

Klassifikation hochzusammenhängender Poincaré-Räume

Andreas Floer

Diplomarbeit  
Ruhr-Universität Bochum  
Abteilung für Mathematik  
1982

## Zusammenfassung

Bei der Klassifikation von Poincaré-Räumen beginnt man sinnvollerweise mit den Räumen, die nur in wenigen mittleren Dimensionen nichttriviale Homologiegruppen haben. Der Inhalt dieser Arbeit orientiert sich an den Arbeiten von SASAO, WALL und STÖCKER. SASAO stellt in (1) und (2) Klassifikationssätze für  $(n-1)$ -zusammenhängende  $(2n+1)$ - und  $(2n+2)$ -dimensionale Poincaré-Räume mit trivialen  $\mathbb{Z}_2$ -Homologien und Normalfaserungen auf. Es handelt sich also um die Homotopieklassifizierung einer Klasse von Mannigfaltigkeiten. Die Ergebnisse in SASAO (1) stimmen mit denen von WALL überein, der die  $(n-1)$ -zusammenhängenden  $(2n+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten anhand eines vollständigen Invariantensystems bis auf Diffeomorphie klassifiziert.

In dieser Arbeit werden Poincaré-Räume mit den elementaren homotopietheoretischen Methoden behandelt, die in den einleitenden Kapiteln von STÖCKER aufgeführt werden. Dabei wurde stets auf die Anwendbarkeit dieser Methoden auf möglichst allgemeine Raumklassen geachtet. Die ersten beiden Kapitel enthalten bis auf II, viii. und ix. allgemein bekannte Tatsachen. In III. werden zwei Aspekte der additiven Zerlegung behandelt. IV. ist der Aufgabe gewidmet, ein ähnlich vollständiges Invariantensystem wie das von WALL für die entsprechende Klasse von Poincaré-Räumen aufzustellen und damit die Ergebnisse aus SASAO (1) von den Einschränkungen zu befreien. In V. gehe ich der überraschenden Ähnlichkeit zwischen diesen Invariantensystemen nach. In VI. betrachte ich abschließend die Möglichkeit allgemeinerer Ergebnisse, besonders am Beispiel der in SASAO (2) begonnenen Aufgabe.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Vorbereitungen	4
i. Notation	4
ii. Das Whitehead-Produkt	5
iii. Die Hilton-Milnor-Formel	5
iv. Der Hopf-Homomorphismus	6
v. Die Whitehead-Sequenz und das Whitehead-Gitter	6
vi. Die S-Dualität	7
vii. Sphärische Faserungen	8
viii. Die James-Sequenz	8
ix. Cap-Produkte	11
II. Poincaré-Räume	13
i. Die Poincaré-Dualität	13
ii. Die Normalfaserung	14
iii. Die Cohomologie-Operation $\psi$	14
iv. Die Summe zweier Poincaré-Räume	15
v. Zellzerlegungen	15
III. Zerlegung hochzusammenhängender Poincaré-Räume	17
i. Ein Zerlegungssatz	17
ii. Zerlegungshindernisse	18
IV. Klassifikation der $(2n+1)$ -dimensionalen $(n-1)$ - zusammenhängenden Poincaré-Räume	25
i. Homotopiegruppen von Sphären	26
ii. $\pi_{2n} X^n(k)$	29
iii. Die Invarianten	44
iv. Die Realisierung von Homotopieäquivalenzen	55
V. Quasi-geometrische Konstruktionen und Vergleich mit den Ergebnissen von WALL	61
i. Poincaré-Räume und Mannigfaltigkeiten	61
ii. Einbettung von Homotopieklassen	64
VI. Klassifikation in größeren Raumklassen	67
Literaturverzeichnis	70

## I. Vorbereitungen

### i. Notation

Alle in dieser Arbeit auftretenden topologischen Räume sind endliche CW-Komplexe, außer  $O$ ,  $H$ ,  $BO$  und  $BH$ .

Ist  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz, so schreibe ich  $B = C \& A$ .

$\eta$  ist der Erzeuger von  $\pi_1^S$ .  $1, 1^n$  ist die Identität auf  $S^n$  oder die Inklusion einer  $n$ -Sphäre in einen Raum.

$e^n$  ist das Raumpaar  $(D^n, S^{n-1})$  sowie die charakteristische Abbildung in  $\pi_n(W \cup e^n, W)$ .  $m \cdot e^n$  ist die Einpunktvereinigung von  $m$   $n$ -Zellen bezüglich eines Punktes am Rand.

$C_n = C_n(X)$ ,  $C^n(X, A)$  sind zelluläre Ketten- und Cokettengruppen  $\{C_n\} \approx m \cdot e^n$ , wenn  $C_n \cong \mathbb{Z}^m$ .  $C_n \cong \pi_n(\{C_n\})$ .

? steht für eine ganze Zahl, die nicht bekannt ist. Mehrere ? innerhalb eines Terms sind im allgemeinen verschiedene Zahlen.

$s$  als Index steht nie für eine Zahl, sondern ist das Symbol für Stabilität.

$\text{zush}(X) = \max\{k \mid X \text{ ist } k\text{-zusammenhängend}\}$

ii. Das Whitehead-Produkt

Das Whitehead-Produkt  $[f,g]$  zweier Abbildungen  $f$  und  $g$  kommt in dieser Arbeit in zwei verschiedenen Formen vor: als verallgemeinertes Whitehead-Produkt (siehe etwa LANG)

$$[ , ] : [SA, X] \times [SB, X] \rightarrow [S(A \wedge B), X]$$

mit dem Spezialfall

$$[ , ] : \pi_n(X) \times \pi_m(X) \rightarrow \pi_{n+m-1}(X)$$

und als relatives Whitehead-Produkt (siehe etwa BLAKERS, MASSEY)

$$[ , ] : \pi_n(X, A) \times \pi_m(A) \rightarrow \pi_{n+m-1}(X, A).$$

Ich benutze die Relationen

$$[f, g] = [g, f] \circ ST \text{ mit } T : A \wedge B \rightarrow B \wedge A \text{ und}$$

$$[f \circ Su, g \circ Sv] = [f, g] \circ S(u \wedge v)$$

für das verallgemeinerte sowie

$$\partial [f, g] = -[\partial f, g] \text{ und}$$

$$(d, e) \circ [f, g] = [d \circ f, e \circ g] \text{ mit } (d, e) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

für das relative Whitehead-Produkt.

iii. Die Hilton-Milnor-Formel

Mit der Hilton-Milnor-Formel kann man die Homotopiegruppen von Ein-Punkt-Vereinigungen eingehängter Räume auf die Homotopiegruppen der einzelnen Bestandteile zurückführen. In dieser Arbeit komme ich mit der folgenden einfachen Hilton-Milnor-Formel aus:

Satz:

Sind  $W$  und  $V$   $(k-1)$ -zusammenhängend, so gilt für  $n < 3k$ :

$$\pi_n(SW \vee SV) = \pi_n(SW) \oplus \pi_n(SV) \oplus \pi_n(SW \wedge V).$$

Dabei werden die drei Summanden mit den Homomorphismen

$i_*^W, i_*^V$  und  $[i_*^W, i_*^V]_*$  injiziert.  $\square$

iv. Der Hopf-Homomorphismus

Mit  $H$  bzw.  $\dot{H}$  bezeichne ich die Abbildungen  $H_2$  (siehe STÜCKER) bzw.  $\lambda_2$  (siehe BOARDMAN, STEER) in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \dot{H} = \lambda_2 & \pi_{n+1}(SA \wedge SA) \\ \pi_n(SA) & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \uparrow U \\ & H = H_2 & \pi_n(SA \wedge A) \end{array}$$

Dabei ist  $U : S(SA \wedge A) \rightarrow SA \wedge SA$  ein kanonischer Homöomorphismus,  $S$  für halbstabiles  $\pi_n SA$  ein Isomorphismus und das ganze Diagramm für eingehängtes  $A$  kommutativ. Diese Voraussetzungen werden stets zutreffen, wenn der Hopf-Homomorphismus benutzt wird. Ich benutze die Gleichungen:

$$\dot{H}(g \circ f) = (g \wedge g) \circ \dot{H}(f) + \dot{H}(g) \circ Sf \quad \text{und}$$

$$(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f + [g, h] \circ Hf$$

Beweise findet man in den angegebenen Quellen.

v. Die Whitehead-Sequenz und das Whitehead-Gitter

Sei wieder  $\pi_n W$  halb stabil, also  $n < 3 \text{zush}(W)$ . Dann ist die Sequenz

$$\pi_n W \xrightarrow{S} \pi_{n+1} SW \xrightarrow{H} \pi_{n+1}(SW \wedge W) \xrightarrow{P} \pi_{n-1} W \xrightarrow{S} \pi_n SW \rightarrow$$

nach WHITEHEAD exakt. Mehrere Whitehead-Sequenzen lassen sich zu einem Whitehead-Gitter mit exakten Abbildungs-Treppen zusammenfügen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \pi_n W & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \pi_{n+3} SSW \wedge SW & \rightarrow & \pi_{n+1} SW & \rightarrow & \pi_{n+1} SW \wedge W & \rightarrow & \pi_{n-1} W \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \pi_{n+2} SSW & \rightarrow & \pi_{n+2} SSW \wedge SW & \rightarrow & \pi_n SW & \rightarrow & \pi_n SW \wedge W \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & \pi_{n+1} SSW & \rightarrow & \pi_{n+1} SSW \wedge SW
 \end{array}$$

Die Homotopiegruppen der Smash-Produkte sind stabil und in jeder der Zeilen untereinander isomorph über

$$SUS : \pi_{n-1} SW \wedge W \rightarrow \pi_{n+1} SSW \wedge SW$$

mit U wie in iii. Ich werde diese Gruppen über diesen Isomorphismus identifizieren. Der "Stabilitätsgrad" der übrigen Gruppen ist in jeder der Zeilen derselbe; das Gitter endet da, wo die Homotopiegruppen der Smash-Produkte verschwinden und damit die übrigen Gruppen stabil werden. Außerdem gilt:

$$P \circ SUS = [id_W, id_W]_*$$

Vergleiche dazu LANG. Damit ist das ganze Gitter natürlich gegenüber eingehängten Abbildungen  $V \rightarrow W$ .

#### vi. Die S-Dualität

Eine Abbildung  $u : S^n \rightarrow V \wedge W$  erzeugt ein Homologieelement  $[u] := u_*[S^n]$  in  $H_n(V \wedge W)$  und dieses einen Homomorphismus  $[u] : H^p(V) \rightarrow H_{n-p}(W) : x \rightarrow x/[u]$ . Andererseits erzeugt es für jedes X einen Homomorphismus

$$u! : \{W, X\} \rightarrow \{S^n, V \wedge X\} : f \rightarrow (id_V \wedge f) \circ u .$$

Satz: Ist  $/[u]$  ein Isomorphismus für alle  $p$ , so ist  $u!$  ein Isomorphismus für alle  $W$ .  $\square$

Der Beweis dieses Satzes sowie einige andere Eigenschaften der  $S$ -Dualität, die ich in dieser Arbeit benutzen werde, stehen in SPANIER.

### vii. Sphärische Faserungen

Die Klassifikationssätze für sphärische Faserungen und für Vektorraumbündel sowie die Tatsache, daß jedes Vektorraumbündel eine sphärische Faserung induziert, führen für jeden eingehängten CW-Komplex  $X = SW$  zu dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_O(X) & = & K_O(SW) & \cong & [X, BO] & \cong & [W, O] \\
 \downarrow J & & \downarrow J & & \downarrow J & & \downarrow J \quad \searrow J \\
 K_H(X) & = & K_H(SW) & \cong & [X, BH] & \cong & [W, H] \cong \{W, S^0\}
 \end{array}$$

Dabei sind  $H$  bzw.  $O$  die induktiven Limes der Halbgruppen  $H(n)$  der Homotopieäquivalenzen auf  $S^{n-1}$  bzw. der Gruppen  $O(n)$  der orthogonalen Abbildungen auf  $R^n$  und  $BH$  bzw.  $BO$  ihre klassifizierenden Räume. Die genannten Räume sind also entgegen der sonst in dieser Arbeit gültigen Konvention keine endlichen CW-Komplexe.

