seconde, tout 1-cycle z de F peut être représenté par une famille de courbes simples fermées disjointes, et puisque $i_*(H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ toute telle famille borde une 2-chaîne dans M^4 qui peut être désingularisée comme ci-dessus pour donner une membrane dont le bord représente le cycle z .

Preuve du lemme (cf. la figure).

Supposons d'abord que le bord de Δ^2 soit connexe. L'auto-intersection de $\partial\Delta$ dans F est bord de l'auto-intersection de Δ dans G donc nulle modulo 2. Par suite (puisque $\partial\Delta^2$ est connexe), $\partial\Delta^2$ admet un voisinage annulaire dans F et, comme dans la remarque 3 ci-dessus, si $\sigma(v)$ est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal v à $\partial P = \partial\Delta$ dans F en un champ de vecteurs normal (sans zéros) à P dans $\nu(f)$, il suffit de vérifier que $\sigma(v) + P \cdot F = 0 \bmod 2$. Désignons par ν et μ les fibrés normaux à G^3 dans V^5 et à Δ^2 dans G^3 , et par $E(\nu)$ et $E(\mu)$ les espaces totaux des fibrés en disques associés. Alors, $(W, U) = (E(\nu|_{\Delta^2 \oplus \mu}), E(\mu))$ est un voisinage tubulaire de Δ^2 dans (V^5, G^3) . Soient N^4 le bord de la variété $V - \overset{\circ}{W}$ et $H^2 = (F - \overset{\circ}{W}) \cup \text{Fr} U = N \cap G$. Clairement, H^2 est une surface caractéristique pour la variété orientable fermée N^4 .

Soient s et s' deux sections de $\nu|_{\Delta^2}$ avec $s(\Delta^2)$ et $s'(\Delta^2)$ transverses entre elles aussi bien qu'avec Δ^2 . Soit t une section de μ identique au champ de vecteurs v sur $\partial\Delta^2 = \partial P$ et sans zéros près de $\Delta^2 \cap (s(\Delta^2) \cup s'(\Delta^2))$. Soit enfin $\rho : \Delta^2 \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse nulle sur $\partial\Delta^2$ et telle que $\rho^{-1}(\frac{1}{2})$ soit un voisinage des zéros de s et t et des points communs à s et s' .

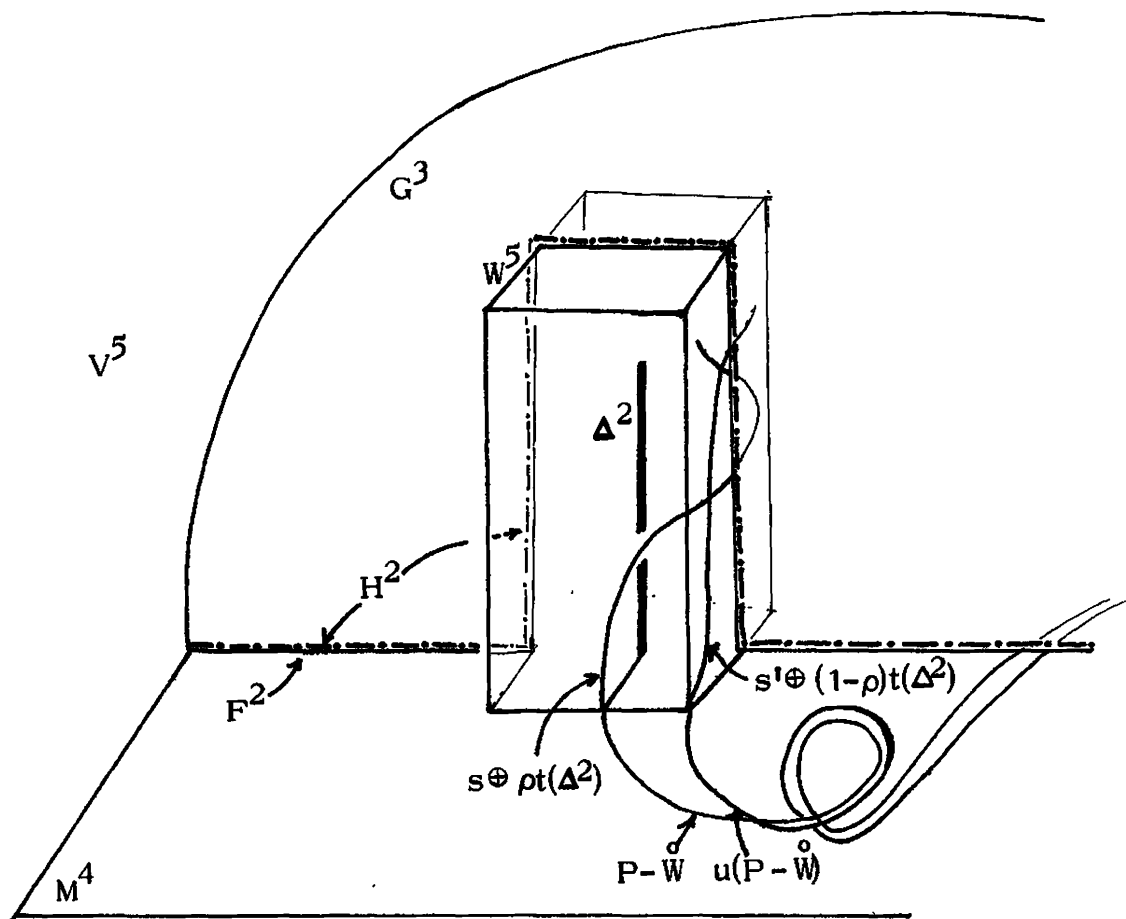
Alors, on peut pousser Δ^2 dans ∂W et former le 2-cycle de N^4 :

$$\Sigma^2 = (P - \overset{\circ}{W}) \cup s \oplus \rho t(\Delta^2) ,$$

La formule de Wu (cf. [GM³, I appendice C]) dit :

$$\Sigma^2 \cdot \Sigma^2 + \Sigma^2 \cdot H^2 = 0 \bmod 2 .$$

Soit u une section du fibré normal $\nu(f)$ d'une immersion $f : P \hookrightarrow M$ dont les zéros soient distincts des préimages des points doubles de f et qui coïncide avec v sur $\partial P = \partial\Delta$. L'immersion f s'étend en un plongement local \bar{f} de l'espace total de $\nu(f)$ dans M^4 tel que $\bar{f}(u(P))$ soit une copie difféomorphe de $f(P)$ transverse à $f(P)$. Nous maintenons notre notation P pour $f(P)$ et notons $u(P)$ au lieu de $\bar{f}(u(P))$.



Figure

On observe alors que le nombre d'intersection homologique modulo 2 $P \cdot u(P)$ (bien défini puisque $\partial P \cap \partial u(P) = \emptyset$) est la réduction modulo 2 du nombre d'obstruction $\sigma(v)$ (plus deux fois le nombre d'auto-intersection de la surface immergée P , ce qui est zéro modulo 2). Ainsi :

$$\Sigma \cdot \Sigma = [(P - \overset{\circ}{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] \cdot [u(P - \overset{\circ}{W}) \cup s' \oplus (1 - \rho)t(\Delta^2)]$$

$$= P \cdot u(P) + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) = \sigma(v) + s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2) \text{ mod } 2$$

$$\Sigma \cdot H = [(P - \overset{\circ}{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] \cdot [(F - \overset{\circ}{W}) \cup Fr U] = P \cdot F + s(\Delta^2) \cdot \Delta^2 \text{ mod } 2 .$$

Or, $s(\Delta^2) \cdot \Delta^2 = s(\Delta^2) \cdot s'(\Delta^2)$ par l'invariance homotopique des nombres d'intersection, d'où :

$$0 = \Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot H = \sigma(v) + P \cdot F \text{ mod } 2 .$$

Pour se ramener au cas $\partial \Delta^2$ connexe, nous énonçons d'abord le

SOUS-LEMME. Soit (V, G) une paire propre de variétés $(G \cap \partial V = \partial G)$ avec ∂V connexe. Alors, il existe une sous-variété propre G' de V dont le bord est la somme connexe plongée des composantes de ∂G .

De plus, on peut choisir G' coïncidant avec G excepté dans le voisinage d'arcs plongés dans ∂V connectant les composantes de ∂G (de sorte que G et G' représentent la même classe d'homologie modulo 2).

La preuve du sous-lemme, qui consiste à creuser des tunnels le long des arcs de l'énoncé, est laissée au lecteur.

Ensuite (on peut bien sûr supposer V connexe), on se ramène au cas ∂V connexe en creusant des tunnels le long d'arcs disjoints de G^3 et connectant les composantes de ∂V . On peut alors appliquer le sous-lemme et obtenir un nouveau G à bord connexe, toujours contenant Δ^2 . Une nouvelle application du sous-lemme au couple (G, Δ^2) achève de nous ramener au cas $\partial \Delta^2$ connexe.

Il reste à appliquer encore une fois le sous-lemme pour obtenir une membrane pour ce nouveau Δ^2 qui ne diffère de l'ancienne que dans le voisinage d'un arc et a même fonction q' . Il n'y a pas de difficultés.

PROPOSITION 2. L'application $q : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est quadratique pour la forme bilinéaire d'intersection de la surface F :

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\alpha \cdot \beta \quad .$$

Preuve. En considérant, si nécessaire, (M, F) union disjointe avec $(S^4, \mathbb{R}P^2)$ on peut toujours supposer que $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ se décompose en une somme directe de sous-espaces de dimension un (cf. §II, lemme 3).

On a donc seulement à montrer :

- 1) $q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta)$ si $\alpha \cdot \beta = 0$
- 2) $q(\alpha) = 1 \bmod 2$ si $\alpha \cdot \alpha = 1$.

En effet, donné 1) la décomposition de $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induit une décomposition de q , et donné 2) q est quadratique sur chaque facteur.

Pour prouver 1), remarquons d'abord que par le sous-lemme précédent on peut supposer F connexe; dans ce cas, si $\alpha \cdot \beta = 0$, on peut représenter α et β par deux familles disjointes de courbes fermées simples. Alors, si P et Q sont des membranes dont les bords représentent α et β , on rend P transverse à Q pour obtenir une membrane $R = P \cup Q$ dont le bord représente $\alpha + \beta$. Clairement, $\bar{q}(R) = \bar{q}(P) + \bar{q}(Q)$.

Pour prouver 2), on représente α par une famille de courbes simples disjointes α_i . Le point 1) donne $q(\alpha) = \sum q(\alpha_i)$ et la remarque 3 du §I nous dit $q(\alpha_i) \equiv \alpha_i \cdot \alpha_i \bmod 2$.

Remarque. Nous suggérons au lecteur de se construire une preuve directe de la proposition 2 en fabriquant une membrane pour la réunion de deux courbes se coupant transversalement à partir d'une membrane pour chacune des courbes (cf. notre première version [GM2]) .

IV. - PREUVE DU THEOREME.

LES EXEMPLES FONDAMENTAUX.

Exemple A. La droite $\mathbb{C}P^1$ est caractéristique dans le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$; les invariants sont $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$, $\mathbb{C}P^1 \cdot \mathbb{C}P^1 = 1$, $\alpha(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) = 0$.

Exemple B. Soit $c : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ la conjugaison complexe. C est une involution préservant l'orientation dont l'ensemble de points fixes $\mathbb{R}P^2$ est de codimension deux, et donc $\Sigma^4 = \mathbb{C}P^2/c$ est une variété lisse fermée orientable. L'exemple B est $(\Sigma^4, \mathbb{R}P^2)$. Nous montrons :

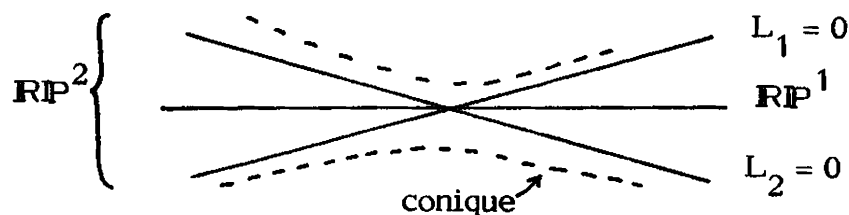
(i) Σ^4 est une sphère d'homotopie : si $p \in \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, tout élément de $\pi_1(\Sigma^4, c(p))$ se représente par un lacet intersectant $\mathbb{RP}^2 (\subset \Sigma^4)$ transversalement au seul point $c(p)$. Un tel lacet se relève à \mathbb{CP}^2 de sorte que $c_* : \pi_1(\mathbb{CP}^2, p) \rightarrow \pi_1(\Sigma^4, c(p))$ est surjective et $\pi_1(\Sigma^4) = 0$. On conclut en calculant la caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma^4) = \frac{1}{2} (\chi(\mathbb{CP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2)) = \frac{1}{2} (3+1) = 2$.

Remarque. Kuiper et Massey ([K], [Mas2]) ont montré (indépendamment) que Σ^4 est PL isomorphe à S^4 et donc difféomorphe à S^4 selon le difficile " $\Gamma_4 = 0$ " de Cerf. Récemment, A. Marin a obtenu une preuve directe et élémentaire de ce dernier résultat [Mar]. Rappelons qu'il y a de nombreuses manières de voir que Σ^4 est homéomorphe à S^4 ; par exemple, la fonction de Morse usuelle $f : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
$$f([x, y, z]) = \frac{|x|^2 + 2|y|^2}{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$
 induit une fonction de Morse sur Σ^4 avec deux points critiques.

(ii) Bien sûr, $\mathbb{RP}^2 \subset \Sigma^4$ est caractéristique et $\sigma(\Sigma^4) = 0$.

(iii) L'auto-intersection $\mathbb{RP}^2 \cdot \mathbb{RP}^2$ dans Σ^4 est deux fois l'auto-intersection $\mathbb{RP}^2 \cdot \mathbb{RP}^2$ dans \mathbb{CP}^2 par naturalité de la classe d'Euler (cf. [Mas1, lemma 1]). Ce dernier nombre est $-\chi(\mathbb{RP}^2)$ puisqu'on peut le calculer en multipliant par i un champ de vecteurs tangents à \mathbb{RP}^2 avec des points singuliers simples (cf. [A, lemma 6]). Donc, $\mathbb{RP}^2 \cdot \mathbb{RP}^2$ dans Σ^4 vaut -2 .

(iv) $\alpha(\Sigma^4, \mathbb{RP}^1) = 1$: puisque $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1$, on choisit comme membrane un des disques bordé par \mathbb{RP}^1 dans \mathbb{CP}^1 . Cette membrane ne rencontre \mathbb{RP}^2 que le long de \mathbb{RP}^1 et son nombre d'obstruction vaut $+1$; en effet, considérons deux droites L_1 et L_2 à coefficients réels proches de \mathbb{CP}^1 se coupant en un point de \mathbb{RP}^1 ; une petite variation des coefficients du produit $L_1 \cdot L_2$ donne une conique non singulière qui rencontre \mathbb{RP}^2 selon le bord d'un voisinage tubulaire de \mathbb{RP}^1 dans \mathbb{RP}^2 et qui rencontre la droite \mathbb{CP}^1 transversalement en deux points chacun de signe $+1$ (comme courbes complexes). Par conséquent, cette conique fournit un revêtement double de la membrane pour \mathbb{RP}^1 , comme dans la remarque 1, § III, d'où nous concluons $q(\mathbb{RP}^2) = 1$.



Considérons alors un couple (M, F) comme dans l'énoncé du théorème et remarquons d'abord que $\sigma(M) \equiv F.F \pmod{2}$ (en effet, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se décompose en une somme directe dont chaque facteur est soit (1) , soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'élément caractéristique respectivement 1 et 0 ; donc $F.F \equiv \dim H_2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \sigma(M) \pmod{2}$). Remarquons aussi que les trois termes de la formule à démontrer sont additifs sous la somme disjointe. L'exemple A permet alors de supposer $\sigma(M) = 0$, et donc $F.F$ pair. L'exemple B permet ensuite de supposer $\sigma(M) = 0 = F.F$. Reste alors à montrer $\alpha(M, F) = 0$; pour cela, on s'appuie sur

LEMME. Soient M une variété close orientée de dimension quatre et $F \subset M$ une surface close caractéristique. Si $\sigma(M) = 0 = F.F$, alors $(M, F) = \partial(V, G)$; où V est une variété orientée compacte de dimension cinq et G une sous-variété caractéristique de dimension trois.