### viii. Die James-Sequenz

Sei  $W$   $m$ -zusammenhängend und  $V = W \cup_{\alpha} e^n$ . Dann ist nach JAMES die folgende Sequenz exakt für alle  $r \leq \min(3(n-1), 2m+n)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_r S^n & \xrightarrow{\alpha \circ H} & \pi_{r-n} W & \xrightarrow{F} & \pi_{r-1}(V, W) & \xrightarrow{X} & \pi_{r-1} S^n \rightarrow \\
 & & & & a \mapsto [e^n, a] & & 
 \end{array}$$



Dabei ist  $H : \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{2n-1} \rightarrow \pi_{r-n} S^{n-1}$  der Hopf-Homomorphismus zwischen einer halbstabilen und einer stabilen Homotopiegruppe. Relative Homotopiegruppen in der beschriebenen Art werden im Kapitel III und in Kapitel IV eine wichtige Rolle spielen.

Für  $r < 2n-1$  oder  $\alpha=0$  zerfällt die Sequenz in kurze exakte Sequenzen mit natürlichen Spaltungshomomorphismen, aber auch im anderen Fall gibt es fast-inverse Homomorphismen zu  $F$  und  $\chi$ .

Definition:  $E := e^n \circ \partial_D^{-1} : \pi_{r-2} S^{n-1} \rightarrow \pi_{r-1}(V, W)$

mit  $\partial_D : \pi_{r-1}(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \pi_{r-2} S^{n-1}$

Lemma:  $\chi \circ E = S$

Beweis:  $\chi \circ E(\gamma) = \chi \circ e_*^n \circ \partial_D^{-1}(\gamma) = \chi_D \circ \partial_D^{-1} \gamma$

mit  $\chi_D : \pi_{r-1}(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \pi_{r-1} S^n$ .

$\chi_D \circ \partial_D^{-1} = S$ , wie man leicht geometrisch nachprüft.  $\square$

Einen etwas interessanteren Homomorphismus finden wir auf der anderen Seite durch Verallgemeinerung einer in STÖCKER, Abschnitt 4.1 benutzten Methode. Man betrachte die Abbildung

$$(\bar{e}, i) : (V, W) \rightarrow (V \vee S^n, V).$$

$\bar{e}$  beschreibt das Zusammenziehen einer ins Innere der  $n$ -Zelle  $\bar{e}$  eingebetteten  $(n-1)$ -Sphäre. Die Inklusion über  $i^n$  bewirkt eine natürliche Spaltung der James-Sequenz für das Paar  $(V \vee S^n, V)$ .

$$\pi_{r-1}(V \vee S^n) \cong \pi_{r-n} V \oplus \pi_{r-1} S^n \xrightarrow{p} \pi_{r-n} V$$

Definition:  $e\# := p \circ (\hat{e}, i)_* : \pi_{r-1}(V, W) \rightarrow \pi_{r-n}V$

Lemma:  $e\#E(\gamma) = 0$ ;  $e\#F(a) = ia$ ;  $e\#S\beta = 0$

Beweis: Das Ausstülpfen der  $n$ -Sphäre hat auf die charakteristische Abbildung  $e^n$  den Effekt:

$$(\hat{e}, i)_* e^n = e^n + i^n \circ \chi_D = i^n \circ \chi_D \quad \text{in } \pi_n(V \vee S^n, V)$$

da  $e^n = 0$  dort.

$$\begin{aligned} \text{Also: } e\#E(\gamma) &= p((\hat{e}, i) \circ e^n \circ \partial_D^{-1} \gamma) = p(i^n \circ \chi_D \partial_D^{-1} \gamma) \\ &= p(i^n S \gamma) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Und } e\#F(a) &= p((\hat{e}, i) \circ [e^n, a]) = p([( \hat{e}, i) \circ e^n, ia]) \\ &= p([i^n \circ \chi_D, ia]) = ia \end{aligned}$$

Zum Beweis der letzten Aussage betrachte ich  $\beta$  in  $\pi_{r-2}(V', W')$  mit  $SV' = V, SW' = W$ .

$$\begin{aligned} \text{Es ist } e\#S\beta &= p((\hat{e}, i) \circ S\beta) = p(S(\hat{e}', i') \circ S\beta) \\ &= p(S((\hat{e}', i') \circ \beta)) \\ &= p(S([i^{n-1}, x] + i^{n-1} \circ y)) \\ &= p(i^n \circ S y) = 0, \text{ denn } S[i^{n-1}, x] = 0. \end{aligned}$$

Sollte die letzte Aussage für das relative Whitehead-Produkt nicht allgemein gelten, kann man sie hier leicht auf den Fall des absoluten Whitehead-Produkts zurückführen.  $\square$

Diese Homomorphismen sind also insofern fast-invers zu  $F$  und  $\chi$ , als das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & E \pi_{r-2} S^{n-1} \\
 & & & & \swarrow \\
 \alpha_{\circlearrowleft} H & \pi_{r-n} W & \xrightarrow{F} & \pi_{r-1}(V, W) & \xrightarrow{\chi} \pi_{r-1} S^n \xrightarrow{\alpha_{\circlearrowright} H} \\
 & \downarrow i & & \swarrow e\# & \\
 & \pi_{r-n} V & & & 
 \end{array}$$

ix. Cap-Produkte

Die Abbildung  $e\#$  hat einen direkten Bezug zu Cap-Produkten in Räumen des Typs  $V \cup_f e^r$ . Ist nämlich

$$q : \pi_{r-1}(V \cup S^n) \rightarrow \pi_r S^n \cong \pi_{r-n}^S(V)$$

die Projektion auf den dritten Summanden in der einfachen Hilton-Milnor-Formel, so gilt  $e\#j\#f = q(\hat{e} \circ f)$ . Damit kann man zeigen:

Satz: Für  $n > r/2$  gilt

$$\cap [e^r] : H^n(V \cup_f e^r) \rightarrow H_{r-n}(V \cup_f e^r) : ]e^n[ \rightarrow \rho(e\#j\#f)$$

Beweis: Die Abbildung  $\hat{e}$  läßt sich fortsetzen zu

$$\hat{e} : V \cup_f e^r \rightarrow V \cup S^n \cup_{\hat{e} \circ f} e^r, \text{ so daß } \hat{e}_* [e^r] = [e^r]$$

sowohl in den Grundräumen als auch in den vollständigen Kleberäumen gilt  $\hat{e}_* ]S^n[ = ]e^n[$ . Die Natürlichkeit des Cap-Produktes schreibt sich

$$]S^n[ \cap \hat{e}_* [e^r] = \hat{e}_* (\hat{e}_* ]S^n[ \cap [e^r]) = \hat{e}_* (]e^n[ \cap [e^r]).$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} ]S^n[\cap \tilde{e}_* [e^r] &= ]S^n[\cap [e^r] \\ &= ]S^n[\cap \tilde{e} \circ f \\ &= ]S^n[\cap (i^V \circ a + i^n \circ b + [i^V, i^n] \circ q(\tilde{e} \circ f)) \\ &= ]S^n[\cap [i^V, i^n] \circ q(\tilde{e} \circ f) \\ &= \rho(i^V \circ q(\tilde{e} \circ f)) \\ &= i_*^V \circ \rho(q(\tilde{e} \circ f)) \end{aligned}$$

da auf  $H_{r-n}$   $\tilde{e}_*$  identisch mit  $i_*^V$  ist, ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

## II. Poincaré-Räume

### i. Die Poincaré-Dualität

Ein Poincaré-Raum ist ein Raum  $P$ , für den eine Bedingung ähnlich dem Poncaré'schen Dualitätssatz für Mannigfaltigkeiten gilt. die passende Formulierung dieser Bedingung für einfach zusammenhängende Räume lautet:

Es gibt eine natürliche Zahl  $r$  und ein  $[P]$  in  $H_r(P)$ , so daß die Homomorphismen

$$\Pi\Delta := \cap [P] := H^p(P) \rightarrow H_{r-p}(P)$$

Isomorphismen sind für alle ganzen Zahlen  $p$ .

Aus dieser Eigenschaft folgt über das universelle Koeffiziententheorem auch ein entsprechender Satz für beliebige Abelsche Gruppen als Koeffizienten. Für nicht einfach zusammenhängende Räume beschreibt diese Eigenschaft noch nicht die volle Poincaré-Dualität. Darauf werde ich aber hier nicht eingehen, sondern statt dessen von allen Poincaré-Räumen, die in dieser Arbeit vorkommen, voraussetzen, daß sie einfach zusammenhängend sind. Die Klasse von  $n$ -zusammenhängenden  $r$ -dimensionalen Poincaré-Räumen bezeichne ich mit  $P_n^r$ .

Oft wird die Poincaré-Dualität auf den Torsionsteilen und den freien Quotienten der Homologiegruppen als Bilinearformen dargestellt:

$$\phi_{H_p}(P) \times \phi_{H_{r-p}}(P) \xrightarrow{\text{id} \times \Pi\Delta^{-1}} \phi_{H_p}(P) \times \phi_{H^p}(P) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ "Schnittzahlen"}$$

$$\tau_{H_{p-1}}(P, \mathbb{Z}) \times \tau_{H_{r-p}}(P, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{id} \times \Pi\Delta^{-1}} \tau_{H_{p-1}}(P, \mathbb{Z}) \times \tau_{H^p}(W, \mathbb{Z}) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{id} \times \delta^*} \tau_{H_{p-1}}(P, \mathbb{Z}) \times \tau_{H^{p+1}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

"Verschlingungszahlen"

Genau dann ist  $P$  ein Poincaré-Raum, wenn alle diese Bilinearformen nicht degeneriert sind.

ii. Die Normalfaserung

Der Begriff der Poincaré-Räume entstand aus der Frage, unter welchen Bedingungen ein Raum den Homotopietyp einer geschlossenen Mannigfaltigkeit hat. Da das Cap-Produkt homotopieinvariant ist, ist die Existenz eines Fundamentalzyklus  $[P]$  und die Isomorphie der abgeleiteten Homomorphismen sicherlich notwendig. Unklar blieb für einige Zeit, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, oder ob die Poincaré-Dualität nur eine von vielen Eigenschaften der geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist, die selbst noch gar keine sinnvolle Klasse von Räumen definiert.

Es stellte sich heraus, daß die Wahrheit in der Mitte liegt. In SPIVAK wurde für jeden Poincaré-Raum eine halbgeometrische Invariante, die Normalfaserung  $\nu$ , definiert, die als sphärische Faserung über  $P$  eindeutig bestimmt ist und eine Verallgemeinerung des normalen Bündels einer Mannigfaltigkeit auf diese größere Raumklasse darstellt. Die Frage, ob ein Poincaré-Raum eine Mannigfaltigkeit ist, reduziert sich in vielen Fällen auf die Frage, ob die normale Faserung dieses Raumes als Vektorraumbündel darzustellen ist, in jedem Fall ist dies eine weitere notwendige Bedingung.

iii. Die Cohomologieoperation  $\Psi$

Sei  $W$  ein Raum, für den  $H^p(W) = 0$  für  $a < p < b$ . Dann ist eine Abbildung

$$\Psi : H^a(W) \rightarrow H^b(W, \pi_{b-1} S^a) \quad \text{definiert.}$$

$\Psi(x)$  ist eine Obstruktion gegen die Existenz einer Abbildung

$\tilde{X}$  zwischen dem b-dimensionalen Gerüst von W und der  $S^a$  mit  $\tilde{X}^* ]S^a[ = x$ .

Für P aus  $P_{n-1}^r$  kann man diese Konstruktion durchführen mit  $a = r-n$  und  $b = r$ . Nach Umformung durch die Poincaré-Dualität und eventueller Einhängung erhält man einen Homomorphismus  $\Psi : \pi_n(P) \rightarrow \pi_{n-1}^S$ .

#### iv. Die Summe zweier Poincaré-Räume

Der Begriff der zusammenhängenden Summe in der Klasse der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten läßt sich leicht auf die Klasse der einfach zusammenhängenden Poincaré-Räume verallgemeinern. Für diese Räume unterscheide ich in der Homologie und Cohomologie die äußeren Dimensionen 0 und r von den inneren Dimensionen zwischen diesen beiden. Für P, Q und R aus  $P_1^r$  gilt  $P = Q + R$ , wenn es eine Abbildung von P nach  $Q \vee R$  gibt, die auf den inneren Dimensionen in der Cohomologie und Homologie Isomorphismen induziert und die jeden der beiden Fundamentalzyklen von Q und R auf den Fundamentalzyklus von P abbildet. Alle bisher definierten Invarianten sind in ihrer Art additiv bezüglich dieser Summe.