Donné le lemme, on conclut aisément que $\alpha(M, F) = 0$; en effet, il faut voir que la forme quadratique q associée à (M, F) est neutre. Le lemme du § III dit que le noyau de l'application $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induite par inclusion est isotrope. D'autre part, la dualité de Lefschetz montre que ce noyau a une dimension moitié de celle de $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; donc q est neutre.

Preuve du lemme. Puisque la signature réalise un isomorphisme du groupe de cobordisme des variétés fermées lisses orientées de dimension quatre vers \mathbb{Z} , $M = \partial V^5$ où V^5 est une variété compacte orientée lisse de dimension cinq. Et, par la théorie des obstructions, il y a, à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, un 3-cycle relatif \bar{G} dans (V, M) , caractéristique et vérifiant $\partial \bar{G} = \bar{G} \cap M = F$. Nous sommes réduits au

SOUS-LEMME. Soit V une variété lisse orientable de dimension cinq à bord ; soit $\bar{G} \in V$ un 3-cycle relatif modulo 2 dont $\partial \bar{G} = \bar{G} \cap \partial V$ est une surface d'auto-intersection nulle dans V . Alors, \bar{G} est homologue modulo $\partial \bar{G}$ (et modulo 2) à une sous-variété G dans V .

Preuve. Nous utilisons les méthodes expliquées en détails dans [GM3, II.2] dues à Kneser et Rohlin. On peut supposer \bar{G} triangulé et (par un argument de collier) une variété près de son bord $F = \partial \bar{G}$. De plus, \bar{G} est certainement une variété hors de son 2-squelette. En utilisant les méthodes les plus simples de [GM3, II.2], on peut facilement se ramener au cas où \bar{G} est une variété hors de son 0-squelette. On réunit les sommets où \bar{G} n'est pas une variété par un sous-arbre du 1-squelette de \bar{G} . Le site (= "star") de cet arbre dans V est une boule B^5 de bord S^4 = la lice (= link) de cet arbre dans V . La lice de l'arbre dans \bar{G} est une surface L cobordante, par $G = \overset{\circ}{B}^5$, à F . En appliquant le sous-lemme du § III au couple $(\overset{\circ}{V} - \overset{\circ}{B}^5, \overset{\circ}{G} - \overset{\circ}{B}^5)$, on

peut supposer L connexe. Par conséquent, puisque le nombre d'auto-intersection $L.L = 0$ dans S^4 (par cobordisme et parce que V est orientable), le fibré en disques E normal à L dans S^4 admet une section sans zéros s . On montre alors, comme dans [GM3, III §3], que $s(L)$ borde dans $S^4 - \overset{\circ}{E}$ (au besoin en "enroulant" d'abord la section s) et donc que L est bord d'une sous-variété de S^4 . On peut alors utiliser à nouveau les méthodes de [GM3, II.2] pour rendre \bar{G} lisse dans sa classe d'homologie modulo 2. Ceci termine la preuve du sous-lemme, donc de la proposition 2 et du théorème.

Remarques. La fin de la preuve du sous-lemme ci-dessus montre en fait le résultat suivant :

Soit F^2 une surface d'auto-intersection $F.F = 0$ dans une variété orientable M^4 de dimension quatre et qui représente zéro dans $H_2(M^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors, il y a une variété G^3 dans M^4 de bord F^2 .

Ceci, joint à l'exemple B, donne le

THEOREME. Soient M^4 une variété spin de dimension quatre et F^2 une surface caractéristique telle que $i_*(H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors :

$$F.F \equiv -2\alpha(M, F) \pmod{16},$$

où $\alpha(M, F)$ est l'invariant de Brown du couple (M, F) .

Ceci est une généralisation d'un vieux théorème de Whitney [W] (1941).

THEOREME [Whitney]. Soit F^2 une surface dans la sphère S^4 , alors :

$$F.F \equiv -2\chi(F) \pmod{4}.$$

En effet, $\alpha(M, F) \equiv \dim H_2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \chi(F) \pmod{2}$.

L'ingrédient nécessaire pour attraper la partie signature du théorème est le résultat de Rohlin : une variété orientée fermée de dimension quatre M^4 borde une variété orientée de dimension cinq si $\sigma(M^4) = 0$.

Ainsi, on aurait pu monter la preuve du théorème principal en deux étapes :

- 1) Prouver le théorème ci-dessus (M^4 spin, en fait $M^4 = S^4$ suffit).
- 2) Prouver, comme dans le lemme et le début du sous-lemme ci-dessus, que $(M, F) \amalg -\sigma(M)(\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1) \amalg (S^4, F')$ est bord de (V, G) avec V variété orientée compacte de dimension cinq et G sous-variété caractéristique de dimension trois pour une certaine surface F' dans S^4 .

V. - CHIRURGIE ET COBORDISME CARACTERISTIQUES.

On considère maintenant des triplet (M, F, \mathfrak{F}) où M est une variété fermée orientée de dimension quatre, F une surface fermée caractéristique et \mathfrak{F} le choix d'une trivialisation du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun disque méridien de F (laquelle existe puisque F est caractéristique).

DEFINITION 5. Deux triplets (M, F, \mathfrak{F}) et (M', F', \mathfrak{F}') sont dits caractéristiquement cobordants s'il y a un triplet (V, G, \mathfrak{G}) avec V variété orientée compacte de dimension cinq, G sous-variété caractéristique de dimension trois et \mathfrak{G} une trivialisation du fibré tangent à V au-dessus du 2-squelette de $V-G$ qui vérifient $\partial V = M \sqcup (-M')$, $\partial G = F \cup F'$ et \mathfrak{G} étend \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' . Le groupe de cobordisme ainsi obtenu est le groupe de cobordisme caractéristique noté Ω_C^4 .

Remarque 1. Si on néglige les trivialisations dans la définition précédente, la relation obtenue n'est pas transitive ($[GM1, GM2]$ sont fautifs à ce point-là). On peut négliger les trivialisations si l'on se restreint aux couples (M, F) comme dans la définition avec $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, car alors il existe une unique trivialisation (à homotopie près) du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun disque méridien de F .

Soit un couple (M, F) avec M variété fermée orientée de dimension quatre et F surface caractéristique tel que $i_*(H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Et soit aussi c une courbe simple fermée de F .

LEMME. Le résultat (M', F') d'une chirurgie de paire sur (M, F) le long de la courbe c a la propriété que F' est caractéristique dans M' si et seulement si $q(c) = 0$.

Preuve. Soit P une membrane pour c dans M et soit D le 2-disque âme de la chirurgie dans M' . Alors, $\Sigma = P \cup D$ est un 2-cycle de M' et $2(\Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot F') = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \equiv q(c) \pmod{4}$, où $\sigma(v)$ est l'obstruction à étendre à P un champ de vecteurs normal à ∂P dans F (cf. la remarque 3 du § III ; bien sûr $q(c) \equiv 0 \pmod{2}$ puisque la chirurgie sur c est possible). Donc, si F' est caractéristique, la formule de Wu donne $q(c) = 0$.

Réciproquement, soit Σ un 2-cycle de M' que l'on peut supposer coupant transversalement en n points la co-âme de la chirurgie sur M' . Alors, Σ peut se voir (après isotopie) comme l'union de n translatés disjoints de l'âme de la chirurgie et d'une membrane P pour nc dans M ; donc

$2(\Sigma \cdot \Sigma + \Sigma \cdot F') = 2(\sigma(v) + P \cdot F) \equiv q(nc) = nq(c) \pmod{4}$, et F' est caractéristique dans M' .

Remarque 2. Si c est une courbe simple fermée dans F telle que $q(c) = 0$, alors (cf. la remarque 3 du § III), $c.c = 0$ et la chirurgie sur c est possible.

Soit (M, F, \mathfrak{F}) un élément de Ω_c^4 , et soit M_1 une variété simplement connexe obtenue à partir de M par des chirurgies d'indices 2 sur des cercles disjoints de F telle que la trace de la chirurgie réalise un cobordisme caractéristique entre (M, F, \mathfrak{F}) et le résultat (M_1, F, \mathfrak{F}_1) de la chirurgie ⁽⁺⁾

PROPOSITION-DEFINITION. Dans cette situation, si c est une courbe fermée simple de F , $q_{M_1}(c)$ ^(*) ne dépend pas du choix de M_1 . De cette manière, on définit une forme quadratique q (et un invariant de Brown $\alpha(M, F, \mathfrak{F})$) pour le triplet (M, F, \mathfrak{F}) .

Et alors $q(c) = 0$ si et seulement si la trace d'une chirurgie de paire sur (M, F, \mathfrak{F}) le long de c est un cobordisme caractéristique.

Preuve. Soient M_1 et M_2 deux choix possibles ; on peut supposer tous les cercles de chirurgie en vue disjoints. Soit \tilde{M} la variété obtenue en faisant toutes les chirurgies nécessaires pour fabriquer M_1 et M_2 . Alors, \tilde{M} est simplement connexe, la trace de la chirurgie de (M, F) à (\tilde{M}, F) réalise un cobordisme caractéristique entre (M, F, \mathfrak{F}) et le résultat $(\tilde{M}, F, \tilde{\mathfrak{F}})$ de la chirurgie, et clairement $q_{M_1}(c) = q_{\tilde{M}}(c) = q_{M_2}(c)$.

Supposons maintenant que la trace d'une chirurgie de paire sur (M, F, \mathfrak{F}) le long de c soit un cobordisme caractéristique, alors $q(c) = 0$ par le lemme du § III. Inversement, d'après le lemme ci-dessus, si $q(c) = 0$, le résultat (M', F') de la chirurgie sur (M_1, F) le long de c admet F' comme surface caractéristique dans M' . Soit (W, N) le complémentaire dans (M_1, F) d'un voisinage de c , c est aussi le complémentaire dans (M', F') d'un voisinage de la sphère duale à la sphère d'attachement de l'anse de chirurgie. Comme W est simplement connexe, $H_1(W - N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est engendré par les méridiens de $F \cap N$ et deux trivialisations du fibré tangent de $W - N$ au-dessus du 2-squelette de $W - N$ provenant de trivialisations des fibrés tangents à $M_1 - F$ et $M' - F'$ au-dessus de leurs 2-squelettes sont homotopes (leur différence $x \in H^1(W - N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ s'annule sur tout méridien de $F \cap N = F' \cap N$). Donc la trace de la chirurgie liant (M_1, F) à (M', F') réalise un cobordisme caractéristique par définition, il en est de même pour celle liant (M, F) à (M', F') ; on conclut par transitivité.

(+) On sait bien qu'une telle variété M_1 existe toujours et qu'elle dépend de la trivialisation \mathfrak{F} donnée.

(*) q_{M_1} désigne la forme quadratique associée, au § III, à (M_1, F) .

On se propose maintenant de calculer le groupe Ω_C^4 .

THEOREME. La suite $0 \rightarrow \Omega_C^4 \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est exacte avec $\chi(M, F, \mathfrak{F}) = (\sigma(M), F.F, \alpha(M, F, \mathfrak{F}))$ et $\pi(x, y, z) = x - (y+2z)$. Autrement dit, $(M, F, \mathfrak{F}) \mapsto (\sigma(M), F.F)$ réalise un isomorphisme de Ω_C^4 sur le sous-groupe d'indice 2 de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ défini par $x-y$ pair, $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Preuve. (a) Si $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ vérifie $x = y + 2z \pmod{16}$, on veut trouver $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_C^4$ tel que $x = \sigma(M)$, $y = F.F$ et $z = \alpha(M, F, \mathfrak{F})$. Mais, l'exemple A du § IV nous réduit à réaliser les éléments $(0, y, z)$ avec $y = -2z \pmod{16}$ ce que l'on peut faire avec une union disjointe de z exemples B.

(b)(1) Soit $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_C^4$, alors $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0$ si et seulement si (M, F, \mathfrak{F}) est caractéristiquement cobordant à un triplé $(N, S^2, \zeta) \in \Omega_C^4$.

En effet, si $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0$, la forme quadratique q sur $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ associée à (M, F, \mathfrak{F}) admet un sous-espace isotrope de dimension moitié dont une base peut être représentée par des courbes simples fermées disjointes de F . La proposition précédente assure que la trace de la chirurgie sur (M, F) le long de ces courbes sera un cobordisme caractéristique et la surface F' obtenue vérifie $H_1(F'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, donc $F' = S^2$. La réciproque découle aussi de la proposition.

(2) Soit $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_C^4$, alors $\alpha(M, F, \mathfrak{F}) = 0 = F.F$ si et seulement si (M, F, \mathfrak{F}) est caractéristiquement cobordant à un triplé $(N, \emptyset, \zeta) \in \Omega_C^4$. Cela suit de (1) et du fait que si une sphère S^2 vérifie $S^2.S^2 = 0$, on peut ajouter une 3-anse dessus sans changer le caractère caractéristique.

(3) Enfin, $(M, F, \mathfrak{F}) \in \Omega_C^4$ est nul si et seulement si $\sigma(M) = F.F = 0 = \alpha(M, F)$. Cela suit du point (2), du calcul du groupe de cobordisme ordinaire Ω^4 et de l'injectivité de l'inclusion canonique $\Omega_{\text{Spin}}^4 \rightarrow \Omega^4$ (cf. [GM3, III, exercices]).

Remarque. La démonstration précédente a été écrite pour dégager le point de vue de la chirurgie caractéristique ; en fait, on a seulement besoin du théorème qui assure $\pi \circ \chi = 0$, du point (a) pour avoir $\ker \pi \subset \text{Im}(\chi)$; enfin, l'injectivité de χ démontrée au point (b) a déjà été établie : c'est le lemme du § IV (dont la preuve commence par étendre la structure spin donnée). Le lecteur en déduira comme en [GM3, III, exercice III d)] une preuve de l'injectivité de l'inclusion canonique $\Omega_{\text{Spin}}^4 \rightarrow \Omega_4$.

A P P E N D I C E

Dans cet appendice, nous esquissons une définition de $\alpha(M, F)$ qui passe par une immersion de F dans \mathbb{R}^3 . Ce point de vue nous a été expliqué par L. Siebenmann et ce sont ses explications que nous rapportons.

1. La forme quadratique attachée à une surface immergée dans \mathbb{R}^3 .

Une bande sera pour nous une union disjointe d'anneaux et de bandes de Moëbius.

. Pour une bande Q plongée dans \mathbb{R}^3 , supposons l'âme C de la bande et son bord ∂Q orienté de manière cohérente. Alors, le nombre d'enlacement de C et de ∂Q donne un entier bien défini $\tau(Q) \in \mathbb{Z}$, indépendant du choix cohérent d'orientation.

. $\tau(Q)$ est un invariant de la classe d'isotopie, et même de concordance, de Q (calculer $\tau(Q)$ en utilisant l'intersection de deux surfaces dans B^4 bordant C et ∂Q).

. Définissons $q(Q) = \tau(Q) \bmod 4$. Alors, $q(Q)$ est un invariant de la classe d'homotopie régulière de Q .

(On utilise une surface de Seifert pour C dans \mathbb{R}^3 pour calculer τ .)

Il faut vérifier que $\parallel \parallel \rightsquigarrow = \parallel \parallel$ modifie $\tau(Q)$ par un multiple de 4.

On se ramène au cas $\bigcirc \rightsquigarrow \mathcal{P}$ où $\tau(Q)$ vaut respectivement -2 et $+2$.)

on vérifie.
. Similairement que q réalise un homomorphisme de l'ensemble des classes d'homotopie régulière de bandes munies de l'opération somme disjointe sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. D'ailleurs, si l'on se restreint aux bandes connexes, on obtient un isomorphisme.

(Par homotopie régulière, on peut dénouer C dans \mathbb{R}^3 , ensuite utiliser $\bigcirc \equiv \mathcal{P}$.)

. La forme quadratique $q : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.


F est une surface fermée, non nécessairement orientable, immergée dans \mathbb{R}^3 .

Si $x \in H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on représente x par une bande $Q \subset F$. Après perturbation de l'immersion de F dans \mathbb{R}^3 , on peut supposer Q plongée. La classe d'homotopie régulière de ce plongement est bien définie et on pose $q(x) = q(Q)$. On vérifie aisément que $q(x)$ est bien défini.

On remarque que q ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de l'immersion de F dans \mathbb{R}^3 (car il en est de même de $q(Q)$ pour une bande $Q \subset F$).

La forme q est quadratique : $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x.y \bmod 4$.

(En effet, la différence entre $+$ et \cup est $q(\bigcirc) = \pm 2$.)

. Exemple [B, exemple 1.28] . A une surface fermée orientée M^2 stablement parallélisée est associée une unique parallélisation de $M^2 \times \mathbb{R}$ et donc une immersion de M^2 dans \mathbb{R}^3 . Comme M^2 est orientable, l'invariant de Brown de q se trouve dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On a ainsi une flèche de l'ensemble π_2 des classes d'homotopie régulière des surfaces orientées immergées dans \mathbb{R}^3 vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est un isomorphisme et l'élément non nul de π_2 peut se représenter par  union un disque.

2. L'immersion associée à une surface caractéristique.

Soit M^4 une variété fermée orientée de dimension 4 et soit F^2 une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable). On suppose $H_1(M^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ ⁽⁺⁾. Puisque F est caractéristique, il existe une structure spin sur $M-F$ et donc une trivialisation \mathfrak{F}_0 du fibré tangent à M^4 au-dessus du 2-squelette de M^4-F (ce qui équivaut à une trivialisation du fibré tangent à M^4 au-dessus de (M^4-F) sauf un point) qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à F .

. Puisque $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, deux telles structures spin coïncident (leur différence est un $x \in H^1(M-F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dont la restriction à tout méridien de F est nulle. Donc x s'étend à $\bar{x} \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $x = 0$).

. Soit $F_0 = F - \text{quelques points}$, une partie de F sur laquelle existe un champ de vecteurs normal dans M .

PROPOSITION. Il y a une classe d'homotopie régulière d'immersions de F_0 dans \mathbb{R}^3 bien définie par le procédé suivant :

Fixons un champ de vecteurs normal ξ à F_0 et soit η son complément : $\xi \oplus \eta = \nu(F_0, M)$ le fibré normal à F_0 dans M . Alors, l'espace total du fibré en disques associé à η , $E(\eta)$, est un épaississement à trois dimensions de F_0 . A isotopie près, il y a une unique façon de faire coïncider le premier champ de vecteurs de la structure spin \mathfrak{F}_0 sur $M-F$ avec ξ le long de F_0 poussée par ξ . Alors, on projette le champ \mathfrak{F}_0 sur $E(\eta)$ parallèlement au premier champ de vecteurs de \mathfrak{F}_0 pour obtenir une trivialisation \mathfrak{G} du fibré tangent à $E(\eta) \supset F_0$, et par suite une immersion $g : E(\eta) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(+) Si $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est non nul, mais si (M, F) est équipé d'une trivialisation du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun méridien de F , alors q est défini puisque F_0 poussé par ξ récupère cette trivialisation (cf. la proposition). Comparer au § V.

Pour montrer la proposition, supposons que ξ' , η' , ζ' et g' proviennent d'une autre construction. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme de fibrés $\alpha: \nu(F_0, M) \rightarrow \nu(F_0, M)$ qui envoie ξ sur ξ' , η sur η' et ζ sur ζ' à homotopie près. Il s'ensuivra que $g|_{F_0}$ est régulièrement homotope à $g'|_{F_0}$.

Le complément η' de ξ' est isomorphe à η puisque tous les deux sont déterminés par $w_1(\nu)$. Donc ξ' , η' et $\alpha\mathfrak{F}_0$ conduisent comme précédemment à une trivialisatation $\alpha\zeta$ du fibré tangent à $E(\eta')$. Si on peut montrer que $\alpha\mathfrak{F}_0$ est une trivialisatation homotope à \mathfrak{F}_0 , il s'en suivra que $\alpha\zeta$ est homotope à ζ' . Pour montrer cela, on regarde chaque composante de F_0 comme une anse d'indice 0 avec quelques anses d'indice 1 attachées. Par une homotopie de fibré, on peut supposer que α est l'identité sauf sur les anses d'indices 1 où ν est trivialisé et où α s'exprime comme une torsion lorsque l'on se déplace le long de l'âme d'une anse typique H . Comme H est contractile, on peut assurer que près de H dans $M_0 - F_0$ ($M_0 = M -$ les points ôtés à F), la trivialisatation \mathfrak{F}_0 est un produit de la trivialisatation de $\mathbb{R}^2 - 0 = S^1 \times \mathbb{R}$ et de la trivialisatation standard de $H = I \times I$. Il est alors clair que α envoie \mathfrak{F}_0 sur elle-même (ce serait faux si $\mathbb{R}^2 - 0$ avait la trivialisatation induite de celle de \mathbb{R}^2).

. La classe d'homotopie régulière d'immersion $g: F_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtenue ci-dessus détermine une unique classe d'homotopie régulière d'immersion $g: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ (cela suit de la classification des immersions de S^2 dans \mathbb{R}^3 à homotopie régulière près) (+).

D'après le point 1, à l'immersion g est associée une forme quadratique sur $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et donc finalement un invariant de Brown $\alpha(M, F) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

. Nous laisserons maintenant le lecteur se convaincre de la cohérence de cette définition avec la nôtre. Bien entendu, il est aussi possible de continuer la preuve du théorème dans le langage de cet appendice. Nous allons seulement esquisser la preuve du lemme clé du § III dont nous rappelons l'énoncé.

Supposons que (M^4, F^2) soit bord de (V^5, G^3) , où V^5 est une variété orientée compacte de dimension 5 et G^3 une sous-variété caractéristique. Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial\Delta = C$ une courbe de F . Alors, $q([C]) = 0$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $[C] \in H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est représenté par C .

(+) Remarquons que l'on n'utilise pas vraiment $g: F \rightarrow \mathbb{R}^3$, mais seulement $g_0: F_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'existence est élémentaire.

En effet, puisque G est caractéristique, il existe une trivialisation du fibré tangent à V au-dessus du 3-squelette de $V-G$. Puisque Δ^2 a le type d'homotopie d'un 1-complexe, il existe un champ de vecteurs normal à G^3 défini sur un voisinage de Δ^2 . Appelons ce voisinage G_Δ^3 . Soit η le complément de ξ , $\xi \oplus \eta = \nu(G_\Delta^3, V)$. Le long d'une copie de G_Δ^3 translatée par ξ , on peut supposer que le premier vecteur de la trivialisation coïncide avec ξ et aussi que le dernier vecteur de la trivialisation est normal rentrant le long de ∂V^5 . Alors, par projection parallèlement à ξ , on obtient une trivialisation du fibré tangent à $E(\eta|G_\Delta)$. Par restriction au bord, on obtient une trivialisation du fibré tangent à $E(\eta|F_C)$ où F_C est un voisinage de C dans F^2 qui est certainement celle utilisée dans la définition de $q([C])$.

De là, on déduit une immersion $g : (G_\Delta^3, F_C^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^4, \mathbb{R}^3)$. On remarque alors que le nombre d'enlacement de C et ∂F_C est égal au nombre d'intersection $g(\partial G_\Delta^3) \cdot g(\Delta^2)$ qui est certainement nul puisque $g(\partial G_\Delta)$ et $g(\Delta)$ sont disjoints.

On remarquera que cette preuve, contrairement à celle donnée au § III n'utilise pas la formule de Wu, i.e. l'équivalence des définitions algébrique et homotopique du mot caractéristique.

REFERENCES

- [A'] N. A'CAMPO, Sur la première partie du 16e problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, n° 537 (1979).
- [A] V.I. ARNOLD, The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four dimensional manifolds and the arithmetic of integral quadratic forms, Funkt. Analiz. i ego Pril. 5.3 (1971), 1-9 ; translation : Funct. Anal. Appl. 5 (1971), 169-176.
- [BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ -sphères, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 7, fasc. 4 (1974), 463-506.
- [B] E.H. BROWN Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math. 95 (1972), 368-384.
- [D] S.K. DONALDSON, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.
- [Fi] T. FIEDLER, Eine kongruenz für gitter und ihre anwendung auf 2k-mannigfaltigkeiten in 4k-mannigfaltigkeiten, Manuscripta Math. 46 (1984), 215-227.
- [Fr] M. FREEDMAN, The topology of four dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1983), 357-454.

- [FK] M. FREEDMAN and R. KIRBY, Geometric proof of Rohlin's theorem, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, A.M.S. (1978), 85-97.
- [GM1] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B 285 (1977), A95-A98.
- [GM2] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 69-80.
- [GM3] L. GUILLOU et A. MARIN, Commentaires sur les articles de Rohlin, ce volume.
- [K] N. KUIPER, The quotient space of $\mathbb{CP}(2)$ by complex conjugation is the 4-sphere, Math. Ann. 208 (1974), 175-177.
- [Mar1] A. MARIN, Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 51-68.
- [Mar2] A. MARIN, \mathbb{CP}^2/σ ou Kuiper et Massey au pays des coniques, ce volume.
- [Mas1] W. MASSEY, Proof of a conjecture of Whitney, Pacific J. Math 31 (1969), 143-156.
- [Mas2] W. MASSEY, The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere, Geom. Dedicata 2 (1973), 371-374.
- [Mat] Y. MATSUMOTO, An elementary proof of Rohlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, ce volume.
- [MH] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER, Symmetric bilinear forms, Springer-Verlag, New-York (1973).
- [R1] V.A. ROHLIN, New results in the theory of 4-dimensional manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 84 (1952), 221-224 ; traduction dans ce volume.
- [R2] V.A. ROHLIN, Proof of a conjecture of Gudkov, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6.2 (1972), 62-64 ; translation : Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 136-138
- [S] N.E. STEENROD, Topology of fiber bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1951).
- [T] V.G. TURAEV, Cohomology rings, linking forms and invariants of spin structures of three dimensional manifolds, Math. Sbornik Tom. 120 (162), 1983, n° 1, 68-83 ; translation : Math. USSR Sbornik, vol. 48 (1984), n° 1, 65-79.
- [W] H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures on topology, Univ. of Michigan Press (1941), 101-141.

AN ELEMENTARY PROOF OF ROCHLIN'S SIGNATURE THEOREM
AND ITS EXTENSION BY GUILLOU AND MARIN

by Yukio Matsumoto^{*}

This paper stems from a lecture delivered in the I.A.S. geometric topology seminar (1976-77) and is expository in nature. In §§1-3 we will give an elementary proof of Rochlin's theorem on the signature of closed spin 4-manifolds. Our proof does not require any hard homotopy theory and is based on the Arf invariant of characteristic surfaces and the 4-dimensional cobordism group Ω_4 . So it is similar, in spirit, to the recent geometric proof due to Freedman and Kirby [3], but we think, simpler than theirs. The subsequent sections extend these considerations to non-orientable characteristic surfaces of closed 4-manifolds and obtain Guillou and Marin's congruence (modulo 16) [4] which involves the signature of the 4-manifolds, the normal Euler number (= the self-intersection number) of the characteristic surfaces and the $\mathbb{Z}/8$ Arf invariant of E. H. Brown [1].

The author is deeply grateful to Professor L. C. Siebermann for many valuable comments on the earlier drafts.

After finishing the second draft of this paper, the author was shown A. Casson's lecture notes [2] by C. Gordon. In the notes he gave a proof of Rochlin's theorem based on the Arf invariant of torus links.

^{*}The author is supported by the National Science Foundation.

The details of his proof are considerably different from ours.

§1. The Arf invariant.

Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbb{Z}/2$ which is given a non-singular symmetric bilinear form $(x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{Z}/2$. A function $q : V \rightarrow \mathbb{Z}/2$ is said to be quadratic (with respect to ".") if it satisfies $q(x + y) = q(x) + q(y) + x \cdot y$ for all $x, y \in V$.

Such a quadratic space (V, \cdot, q) admits a symplectic basis

$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in V$ satisfying $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0$, $\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$ (Kronecker's delta). As is well known, the Arf invariant $\text{Arf}(q) \in \mathbb{Z}/2$ is defined to be $\sum_{i=1}^r q(\alpha_i)q(\beta_i)$.

In this section we will recall the definition of the Arf invariant of a characteristic surface of an orientable 4-manifold. To deal with the Robertello-Arf invariant of knots simultaneously, we will not exclude 4-manifolds with non-empty boundary.

Let M^4 be a (compact) connected, smooth and orientable 4-manifold. Let F^2 be an orientable surface properly embedded in M^4 . The boundary ∂F^2 is assumed to be $\cong \emptyset$ or $\cong S^1$. F^2 is called a characteristic surface if the homology class $[F^2, \partial F] \in H_2(M^4, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ is dual to the 2-nd Stiefel-Whitney class $w_2(M)$. An equivalent condition is that the intersection number (mod 2) $F \cdot x$ is equal to the self-intersection number $x \cdot x$ for every $x \in H_2(M^4; \mathbb{Z}/2)$.

From now on we will assume that $H_1(M^4; \mathbb{Z}) = \{0\}$. Suppose that we are given a characteristic surface F^2 , then we can define a quadratic function $q : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ as follows [10], [3]:

Let C be a (generically) immersed circle in F^2 . Since $H_1(M^4; \mathbb{Z}) = \{0\}$, C bounds a connected orientable surface D immersed

in M^4 . D may be assumed not to be tangent to F^2 at any point. The normal bundle ν_D of D is orientable and so trivial, because $D \cong S^1 \vee \dots \vee S^1$. Note that any trivialization $\tau : \nu_D \cong D \times \mathbb{R}^2$ induces a unique trivialization $\nu_D|_{\partial D} \cong \partial D \times \mathbb{R}^2$ on the boundary. In fact, the "difference" of any two trivializations τ_1, τ_2 of ν_D corresponds to a continuous map $g : D \rightarrow SO(2)$. Since ∂D is homologous to zero in D , the induced map $g|_{\partial D} : \partial D \rightarrow SO(2)$ is homotopic to zero (because $SO(2) \cong K(\mathbb{Z}, 1)$). Thus the induced trivializations coincide.

The normal line bundle ν_C of C in F^2 determines an orientable sub-line bundle in $\nu_D|_{\partial D}$. Let $\mathcal{O}(D)$ be the number (modulo 2) of the full twists of ν_C in $\nu_D|_{\partial D}$ with respect to the unique trivialization above. Let $D \cdot F$ be the number of the intersection points of $\text{Int}(D)$ and F . Finally let $\text{Self}(C)$ be the number of the self-intersection points of C on F^2 .

Define $q(C) \in \mathbb{Z}/2$ by

$$q(C) = \mathcal{O}(D) + D \cdot F + \text{Self}(C) \pmod{2}.$$

Lemma 1.1. The above definition gives a well defined function

$q : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ which is quadratic with respect to the intersection pairing: $H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \otimes H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$.

This lemma will be proved in §5 in a more general setting. (Cf.

Lemma 5.1.)

Let $\text{Arf}(F^2)$ be the Arf invariant of q .

Lemma 1.2. $\text{Arf}(F^2)$ depends only on the relative integral homology

class $[F^2, \partial F]$ and the concordance class of the embedding $\partial F^2 \rightarrow \partial M^4$.

In particular, if $\partial M^4 = \emptyset$, $\text{Arf}(F^2)$ is determined by the integral class $[F^2]$ and we can speak of the Arf invariant of an integral characteristic homology class ξ (i.e. the class whose mod 2 reduction is dual to $w_2(M)$).^{*} We will denote it by $\text{Arf}(\xi)$.

Another specific case is the case of knots in which $M^4 = D^4$ and $\partial F^2 = S^1$. In this case $[F^2, \partial F] = 0$, and $\text{Arf}(F^2)$ is determined by the knot $K = \{\partial F \rightarrow \partial M\}$. This is nothing but the Robertello-Arf invariant of the knot K [8]. We will denote it by $\text{Arf}(K)$.