#### v. Zellzerlegungen

Während in den vorigen Abschnitten Wert auf eine natürliche Formulierung von Eigenschaften der Poincaré-Räume gelegt wurde, verfolge ich nun einen eher technischen Ansatz (siehe z.B. STÜCKER und SASAO). Diesem Ansatz liegt der folgende Satz aus WALL (Z) zugrunde:

Satz: Jeder einfach zusammenhängende CW-Komplex W mit endlich erzeugter Homologie  $H_*(W)$  besitzt eine Zellzerlegung der Art:

$$\begin{aligned} W &\simeq * \cup_{\alpha\lambda_1} \{C_2\} \cup_{\kappa\alpha\lambda_2} \{C_3\} \cup_{\kappa\alpha\lambda_3} \dots \\ &= \phi_2 S^2 \vee \tau_2 S^2 \cup_{\kappa_2} \tau_2 e^3 \cup_{\alpha_2} \phi_3 e^3 \cup_{\lambda_2} \tau_3 e^3 \dots \end{aligned}$$

dabei ist  $\phi_i$  bzw.  $\tau_i$  der Rang des freien Quotienten bzw. des Torsionsteiles von  $H_i(W)$ ,  $ne^k$  die Einpunktvereinigung von  $n$   $k$ -dimensionalen Zellen mit Grundpunkt am Zellenrand und  $\{C_n\}$  die entsprechende Einpunktvereinigung von Erzeugern von  $C_n$ .  $\alpha_i$  und  $\lambda_i$  können als nullhomolog vorausgesetzt werden und  $\kappa_i$  überlagert nur  $i$ -Zellen in  $\tau_i e^i$ . Die Zellen in dieser Zerlegung bilden also eine kanonische Basis des zellulären Kettenkomplexes  $C_*$  im Sinne von FRANZ.  $\square$

Zunächst begnüge ich mich mit der Schlußfolgerung, daß jeder einfach zusammenhängende Poincaré-Raum darstellbar ist als  $P \simeq W \cup_f e^r$  mit  $(r-2)$ -dimensionalem CW-Komplex  $W$ . Der Raum  $W$ , im folgenden auch Grundraum genannt, ist dabei bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt, sein Homotopietyp also eine "Invariante". Die Klebeabbildung  $f$  ist bis auf die Operation von  $\text{Aut}(W)$ , der Gruppe der Homotopieäquivalenzen von  $W$ , gemäß

$$\text{Aut}(W) \times \pi_{r-1} W \rightarrow \pi_{r-1} W : (h, f) \mapsto h \circ f$$

eindeutig bestimmt. Wir haben somit ein vollständiges Invariantenpaar (" $W$ ", " $f$ ").

Die Summenoperation in  $P_1^r$  kann mit Hilfe dieser Zellzerlegung sehr einfach dargestellt werden. Mit

$$P = W \cup_f e^r \quad \text{und} \quad Q = V \cup_g e^r \quad \text{gilt} \quad P + Q = W \vee V \cup_{f+g} e^r.$$

Unsere beiden Invarianten verhalten sich also in der jeweiligen Kategorie additiv bezüglich der Summenbildung.

Ich möchte nun eine weiter beschränkte Klasse von Poincaré-Räumen betrachten.

Definition:  $P_S^r$  sei die Klasse aller Poincaré-Räume  $P$  mit  $3 \cdot \text{zush}(P) > \dim(P) = r$ .



### III. Zerlegung hochzusammenhängender Poincaré-Räume

#### I. Ein Zerlegungssatz

Als ersten Schritt zur Klassifikation von Poincaré-Räumen mit Hilfe von "W" und "f" versucht man zweckmäßigerweise, diese Räume in möglichst kleine Summanden zu zerlegen, da dann  $W$  und  $\pi_{r-1}(W)$  sehr viel handlicher werden. Notwendig für die Existenz einer Zerlegung ist offenbar eine Darstellung von  $W$  als Einpunktvereinigung  $Y \vee Z$  dergestalt, daß die Poincaré-Dualität für  $p > 0$   $H^p Z$  auf  $H_{r-p} Z$  und  $H^p Y$  auf  $H_{r-p} Y$  abbildet. Diese Abbildungen sind dann auch Isomorphismen. Es zeigt sich, daß diese Forderungen in der Klasse  $P_S^r$  auch hinreichend sind.

Satz: Sei  $P = Y \vee Z \cup_f e^r$  in  $P_S^r$  und sei mit

$$p : Y \vee Z \rightarrow Y \text{ und } \hat{p} : P \rightarrow Y \cup_{pf} e^r :$$

$$\hat{p}_* \circ \mathbb{H} \Delta \circ \hat{p}^* : H^n Y \rightarrow H_{r-n} Y \text{ ein Isomorphismus für } 0 < n < r.$$

$$\text{Dann ist } P = Y \cup e^r + Z \cup e^r.$$

Beweis: Offenbar ist  $Y \cup_{pf} e^r$  ein Poincaré-Raum und daher

$Hpf$  in  $\pi_{r-1}(Y \wedge Y')$  eine Dualitätsabbildung. Sei

$Y \xrightarrow{i} Y \vee Z \xrightarrow{j} Z$ ,  $q : Y \vee Z \rightarrow Z$ . Alle diese Abbildungen sind stabil, alle Räume eindeutig eingehängt; die inverse Einhängung wird jeweils durch ein Apostroph gekennzeichnet. Nach der einfachen Hilton-Milnor-Formel ist

$$f = ipf + jqf + [i, j] \circ a \text{ mit } a \text{ aus } \pi_{r-1}(SZ' \wedge Y').$$

$$Hpf! : [Y', Z'] \rightarrow \pi_{r-1}(SY' \wedge Z') = \pi_{r-1}(Y \wedge Z')$$

$$b' \rightarrow (id_Y \wedge b') \circ Hpf \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Sei  $a = -\text{Hpf!}b'$ ;  $Sb' = b$ . Die Abbildung

$\text{id} + \text{jbp} : Y \vee Z \rightarrow Y \vee Z$  ist eine Homotopieäquivalenz, denn

$$(\text{id} + \text{jbp}) \circ (\text{id} - \text{jbp}) = \text{id} + \text{jbp} - \text{jbp} - \text{jbpjbp} = \text{id}$$

wegen  $\text{pj} = 0$ . Ich lasse nun diese Homotopieäquivalenz auf  $f$  operieren:

$$\begin{aligned} (\text{id} + \text{jbp}) \circ f &= (\text{id} + \text{jbp}) \circ (\text{ipf} + \text{jqf} + [\text{i}, \text{j}] \circ a) \\ &= (\text{id} + \text{jbp}) \circ \text{ipf} + (\text{id} + \text{jbp}) \circ \text{jqf} + (\text{id} + \text{jbp}) \circ [\text{i}, \text{j}] \circ a \\ &= (\text{i} + \text{jb}) \circ \text{pf} + \text{jqf} + [\text{i} + \text{jb}, \text{j}] \circ a \\ &= \text{ipf} + \text{jbpf} + [\text{i}, \text{jb}] \circ \text{Hpf} + \text{jqf} + [\text{i} + \text{jb}, \text{j}] \circ a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{i}, \text{jb}] \circ \text{Hpf} &= [\text{i} \circ \text{Sid}_Y, \text{j} \circ \text{Sb}'] \circ \text{Hpf} \\ &= [\text{i}, \text{j}] \circ (\text{id}_Y \wedge b') \circ \text{Hpf} = [\text{i}, \text{j}] \circ \text{Hpf!}b' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{id} + \text{jbp}) \circ f &= \text{ipf} + (\text{jbpf} + \text{jqf} + [\text{j}, \text{j}] \circ a) + [\text{i}, \text{j}] \circ (a + \text{Hpf!}b') \\ &= \text{if}_1 + \text{jf}_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### ii. Zerlegungshindernisse

Die Zerlegung eines Poincaré-Raums in  $P_S^r$  wird also außer durch die Schnittzahlen und die Verschlingungen nur durch die Klebeabbildungen innerhalb des Grundraums verhindert. Deshalb lohnt es sich, die Wall'sche Zellzerlegung

$$\begin{aligned} W &\simeq \phi_2 S^2 \vee \tau_2 S^2 \cup_{\kappa_2} \tau_2 e^3 \cup_{\alpha_2} \phi_3 e^3 \cup_{\lambda_2} \tau_3 e^3 \dots \\ &= * \cup \{C_2\} \cup_{\kappa \alpha \lambda_2} \{C_3\} \cup_{\kappa \alpha \lambda_3} \{C_4\} \dots \end{aligned}$$

genauer zu betrachten. Ich möchte dies mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes tun und stelle daher zunächst einige Konventionen

zusammen. Eine  $n$ -Zelle  $e^n$  wird als Paarraum  $\approx (D^n, S^{n-1})$  betrachtet.  $\{C_n\} = \{C_n(W)\}$  ist die Einpunktvereinigung der  $n$ -Zellen von  $W$  bezüglich eines Grundpunktes am Rand der Zellen;  $\{C_n\} = (\phi_n + \tau_n + \tau_{n-1})e^n$  in der minimalen Zerlegung.  $\text{Rand}\{C_n\} = (\phi_n + \tau_n + \tau_{n-1})S^{n-1}$ . Sind alle auftretenden Homotopiegruppen stabil, so ist

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{n-1} \otimes \pi_{k-n}^S & = & \pi_{k-1}(W^{n-1}, W^{n-2}) & & \\
 \uparrow \partial_n \otimes \pi_{k-n}^S & & \uparrow \pi_{k-1}(W^{n-1}) & \xleftarrow{(\kappa\alpha\lambda_{n-1})_*} & \pi_{k-1}(\text{Rand}\{C_n\}) \\
 C_n \otimes \pi_{k-n}^S & = & \pi_k(W^n, W^{n-1}) & = & \pi_k(\{C_n\}) \downarrow \partial_C \\
 & & & & \downarrow \chi_C \\
 & & & & \pi_k(* \cup \{C_n\})
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit Isomorphismen  $\chi_C, \partial_C, S$ . Aus den  $\kappa\alpha\lambda_n$  erwachsen Zerlegungshindernisse. Um sie zu untersuchen setze ich voraus, daß  $W$  mindestens  $(n/2+1)$ -zusammenhängend ist, so daß alle im folgenden auftretenden Homotopiegruppen stabil sind. Ist dies nicht der Fall, hänge ich  $\kappa\alpha\lambda_n$  entsprechend oft ein. Die Klebeabbildung

$\kappa\alpha\lambda_n : \text{Rand}\{C_n\} \rightarrow W^n$  definiert einen Homomorphismus

$$\text{kal}_n := (\kappa\alpha\lambda_n)_* \circ \partial_C :$$

$$C_{n+1} = \pi_{n+1}(\{C_{n+1}\}) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\text{Rand}\{C_{n+1}\}) \xrightarrow{(\kappa\alpha\lambda_n)_*} \pi_n(W),$$

also eine Cokette in  $C^{n+1}(W, \pi_n(W^n))$ . Mit den Bezeichnungen

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{n+1}^W & \xrightarrow{\text{kal}_n} & \pi_n(W^n) & \xrightarrow{j_i} & \pi_n(W^n, W^{n-i-1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(W^n/W^{n-i-1}) \\
 & & & & \downarrow \partial & & \\
 & & & & \pi_{n-1}(W^{n-i-1}) & & 
 \end{array}$$

definiere ich:  $\text{kal}_n^i(e^{n+1}) := j_{i*} \text{kal}_n(e^{n+1})$ .

$e^{n+1}$  bezeichnet hier die charakteristische Abbildung.

Ich werde diese Größen für  $i=0$  und  $i=1$  untersuchen.

$$\text{kal}_n^0 : C_{n+1} \rightarrow \pi_n(W^n, W^{n-1}) = C_n$$

ist nichts anderes als der Randhomomorphismus  $\partial_{n+1}$ ; das erste Zerlegungshindernis sind die Torsionen. Erfahre ich auch auf diese Weise nichts neues, so erhalte ich doch die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(j_0 \text{kal}_n(e^{n+1})) = \partial(\text{kal}_n^0(e^{n+1})) \\ &= \kappa\alpha\lambda_{n-1} \circ \partial_C(\partial_{n+1}e^{n+1}) \text{ da } W^n = W^{n-1} \cup_{\kappa\alpha\lambda_{n-1}} \{C_n\} \\ &= \text{kal}_{n-1}(\partial_{n+1}e^{n+1}). \end{aligned}$$

Die Coketten  $\text{kal}_n$  und damit auch die  $\text{kal}_n^i$  sind also Cozyklen und definieren Elemente der entsprechenden Homologiegruppen. Insbesondere ist

$$[\text{kal}_n^0] = 0 \text{ in } H^{n+1}(W, C_n(W)).$$

Um  $\text{kal}_n^1$  zu betrachten, muß ich den Teil der Klebeabbildung, der nur den Randoperator beschreibt, abtrennen. Ich betrachte daher statt des Paarraums den Quotienten und mache von den zusätzlichen Voraussetzungen über  $\kappa_n$ ,  $\alpha_n$  und  $\lambda_n$  im Wall'schen Satz (siehe II, v.) Gebrauch.

$$\begin{aligned} W^n/W^{n-2} &\simeq * \cup \{C_{n-1}\} \cup_{\partial_n} \{C_n\} \\ &= (\tau_{n-2} + \phi_{n-1})S^{n-1} \vee (\tau_{n-1}S^{n-1} \cup_{\partial_n} \tau_{n-1}e^n) \vee (\phi_n + \tau_n)S^n \end{aligned}$$

Von den  $n$ -Zellen werden nach denselben Zusatzannahmen nur die  $\tau_n S^n$  durch  $\kappa\alpha\lambda_n$  überlagert, zieht man also die trivial angeklebten  $n$ -Zellen zusammen, so bleibt von  $\text{kal}_n^1(e^{n+1})$  nur die Abbildung

$$\text{iu in } \pi_n(* \cup \{C_{n-1}\} \cup_{\partial} \tau_{n-1}e^n) \text{ mit } u(e^{n+1}) \text{ aus } \pi_n(* \cup \{C_{n-1}\})$$

übrig. Durch Definition von  $u$  auf allen  $(n+1)$ -Zellen erhält man

eine Cokette  $u : C_{n+1} \rightarrow \pi_n(* \cup \{C_{n-1}\}) = C_{n-1} \otimes \pi_1^S$ .

Eine genauere Betrachtung der Bedingung  $\partial \circ j_{1*} \circ \text{kal}_n = 0$  würde zu einem Zerlegungshindernis  $[u]$  in  $H^{n+1}(W, H_{n-1}(W, \pi_1^S))$  führen. Ich möchte hier aber  $u$  auf eine bekannte Operation zurückführen, die Steenrod-Quadrate  $Sq^2$ .

Satz: Sei  $x : C_{n-1} \rightarrow Z_2$  in  $C^{n-1}(W, Z_2)$  ein Cozyklus.

Dann wird  $Sq^2[x]$  repräsentiert durch den Cozyklus

$$C_{n+1} \xrightarrow{u} C_{n-1} \otimes \pi_1^S \xrightarrow{x \otimes \cong} Z_2 \otimes Z_2 \xrightarrow{\text{mult.}} Z_2$$

Beweis: Ich zeige zunächst, daß diese Aussage in  $W^{n+1}/W^{n-2}$  gilt, und schreibe dazu  $u$  als Matrix

$$u(e_i^{n+1}) = \sum_j u_{ij} e_j^{n-1} \circ \eta \text{ bezüglich der ausgewählten Zell-}$$

zerlegung.  $W^{n+1}/W^{n-2} = S^{n-3}X$  mit

$$X = (\tau_{n-2} + \phi_{n-1})S^2 \vee (\tau_{n-1}S^2 \cup_{\partial_n} \tau_{n-1}e^3) \vee (\phi_n + \tau_n)S^3$$

$$\cup_{\partial_{n+1} + i\ddot{u}} (\tau_{n+1} + \phi_{n+1} + \tau_{n+2})e^4,$$

wenn  $\ddot{u}_* \circ \partial_C(e_i^{n+1}) = \sum_j \ddot{u}_{ij} e_j^{n-1} \circ \theta$  und  $\ddot{u}_{ij} = u_{ij} \text{ mod } 2$ .

$\theta$  ist dabei das Element mit Hopfinvariante 1 aus  $\pi_3 S^2$ . Wegen der cohomologischen Eigenschaft der Hopf-Invariante gilt für  $Z_2$ -Cohomologieklassen:

$$]S_j^2[ \cup ]S_j^2[ = \sum_i ]e_i^4[ u_{ij} \quad (*\#)$$

Dies führt in  $W^{n+1}/W_{n-2}$  zu den gewünschten Steenrod-Quadraten:

$$S^{n-3} ]S_j^2[ \cup ]S_j^2[ = Sq^2(S^{n-3} ]S_j^2[) = \sum_i S^{n-3} ]e_i^4[ u_{ij}$$

$$Sq^2 ]S_j^{n-1}[ = \sum_i ]e_i^{n+1}[ u_{ij}$$

Man nehme nun ein  $x$  aus  $H^{n-1}(W, Z_2)$  und betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(W, Z_2) & \xrightarrow{i^*} & H^k(W^{n+1}, Z_2) \\ \uparrow r^* & & \uparrow r^* \\ H^k(W/W^{n-2}, Z_2) & \xrightarrow{i^*} & H^k(W^{n+1}/W^{n-2}, Z_2) \end{array}$$

Für  $k = n-1$  sind beide  $r^*$  surjektiv, also ist  $x = r^*x'$ .  $Sq^2(i^*x')$  habe ich berechnet, es ist

$$r^*Sq^2(i^*x') = r^*i^*Sq^2x' = i^*r^*Sq^2x' = i^*Sq^2x.$$

Dadurch ist  $Sq^2x$  eindeutig bestimmt, da  $i^* : H^{n+1}(W, Z_2) \rightarrow H^{n+1}(W^{n+1}, Z_2)$  injektiv ist. Die Steenrod-Quadrate in  $W$  sind also durch die in  $W^{n+1}/W^{n-2}$  eindeutig bestimmt. Die Formel (\*#) kann direkt übernommen werden mit

$$r^*]S^{n-1}[ = ]e^{n-1}[; i^*]e^k[ = ]e^k[.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Soll  $W$  durch Ankleben einer  $r$ -Zelle zu einem Poincaré-Raum ergänzt werden, sind nicht mehr alle Klebeabbildungen in  $W$  möglich. Mit den Methoden aus I,viii. kann ich aus

$e^{n+1}\#j\mathfrak{f} = \Pi\Delta ]e^{n+1}[$  und  $\partial j\mathfrak{f} = 0$  einschränkende Bedingungen für  $ka]_n(e^{n+1})$  auf offenen Zellen herleiten.

Bekanntlich gilt:  $P_{n-2}^{2n} = P_{n-1}^{2n} + \dot{P}_{n-2}^{2n}$ , mit

$$\dot{P}_{n-2}^{2n} = \{P \mid H_n P \text{ ist endlich}\}.$$

Satz  $\dot{P}_{n-2}^{2n}$ : Das einzige Zerlegungshindernis für einen Raum  $P$  aus  $\dot{P}_{n-2}^{2n}$  ist ein symmetrischer Tensor  $[u]$  in  $H_{n-1}P \otimes H_{n-1}P \otimes Z_2$ .  
 $P = Q + R$  mit  $H_{n-1}Q = A$  und  $H_{n-1}R = B$  genau dann, wenn  
 $[u] = a + b$  mit  $a$  aus  $A \otimes A \otimes Z_2$  und  $b$  aus  $B \otimes B \otimes Z_2$ .

Beweis: Sei  $\phi = \text{Rang}(\phi H_{n-1} P)$ ,  $\tau = \text{Rang}(\tau H_{n-1} P)$ .  
 $i$  und  $j$  laufen, wenn nichts anderes verlautet, von  $-\tau$  unter  
 Auslassung der 0 bis  $\phi$ . Ich nummeriere die Zellen einer mini-  
 malen Zellzerlegung von  $P$

$$P \simeq W \cup e^{2n} \simeq \bigvee_{i>0} S_i^{n-1} \vee \bigvee_{i<0} X_i^{n-1}(k_i) \vee \bigvee_{i<0} S_i^n \cup_{k\alpha\lambda_n} \bigvee_i e_i^{n+1}$$

$$\cup_f e^{2n}$$

mit  $\text{kal}_n(e_i^{n+1}) = k_i \iota_i^n + \sum_j u_{ij} \iota_j^{n-1} \circ \eta$  für  $i < 0$

und  $\text{kal}_n(e_i^{n+1}) = \sum_j u_{ij} \iota_j^{n-1} \circ \eta$  für  $i > 0$

so, daß die Poincaré-Dualität gegenüberliegende Zellen auf-  
 einander abbildet:  $\Pi \Delta ] e_i^{n+1} [ = [ \iota_i^{n-1} ]$ . Es ist

$W = V \cap (\tau + \phi) e^{n+1}$ , und in  $\pi_{2n-1}(W, V)$  muß nach I, viii.  
 gelten  $e_i^{n+1} \# f = [ \iota_i^{n-1} ]$  und daher mit  $a_i$  aus  $\pi_{2n-2} S^n$ :

$$j f = \sum_i ([e_i^{n+1}, \iota_i^{n-1}] + e_i^{n+1} \circ \partial_D^{-1} a_i).$$

Ich ersetze nun  $n-1$  durch  $m$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \partial j f \quad \text{in } \pi_{2n-2} V = \pi_{2m} V \\ &= \sum_i (\partial [e_i^{m+2}, \iota_i^m] + \partial e_i^{m+2} \circ \partial_D^{-1} a_i) \\ &= \sum_i ((\partial e_i^{m+2}) \circ a_i - [\partial e_i^{m+2}, \iota_i^m]) \\ &= \sum_{i<0} (k_i \iota_i^{m+1} \circ a_i - k_i [\iota_i^{m+1}, \iota_i^m]) + \\ &\quad + \sum_{i,j} u_{ij} (\iota_j^m \circ \eta \circ a_i - [\iota_i^m, \iota_j^m] \circ \eta) \end{aligned}$$

Nach der einfachen Hilton-Milnor-Formel sind für  $i > j$  die Ab-  
 bildungen  $[\iota_i^m, \iota_j^m]_*$  Injektionen von disjunkten direkten

Summanden von  $\pi_{2m} V$  der Form

$$\pi_{2m+1}(s_i^m \wedge s_j^m) \quad (i, j > 0)$$

$$\pi_{2m+1}(s_i^m \wedge x^m(k_j)) \quad (i > 0 > j)$$

$$\pi_{2m+1}(x^m(k_i) \wedge x^m(k_j)) \quad (0 > i, j)$$

$\partial j f = 0$  impliziert also  $\sum_{i \neq j} u_{ij} [i_i^m, i_j^m] \circ \eta = 0$ , also

$$(u_{ij} \pm u_{ji}) \circ (i_i^m \wedge i_j^m) \circ \eta = 0.$$

Für  $k_j$  ungerade ist für alle  $i$   $u_{ij} i_j^m \circ \eta = 0$ . Für  $k_i$  ungerade ist  $u_{ij} i_j^m \circ \eta$  kein Zerlegungshindernis. Sei nämlich  $\chi_j : W^{m+1} \rightarrow S_j^{m+1}$  und

$$h : W^{m+1} \rightarrow W^{m+1} := \text{id} + \sum_i \sum_{j < 0} u_{ij} i_i^m \circ \eta \circ p_j.$$

$h$  ist eine Homotopieäquivalenz und für die Klebeabbildung einer  $(m+2)$ -Zelle  $e_j^{m+2}$  mit  $k_j$  ungerade gilt

$$h \circ (k_j i_j^{m+1} + \sum_i u_{ij} i_j^m \circ \eta) = k_j i_j^{m+1} + (1+k_j) \sum_i u_{ij} i_j^m \circ \eta = k_j i_j^{m+1}$$

Ich kann also voraussetzen, daß  $u_{ij} = 0$ , wenn  $k_i$  oder  $k_j$  ungerade; der Homotopietyp von  $W$  hängt nur von

$$[u] \in H^{m+2}(P, H_m(P, \pi_1^S)) \cong H_m P \otimes H_n P \otimes Z_2$$

ab. Für  $k_i$  und  $k_j$  gerade ist  $(i_i^m \wedge i_j^m) \circ \eta \neq 0$  und somit  $u_{ij} = u_{ji} \pmod{2}$ . Das ist die behauptete Symmetrie.  $\square$



#### IV Klassifikation der $(2n+1)$ -dimensionalen $(n-1)$ -zusammenhängenden Poincaré-Räume

In dem folgenden Kapitel sollen Homotopieinvarianten von Poincaré-Räumen definiert werden, an denen man erkennen kann, ob zwei solche Räume homotopieäquivalent sind. Ich gehe von dem in II,v definierten vollständigen aber etwas unhandlichen Invariantenpaar "W" und "f" für einfach zusammenhängende Poincaré-Räume aus. Die Möglichkeit quasigeometrischer Interpretationen für die gewonnenen Größen werde ich im nächsten Kapitel besprechen.