Proof of 1.2. For simplicity assume that $\partial F = \emptyset$. (The other case will be dealt with similarly.) Let F_0 and F_1 be closed characteristic surfaces satisfying $[F_0] = [F_1] \in H_2(M^4; \mathbb{Z})$. Since $K(\mathbb{Z}, 2) = \text{MSO}(2)$, F_0 and F_1 are L-equivalent in Thom's sense. In other words, there is an orientable 3-manifold V^3 in $(\text{Int } M^4) \times [0, 1]$ such that $V^3 \cap M \times \{i\} = F_i$, $i = 0, 1$. Perturbing V^3 slightly, if necessary, we can assume that the projection $p : M^4 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gives a Morse function $p' : V^3 \rightarrow [0, 1]$ on V^3 . Then F_1 is obtained from F_0 by successively attaching 0, 1, 2 and 3-handles within M^4 .

It is easy to see that attaching 0-handles or 1-handles to different connected components does not change the Arf invariant. Consider the effect of attaching a 1-handle to the same component of F_0 . The resulting quadratic function q' is the orthogonal sum of $q : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ and $s : \mathbb{Z}/2(m) \oplus \mathbb{Z}/2(l) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ with m and l corresponding to the co-core and core of the attached 1-handle. Since $m.m = l.l = 0$, $l.m = 1$ and $s(m) = 0$, $\text{Arf}(s)$ is zero. Thus

^{*} Any integral characteristic homology class is represented by a characteristic surface.

$$\text{Arf}(q') = \text{Arf}(q).$$

Therefore attaching 0 and 1-handles does not change the Arf invariant. By duality attaching 2 and 3-handles does not change it either. \square

§2. The proof of Rochlin's theorem.

We wish to prove Rochlin's theorem in the form he gave in [10]:

Theorem 2.1 (Rochlin). Let M^4 be a closed oriented 4-manifold with $H_1(M^4; \mathbb{Z}) = \{0\}$, ξ an integral characteristic homology class. Then we have

$$\text{Arf}(\xi) = (\sigma(M^4) - \xi \cdot \xi) / 8 \pmod{2},$$

where $\sigma(M^4)$ is the signature of M^4 and $\xi \cdot \xi$ is the self-intersection number.

Note that $\sigma(M^4) - \xi \cdot \xi$ is divisible by 8. (Cf. [7].)

If M^4 is spin (i.e., $w_2(M^4) = 0$), we can take 0 (zero) as a characteristic homology class. Then by the theorem, $\sigma(M)$ is divisible by 16. This is the classical Rochlin's theorem [9].

For the proof, we need two facts.

Facts: 1) Let $K(p, q)$ be the classical torus knot of type (p, q) with p odd, q even. Then $\text{Arf}(K(p, q)) = (1 - p^2)/8 \pmod{2}$.

2) Let M^4 be a connected, 1-connected, closed and oriented 4-manifold. Then there exist integers $\ell, m, n \geq 0$ such that $M^4 \# (\ell + 1)P \# \ell Q \cong mP \# nQ$, where P and Q are the complex projective plane and the one with the opposite orientation, respectively.

Fact 1) is the "germ" of Rochlin's theorem. Using Fact 2), we can globalize it to obtain the Rochlin congruence.

These two facts are more or less standard. However, we will give some explanations in the next section.

Proof of Theorem 2.1. Let F^2 be a characteristic surface representing ξ . By doing framed surgery on $M^4 - F^2$, we can (and will) make M^4 connected and 1-connected without affecting the fact that F^2 is characteristic or altering the value of $\text{Arf}(F^2)$.

The both sides of the formula we want to prove are additive with respect to the connected sum of the manifolds and the direct sum of the characteristic homology classes. Thus if the congruence holds for any two of three pairs (M_1, ξ_1) , (M_2, ξ_2) and $(M_1 \# M_2, \xi_1 \oplus \xi_2)$ then it also holds for the remaining pair.

Let $\eta \in H_2(P; \mathbb{Z})$ and $\bar{\eta} \in H_2(Q; \mathbb{Z})$ be the generators represented by projective lines. They are characteristic, and the formula is easily checked for the pairs (P, η) and $(Q, \bar{\eta})$. Thus the above remark implies that we have only to prove the formula for the pair $(M^4 \# (\ell + 1)P \# \ell Q, \xi \oplus \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_{\ell+1} \oplus \bar{\eta}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\eta}_\ell)$ with some $\ell \geq 0$. But by Fact 2), $M^4 \# (\ell + 1)P \# \ell Q$ is diffeomorphic to a connected sum $mP \# nQ$ if ℓ is sufficiently large.

Note that every characteristic homology class of the connected sum $mP \# nQ$ is written as $s_1 \eta_1 \oplus \dots \oplus s_m \eta_m \oplus t_1 \bar{\eta}_1 \oplus \dots \oplus t_n \bar{\eta}_n$ with s_i, t_j odd. Then by the additivity of the formula again, the proof is reduced to that for pairs $(P, s\eta)$ and $(Q, t\bar{\eta})$ with odd s, t . As is easily seen, the orientations of the manifold M^4 and the characteristic surface are irrelevant to the proof. Therefore we have only to consider

the case of $(P, s\eta)$ with odd $s > 0$.

To compute $\text{Arf}(s\eta)$ we will take the algebraic curve C of degree $s > 0$: $C = \{(x : y : z); x^s + y^{s-1}z = 0\}$. C is homeomorphic to S^2 and is smoothly embedded in P except at the point $(0 : 0 : 1)$. At this point C has a cusp of type $x^s + y^{s-1} = 0$. Let B^4 be a small ball whose center is the singular point. Then $C \cap \partial B^4$ is a torus knot of type $(s, s-1)$. Taking a smooth surface G^2 in B^4 bounded by the knot, we get a smooth surface $F^2 = G^2 \cup (C - C \cap \text{Int } B^4)$ representing $s\eta$. Now $\text{Arf}(s\eta)$ is equal to $\text{Arf}(F^2) = \text{Arf}(G^2) = \text{Arf}(K(s, s-1))$. By Fact 1) this is equal to $(1 - s^2)/8 \pmod{2}$ which is nothing but $(\sigma(P) - (s\eta) \cdot (s\eta))/8 \pmod{2}$ as required. \square

§3. Explanation of Facts 1) and 2).

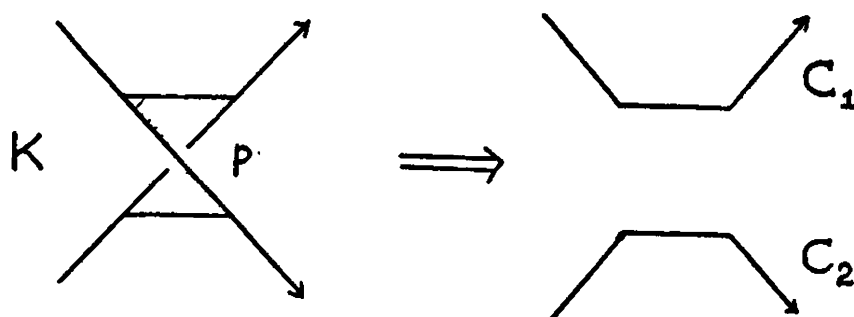
Fact 1): The following convenient way to get Fact 1) was suggested by Siebermann. Recall that the Alexander polynomial of $K(p, q)$, $A(K(p, q); t)$, is equal to $(1 - t)(1 - t^{pq})/(1 - t^p)(1 - t^q)$. (Cf. [11, p. 178].) Then assuming p to be odd and q even we have $A(K(p, q); -1) = p$. Levine's result [6] says that $\text{Arf}(K(p, q)) = 0$ or 1 according as $A(K(p, q); -1) \equiv \pm 1$ or $\pm 3 \pmod{8}$. However, this is reformulated as $\text{Arf}(K(p, q)) = (1 - p^2)/8 \pmod{2}$.

There is an alternative and more elementary way. This method applies most neatly to the case of $K(s, s-1)$ ($s > 0$) which is the only relevant case to our proof. We need a lemma.

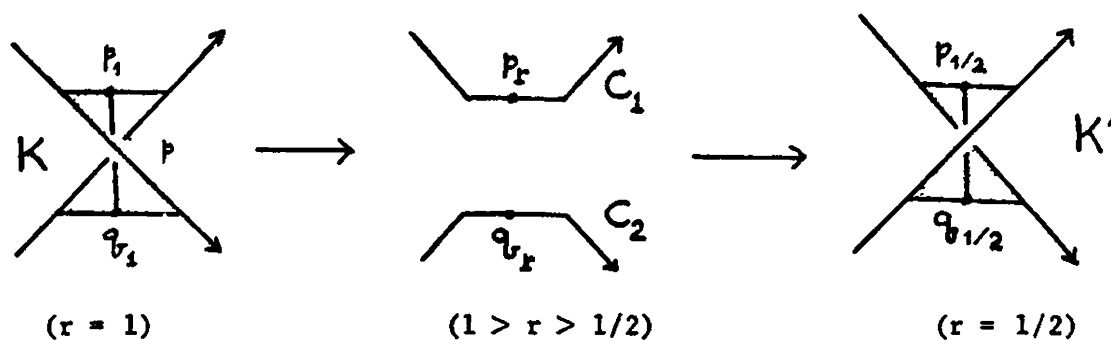
Lemma 3.1. Let p be a double point of a regular projection of an oriented knot K . Let C_1 and C_2 be the two components of the link which is obtained by the surgery at p along the twisted rectangle

shown in the figure below, $L(p; K)$ the linking number of C_1 and C_2 . If K' is the knot obtained from K by interchanging over and under crossing paths at p , then

$$\text{Arf}(K) = \text{Arf}(K') + L(p; K) \pmod{2}.$$



Proof. Let $B^4(r)$ be the standard 4-ball in \mathbb{R}^4 of radius $r \geq 0$. Let $S^3(r) = \partial B^4(r)$. Let us construct a surface G^2 in $B^4(1) - \text{Int } B^4(1/2)$ by the following movie (plus smoothing):



The boundary ∂G^2 consists of K in $S^3(1)$ and K' in $S^3(1/2)$.

Let A and B be the two circles in G^2 defined by

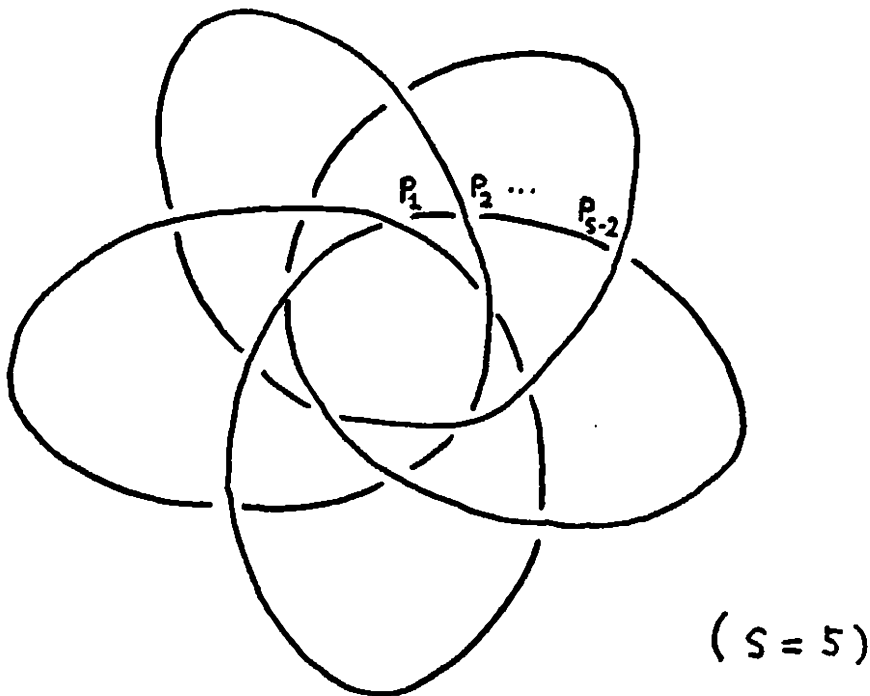
$$A = \overline{p_1 q_1} \cup \{q_r; 1/2 \leq r \leq 1\} \cup \overline{q_{1/2} p_{1/2}} \cup \{p_r; 1/2 \leq r \leq 1\}, \quad B = C_1$$

(in $S^3(3/4)$, say). Take a surface F^2 in $B^4(1/2)$ such that

$\partial F^2 = K'$. Then $G^2 \cup F^2$ is a surface in $B^4(1)$ bounded by K . Since

$H_1(G^2 \cup F^2; \mathbb{Z}/2) = H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}/2(A) \oplus \mathbb{Z}/2(B)$, the difference $\text{Arf}(K) - \text{Arf}(K')$ is equal to the Arf invariant of the quadratic function q on $\mathbb{Z}/2(A) \oplus \mathbb{Z}/2(B)$. By the figure above, q is computed as follows: $q(A) = \mathcal{O}(\Delta) = 1$ (Δ being a surface in $B^4(1) - \text{Int } B^4(1/2)$ bounded by A), $q(B) = V \cdot G = \text{Link}(C_1, C_2)$ (V being a Seifert surface of C_1 in $S^3(3/4)$), $A \cdot A = B \cdot B = 0$ and $A \cdot B = 1$. Thus $\text{Arf}(q) = q(A) \cdot q(B) = \text{Link}(C_1, C_2) \pmod{2}$. \square

To compute $\text{Arf}(K(s, s-1))$ consider the regular projection of $K(s, s-1)$:



Let $K^{(1)}$ be the knot obtained from $K(s, s-1)$ by interchanging over and under crossing paths at the points p_1, p_2, \dots, p_i in the projection. Then $K^{(s-2)} = K(s-1, s-2)$. This allows us an inductive calculation. Inspecting the figure above, we see that $L(p_i; K^{(i-1)}) = i \cdot (s-1-i)$, $1 \leq i \leq s-2$. Thus by applying Lemma 3.1 inductively,

$$\text{Arf}(K(s, s-1)) = \text{Arf}(K(s-1, s-2)) + \sum_{i=1}^{s-2} i \cdot (s-1-i) .$$

An elementary consideration shows

$$\sum_{i=1}^{s-2} i \cdot (s-1-i) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & s-2 \not\equiv 1 \pmod{4} , \\ 1 \pmod{2}, & s-2 \equiv 1 \pmod{4} . \end{cases}$$

Therefore, starting from $\text{Arf}(K(1, 0)) = 0$ we have

$$\text{Arf}(K(s, s-1)) = \begin{cases} 0, & s \equiv 0, 1, 2, 7 \pmod{8} , \\ 1, & s \equiv 3, 4, 5, 6 \pmod{8} . \end{cases}$$

Confining ourself to odd $s > 0$, we get the desired formula

$$\text{Arf}(K(s, s-1)) \equiv (1 - s^2)/8 \pmod{2}.$$

Fact 2): This is a consequence of Wall's theorem [14]. However, since his theorem is far from being elementary we will give a direct proof described to the author by Siebenmann. Cf. [5].

Suppose that connected, 1-connected, closed and oriented 4-manifolds M^4 and N^4 are cobordant to each other. Let W^5 be an oriented cobordism between them. Decompose W^5 into a handle-body starting from $M \times [0, 1]$:

$$W^5 = M \times [0, 1] \cup \lambda_0 H^0 \cup \lambda_1 H^1 \cup \lambda_2 H^2 \cup \lambda_3 H^3 \cup \lambda_4 H^4 \cup \lambda_5 H^5 .$$

(λ_1 = the number of 1-handles.) We can cancel 0 and 5-handles. A 1-handle is trivially attached to $M^4 \times [0, 1]$ and can be considered as a boundary connected sum of $M^4 \times [0, 1]$ and an embedded $S^1 \times D^4$. We do surgery on W^5 along the embedded $S^1 \times D^4$. Then $S^1 \times D^4$ is replaced by a 3-handle trivially attached to $M^4 \times [0, 1]$.

In the dual way we can surger out 4-handles and replace them by 2-handles. Now we can assume that there are only 2 and 3-handles.