Der Grundraum W ist ein  $(n-1)$ -zusammenhängender  $(n+1)$ -dimensionaler endlicher CW-Komplex und daher schon durch seine Homologie bis auf Homotopieäquivalenz bestimmt. Ich nummeriere die Elemente einer Basis von  $G := H_n(W)$  durch von  $-\tau := -\tau(G)$  bis  $\phi := \phi(G)$  unter Auslassung der Null und schreibe

$$\begin{aligned} W &\simeq (\phi+\tau)S^n \cup_{\partial} (\phi+\tau)e^{n+1} \\ &= \bigvee_i X^n(k_i) \quad ; \quad k_i = 0 \text{ für } i>0; \quad k_i > 0 \text{ für } i<0 \end{aligned}$$

Die verbleibende Invariante "f" liegt in

$$\pi_{2n}(W) = \bigoplus_i \pi_{2n}(X^n(k_i)) \oplus \bigoplus_{i>j} \pi_{2n}(X^n(k_i) \wedge X^n(k_j))$$

Der Berechnung dieser Gruppen sind die nächsten beiden Abschnitte gewidmet.

i. Homotopiegruppen von Sphären

Die notwendigen Informationen über die instabilen Homotopiegruppen der Sphären entnehme ich den Arbeiten von THOMEIER für große Dimensionen und TODA für kleine. Ich arrangiere ihre Ergebnisse in dem Whitehead-Gitter, die zugehörigen Hopf-, P- und S-Homomorphismen ergeben sich dabei entweder aus den Gruppenstrukturen und aus den Exaktheitsbedingungen im Whitehead-Gitter oder aus den Berechnungen im Paragraph 3 von THOMEIER.

Definition:  $\pi_n^{-a} := \pi_{2n+2-a}(S^{n+2-a})$

Definition: Diejenigen natürlichen Zahlen  $n$ , für die  $[1^n, 1^n]$  in  $\pi_{2n-1}S^n$  keinen direkten Summanden erzeugt, nenne ich kritische Zahlen.

2, 4, 8 sind kritische Zahlen, für  $n > 8$  kann  $n$  nach THOMEIER nur dann kritisch sein, wenn  $n \equiv 7 \pmod{8}$ .

Definition: Ich wähle für jedes  $n > 7$  ein Rechtsinverses  $S^{-3}$  zu  $S^3 : \pi_{2n-1}S^{n-1} \rightarrow \pi_n^S$  mit  $H \circ S^{-3} = 0$ . Ich setze  $S^{-2} := SS^{-3}$ ,  $S^{-1} := SS^{-2}$ . Ist  $n+1$  nicht kritisch, wähle ich  $S^{-3}$  als Homomorphismus.

Ein solches  $S^{-3}$  existiert stets, zu  $H \circ S^{-3}$  beachte, daß  $H$  auf  $\pi_{2n-1}S^{n-1}$  von einem Element der Ordnung 2 getragen wird. Für nicht kritisches  $n+1$  ist damit eine Aufspaltung

$$\pi_n^{-a} \cong \pi_n^S \oplus \text{Kern } S^a$$

gegeben. Die Einhängungen sind die direkten Summen aus der Identität auf  $\pi_n^S$  und  $S : \text{Kern } S^a \rightarrow \text{Kern } S^{a-1}$ .

Satz: (THOMEIER) Die folgende Tabelle gibt für  $n > 7$  die letzten drei nicht trivialen Zeilen des Whitehead-Gitters für die Sphären wieder.  $\square$

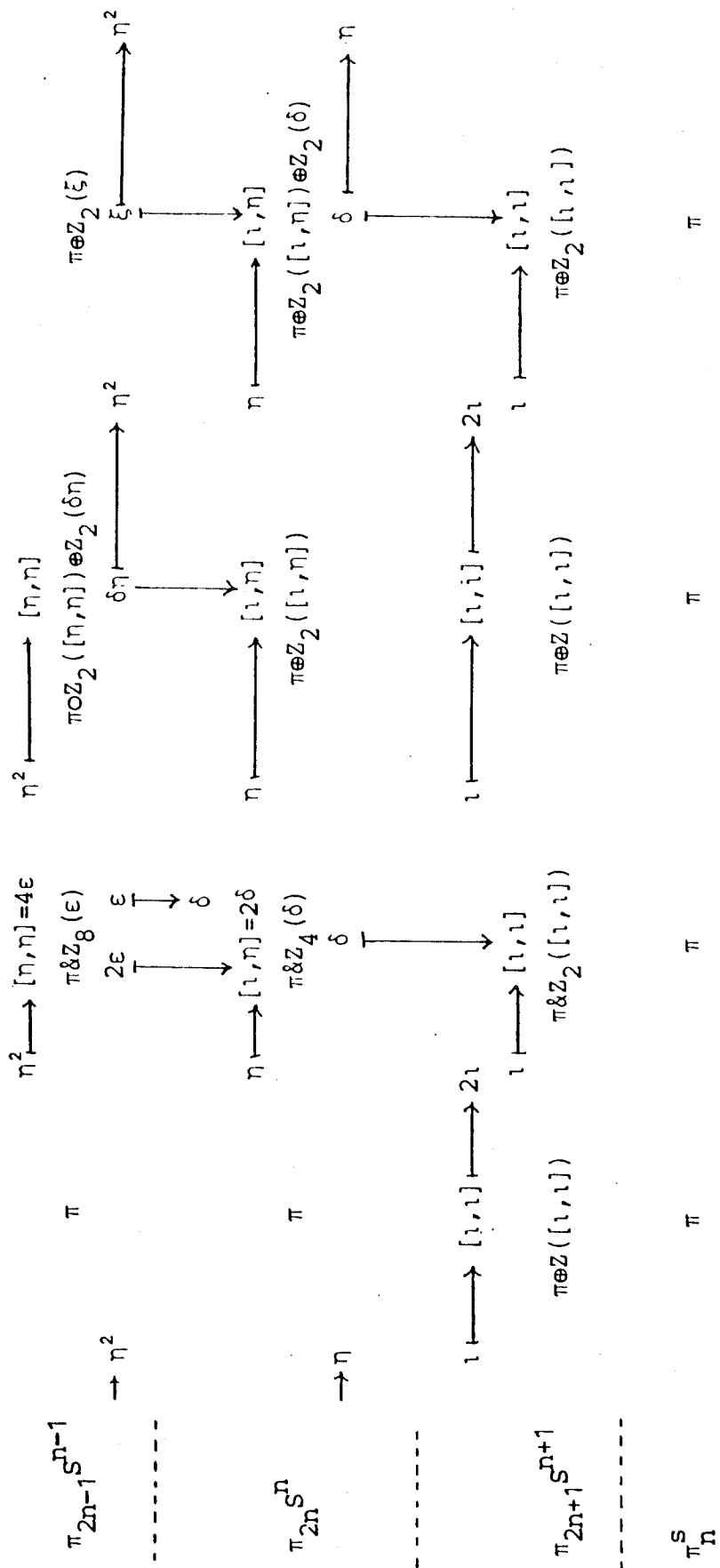
$n \pmod 4$

3

2

1

0



Mit Hilfe dieser Ergebnisse untersuche ich nun zwei Homomorphismen, die ich in diesem Kapitel benutzen werde.

Definition:  $\eta : S^{n+1} \rightarrow S^n$  induziert die Abbildungen

$$\eta_0 : \pi_{n-1}^S \rightarrow \pi_n^S$$

$$\eta_1 : \pi_{n-1}^S \cong \pi_{2n+1}^S \rightarrow \pi_{2n+1}^S$$

$$\eta_2 : \pi_{n-1}^S \cong \pi_{2n}^S \rightarrow \pi_{2n}^S$$

Lemma  $\eta$ : Für  $n > 7$ ,  $n+1$  nicht kritisch gilt:

$$\eta_2 \pi_{n-1}^S \subset S^{-2} \pi_n^S; \eta_1 \pi_{n-1}^S \subset S^{-1} \pi_n^S$$

Beweis: Die zweite Aussage folgt durch Einhängen aus der ersten.

Sei also  $a$  in  $\pi_{2n}^S$ , dann ist  $\eta_0 a = k + S^{-2}u$ , mit  $S^2 k = 0$  und  $2u = 2S^2 \eta_0 a - 2S^2 k = 0$ .

$$n = 3 \pmod 4 : \text{Kern } S^2 = 0$$

$$n = 2 \pmod 4 : \eta_0 a = ?\delta + S^{-2}u$$

$$\eta_0 S^{-1} a = ?\epsilon + S^{-3}u + ??[\eta, \eta]$$

$$2\eta_0 S^{-1} a = 2?\epsilon$$

$$0 = ? \pmod 4$$

$$n = 1 \pmod 4 : \eta_0 a = ?[\iota, \eta] + S^{-2}u$$

$$\eta_0 S^{-1} a = ?\delta\eta + S^{-2}u + ??[\eta, \eta]$$

$$H(\eta_0 S^{-1} a) = ?\eta^2$$

$$= H(S(\eta_0 S^{-2} a))$$

$$= 0$$

$$n = 0 \pmod 4 : \eta_0 a = ?[\iota, \eta] + ??\delta + S^{-2}u$$

$$H(\eta_0 a) = ??\eta = H(S(\eta_0 S^{-1} a)) = 0$$

$$?? = 0 \pmod 2$$

$$?[\iota, \eta] = 0 \text{ wie für } n = 1 \pmod 4 \quad \square$$

ii.  $\pi_{2n} X^n(k)$

Mit diesem Ausgangsmaterial gehe ich nun an die Berechnung von  $\pi_{2n} X^n(k)$ . Außerdem interessiert mich das Verhalten dieser Gruppen unter den folgenden Abbildungen:

Definition: Für jedes  $m, l$  aus  $N_0$  sei eine Abbildung  $|m, l|$  definiert, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \rightarrow & X^n(1k) & \xrightarrow{\chi} & S^{n+1} \\ \downarrow m & & \downarrow |m, l| & & \downarrow 1 \\ S^n & \rightarrow & X^n(mk) & \xrightarrow{\chi} & S^{n+1} \end{array}$$

kommutiert. Außerdem sei  $|0, 0| := 0 : X^n(k) \rightarrow X^n(k')$ .

Eine solche Abbildung existiert genau in der beschriebenen Situation, beachte  $0 \cdot k = 0$ .

Ist  $(p_i^{r_i})_i$  eine Primzahlzerlegung von  $k$ , so spaltet  $X^n(k)$  eindeutig in eine Einpunktvereinigung der  $X^n(p_i^{r_i})$ . Die gemischten Terme in der Hilton-Milnor-Formel verschwinden, da  $X^n(p) \wedge X^n(q) \simeq *$  für  $(p, q) = 1$ . In der daraus folgenden natürlichen Summendarstellung spielt der Anteil der Zweierpotenzen eine besondere Rolle; dies liegt daran, daß die ersten beiden stabilen Homotopiegruppen der Sphären von der Ordnung 2 sind. In dem folgenden Abschnitt werde ich  $\pi_{2n} X^n(k)$  für alle Zweierpotenzen  $k$  bestimmen bis auf die stabile Gruppe  $\Omega_n(k) := \pi_{2n}^S X^n(k)$ . Das entsprechende Ergebnis für ungerade  $k$  werde ich lediglich zitieren. Sei also im folgenden  $k$  eine Zweierpotenz.

Der Ausgangspunkt für die Berechnung dieser Gruppe ist die exakte Paarsequenz

$$\rightarrow \pi_{2n+1}(X^n, S^n) \xrightarrow{\partial_2} \pi_{2n}(S^n) \xrightarrow{\partial_1} \pi_{2n}(X^n) \xrightarrow{\partial_0} \pi_{2n}(X^n, S^n) \xrightarrow{\partial_{-1}} \pi_{2n-1}(S^n)$$

Die relativen Gruppen und die Randhomomorphismen berechne ich anhand der exakten Sequenz von JAMES. Darüberhinaus brauche

ich Informationen über die S- und H-Homomorphismen auf  $\pi_{2n}(X^n)$ .  
 Dazu biete ich die Gruppen in ein Whitehead-Gitter ein,  
 ähnlich wie es im vorigen Abschnitt mit den Sphären geschehen  
 ist. Es wird sich leider als notwendig erweisen, dieses  
 Gitter bis zur dritten Zeile zu berechnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{2n+1}(X^n \wedge X^{n-1}) & \xrightarrow{P} & \pi_{2n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{H} & \pi_{2n-1}(X^{n-1} \wedge X^{n-2}) & =: & C \\
 & & \downarrow S & & & & \\
 \pi_{2n+2}(X^{n+1} \wedge X^n) & \rightarrow & \pi_{2n}(X^n) & \rightarrow & \pi_{2n}(X^n \wedge X^{n-1}) & =: & B \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \pi_{2n+3}(X^{n+2} \wedge X^{n+1}) & \rightarrow & \pi_{2n+1}(X^{n+1}) & \rightarrow & \pi_{2n+1}(X^{n+1} \wedge X^n) & =: & A \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \Omega_n & & & & 
 \end{array}$$

Ich verlängere also die exakte Paarsequenz entsprechend  
 und definiere:

Definition: In der exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{2n+2}(X^n, S^n) & \xrightarrow{\partial_3} & \pi_{2n+1}S^n & \rightarrow & \pi_{2n+1}X^n & \rightarrow & \pi_{2n+1}(X^n, S^n) \xrightarrow{\partial_2} \\
 & & & & & & \\
 & & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_{2n}S^n & \rightarrow & \pi_{2n}X^n & \rightarrow & \pi_{2n}(X^n, S^n) \xrightarrow{\partial_1} \\
 & & & & & & \\
 & & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_{2n-1}S^n & \rightarrow & \pi_{2n-1}X^n & \rightarrow & \pi_{2n-1}(X^n, S^n) \xrightarrow{\partial_0} & \pi_{n-2}^S
 \end{array}$$

sei  $I_{n-1} := \text{Kern } \partial_0$   
 $J_{n-1} := \pi_{2n-1}S^n / \text{Bild } \partial_1$   
 $K_n := \text{Kern } \partial_1$   
 $L_n := \pi_{2n}S^n / \text{Bild } \partial_2$   
 $M_{n+1} := \text{Kern } \partial_2$   
 $N_{n+1} := \pi_{2n+1}S^n / \text{Bild } \partial_3$

Da die Paarsequenz mit der Einhängung kommutiert, habe ich  
 das System von kurzen exakten waagerechten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & N_n & \xrightarrow{i} & \pi_{2n-1} X^{n-1} & \xrightarrow{j} & M_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow S & & \downarrow S & & \downarrow S \\
 0 & \rightarrow & L_n & \rightarrow & \pi_{2n} X^n & \rightarrow & K_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & J_n & \rightarrow & \pi_{2n+1} X^{n+1} & \rightarrow & I_n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \pi_n^S \otimes Z_k & \rightarrow & \pi_{2n}^S X^n & \rightarrow & \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow 0
 \end{array}$$

\*\*

Damit sind die Möglichkeiten der Homotopiesequenz des Paares  $(X^n, S^n)$  erschöpft. Die so definierten Gruppen  $I_n$  bis  $N_n$  berechne ich wie in STÖCKER, Abschnitt 4.1 für  $L_n$  und  $K_n$  geschehen, nach der exakten Sequenz von JAMES und dem Abschnitt IV,i. Wir haben nach I,viii ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \pi_{2n-3} S^{n-2} \\
 & & & & & & \downarrow S \\
 & & & & & & \swarrow E \\
 0 & \rightarrow & \pi_2^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n-2} (X^{n-2}, S^{n-2}) & \rightarrow & \pi_{2n-2} S^{n-1} & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow S & & \downarrow S & \\
 & & & \swarrow \partial & \nearrow E & \downarrow S & \\
 0 & \rightarrow & \pi_1^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n-1} (X^{n-1}, S^{n-1}) & \rightarrow & \pi_{2n-1} S^n \xrightarrow{kH} & \pi_0^S \\
 & & & \downarrow S & & \downarrow S & \\
 & & & \swarrow \partial & \nearrow E & \downarrow S & \\
 \pi_{2n+1} S^{n+1} \xrightarrow{kH} & \pi_0^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n} (X^n, S^n) & \rightarrow & \pi_{2n} S^{n+1} & \rightarrow 0 & \\
 & & \downarrow S & & \downarrow \cong S & & \\
 0 & \xrightarrow{F} & \pi_{2n+1} (X^{n+1}, S^{n+1}) & \xrightarrow{\chi} & \pi_{n-1}^S & \rightarrow 0 & 
 \end{array}$$

\*\*\*

Die Quadrate in diesem Diagramm sind kommutativ, auch die Abbildung E paßt sich weitgehend kommutativ ein.

- Lemma: (i)  $r \circ E = S$   
(ii)  $E \circ r = S$  für die obersten beiden Homomorphismen E

Beweis: (i) siehe I,viii

(ii) Es gilt  $\chi E(\chi\gamma) = S(\chi\gamma) = \chi(S\gamma)$ ,  
 also  $E(\chi\gamma) - S\gamma = F(\alpha)$ .

Es ist aber  $e\#(E(\chi\gamma) - S\gamma) = e\#E(\chi\gamma) - e\#S\gamma = 0$  nach Lemma e#  
 in I,viii, also  $e\#F(\alpha) = i\alpha = 0$ . Für die beiden obersten  
 E-Homomorphismen folgt daraus  $\alpha = 0$ .  $\square$

Für  $\partial$  hingegen gilt:  $\partial \circ E = (k_1)_*$ , denn  
 $\partial(E(\gamma)) = \partial(e \circ \partial_D^{-1} \gamma) = (\partial e) \circ \partial_D \partial_D^{-1} \gamma = (k_1) \circ \gamma$ .

Mit Hilfe dieses Diagramms berechne ich nun die Gruppen  
 I bis N.

Lemma IKM:

(i) Für gerade  $n > 8$  kommutiert

$$\begin{array}{rcl}
 F + E \circ S^{-2} & : & \pi_1^S \oplus \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow M_n \\
 & & \downarrow 0 + id \quad \downarrow S \\
 E \circ S^{-1} & : & \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow K_n \\
 & & \downarrow id \quad \downarrow S \\
 E & : & \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow I_n \text{ mit waagerechten} \\
 & & \text{Isomorphismen.}
 \end{array}$$

(ii) Für ungerades und nicht kritisches  $n > 8$  kommutiert für  $k > 2$

$$\begin{array}{rcl}
 F + E \circ S^{-2} + e^{n \circ \partial_D^{-1}} & : & \pi_1^S \oplus \pi_{n-1}^S * Z_k \oplus Z_2(\delta) \rightarrow M_n \\
 & & \downarrow 0 + id + 0 \quad \downarrow S \\
 F + E \circ S^{-1} & : & Z_{2k} \oplus \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow K_n \\
 & & \downarrow 0 + id \quad \downarrow S \\
 E & : & \pi_{n-1}^S * Z_k \rightarrow I_n
 \end{array}$$

Für  $k=2$  verschwinden  $Z_2(\delta)$  und  $e^{n \circ \partial_D^{-1}}$ . In jedem Fall sind die  
 waagerechten Abbildungen isomorph.

Beweis: Die jeweils unterste Zeile der zwei Diagramme ergibt  
 sich schnell, da  $\chi$  dort ein Isomorphismus ist. Die jeweils zweite  
 Zeile ist in STÜCKER behandelt. Für die oberste Zeile gilt:



Kern E = ([1, η]), da

$$E([1, \eta]) = e^n \circ_D^{-1}([1, \eta]) = e^n \circ [D^n, \eta] = [e^n, k\eta] = 0,$$

und da andererseits

Kern E in Kern S wegen  $S = \chi \circ E$ .

Außerdem ist  $\partial F(\eta) = \partial[e^n, \eta] = -[\partial e^n, \eta] = -[k1, \eta] = 0$ .

Aus  $\partial \circ E = (k1)_*$  folgt für gerade n die Behauptung, für n ungerade hat man lediglich zu beachten, daß  $21 \circ \delta = [1, \eta] \neq 0$ , denn

$$\text{für } n = 3 \pmod 4: 21 \circ \delta = 2\delta = [1, \eta],$$

$$\text{für } n = 1 \pmod 4: 21 \circ \delta = 2\delta + [1, 1] \circ H\delta = [1, \eta].$$

Für  $k = 2$  liegt  $E(\delta)$  also nicht in  $M_n$ , wohl aber für  $k > 2$ .  $\square$

Definition: Die Projektion  $K_n \rightarrow Z_{2k}$  für nichtkritisches ungerades n nenne ich  $\bar{v}$ .

Lemma: JLN:

(i) Für  $6 \equiv n \pmod 8$ ,  $n + 1$  kritisch, habe ich:

$$\begin{array}{rcl} N_n & = & \pi_{2n-1} S^{n-1} \otimes Z_k \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ L_n & = & \pi_{2n} S^n \otimes Z_k \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ J_n & = & \pi_{2n+1} S^{n+1} \otimes Z_k \end{array}$$

(ii) In den übrigen Fällen spalten die Sequenzen

$$\begin{array}{rcl} 0 \rightarrow n_n \rightarrow N_n \xrightarrow{S^3} \pi_n^S \otimes Z_k \rightarrow 0 \\ \downarrow S \quad \downarrow S \quad \downarrow S \\ 0 \rightarrow l_n \rightarrow L_n \xrightarrow{S^2} \pi_n^S \otimes Z_k \rightarrow 0 \\ \downarrow S \quad \downarrow S \quad \downarrow S \\ 0 \rightarrow j_n \rightarrow J_n \xrightarrow{S} \pi_n^S \otimes Z_k \rightarrow 0 \end{array}$$

über  $S^{-a}$  und es gilt:

$n \bmod 4$	$k$	$n_n \xrightarrow{S} l_n \xrightarrow{S} j_n$
3	bel.	$0 \rightarrow 0 \rightarrow Z_k([1,1])$
2	bel.	$Z_8(\epsilon) \otimes Z_k \rightarrow Z_4(\delta) \otimes Z_k \rightarrow Z_2([1,1])$ $\epsilon \rightarrow \delta \rightarrow [1,1]$
1	= 2	$Z_2(\delta\eta) \xrightarrow{\cong} Z_2([1,\eta]) \xrightarrow{0} Z_k([1,1])$
	> 2	$Z_2(\delta\eta) \otimes Z_2([n,\eta]) \rightarrow Z_2([1,\eta]) \xrightarrow{0} Z_k([1,1])$ $\delta\eta \rightarrow [1,\eta]$
0	= 2	$0 \rightarrow Z_2(\delta) \xrightarrow{\cong} Z_2([1,1])$
	> 2	$Z_2(\xi) \rightarrow Z_2([n,1]) \otimes Z_2(\delta) \rightarrow Z_2([1,1])$ $\xi \rightarrow [1,\eta]; \delta \rightarrow [1,1]$

Beweis: Ich benutze wieder das Diagramm \*\*\*, ersetze aber  $n$  durch  $n+1$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \pi_{2n-1} S^{n-1} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \pi_2^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n}(X^{n-1}, S^{n-1}) & \rightarrow & \pi_{2n} S^n & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & \pi_1^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n+1}(X^n, S^n) & \rightarrow & \pi_{2n+1} S^{n+1} & \rightarrow \pi_0^S \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \rightarrow & \pi_0^S \xrightarrow{F} & \pi_{2n+2}(X^{n+1}, S^{n+1}) & \rightarrow & \pi_n^S \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \pi_n^S & \rightarrow & \pi_n^S
 \end{array}$$

Zur Berechnung von Bild  $\partial$  benutze ich die Tatsache, daß die Abbildungen  $E + F$  im modifizierten Diagramm \*\*\* für  $n > 7$  stets surjektiv sind, außer in der obersten Zeile für  $n = 0 \bmod 4$ . Das liegt daran, daß nur in diesem Fall  $\chi \circ E = S$  nicht den ganzen Kern von  $kH$  enthält (vgl. THOMEIER-Tabelle). Diesen Ausnahmefall werde ich zuletzt behandeln.

Ist  $E + F$  surjektiv, so ist  $\text{Bild } \partial = \text{Bild } (\partial \circ (E+F))$ .