Since M^4 and N^4 are 1-connected, by looking at the middle level we have

$$M^4 \# pS^2 \times S^2 \# qS^2 \times S^2 \cong N^4 \# rS^2 \times S^2 \# sS^2 \times S^2,$$

where $S^2 \times S^2$ is the twisted S^2 bundle over S^2 . The fact $S^2 \times S^2 \# P \cong S^2 \times S^2 \# P \cong 2P \# Q$ [13] implies the existence of $l, m \geq 0$ such that

$$M^4 \# (l+1)P \# lQ \cong N^4 \# (m+1)P \# mQ.$$

The signature $\sigma : \Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$ gives the isomorphism so every M^4 is cobordant to $\sigma(M^4)P$. Now Fact 2) follows from the above observation.

§4. Brown's invariant.

We will recall Brown's $\mathbb{Z}/8$ Arf invariant from [1]. Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbb{Z}/2$ provided with a non-singular symmetric bilinear form $(x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{Z}/2$. By a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic function is meant a function $\varphi : V \rightarrow \mathbb{Z}/4$ satisfying $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + 2(x \cdot y)$ for all $x, y \in V$, where $2 : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4$ is the homomorphism sending $1 \mapsto 2$. Such a triple (V, \cdot, φ) is called a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space.

The orthogonal sum $X \oplus Y$ of two $\mathbb{Z}/4$ -quadratic spaces X, Y is defined as usual. A quadratic space is indecomposable if it is not isomorphic to the orthogonal sum of two non-trivial quadratic spaces. Then there are only four indecomposable spaces.

Namely,

$$P_+ = (\mathbb{Z}/2(a), \cdot, \varphi), \quad a \cdot a = 1, \quad \varphi(a) = 1.$$

$$P_- = (\mathbb{Z}/2(a), \cdot, \varphi), \quad a \cdot a = 1, \quad \varphi(a) = -1.$$

$$T_0 = (\mathbb{Z}/2(b) \oplus \mathbb{Z}/2(c), \cdot, \varphi), \quad b \cdot b = c \cdot c = 0, \\ b \cdot c = 1, \quad \varphi(b) = \varphi(c) = 0.$$

$$T_4 = (\mathbb{Z}/2(b) \oplus \mathbb{Z}/2(c), \cdot, \varphi), \quad b \cdot b = c \cdot c = 0, \\ b \cdot c = 1, \quad \varphi(b) = \varphi(c) = 2.$$

Following [7, p. 112] we say that a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space $X = (V, \cdot, \varphi)$ is split if V contains a subspace H with $\varphi(H) = \{0\}$, $H \cdot H = \{0\}$ and $\dim H = (1/2)\dim V$. For instance, T_0 and $P_+ \oplus P_-$ are split. Two $\mathbb{Z}/4$ -quadratic spaces X and Y belong to the same Witt class if $X \oplus S_1 \cong Y \oplus S_2$ where the S_i are split. The Witt classes of $\mathbb{Z}/4$ -quadratic spaces form the Witt group W . We denote the Witt class of X by $[X]$. Then $[T_0] = 0$ and $[P_+] + [P_-] = 0$ for instance.

Note the two relations: $P_+ \oplus T_4 \cong P_- \oplus P_- \oplus P_-$ and $P_- \oplus T_4 \cong P_+ \oplus P_+ \oplus P_+$. (Under each isomorphism the standard generators on the right are mapped to the elements $a + b, a + c, a + b + c$ of the space on the left.) These relations are written in terms of Witt classes as $[T_4] = 4[P_-]$ and $[T_4] = 4[P_+]$. Thus W is generated by $[P_+]$ and $8[P_+] = 2[T_4] = 4([P_+] + [P_-]) = 0$. In fact, W is shown to be isomorphic to $\mathbb{Z}/8$ by Brown's invariant as we see below.

Let X be a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space (V, \cdot, φ) . E. H. Brown [1] considered the Monsky sum

$$\lambda(X) = \sum_{x \in V} i^{\varphi(x)}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

The complex number $\lambda(X)$ takes the form $\sqrt{2}^{\dim V} (1 + i/\sqrt{2})^m$ ($m \in \mathbb{Z}$).

For λ is multiplicative: $\lambda(X \oplus Y) = \lambda(X)\lambda(Y)$ and it takes the required form on each of the indecomposable spaces: $\lambda(P_+) = 1 + i = \sqrt{2}(1 + i/\sqrt{2})$, etc.

Since the complex number $1 + i/\sqrt{2}$ is an 8-th root of unity, the integer m modulo 8 is well-defined. It is called Brown's invariant of X and is denoted by $\beta(X) \in \mathbb{Z}/8$.

Lemma 4.1. ([1, Thm. 1.20, ix]) If X is split, then $\beta(X) = 0$.

By 4.1, β gives a homomorphism $W \rightarrow \mathbb{Z}/8$, and since $\beta(P_+) = 1$ it is an isomorphism.

Remarks. 1) ([1, Thm. 1.20, vii]) Let (V, \cdot, q) be a quadratic space in the sense of §1. Then $(V, \cdot, 2q)$ is a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space and $\beta(V, \cdot, 2q) = 4 \operatorname{Arf}(q)$, where $4 : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/8$ is the homomorphism sending $1 \mapsto 4$.

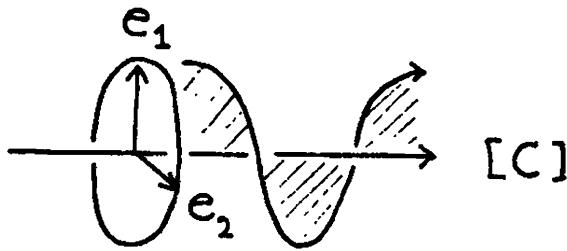
2) ([1, Thm. 1.20, vi]) For every $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space $X = (V, \cdot, \varphi)$ we have $\beta(X) \equiv \dim V \pmod{2}$.

§5. Guillou and Marin's congruence.

Guillou and Marin [4] extended Rochlin's congruence 2.1 by allowing non-orientable characteristic surfaces. In this section we will formulate their congruence. A proof will be given in §6.

Let M^4 be an oriented, connected and closed 4-manifold with $H_1(M^4; \mathbb{Z}) = \{0\}$. Let F^2 be a closed characteristic surface of M^4 (in the sense of §1) which is not necessarily orientable. Then we can define a $\mathbb{Z}/4$ -quadratic function $\varphi : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/4$ as follows:

Let C be an immersed circle in F^2 . Since $H_1(M^4; \mathbb{Z}) = \{0\}$, C bounds a connected orientable surface D immersed in M^4 . We may assume that D is not tangent to F^2 at any point. As in §1, the normal bundle ν_D is trivial and on $\nu_D|_C$ is induced a unique trivialization $\nu_D|_C \cong C \times \mathbb{R}^2$. The normal bundle of C in F defines a subline bundle ν_C of $\nu_D|_C$, and with the unique trivialization above we count the number $n(D)$ of right-handed half twists of ν_C . The picture illustrates the right-handed twists.



Here $[C]$ is a direction of C arbitrarily chosen, and $\{e_1, e_2\}$ is the basis of the fiber ($\cong \mathbb{R}^2$) of $\nu_D|_C$ which satisfies

$$(*) \quad [r_D] \times [C] \times e_1 \times e_2 = [M^4] ,$$

$[r_D]$ being the outward 'radial' direction of D .

Now the required form φ is defined by

$$\varphi(D) = n(D) + 2D \cdot F + 2 \text{ Self}(C) \pmod{4} .$$

Lemma 5.1. $\varphi(D) \in \mathbb{Z}/4$ depends only on the $\mathbb{Z}/2$ -homology class of
 $C = \partial D$. The function $\varphi : H_1(F^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/4$ is $\mathbb{Z}/4$ -quadratic.

Let $\beta(F^2)$ be Brown's invariant of the $\mathbb{Z}/4$ -quadratic space
 $(H_1(F^2; \mathbb{Z}/2), \cdot, \varphi)$.

Theorem 5.2. (Guillou and Marin) With the notation above we have

$$\sigma(M^4) \equiv F \cdot F + 2\beta(F^2) \pmod{16},$$

where $F \cdot F$ is the self-intersection number of F (cf. [15]) and
 $2 : \mathbb{Z}/8 \rightarrow \mathbb{Z}/16$ is the homomorphism sending $1 \mapsto 2$.

Corollary. (Generalized Whitney's congruence [10]) We have

$$\sigma(M^4) \equiv F \cdot F + 2\chi(F^2) \pmod{4},$$

where $\chi(F^2)$ is the Euler characteristic of F^2 .

The corollary follows from 5.2 by Remark 2) of the previous
 section. Also by Remark 1) there we see that 5.2 reduces to 2.1 in
 the case when F^2 is orientable.

The rest of this section is devoted to the proof of Lemma 5.1.

Proof of 5.1. The proof is divided into four steps.

1) $\varphi(D)$ depends only on the immersion C .

Let us take another immersed surface D' with $\partial D' = C$ and show
 that $\varphi(D') = \varphi(D)$. By spinning D' around C (cf. [3, Fig. 1]) if
 necessary, we may assume that the union $D \cup D'$ is a smoothly immersed
 closed surface Σ . (We are assuming that the outward 'radial' vectors

of D and D' are exactly in opposite directions to each other at their boundary points.) D and D' determine the trivializations τ and τ' of $\nu_D|C = \nu_{D'}|C$, but they induce the opposite orientations on the fibers ($\cong \mathbb{R}^2$). Let $d(-\tau, \tau') \in \mathbb{Z} = \pi_1(SO(2))$ be the difference between $-\tau$ and τ' . Then

$$(A) \quad \Sigma \cdot \Sigma = d(-\tau, \tau') - 2D \cdot D' \equiv d(-\tau, \tau') \pmod{2}.$$

Since F^2 is characteristic, $\Sigma \cdot \Sigma \equiv \Sigma \cdot F \pmod{2}$, but $\Sigma \cdot F$ is equal to

$$(B) \quad D \cdot F + D' \cdot F + w_1(\nu_C)[C] \pmod{2}.$$

The explanation of $w_1(\nu_C)[C]$ is this: If ν_C is orientable ($w_1(\nu_C)[C] = 0$) we can push Σ off from F^2 near C , but if ν_C is not orientable ($w_1(\nu_C)[C] = 1$) to put Σ in general position with respect to F^2 we necessarily create an odd number of intersection points of F^2 and Σ near C .

From (A) and (B) we have

$$(C) \quad d(-\tau, \tau') \equiv D \cdot F + D' \cdot F + w_1(\nu_C)[C] \pmod{2}.$$

Finally

$$(D) \quad n(D') \equiv n(D) + 2d(-\tau, \tau') + 2w_1(\nu_C)[C] \pmod{4}.$$

For the number $\pmod{4}$ of the right-handed half twists of ν_C in $\nu_D|C$ with respect to $-\tau$ (instead of τ) is equal to $-n(D)$. But $-n(D) \equiv n(D) + 2w_1(\nu_C)[C] \pmod{4}$. (Proof: If $n(D) \equiv 1$ or $3 \pmod{4}$, ν_C is non-orientable so $w_1(\nu_C)[C] = 1$ and $n(D) + 2w_1(\nu_C)[C] \equiv 3$ or $1 \pmod{4}$. If $n(D) \equiv 0$ or $2 \pmod{4}$, ν_C

is orientable and $w_1(\nu_C)[C] = 0$.) Therefore $n(D') \equiv -n(D) + 2d(-\tau, \tau') \equiv n(D) + 2w_1(\nu_C)[C] + 2d(-\tau, \tau')$ as required.

(C) and (D) imply that $n(D) + 2D \cdot F \equiv n(D') + 2D' \cdot F \pmod{4}$.

This is what we wanted to prove.

By 1) we can write $\varphi(C)$ in place of $\varphi(D)$.

2) $\varphi(C)$ depends only on the homotopy class of C .

φ is clearly regular homotopy invariant of C . If C' is homotopic to C , C' is regularly homotopic to a curve which is obtained from C by introducing a certain number of Whitney's double points (small figure eights), [12, § 7]. But for a small figure 8 on F^2 we can take a small disk D with $\partial D =$ the figure 8 and $D \cdot F = 0$. It is seen that $n(D) = 2$. Obviously $\text{Self}(a \text{ figure } 8) = 1$. Thus $\varphi(a \text{ figure } 8) = 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{4}$. This implies that $\varphi(C') = \varphi(C)$.

Now φ defines a map $\pi_1(F^2) \rightarrow \mathbb{Z}/4$.

3) $\varphi : \pi_1(F^2) \rightarrow \mathbb{Z}/4$ is $\mathbb{Z}/4$ -quadratic.

In other words if $C \cdot C'$ denotes the composition of loops then $\varphi(C \cdot C') = \varphi(C) + \varphi(C') + 2(C \cdot C')$. The proof is straightforward from the definition of φ .

4) $\varphi : \pi_1(F^2) \rightarrow \mathbb{Z}/4$ splits through $H_1(F^2; \mathbb{Z}/2)$.

By 3) $\varphi(C \cdot C') = \varphi(C' \cdot C)$. Thus it splits through $H_1(F^2; \mathbb{Z})$.

To prove 4) we have only to note that $\varphi(C + C) = 2\varphi(C) + 2(C \cdot C)$

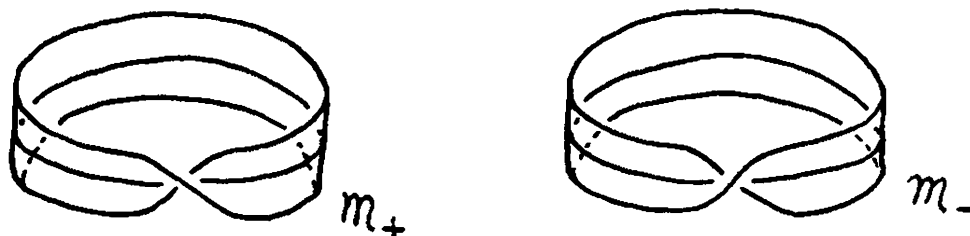
$$= 2(w_1(\nu_C)[C]) + 2(w_1(\nu_C)[C]) = 0 \pmod{4}.$$

This completes the proof of 5.1.

§6. Proof of Theorem 5.2.

We begin by checking the formula 5.2 on the key examples.

Let \mathcal{M}_{\pm} be the two Möbius strips in \mathbb{R}^3 .



Cap off the boundaries of \mathcal{M}_{\pm} in a smooth way using disks Δ_{\pm} in $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w); w \leq 0\}$. Then we obtain the two embeddings of $\mathbb{RP}^2 : \mathbb{RP}_{\pm}^2 \subset \mathbb{R}^4 (= S^4 - \{\infty\})$.

Assertion. $\beta(\mathbb{RP}_{\pm}^2) = \pm 1$, $\mathbb{RP}_{+}^2 \cdot \mathbb{RP}_{+}^2 = \mp 2$ and $\sigma(S^4) = 0$. Thus Theorem 5.2 is true for the surfaces $\mathbb{RP}_{\pm}^2 \subset S^4$.

Proof. Let D be a disk in $\mathbb{R}_{+}^4 = \{(x, y, z, w); w \geq 0\}$ which meets $\mathbb{R}^3 = \partial \mathbb{R}_{+}^4$ perpendicularly along $\partial D = C$, the central circle of \mathcal{M}_{+} or \mathcal{M}_{-} . The restriction $\nu_D|_C$ is identified with the normal bundle of C in \mathbb{R}^3 , which has an untwisted framing. Let $\{e_1, e_2\}$ be such a normal framing that obeys the orientation rule (*) in §5:

$[r_D] \times [C] \times e_1 \times e_2 = [\mathbb{R}^4] (= [x] \times [y] \times [z] \times [w])$. In the present case, $[r_D] = -[w]$ so $[C] \times e_1 \times e_2$ coincides with the usual right-handed orientation $[x] \times [y] \times [z]$ of \mathbb{R}^3 . Observing this, we can read the number $n(D)$ from the picture of \mathcal{M}_{\pm} : $n(D) = +1$ or -1 according as C belongs to \mathcal{M}_{+} or \mathcal{M}_{-} . Since $D \cdot \mathbb{RP}_{\pm}^2 = 0$ and $\text{Self}(C) = 0$, we have $\varphi(C) = \pm 1$ thus $\beta(\mathbb{RP}_{\pm}^2) = \pm 1$ as asserted.