Da in den beiden obersten Zeilen gilt:

$$\partial F(\eta^2) = \partial [e^{n, \eta^2}] = k[\eta, \eta] = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\partial F(\eta) = [e^{n+1, \eta}] = k[1, \eta] = 0$$

ist hier  $\text{Bild } \partial = \text{Bild } \partial \circ E = \text{Bild } (k_1)_*$ .  $(k_1)_*$  unterscheidet sich von der Multiplikation mit  $k$  nur in den folgenden Fällen:

$$n = 0 \pmod 4 : (21)_* \xi = 2\xi + [1, 1] \circ H\xi = [\eta, \eta]$$

$$(21)_* \delta = 2\delta + [1, 1] \circ H\delta = [1, \eta]$$

$$n = 1 \pmod 4 : (21)_* \delta \eta = 2\delta \eta + [1, 1] \circ H\delta \eta = [\eta, \eta]$$

In der dritten Zeile ist entweder  $kH = H = 0$  und

$\text{Bild } \partial = \text{Bild } \partial \circ E = \text{Bild } (k_1)_* = k\pi_{2n+1} S^{n+1}$ , oder es gilt für  $n$  ungerade

$$\begin{aligned} \partial(F(m_1) + E(\sigma)) &= \partial[e^{n+1, m_1}] + \partial(e^{n+1} \circ \partial_D^{-1} \sigma) \\ &= -[\partial e^{n+1, m_1}] + (k_1) \circ \partial_D \partial_D^{-1} \sigma \\ &= -k\eta[1, 1] + k \circ \sigma \end{aligned}$$

also auch hier:  $\text{Bild } \partial = k\pi_{2n+1} S^{n+1}$ .

Mit diesen Informationen und den Ergebnissen THOMEIERS erhält man für  $n \neq 0 \pmod 4$  die Diagramme in der Behauptung. Für  $n = 0 \pmod 4$  kann man  $l_n$  und  $j_n$  auf dieselbe Art bestimmen, für  $n_n$  entsteht die obengenannte Schwierigkeit. Zu ermitteln ist noch der Wert von  $\partial$  auf dem Element  $w$  in  $\pi_{2n}(X^{n-1}, S^{n-1})$ , das unter  $\chi$  auf  $\delta$  abgebildet wird. Bild  $F$ , Bild  $E$  und dieses Element spannen die Gruppe auf. Ich betrachte das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta & \longleftarrow & & w & \longrightarrow & & \partial w \\ \downarrow & & \pi_{2n} S^n & \xleftarrow{\chi} & \pi_{2n}(X^{n-1}, S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n-1} S^{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow S & & \downarrow \\ & & \pi_{2n+1} S^{n+1} & \xleftarrow{\chi} & \pi_{2n+1}(X^n, S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n} S^n \\ \downarrow & & & & & & \\ [1, 1] & \longleftarrow & & E(\delta) + ?F(\eta) & \longrightarrow & & k \circ \delta \end{array}$$

Es ist also  $S\partial w = (k_1)_* \delta = k \circ \delta = [1, \eta]$ , wenn  $k=2$   
 $= 0$ , wenn  $k>2$ .

Da in diesem Fall auch  $S$  injektiv ist, habe ich

$\partial w = \xi$ , wenn  $k=2$  und  $\partial w = 0$ , wenn  $k>2$ . Daraus und aus den vorigen Berechnungen ergibt sich auch dieser Fall.  $\square$

Die Berechnung der Gruppen I, K, M für kritisches n unterscheiden sich nur an einer Stelle vom Normalfall:  $S^{-1}, S^{-2}$  sind keine Homomorphismen. Man erhält also die korrekten Gruppenstrukturen indem man im Diagramm unter (ii) jeweils " $\circ$ " durch "&" ersetzt. Die Unteilbarkeit von  $[i^{n+1}, i^{n+1}]$  bewirkt in den Gruppen  $J_n, L_n, N_n$  zusätzlich, daß die von  $\epsilon, \delta$  und  $[i, j]$  erzeugten Untergruppen für bestimmte k verschwinden.

Mit diesen Lemmata sind die beiden äußeren Spalten des Diagramms \*\* vollständig bestimmt. Für die äußeren Spalten im Diagramm \* gilt die Vereinbarung aus I,v, daß Gruppen in derselben Zeile über SUS identifiziert werden. Das in STÜCKER beschriebene Smash-Produkt  $X^n \wedge X^{n-1}$  ist ein  $(2n+1)$ -dimensionaler  $(2n-2)$ -zusammenhängender CW-Komplex, seine Homologie bestimmt man über die Künneth-Formel zu  $H_{2n-1} = H_{2n} = Z_k, H_p = 0$  für  $p > 0$  sonst. Seinen genauen Homotopietyp erschließe ich aus den Gruppen A, B und C.

Lemma (STÜCKER):

$$A = Z_k(i) \text{ mit } i = i^{2n-1} = i^{n \wedge n-1}$$

$$B = Z_k(u) \ \& \ Z_2(i \circ \eta);$$

u ist eine Dualitätsabbildung mit  $u!x = i$ , das Bild von u unter dem Hurewicz-Homomorphismus erzeugt  $H_{2n}$ .  $\square$

Für die Art der Erweiterung in B gibt es zwei Möglichkeiten. Davon hängt der topologische Typ des Smash-Produktes und damit auch C ab.

Lemma:  $B = Z_k \oplus Z_2 \Leftrightarrow$

Es gibt eine Homotopieäquivalenz  $X^{2n-1}(k) \vee X^{2n}(k) \rightarrow X^n(k) \wedge X^{n-1}(k)$  mit  $i^{2n-1} \mapsto i$  und  $i^{2n} \mapsto u$ .

$$B = Z_{2k} \Leftrightarrow$$

$$X^n(k) \wedge X^{n-1}(k) \simeq X^{2n-1}(k) \vee S^{\cup_{\alpha} 2n} e^{2n+1} \text{ mit } \alpha = k i^{2n} + i^{2n-1} \circ \eta$$

Beweis:  $\gamma : X^{2n-1} \vee S^{2n} \rightarrow X^n \wedge X^{n-1}$  mit  $i^{2n-1} \mapsto i, i^{2n} \mapsto u$  gelingt immer. Je nach Art der Erweiterung in  $B$  ist  $y \circ \alpha = 0$  für  $\alpha = k i^{2n}$  oder  $\alpha = k i^{2n} + i^{2n-1} \circ \eta$ , und die damit existierende Fortsetzung von  $x$  auf  $X^{2n-1} \vee S^{2n} \cup_{\alpha} e^{2n+1}$  induziert nach der Künneth-Formel in allen Dimensionen Isomorphismen der Homologie, ist also eine Homotopieäquivalenz.  $\square$

Korollar:  $B = \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow C = \mathbb{Z}_2(i \circ \eta^2) \oplus \mathbb{Z}_2(u \circ \eta) \oplus \mathbb{Z}_2(\tau)$   
 $B = \mathbb{Z}_{2k} \Leftrightarrow C = \mathbb{Z}_2(u \circ \eta) \oplus \mathbb{Z}_2(\tau); i \circ \eta^2 = 0$

Beweis: Man berechnet  $C$  wie  $\pi_{2n} X^n$  selbst nach der exakten Sequenz von JAMES.  $\square$

Einige Werte der Hopf-Homomorphismen im Diagramm \* sind bekannt.

Lemma H: Für  $n = 0 \pmod{4}$  ist  $H: i\xi \rightarrow i\eta^2$   
 $H: i\delta \rightarrow i\eta$   
 Für  $n = 1 \pmod{4}$  ist  $H: i\delta\eta \rightarrow i\eta^2$

Korollar:  $i\eta^2 = 0$  in  $C(2)$ .

Beweis des Korollars: Für  $n = 0 \pmod{4}$ ,  $k = 2$  ist  $i\xi = 0$  nach Lemma JLN, also auch  $H\xi = i\eta^2 = 0$   $\square$

Korollar:  $B(2) = \mathbb{Z}_4$

Beweis zu Lemma H: Da  $i: S^n \rightarrow X^n$  eine eingehängte Abbildung ist, folgt aus den Eigenschaften des Hopf-Homomorphismus (siehe I, iv)  $\hat{H}(i \circ x) = i \wedge i \circ \hat{H}(x)$ , und mit den Ergebnissen von THOMEIER (siehe Tabelle) die Behauptung.  $\square$

Weiter folgt aus STÖCKER, Abschnitt 4.1

Lemma v: Es gibt ein  $v$  in  $\pi_{2n}X^n$  für  $n$  ungerade mit

(i)  $jv = [e^{n+1}, i^n]$

(ii)  $s^2v = 0$

(iii)  $Hv = u + ?_{1n}$  mit dem vorher definierten  $u$  in  $B$ .

Beweis: (i) gilt, da  $[e^{n+1}, i^n]$  in  $K_n$  für  $n$  ungerade.

(iii) folgt aus (i) nach STÜCKER. Für (ii) betrachte ich das Diagramm \*\* und überspringe dabei die dritte Zeile.

$S^2 : L_n \rightarrow \pi_n^S \otimes Z_k$  ist surjektiv (siehe Lemma JLN).

Aus  $j\tilde{v} = [e^{n+1}, i^n]$  folgt  $Sj\tilde{v} = 0$  und daraus  $S\tilde{v} = iy$ .

Aus besagter Surjektivität folgt  $S\tilde{v} = iSz$ .

$v := \tilde{v} - iz$  erfüllt dann (ii).  $\square$

Korollar: Für  $k > 2$ :  $B(k) = Z_k \oplus Z_2$

Beweis: Wäre  $B(k)$  zyklisch, so müßte für  $n$  ungerade nach Lemma H

$H : \pi_{2n}(X^n) \rightarrow \pi_{2n}(X^n \wedge X^{n-1})$  für  $n$  ungerade surjektiv sein.

Damit wäre wegen der Exaktheit im Whitehead-Gitter die Einhängung

$S : \pi_{2n}X^n \rightarrow \pi_{2n+1}X^{n+1}$  für  $n$  gerade injektiv. Für  $n \not\equiv 3 \pmod 4$  ist aber  $i[1, n] \neq 0$  in  $\pi_{2n}X^n$  und  $S i[1, n] = i S[1, n] = 0$ .  $\square$

Definition: In  $\pi_{2n}(X^n \wedge X^{n-1})$  sei  $u_n := Hv$  für  $n$  ungerade  
 $:= SUS u_{n-1}$  für  $n$  gerade

Ich weiß leider nicht, ob es sich stets um dasselbe Element in  $B$  handelt, ob also  $u_{n+1} = SUS SUS u_{n-1}$ , und kann deshalb den Index  $n$  nicht weglassen. Weitere Unbequemlichkeiten wird mir diese Frage beim Abschluß der Klassifikation bereiten.

Zum Schluß identifiziere ich zwei regelmäßig auftretende Elemente in  $\pi_{2n-1}X^{n-1}$ .

Satz: In  $\pi_{2n-1}X^{n-1}$  gibt es ein  $w$  mit

(i)  $jw = [e^n, \eta]$  (ii)  $Sw = 0$  (iii)  $2w = 0$

Für  $n$  ungerade und  $k > 2$  gibt es dort ein  $\beta$  mit

(i)  $j\beta = E(\delta)$  (ii)  $S\beta = kv$  (iii)  $H\beta = 0$  oder  $i\eta^2$

Beweis: Die Bedingungen (i) sind nach dem Lemma IKM erfüllbar. Wegen  $Sjw = jSw = 0$  und  $Sj\beta = jS\beta = E([1,1]) = k[e^n, 1]$  müssen  $Sw$  und  $S\beta - kv$  in  $L_n$  liegen. Aus Lemma JLN folgt aber, daß alle  $L_n$ -Elemente Einhängungen von  $M_n$ -Elementen sind bis auf  $i\delta$  in  $L_{4k}$ ; es ist aber nach Lemma H:  $H_i\delta = 1n$ , was für die beschriebenen Elemente nicht möglich ist. Also liegen  $Sw, S\beta - kv$  in  $SM_n$ , und man kann  $w, \beta$  so abändern, daß (ii) gilt und (i) erhalten bleibt.

(iii) für  $w$  folgt aus  $w = P(x)$  für ein  $x$  in  $C$ , da  $C$  nur Elemente der Ordnung 2 enthält. Zuletzt untersuche ich die Frage, ob  $\beta$  eingehängt ist. Für ein Element  $y$  in  $\pi_{2n-1}(X^{n-2}, S^{n-2})$  mit  $\chi y = \delta$  gilt:  $E(\chi y) = E(\delta) = Sy$ . Man beachte dazu das Lemma im Anschluß an das Diagramm \*\*\*.  $\partial y$  ist 0 für  $k > 2$  nach dem Beweis zu Lemma JLN. Also gibt es ein  $z$  in  $\pi_{2n-2}X^{n-2}$  mit  $j(Sz - \beta) = 0$ , also liegt  $Sz - \beta$  in  $i\pi_{2n-1}S^{n-1} = N_n$ , also ist  $H(Sz - \beta) = H(ia) = 1 \circ H(a)$ , siehe Beweis zu Lemma H. Das einzige Element  $\neq 0$  in  $1 \circ \pi_2^S C$  ist aber  $1n^2$ .  $\square$

Mit Hilfe dieser Informationen kann ich das Whitehead-Gitter auffüllen, soweit ich es brauche.