Next we will prove $\mathbb{RP}_{+}^2 \cdot \mathbb{RP}_{+}^2 = \mp 2$. For convenience, consider

$\mathbb{R}P_+^2$. Lift \mathcal{M}_+ to $\mathbb{R}^3 \times \{r\} = \{(x, y, z, w); w = r > 0\}$ and make it slightly wider to obtain \mathcal{M}' . Let $\partial\mathcal{M}' \times [0, r]$ be the "vertical annulus" in $\mathbb{R}^3 \times [0, r]$. Here $\partial\mathcal{M}' \times \{r\} = \partial\mathcal{M}'$, and $\partial\mathcal{M}' \times \{0\}$ ($\subset \mathbb{R}^3$) is a closed curve parallel to the boundary $\partial\mathcal{M}_+$. Take a disk Δ' in \mathbb{R}_-^4 with $\partial\Delta' = \partial\mathcal{M}' \times \{0\}$. We assume that Δ' is isotopic in \mathbb{R}_-^4 to $\Delta_+ (= \mathbb{R}P_+^2 \cap \mathbb{R}_-^4)$ and intersects it in general position. Let $\mathbb{R}P' = \mathcal{M}' \cup \partial\mathcal{M}' \times [0, r] \cup \Delta'$.

$\mathbb{R}P_+^2 \cdot \mathbb{R}P_+^2$ is equal to $\mathbb{R}P' \cdot \mathbb{R}P_+^2 = \Delta' \cdot \Delta_+$. If \mathbb{R}_-^4 were oriented so that the orientation $[\mathbb{R}_-^4]$ is consistent with [outward direction] \times [the orientation of $\partial\mathbb{R}_-^4] = [w] \times [\mathbb{R}^3]$, then by the well-known relation the number $\Delta' \cdot \Delta_+$ would be equal to the linking number $\text{Link}(\partial\Delta', \partial\Delta_+)$. But in the present case, \mathbb{R}_-^4 is oriented contrarily: $[\mathbb{R}_-^4]$ is induced from $[\mathbb{R}^4] = [\mathbb{R}^3] \times [w] = -[w] \times [\mathbb{R}^3]$. Thus $\Delta' \cdot \Delta_+ = -\text{Link}(\partial\Delta', \partial\Delta_+) = -\text{Link}(\partial\mathcal{M}' \times \{0\}, \partial\mathcal{M}_+) = -2$ as asserted.

The proof of $\mathbb{R}P_-^2 \cdot \mathbb{R}P_-^2 = 2$ is similar. \square

Now consider the general case. If $F^2 \subset M^4$ is orientable, Theorem 5.2 reduces to 2.1. Suppose F^2 is not orientable. Then F^2 is diffeomorphic to the connected sum $\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (say, m -copies). Let C_1 be an embedded circle in the first copy which represents the generator of $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2)$. As in §5, take a disk D_1 satisfying (i) $\partial D_1 = C_1$, (ii) D_1 is not tangent to F^2 and (iii) $\text{Int } D_1 \cap C_1 = \emptyset$. Since the normal bundle of C_1 in F^2 is non-orientable, $\varphi(C_1) = n(D_1) + 2D_1 \cdot F$ is equal to $\pm 1 \pmod{4}$. By spinning D_1 around C_1 , we can accomplish the condition that (iv) $D_1 \cdot F^2 \equiv 0 \pmod{2}$ and (v) $n(D_1) = \pm 1 \in \mathbb{Z}$ (without taking modulus 4).

For instance suppose $n(D_1) = 1$. There exists a diffeomorphism

$f : N_1 \rightarrow N$ of a tubular neighbourhood N_1 of C_1 in M^4 to a tubular neighbourhood N of C (the central circle of \mathcal{M}_+) in S^4 .

We can assume that $f(N_1 \cap F^2) = N \cap \mathcal{M}_+$ and $f(N_1 \cap D_1) = N \cap D$, where D is the disk in the proof of the assertion.

Construct a new 4-manifold $M' = (M - \text{Int } N_1) \cup_f (S^4 - \text{Int } N)$ and a new surface $F' = (F - \text{Int } N_1 \cap F) \cup_f (\mathbb{R}P_+^2 - \text{Int } N \cap \mathbb{R}P_+^2)$. Then $H_*(M'; \mathbb{Z}) = H_*(M \# S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$. In particular, $H_2(M'; \mathbb{Z}/2) = H_2(M; \mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}/2(\alpha) \oplus \mathbb{Z}/2(\beta)$, where $\alpha = [D_1 \cup D]$ and $\beta = [\text{a fiber } S \text{ of the 2-sphere bundle associated to } N]$.

F' is a characteristic surface of M' . In fact, since F is characteristic, $x \cdot F' = x \cdot F \equiv x \cdot x \pmod{2}$ for every $x \in H_2(M; \mathbb{Z}/2)$. $\alpha \cdot F'$ is equal to $D_1 \cdot F^2 \equiv 0 \pmod{2}$ (Condition (iv)). $\alpha \cdot \alpha$ is also $\equiv 0 \pmod{2}$. Finally $\beta \cdot F' = S \cdot \mathcal{M}_+$ but $S \cdot \mathcal{M}_+ = \pm 2 \equiv 0 \pmod{2}$. Clearly $\beta \cdot \beta \equiv 0 \pmod{2}$. Thus $\beta \cdot F' \equiv \beta \cdot \beta$. Therefore, for every $y \in H_2(M'; \mathbb{Z}/2)$ we have $y \cdot F' \equiv y \cdot y \pmod{2}$ as asserted.

Emphasizing the ambient 4-manifold, we will denote Brown's invariant by $\beta(F^2, M)$. Then $\beta(F', M') = \beta(F, M) - 1$. For we have surgered out the first copy of $\mathbb{R}P^2$ in $\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2 = F^2$ for which $\varphi(C_1) = 1$ as we assumed.

Give the orientation to M' which is consistent with $[M]$ and is opposite to $[S^4]$. Then $F' \cdot F' = F \cdot F - \mathbb{R}P_+ \cdot \mathbb{R}P_+ = F \cdot F + 2$ (cf. Assertion). Thus we have $F' \cdot F' + 2\beta(F', M') = F \cdot F + 2\beta(F, M)$. (The same equality is obtained also in the case $n(D_1) = -1$.)

Obviously $\sigma(M') = \sigma(M)$ and $F' = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ ($m - 1$ copies). Therefore, Guillou and Marin's congruence (5.2) is proved by induction on m .

References

1. E. H. Brown, Generalization of the Kervaire invariant, *Ann. of Math.* 95 (1972), 368-383.
2. A. Casson, Lectures on 4-manifolds, Cambridge, Easter 1975.
3. M. Freedman and R. Kirby, A geometric proof of Rochlin's theorem, *Proc. Symp. Pure Math.* 32 (1977), 85-97.
4. L. Guillou and A. Marin, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 285 (1977), Série A, 95-98.
5. R. C. Kirby, A calculus for framed links, *Invent. Math.* 45 (1978), 35-56.
6. J. Levine, Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. of Math.* 84 (1966), 537-554.
7. J. Milnor and D. Husemoller, Symmetric bilinear forms, Springer (1973).
8. R. Robertello, An invariant of knot cobordism, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), 543-555.
9. V. A. Rochlin, New results in the theory of 4-dimensional manifolds (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 84 (1952), 221-224.
10. _____, Proof of Gudkov's hypothesis, *Functional Analysis and its Applications*, 6 (1972), 136-138.
11. D. Rolfsen, Knots and links, Mathematics Lecture Series, Publish or Perish, Inc. (1976).
12. S. Smale, Regular curves on Riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), 492-512.
13. C. T. C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, *J. London Math. Soc.*, 39 (1964), 131-140.
14. _____, On simply-connected 4-manifolds, ibid., 141-149.
15. H. Whitney, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures in Topology, The University of Michigan Press (1941).

The Institute for Advanced Study
Princeton, NJ 08540

now at : Faculty of Sciences
University of Tokyo
Hongo, Tokyo 113, Japan

\mathbb{CP}^2/σ OU KUIPER ET MASSEY AU PAYS DES CONIQUES

Alexis MARIN

Le quotient du plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 par l'involution de conjugaison complexe est une variété de dimension quatre, homéomorphe à la sphère S^4 comme nous le verrons à la fin de cette introduction. En 1973 et 1974, W. Massey et N. Kuiper dans deux notes indépendantes ([M] et [K]) nous proposent des homéomorphismes, définis globalement, entre ces deux espaces. Kuiper précise qu'il a un isomorphisme linéaire par morceaux, ce qui, en faisant appel au théorème de Cerf $\Gamma_4 = 0$, lui donne un difféomorphisme.

Les points de vue de ces deux notes semblent assez différents, mais si l'on a le courage de mener à bout les calculs explicitant l'homéomorphisme de Massey, on tombe exactement sur la formule donnée par Kuiper. Ce n'est pas une coïncidence : \mathbb{CP}^2/σ les a tous deux entraînés au pays des coniques et nous verrons Kuiper chevaucher les droites doubles alors que Massey restait embusqué sur un cercle de rayon négatif (ce qui explique qu'ils ne se soient pas rencontrés). La présente note a pour but d'inviter le lecteur à refaire ce voyage au pays des coniques et à voir comment \mathbb{CP}^2/σ l'espace ambiant naturel des courbes algébriques réelles planes se trouve expliqué par les courbes les plus simples : les coniques. Nous discuterons aussi "la structure différentiable naturelle de \mathbb{CP}^2/σ " et verrons qu'en fait l'homéomorphisme de Massey et Kuiper est un difféomorphisme.

Terminons cette introduction par quelques indications sur l'un des moyens que chacun utilisait avant Massey et Kuiper pour reconnaître la sphère S^4 sous \mathbb{CP}^2/σ .

- i) Le quotient \mathbb{CP}^2/σ est une variété topologique M .
- ii) Le quotient de la droite à l'infini L est un disque \mathfrak{L} , localement plat, donc plat et M est homéomorphe à M/\mathfrak{L} .
- iii) M/\mathfrak{L} est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff du quotient de $\mathbb{CP}^2 - L$ ($= \mathbb{C}^2$) par la conjugaison complexe ; or \mathbb{C}^2/σ est homéomorphe à \mathbb{R}^4 .

En résumé, $\mathbb{CP}^2/\sigma = M \approx M/\mathfrak{L} \approx \hat{\mathbb{C}^2}/\sigma \approx \hat{\mathbb{R}^4} = S^4$. □

i) ii) iii) iii)

Le lecteur pourra faire fonctionner la démonstration précédente dans la catégorie linéaire par morceaux en prouvant que, et le quotient d'un tube autour de la droite à l'infini, et le quotient de la boule complémentaire sont des disques PL . (Les disques sont même différentiables, mais comme on ne sait pratiquement rien sur le difféomorphisme de recollement, on ne peut, sans l'aide de Cerf, rien conclure sur le type de difféomorphisme de \mathbb{CP}^2/σ .)

Dans le paragraphe 1, nous décrivons la géométrie de l'espace des coniques, où nous débusquons Kuiper dans le paragraphe 2, et Massey dans le paragraphe 3. Le paragraphe 4 est consacré aux structures différentiables ; le lecteur est donc invité avant ce paragraphe à laisser planer un petit nuage sur des mots tels que "est" (\mathbb{CP}^2/σ est l'espace des coniques...) "isomorphisme", etc... Le paragraphe 5 clôt cette note par quelques faits supplémentaires livrés en exercices et que nous laissons à la sagacité du lecteur.

§ 1. L'ESPACE DES CONIQUES REELLES

Les coniques réelles forment un espace projectif réel \mathbb{C} de dimension cinq.

1.1. \mathbb{CP}^2/σ est l'espace des coniques réelles, singulières, ne séparant pas le plan projectif \mathbb{RP}^2 (*).

En effet, une telle conique est un couple de droites complexes conjuguées. Or, le plan projectif complexe dual formé des droites de \mathbb{CP}^2 s'identifie à \mathbb{CP}^2 , les conjugaisons complexes se correspondant (par exemple par transformation polaire réciproque ρ sur la conique C_0 d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, le point M de coordonnées $[u, v, w]$ correspond à la droite d d'équation $uX + vY + wZ = 0$).

1.2. \mathbb{CP}^2/σ borde dans l'espace des coniques réelles le convexe K formé des coniques réelles ne séparant pas \mathbb{RP}^2 (**). Donc, \mathbb{CP}^2/σ est homéomorphe à la sphère S^4 .

Une conique ne séparant pas \mathbb{RP}^2 a une équation de signe constant sur \mathbb{RP}^2 . On peut choisir pour toute conique de K une de ses équations qui est positive sur \mathbb{RP}^2 ,

(*) i.e. des coniques réelles, ayant un point singulier isolé tel un cercle de rayon nul (d'équation $X^2 + Y^2 = 0$), ou formées d'une droite double.

(**) L'intérieur de K est formé des coniques réelles n'ayant pas de points réels tel le "cercle de rayon - 1" C_0 (d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

ce qui montre que K est un convexe de l'espace \mathcal{C} des coniques.

Comme K est d'intérieur non vide dans \mathcal{C} et que ce dernier est un espace projectif réel de dimension cinq, le convexe K est homéomorphe à la boule B^5 .

1.3. Géométrie des coniques singulières.

Les coordonnées homogènes $[U, V, W, R, S, T]$ d'une conique de \mathcal{C} sont les coefficients d'une de ses équations matricielles : $(X, Y, Z) M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$, $M = \begin{bmatrix} U & R & T \\ R & V & S \\ T & S & W \end{bmatrix}$.

La conique correspondant à la matrice M est singulière si et seulement si le déterminant de M , $\det(M)$, est nul. L'espace \mathcal{S} des coniques singulières est donc une hypersurface de degré trois de \mathcal{C} . L'hypersurface \mathcal{S} est réunion de I , l'espace des coniques singulières ne séparant pas (dont l'intérieur est constitué de coniques réelles ayant un seul point réel isolé) et de X l'espace des coniques singulières dégénérant en deux droites réelles. Les points singuliers de \mathcal{S} sont en $X \cap I$ et correspondent aux droites doubles ; c'est la surface de Véronèse V d'équation paramétrique :

$$U = u^2, \quad V = v^2, \quad W = w^2, \quad R = uv, \quad S = vw, \quad T = wu.$$

§ 2. LE POINT DE VUE DE KUIPER

Kuiper plonge \mathbb{CP}^2/σ dans \mathbb{RP}^5 au moyen de l'application

$\kappa : \kappa([X_1, X_2, X_3]) = [\operatorname{Re}(X_i \bar{X}_j)]_{1 \leq i \leq j \leq 3}$. Par élimination, il trouve que l'image est dans une hypersurface de degré trois qui n'est autre que \mathcal{S} . Le fait que \mathcal{S} est formé des bisécantes à la surface de Véronèse et un calcul de distance lui permettent d'affirmer que l'image de \mathbb{CP}^2/σ est le bord de l'enveloppe convexe de la surface de Véronèse (plus précisément la surface de Véronèse V et l'image de \mathbb{CP}^2/σ sont dans l'espace affine \mathcal{G}^5 défini par $U + V + W \neq 0$, et c'est dans cet espace affine que Kuiper parle d'enveloppe convexe).

Notons que l'application κ de Kuiper fait correspondre au point de coordonnées $[X_1, X_2, X_3]$ la conique singulière d'équation $(X_1 X + X_2 Y + X_3 Z)(\bar{X}_1 X + \bar{X}_2 Y + \bar{X}_3 Z) = 0$. Cette remarque et le paragraphe précédent permettent d'éviter tout calcul dans la note de Kuiper.

§ 3. LE DIAGRAMME DE MASSEY

Soit C un point de l'intérieur de K (le cercle imaginaire C_0 d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ par exemple). Désignons par γ la conjugaison complexe de C . Il

y a une bijection conforme φ de C sur la sphère ronde S^2 telle que $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ soit l'application antipodale de S^2 . Si E est un espace, désignons par τ l'involution qui échange les coordonnées du produit $E \times E$; si $f: E \rightarrow E$ est une application, on note $f^{(n)}: E^n \rightarrow E^n$ l'application au produit $f(X_1, \dots, X_n) = (f(X_1), \dots, f(X_n))$. Notons enfin G et H les groupes de difféomorphismes conformes de $C \times C$ engendrés respectivement par τ et $\gamma \times \text{Id}$ pour G et τ et $\gamma^{(2)}$ pour H .

3.1. Le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 est isomorphe à $C \times C/\tau$, la conjugaison complexe correspondant à l'application induite par $\gamma^{(2)}$.

L'isomorphisme est $\mathbb{CP}^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{CP}^{2*} \xrightarrow{j} C \times C/\tau$, où ρ est la transformation polaire réciproque sur C , et où pour une droite $d \in \mathbb{CP}^{2*}$, $j(d) = d \cap C$.

Il découle de 3.1 :

3.2. L'espace \mathbb{CP}^2/σ est isomorphe à $C \times C/H$.

3.3. L'espace $C \times C/G$ est isomorphe à \mathbb{RP}^4 .

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 agit, par permutation des facteurs sur C^4 ; soit C^4/\mathfrak{S}_4 l'espace quotient de cette action et

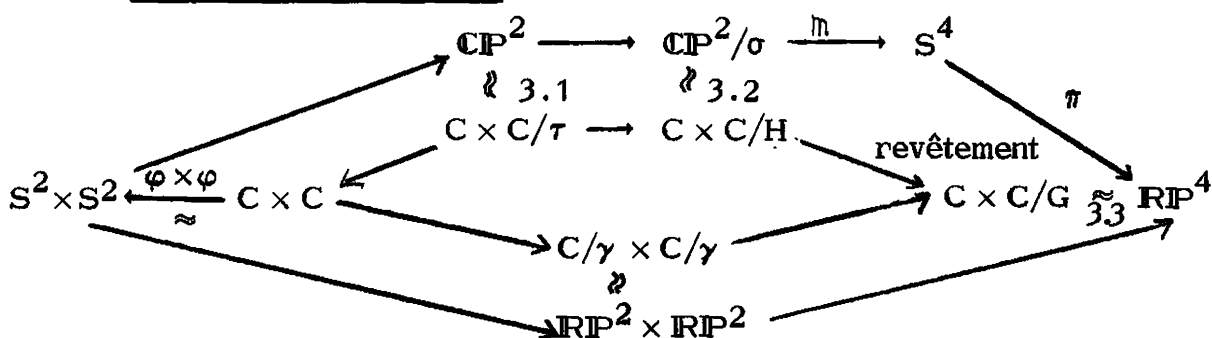
$$i: C \times C/G \rightarrow C^4/\mathfrak{S}_4, \quad i([(X, Y)]) = [(X, Y, \gamma(X), \gamma(Y))].$$

Il est clair que i est bien défini et est un isomorphisme de $C \times C/G$ sur l'ensemble des points fixes de l'involution $\gamma^{(4)}$ de C^4/\mathfrak{S}_4 . L'affirmation 3.3 suivra alors de :

3.3.a) L'espace projectif complexe de dimension quatre \mathbb{CP}^4 est isomorphe à l'espace quotient C^4/\mathfrak{S}_4 , la conjugaison complexe correspondant à l'application induite par $\gamma^{(4)}$.

Pour cela considérons \mathbb{CP}^4 comme l'espace des pincesaux de coniques (complexes) contenant la conique C . L'isomorphisme associe alors à un pinceau ℓ les quatre points fixes de ce pinceau : c'est un ensemble de quatre points de la conique C .

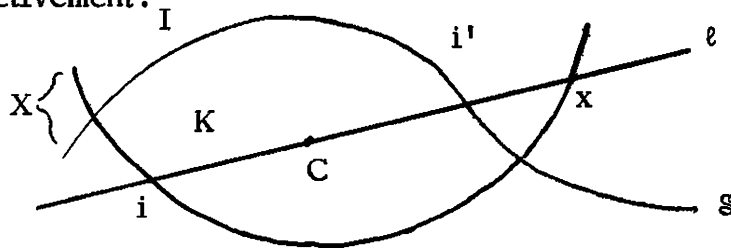
3.4. Le diagramme de Massey.



Massey considère le diagramme extérieur ; l'interprétation en termes de coniques dans le diagramme intérieur nous explique les identifications que fait Massey et nous fait comprendre pourquoi :

3.5. L'homéomorphisme \mathfrak{m} de Massey coïncide avec $R \circ \kappa$, où $R : \mathbb{R}^5 - 0 \rightarrow S^4$ est la projection radiale et κ l'application de Kuiper (ici 0 est le point C de l'espace affine d'équation $U + V + W \neq 0$ dans lequel Kuiper travaille).

Pour ceci, nous devons préciser les notations suivantes : Soient M, N, P, Q quatre points de la conique C ; MN désigne la droite passant par M et N (la tangente en M à C si $M = N$) ; et $MN.PQ$ désigne la conique singulière formée des deux droites MN et PQ . La classe de M dans C/γ est notée $[M]$; les classes de (M, N) et $([M], [N])$ dans $C \times C/\tau$ et $(C/\gamma) \times (C/\gamma)/\tau$ sont notées $\{M, N\}$ et $\{[M], [N]\}$ respectivement.



Un pinceau réel ℓ contenant $C^{(*)}$ coupe le bord I du convexe K en deux points distincts, i et i' , et X en un point x (car \mathfrak{s} est de degré trois, voir la figure)

Soient $P, Q, \gamma(P)$ et $\gamma(Q)$ les quatre points bases du pinceau ℓ ; on a alors :

- . Le point i est $PQ.\gamma(P)\gamma(Q)$
et correspond à l'image de $\{P, Q\}$ dans $(C \times C/\tau)_{\gamma(2)} = C \times C/H$;
- . Le point i' est $P\gamma(Q).\gamma(P)Q$
et correspond à l'image de $\{P, \gamma(Q)\}$ dans $(C \times C/\tau)_{\gamma(2)} = C \times C/H$.
- . Le point x est $P\gamma(P).Q\gamma(Q)$
et correspond à l'image de $\{[P], [Q]\}$ dans $(C/\gamma \times C/\gamma)/\tau = C \times C/G$.

De plus, les trois points i, i' et x correspondent à la classe de $(P, Q, \gamma(P), \gamma(Q))$ dans C^4/\mathfrak{G}_4 qui représente le pinceau ℓ . Or, dans l'espace affine de Kuiper, la projection $\pi \circ R : \mathbb{R}^5 - 0 \rightarrow \mathbb{RP}^4$ n'est autre que l'application qui à M associe la droite OM ; la discussion précédente établit donc l'identité des deux applications $R \circ \kappa$ et \mathfrak{m} pour un des deux choix possibles pour l'homéomorphisme de

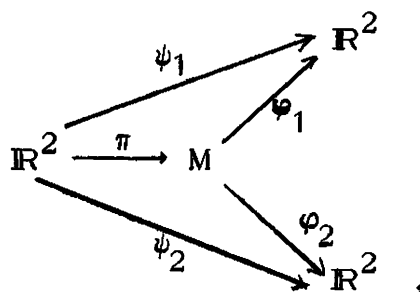
(*) ou, si l'on préfère, une droite ℓ de l'espace C passant par C .

Massey \mathbb{M} (l'autre s'en déduisant en le composant, soit par l'application antipodale au but, soit par l'involution $\kappa^{-1}(i) \leftrightarrow \kappa^{-1}(i')$ à la source).

§ 4. STRUCTURES DIFFERENTIABLES SUR LE QUOTIENT D'UNE VARIÉTÉ PAR UNE INVOLUTION AYANT UN ENSEMBLE DE POINTS FIXES DE CODIMENSION DEUX.

4.1. Exemple de deux structures distinctes sur le quotient du plan \mathbb{R}^2 par la symétrie autour de l'origine $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$.

Sur l'espace quotient $M = \mathbb{R}^2 / (x,y) \sim (-x,-y)$, considérons les deux cartes φ_1 et φ_2 définies par le diagramme commutatif suivant :



où $\psi_1(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ et $\psi_2(x,y) = (3x^2 - y^2, 2xy)$.

Les deux structures définies par φ_1 et φ_2 sont telles que π est lisse et que son jet d'ordre deux est non dégénéré ; elles sont cependant distinctes car $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ n'est pas différentiable en l'origine ($\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(u,v) = (2u + \sqrt{u^2 + v^2}, v)$).

4.2. La structure complexe sur le quotient de \mathbb{C} par multiplication par -1 ; "la" structure lisse de \mathbb{CP}^2/σ .

a) Soit l'espace quotient $D = \mathbb{C}/z \sim -z$; l'application quotient est notée $\pi : \mathbb{C} \rightarrow D$. Soit U un voisinage symétrique de zéro dans \mathbb{C} et $\varphi : V = \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ une carte pour une structure complexe sur D rendant la projection π holomorphe. La fonction holomorphe $\varphi \circ \pi : U \rightarrow \mathbb{C}$ est paire et l'on peut écrire $\varphi \circ \pi(z) = \psi(z^2)$ pour une fonction holomorphe ψ .

Remarquons que l'indice de ramification en zéro de la fonction $\varphi \circ \pi$ est deux ; c'est le même que celui de la fonction carré $z \mapsto z^2$, donc la dérivée $\psi'(0)$ est non nulle et la fonction ψ est inversible au voisinage de zéro. On peut donc écrire au voisinage de zéro, $(\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \pi(z) = z^2$ et la structure complexe donnée coïncide avec celle produite par la carte "carré" φ_0 définie par $\varphi \circ (\pi(z)) = z^2$.

b) Soit M une variété lisse et τ une involution lisse de M dont les points fixes

forment une sous-variété F de codimension deux. Supposons que le fibré normal à F soit muni d'une structure conforme. Le théorème du voisinage tubulaire et le paragraphe a) permettent de définir sur l'espace quotient M/τ une unique structure lisse rendant l'application quotient $\pi : M \rightarrow M/\tau$ lisse et "conforme le long des fibres du fibré normal à l'ensemble des points fixes F ".

Comme deux structures conformes sur un fibré normal sont isotopes, toutes les structures ainsi construites sur l'espace quotient sont difféomorphes. Dans la pratique, on utilise une structure conforme sous-jacente à une métrique riemannienne. Pour le plan projectif complexe \mathbb{CP}^2 , il est naturel de prendre la métrique de Fubini Study. (Rappelons que l'on peut la définir, à un facteur constant près, comme étant la seule invariante par le groupe projectif unitaire $PSU(3)$; pour cette métrique, les droites complexes sont isométriques à des sphères euclidiennes rondes et le plan projectif réel \mathbb{RP}^2 possède sa métrique euclidienne usuelle invariante par le groupe orthogonal $SO(3)$.) Si on ne s'intéresse qu'à la structure conforme sur le fibré normal à \mathbb{RP}^2 , on peut la définir plus directement comme la transportée par multiplication par i de la structure conforme euclidienne de \mathbb{RP}^2 .

4.3. Structure lisse sur le produit symétrique $M \times M/\tau$ d'une surface M munie d'une structure conforme. Le difféomorphisme de Massey.

a) Soit M une surface de Riemann. Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ une carte holomorphe autour d'un point x de M et $\psi : U \times U/\tau \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ une carte autour du point (x, x) de la diagonale du produit symétrique $M \times M/\tau$ qui rende l'application quotient holomorphe. Les composantes ψ_1 et ψ_2 de ψ sont des fonctions analytiques symétriques sur $U \times U$. Le théorème des fonctions symétriques nous assure que ce sont des fonctions de la somme $s = \varphi + \varphi$ et du produit $p = \varphi \times \varphi$ des coordonnées on a donc $\psi = \Phi(s, p)$, et l'on montre, par la même technique qu'au paragraphe 4.2 ci-dessus, que Φ est inversible : le produit symétrique possède une unique structure holomorphe rendant l'application quotient holomorphe ; cette structure est donnée près de la diagonale par les cartes "somme et produit".

b) Remarquons que si l'on munit le fibré normal à la diagonale dans $M \times M$ de la structure conforme hérité des structures analytiques complexes sur $M \times M$ et la diagonale, l'application quotient $M \times M \rightarrow M \times M/\tau$ est conforme le long des fibres du fibré normal à la diagonale et la structure lisse sous-jacente à la structure complexe de $M \times M/\tau$ est déterminée par cette propriété.

Si M est seulement munie d'une structure conforme, si $\varphi, \bar{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux cartes conjuguées autour d'un point x de M , près du point (x, x) de la diagonale,

on a deux cartes conjuguées privilégiées $\varphi \times \varphi$ et $\bar{\varphi} \times \bar{\varphi}$. Notons que $(\varphi \times \varphi, \varphi)$ et $(\bar{\varphi} \times \bar{\varphi}, \bar{\varphi})$ déterminent la même structure conforme sur le fibré normal à U dans $U \times U$ et donc le procédé décrit en a) fournit sur le produit symétrique $M \times M/\tau$ une unique structure lisse rendant la projection conforme le long des fibres du fibré normal à la diagonale (*).

c) En suivant le bas du diagramme de Massey, on a une structure lisse canonique sur $C \times C/G$ en l'identifiant à $(C/\gamma) \times (C/\gamma)/\tau$, le produit symétrique de deux plans projectifs réels ronds, et donc on en retire une structure canonique sur le revêtement double $C \times C/H = \mathbb{CP}^2/\sigma$.

La discussion en a) se généralise immédiatement au produit symétrique d'un nombre quelconque de facteurs, ce qui rend l'isomorphisme de 3.3 entre $C \times C/G$ et \mathbb{RP}^4 un difféomorphisme naturel.

Il nous reste maintenant à voir qu'avec le choix pour la conique C du cercle C_0 de rayon -1 centré à l'origine (d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$), la structure de \mathbb{CP}^2/σ décrite au paragraphe 4.2 et celle que Massey obtient en fait, et que nous avons explicité au paragraphe b) ci-dessus, sont identiques. Pour cela, il suffit de vérifier que les structures conformes sur le fibré normal à \mathbb{RP}^2 qui caractérisent ces deux structures sont les mêmes. Or, le groupe $SO(3)$ agit transitivement sur \mathbb{RP}^2 et est clairement conforme pour les deux structures (par définition pour celle de 4.2, et car $SO(3)$ respecte C_0 pour la structure de Massey). Il suffit de comparer les deux structures en un point ; choisissons l'origine (de coordonnées $(0,0,1)$).

La fibre en l'origine du fibré normal à \mathbb{RP}^2 dans \mathbb{CP}^2 est $N_0 = \mathbb{C}^2/\mathbb{R}^2$. Une base orthonormale de N_0 pour la structure de 4.2 est (ie_1, ie_2) ((e_1, e_2) étant la base canonique de \mathbb{R}^2) ; pour la structure de Massey, c'est (J, iJ) où J est le vecteur directeur d'une des directions isotropes (celle de la tangente à C_0 issue de l'origine ; $J = e_1 + ie_2$).

Or, dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{R}^2$, $(e_1 + ie_2, i(e_1 + ie_2)) \equiv (ie_2, ie_1)$; cette dernière base se déduit de (ie_1, ie_2) par l'échange des deux vecteurs de base qui est conforme.

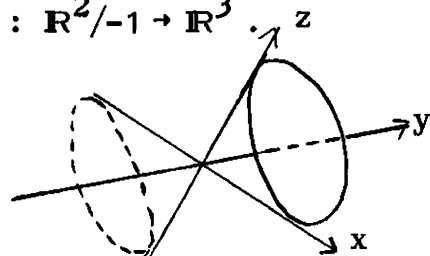
(*) Notons que hors de la diagonale, on ne peut espérer mieux car des choix de cartes conjuguées $\varphi, \bar{\varphi}$ et $\psi, \bar{\psi}$ en x et y produisent quatre choix de cartes en (x,y) : $\varphi \times \psi, \varphi \times \bar{\psi}, \bar{\varphi} \times \psi$ et $\bar{\varphi} \times \bar{\psi}$, et si $x \neq y$ il n'y a pas de processus diagonal qui permette d'en privilégier deux conjugués. Notons que, par le théorème de Stone Weierstrass, les fonctions d'un faisceau de fonction qui contiennent les coordonnées de ces quatre cartes approximent toute fonction lisse sur le produit. Près de la diagonale cependant, $M \times M$ a une structure conforme (à changement de cartes holomorphes ou antiholomorphes) et $M \times M/\tau$ a donc près de la diagonale une unique telle structure conforme rendant la projection conforme.

4.4. Retour sur l'exemple 4.1 et les singularités de l'application de Kuiper.

La philosophie des structures lisses naturelles sur les espaces quotients qui se dégage de 4.2 a) et 4.3 a) est la suivante : Soit M une variété munie d'un faisceau de fonctions holomorphes déterminant sa structure et G un groupe fini agissant sur M . Le quotient M/G est muni du faisceau des fonctions invariantes par l'action du groupe G . Il se trouve que ce faisceau est isomorphe au faisceau des fonctions holomorphes définies dans un ouvert de \mathbb{C} en 4.2 a), de \mathbb{C}^2 en 4.3 a), d'où une structure lisse sur le quotient.

Appliquons la même philosophie à l'exemple 4.1 pour les fonctions analytiques réelles, ou C^∞ . L'anneau des fonctions analytiques réelles, ou C^∞ , de \mathbb{R}^2 invariantes par la symétrie centrée en l'origine est formé des fonctions $F(f,g,h)$, où $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique, ou C^∞ , et $f(x,y) = x^2$, $g(x,y) = xy$, $h(x,y) = y^2$ (c'est clair dans le cas analytique et c'est un corollaire du théorème de préparation de Malgrange dans le cas C^∞). Cet anneau de fonctions invariantes est isomorphe à l'anneau des fonctions sur le cône d'équation $Y^2 = XZ$ (dans le cas C^∞ , il faut rajouter les conditions $X \geq 0$, $Z \geq 0$ car une fonction lisse sur le cône n'est pas déterminée par sa restriction à l'une des nappes). De plus, $k: \mathbb{R}^2/-1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$k(X,Y) = (X^2, XY, Z^2)$ est un plongement du quotient $\mathbb{R}^2/-1$ dans l'une des nappes du cône.



Les structures sur le quotient $\mathbb{R}^2/-1$ rendant l'application quotient analytique (ou lisse) avec le jet d'ordre deux non dégénéré s'obtiennent en projetant le cône le long d'une des droites intérieures du cône ; elles sont classifiées par l'angle de l'axe de projection avec l'axe de symétrie du cône (d'équation $Y = X - Z = 0$). Remarquons qu'une telle structure provient du procédé 4.2 car elle est invariante par le groupe compact à un paramètre des applications linéaires conservant le cône et fixant l'axe de projection.

Le plongement de Kuiper $\kappa: \mathbb{CP}^2/\sigma \xrightarrow{\sim} I \subset \mathbb{RP}^5$ est un isomorphisme pour la structure à singularité définie par les fonctions analytiques réelles (ou lisses) sur \mathbb{CP}^2 invariantes par la conjugaison complexe de \mathbb{CP}^2 .

Etudions les symétries de l'application de Kuiper, et pour cela munissons l'espace des formes quadratiques de sa métrique naturelle $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^t N)$. Il est immédiat que, pour une isométrie P de $O(3)$, $M \rightarrow {}^t P M P$ est une isométrie de l'espace des formes quadratiques qui conserve la trace (car, pour $P \in O(3)$, ${}^t P = P^{-1}$). On en déduit :

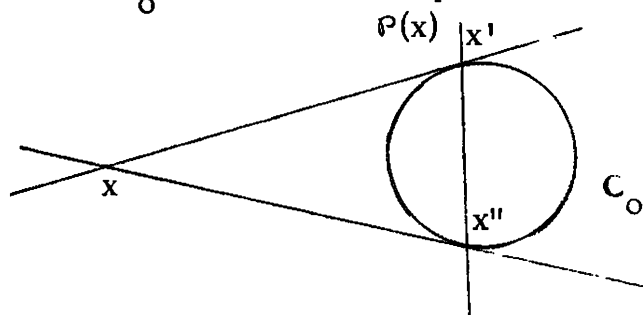
i) L'image de la surface de Véronèse est dans la "sphère" quadratique d'équation $U^2 + V^2 + W^2 + 2(R^2 + S^2 + T^2) = (U + V + W)^2$ (*). Ceci est un ellipsoïde dans l'espace affine $U + V + W \neq 0$. Pour des coordonnées affines, on peut choisir $U + V + W = 1$; son centre est $(1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0)$: c'est la conique C_0 .

ii) La projection radiale de centre C_0 sur le bord de la quadrique est équivariante pour les actions de $O(3)$ sur $I = \mathbb{CP}^2/\sigma$ et sur la quadrique; elle produit donc sur \mathbb{CP}^2/σ la structure lisse définie à l'aide de la métrique ronde sur \mathbb{RP}^2 (invariante par l'action de $O(3)$). Ceci est la démonstration alternative suggérée par Massey dans la remarque 2 à la fin de sa note [M].

§ 5. EXERCICES, GEOMETRIE DE \mathbb{CP}^2/σ .

Dans tous les exercices, le plan projectif complexe est muni de la métrique de Fubini Study; la conique vide C_0 est fixée, elle est invariante par $SO(3)$. L'espace \mathcal{C} des coniques réelles est le projectif associé à l'espace \mathcal{Q} des formes quadratiques réelles sur \mathbb{CP}^2 ; ce dernier espace est muni de sa métrique usuelle, introduite à la fin du paragraphe 4.4 ($\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^t N)$). L'espace affine \mathcal{G} de Kuiper, défini par $\text{Trace}(M) \neq 0$ peut être vu comme l'hyperplan de \mathcal{Q} d'équation $\text{Trace}(M) = 1$; il est alors muni de la métrique induite par celle de \mathcal{Q} .

Si x est un point de \mathbb{CP}^2 , on désigne par $\rho(x)$ la polaire de x relativement à C_0 et x', x'' les intersections de $\rho(x)$ avec C_0 ; rappelons que x' et x'' sont les pieds des tangentes à C_0 issues de x et que l'on a la figure suivante :



L'application de Kuiper est désignée par \mathcal{K} . La conique formée de deux droites d et d' est notée $d.d'$.

1) Plan tangent à la surface de Véronèse.

Prouver que le plan tangent à la surface de Véronèse au point $\mathcal{K}(x)$ ($= \rho(x). \rho(x)$) est formé des coniques réelles dont $\rho(x)$ est une composante irréductible.

(*) et non $U^2 + V^2 + W^2 + 4(R^2 + S^2 + T^2) = (U + V + W)^2$ comme l'affirme par erreur Kuiper; il faut remplacer, dans les lignes 21 et 22 de la page 176 de [K], les Σ par des $\frac{1}{2} \Sigma$.

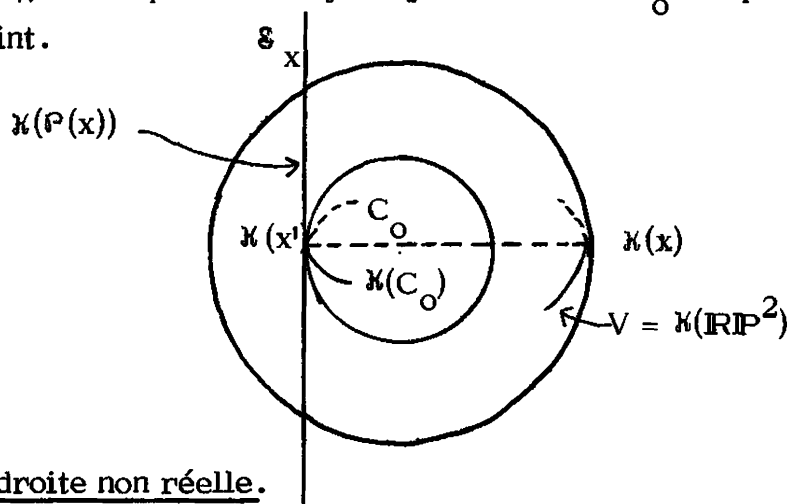
2) Disposition dans l'espace affine \mathbb{C} de la surface de Véronèse et de $\mathcal{K}(C_0)$.

Soit x dans \mathbb{RP}^2 , prouver que la droite de \mathbb{C} , joignant C_0 à $\mathcal{K}(x)$, recoupe l'hypersurface \mathcal{S} des coniques singulières en $\mathcal{K}(x')$ ($=\mathcal{K}(x'')$). En déduire que l'image de C_0 par \mathcal{K} se déduit de celle de \mathbb{RP}^2 par \mathcal{K} (la surface de Véronèse) par l'homothétie de \mathbb{C} de centre C_0 et rapport $-\frac{1}{2}$.

3) Image par \mathcal{K} d'une droite réelle.

Prouver que les coniques singulières ayant un point singulier au point x de \mathbb{RP}^2 forment un plan \mathcal{S}_x de \mathbb{C} .

Prouver que les coniques qui ont un point isolé en x forment l'intérieur d'un disque de ce plan qui est l'image par \mathcal{K} de $\mathcal{P}(x)$; prouver que c'est aussi l'intersection de \mathcal{S}_x avec la boule de centre C_0 et de rayon un. Prouver enfin que \mathcal{S}_x est tangent en $\mathcal{K}(x')$ ($=\mathcal{K}(x'')$) à la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en C_0 et qu'il est normal à $\mathcal{K}(C_0)$ en ce même point.



4) Image d'une droite non réelle.

Soit x un point non réel de \mathbb{CP}^2 , prouver que l'image par \mathcal{K} de la droite complexe $\mathcal{P}(x)$ est dans l'espace de dimension trois formé des coniques réelles passant par x et $\sigma(x)$. Prouver que $\mathcal{K}(\mathcal{P}(x))$ est un ellipsoïde tangent à la surface de Véronèse en $\mathcal{K}(y)$, où y est le point réel de $\mathcal{P}(x)$.

Etudier le comportement de cet ellipsoïde quand x tend vers un point réel.

5) \mathbb{RP}^2 et $\mathcal{K}(C_0)$ vus dans S^4 .

Soient $0 < t < \pi/2$ et M_t l'ensemble des points de \mathbb{CP}^2 distants de t de \mathbb{RP}^2 (et donc de $\pi/2 - t$ de C_0). Soit N_t l'image de M_t dans \mathbb{CP}^2/σ .

a) Identifier N_t à l'espace total du fibré d'incidence des droites de \mathbb{RP}^2 :

$$\mathcal{D} = \{(x, d) \in \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^{2*} \mid x \in d\},$$

de sorte que les premières et deuxièmes projections correspondent aux applications point de \mathbb{RP}^2 le plus proche et point de $\mathcal{K}(C_0)$ le plus proche respectivement.

b) Prouver que le complémentaire de \mathbb{RP}^2 dans $S^4 = \mathbb{CP}^2/\sigma$ est difféomorphe à

l'espace total du fibré en disques sur $\mathbb{R}P^2$ de classe d'Euler $+2$ et à espace total orientable, la section nulle de ce fibré étant $\mathbb{K}(C_0)$.

REFERENCES

- [1] N. KUIPER, The quotient space of $\mathbb{C}P(2)$ by complex conjugation is the 4-sphere, Math. Ann. 208 (1974), 175-177.
- [2] W. MASSEY, The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4 sphere, Geom. Dedicata 2 (1973), 371-374.

G.R. 21 du C.N.R.S.
 Université Paris-Sud
 Mathématique, bâtiment 425
 F - 91405 ORSAY cedex
 Novembre 1983

Appendice : Rohlin et son théorème

(d'après une lettre de O. Viro et V. Harlamov)

Nous regroupons ici quelques points d'histoire sur l'évolution du théorème de Rohlin chez son propre auteur tels qu'il nous ont été communiqués par O. Viro et V. Harlamov.

1) Après le début des années 50, Rohlin revint sur le sujet plusieurs fois. Dans les années 1954-1957, il en avait envisagé une exposition détaillée et en avait rédigé les parties essentielles. Les parties non écrites devaient contenir une introduction élémentaire à la topologie des variétés et aux classes caractéristiques. Le plan et les parties écrites sont conservées dans les archives de Rohlin.

2) En 1958, il publia une nouvelle démonstration de son fameux théorème sur la signature. Cette preuve est une réduction du théorème au calcul de $\pi_{n+3}(S^n)$ (à cette époque, Serre avait déjà publié un calcul détaillé de $\pi_{n+3}(S^n)$).

3) En 1961, Kervaire et Milnor intégrèrent dans un théorème l'exemple de Rohlin d'une variété simplement connexe de dimension 4 dont une classe d'homologie ne peut être réalisé par une sphère lisse plongée. Ce théorème fut le point de départ des travaux de Rohlin sur le problème de la réalisation des classes d'homologie de dimension 2 des variétés de dimension 4. Dans ses archives, il y a des notes datées de 1964 où il considère des surfaces caractéristiques F de genre arbitraire, introduit la forme quadratique φ sur $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et prouve la congruence $F \cdot F - \sigma \equiv 8 \operatorname{Arf} \varphi \pmod{16}$. Rohlin annonça ce résultat au congrès international des mathématiciens de Moscou en 1966. Il ne le publia pas jusqu'en 1972 quand une application (la preuve de la conjecture de Gudkov) apparut.

4) Cette application marque le début des activités de Rohlin dans le champ des courbes algébriques réelles planes. La plupart des surfaces que l'on rencontre naturellement dans ce domaine sont non-

orientables. Probablement ce fait même le conduisit à une étude du cas non orientable. Il ne connaissait pas l'invariant de Brown et obtint seulement la congruence suivante

$$\sigma(M) - F.F \equiv 2\varphi(p) \pmod{8}$$

où F est une surface caractéristique non orientable de la variété M fermée de dimension quatre, la fonction φ est la même que chez Guillou-Marin et p est dual à $w_1(F)$. Cette congruence suit immédiatement de celle de Guillou-Marin mais est quelquefois plus pratique pour les applications, car elle nécessite moins d'informations sur φ .

Rohlin ne publia pas cette congruence, peut-être par manque d'application intéressante. Mais il en parla dans son séminaire au début des années 70; il y a des notes (avec preuve) datées de cette époque dans ses archives. Voici une application de cette formule en rapport avec la géométrie algébrique réelle.

Soit A une courbe projective algébrique réelle plane non singulière de degré $4k$, supposons que A sépare $\mathbb{C}A$ (l'ensemble de tous les points complexes de la courbe) en deux parties et que pour tout ovale pair (se trouvant dans exactement un nombre pair d'autres ovals) la composante de $\mathbb{R}P^2 - A$ qui a cet ovale comme bord externe a une caractéristique d'Euler pair. Alors $p-n \equiv 0 \pmod{8}$ où p est le nombre d'ovales pairs et n le nombre d'ovales impairs. Ce résultat peut être obtenu en appliquant la congruence de Rohlin à $M = \mathbb{C}P^2$ et $F = A_-$ où A_- est la surface fermée obtenue d'une des composantes de $\mathbb{C}A - A$ et de la partie non-orientable de $\mathbb{R}P^2 - A$ (on trouve $F.F = p-n-1+8k^2$, $\varphi(p) = 1$). La première preuve de ce résultat est due à V.V. Nikulin et utilisait une autre approche. Celle indiquée ci-dessus est due à T. Fiedler.

O. Viro et V. Harlamov nous communiquent aussi la remarque suivante : Les congruences de Rohlin-Guillou-Marin peuvent s'étendre au cas des variétés ambiantes non simplement connexes. On y arrive en introduisant des structures pin sur les surfaces caractéristiques. Soit F une surface caractéristique dans une variété de dimension 4 orientée M et supposons pour la simplicité F orientable. Il existe une structure spin sur $M-F$ qui ne s'étend nulle part à travers F . Toute telle structure spin définit d'une manière naturelle une structure spin sur F . On sait que les structures spin sur F sont en bijection avec les formes quadratiques sur $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. L'invariant

d'Arf de la forme quadratique associée à la structure spin ci-dessus coïncide, dans le cas $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, avec l'invariant d'Arf de la congruence de Rohlin. Ceci indique la généralisation mentionnée ci-dessus. Il est curieux que bien que la structure spin induite sur F ne soit pas unique si $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$, leurs invariants d'Arf coïncident (puisque, en vertu de la congruence, ils sont définis par M et $F.F$). Donc la structure spin induite sur F est unique à difféomorphisme près.