Satz: Sei  $n > 8$ , weder  $n$  noch  $n+1$  kritisch und  $k$  eine Zweierpotenz.

(i) Die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Kern } S^2 \rightarrow \pi_{2n}X^n(k) \rightarrow \Omega_n(k) \rightarrow 0$$

spaltet.

(ii) Die letzten drei Zeilen des Whitehead-Gitters haben die in den folgenden Tabellen dargestellte Struktur.

Definition: Im Beweis dieses Satzes werden Homomorphismen

$$\theta_k : \pi_{2n+1}X^{n+1}(k) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

definiert mit den Eigenschaften

$$\theta_{mk} \circ |m, 1| = m\theta_{1k}; \quad \theta_k([1, 1]) = 1; \quad \theta_k(iS^{-1}\pi_n^S) = 0.$$

n mod 4

3

2

1

0

$$\pi_{2n-1} X^{n-1}(2)$$

$$\tau \longrightarrow \omega \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \bar{w} \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} w \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \omega \mathbb{Z}_2(w)$$

$\varepsilon$

$$u_n \longrightarrow 2v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_4} v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n$$

$\delta n$

$$u_n \longrightarrow i n \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \delta \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n$$

$$\delta \longrightarrow [1, n] = 4v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_8} u_n \longrightarrow i n \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \delta \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} i n$$

-----

$$\pi_{2n} X^n(2)$$

$$\begin{array}{c} \tau \longrightarrow \omega \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \bar{w} \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} w \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \tau \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \omega \mathbb{Z}_2(w) \\ \downarrow \varepsilon \\ u_n \longrightarrow 2v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_4} v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \\ \downarrow \delta n \\ u_n \longrightarrow i n \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \delta \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \\ \downarrow [1, n] = 4v \\ u_n \longrightarrow 2v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_8} v \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \longrightarrow i n \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \delta \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} i n \\ \downarrow \delta \\ u_n \longrightarrow i n \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} \delta \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} u_n \\ \downarrow \delta \\ i \longrightarrow [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} i \longrightarrow [1, 1] \end{array}$$

-----

$$\pi_{2n+1} X^{n+1}(2)$$

$$i \longrightarrow [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} i \longrightarrow [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} i \longrightarrow [1, 1] \xrightarrow{\Omega \mathbb{Z}_2} [1, 1]$$

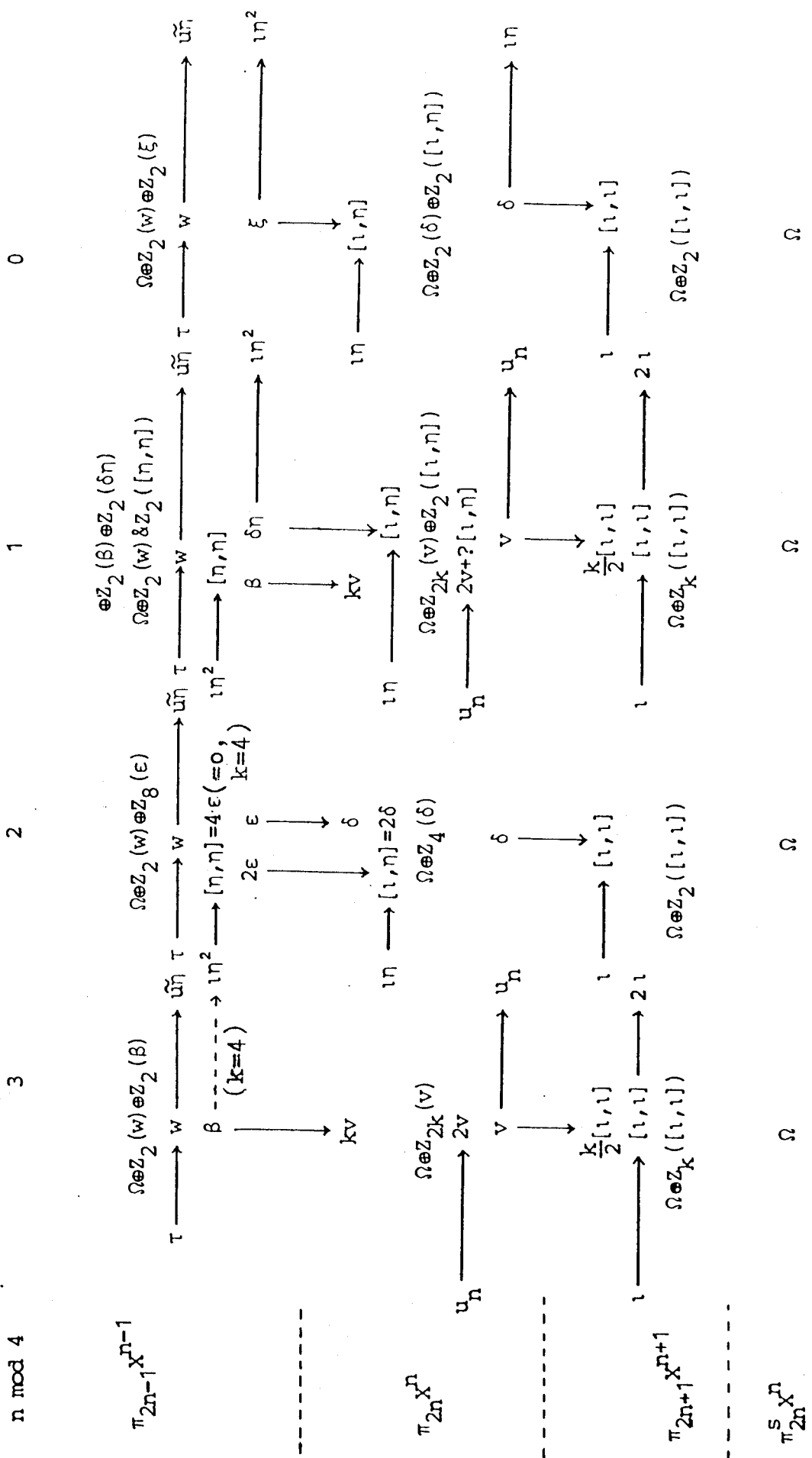
-----

$$\pi_{2n}^s X^n(2)$$

$\Omega \quad \Omega \quad \Omega \quad \Omega \quad \Omega$



$$k > 2$$



Beweis: Ich konstruiere zunächst  $\theta$ . In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z_2 \otimes \pi_{2n+1} S^{n+1} & \xrightarrow{i_*} & \pi_{2n+1} X^n(2) \otimes Z \\ & \downarrow Z_2 \otimes \chi_* & \downarrow \text{id} \otimes p \\ Z_2 \cong Z_2 \otimes \pi_{2n+1} S^{n+1} / S^{-1} & \xrightarrow{\pi_n^S \theta \otimes Z_2} & \pi_{2n+1} X^n(2) \otimes Z_2 \end{array}$$

Existiert eine Abbildung  $\theta \otimes Z_2$  als Fortsetzung einer Linearform auf einem Vektorraum. Die Homomorphismen

$$\theta_2 := \text{id} \otimes p \circ \theta \otimes Z_2; \quad \theta_{2k} := \theta_2 \circ |1, k|$$

haben die gewünschten Eigenschaften, denn für  $m \neq 1$  ist die Aussage trivial. Für  $n = 0 \pmod{4}$  kann ich einen solchen Homomorphismus auch durch  $\theta_2 \circ S = H$  definieren.

Die Behauptungen in den obersten Zeilen der Diagramme sind größtenteils im vorhergehenden Satz bewiesen. Für  $n = 1 \pmod{4}$  weiß ich nicht, ob  $2\beta = 0$  oder  $[1, 1]$ . Aus der Natürlichkeit von  $P$  gegenüber eingehängten Abbildungen folgt:

$$P(u\eta) = P(u) \circ \eta = 2v \circ \eta = 0 \quad \text{und} \quad P(1\eta^2) = P(1) \circ \eta^2 = [n, n]$$

Da  $SW = 0$ , muß  $P(\tau) = w + ?[n, n]$  sein. Ich mache nun von der Freiheit in der Definition von  $w$  Gebrauch und definiere  $W = P(\tau)$ .

$Hw = u\eta + ?1\eta^2 + ?\tau$  (in diesem Punkt ist das Diagramm etwas ungenau), denn:  $jw = [e^n, \eta]$  ist nicht eingehängt, da  $e \# jw \neq 0 \Rightarrow w$  ist nicht eingehängt  $\Rightarrow Hw \neq 0$ .  $Hw \in (1\eta^2, \tau)$  widerspricht aber der Exaktheit zwischen  $P$  und  $H$ , denn  $P(\tau) \neq 0$ .

In der mittleren Zeile haben wir  $v$  in Kern  $S^2$ , und da  $B$  keine Untergruppe der Ordnung  $2k$  enthält, muß  $Sv = \frac{k}{2}[1, 1]$  und  $kv = S\beta$ .  $Z_{2k}(v)$  ist sicher ein direkter Summand, da es in  $\pi_{2n} X^n(k)$  keine Untergruppe von höherer Ordnung gibt. Dasselbe gilt für  $Z_4(\delta)$ , wenn  $k = 4$ . Für höhere  $k$  ist die Hintereinanderschaltung  $\pi_{2n}(X^n(4k)) \xrightarrow{|1, k|} \pi_{2n} X^n(4) \rightarrow Z_4(\delta)$  eine Projektion.

Für  $k = 2$  sieht die Situation etwas einfacher aus:

$[1, \eta] = 0$  immer,  $P(\tau) = W$  gilt für ein ohnehin eindeutig bestimmtes  $W$  und  $u$  kann ich fest in  $B$  wählen, das heißt

$$u_n = \text{SUS } u_{n-1} \quad \forall n.$$

Daß  $[1, \eta]$  für  $n = 0, 1 \pmod 4$  einen direkten Summanden erzeugt, kann ich weder durch  $S$ , noch durch  $H$ , noch durch  $|1, k|$  zeigen.

Ist  $G_n := \pi_{2n} X^n / \nu$  für  $n = 1 \pmod 4$  und  $G_n := \pi_{2n} X^n / \delta$  für  $n = 0 \pmod 4$ , so genügt es, zu zeigen, daß  $G_n = \Omega_n \oplus \mathbb{Z}_2([1, \eta])$ .

Man kann aber aus  $S^2 : \pi_{2n-2} X^{n-2} \rightarrow \pi_{2n} X^n$  ein Rechtsinverses zu  $S^2 : G_n \rightarrow \Omega_n$  ableiten, denn  $S^4$  ist surjektiv

und  $[1, \eta]$  ist nicht zweimal eingehängt. Ich werde diesen Beweis hier nicht weiter ausführen, da ich die Spaltung von  $([1, \eta])$  in dieser Arbeit nicht benutzen werde.  $\square$

$\eta]$

$\neq 0$

iii. Die Invarianten

Um im allgemeinen Fall Invarianten aus der Klebeabbildung definieren zu können, muß ich zunächst die Ergebnisse des letzten Abschnittes auf beliebige Torsionen und auf die unendlichen Zyklen verallgemeinern. Sei also  $k \geq 0$  eine ganze Zahl.

Die Struktur der Gruppen  $\pi_{2n} X^n(0)$  ist direkt aus der THOMEIER-Tabelle abzulesen:

$$\pi_{2n} X^n(0) = \pi_{n-1}^S \oplus \pi_{2n} S^n \oplus B(0)$$

Für ungerade  $k$  kann man das Whitehead-Gitter ähnlich wie für Zweierpotenzen untersuchen, man erhält einfachere, nur von  $n \bmod 2$  abhängige Diagramme (siehe WENTE )

$n \bmod 2$		1		0
$\pi_{n-1} X^{2n-1}$	0	$\Omega$	$0=C$	$\Omega$
		$S \downarrow$		$S \downarrow \cong$
$\pi_{2n} X^n$	$Z_k$	$\mathbb{P} \quad \Omega \oplus Z_k(x)$	$\mathbb{H} \quad Z_k=B$	$\Omega$
		$S \downarrow$		$S \downarrow \cong$
$\pi_{2n+1} X^{n+1}$	$Z_k$	$\mathbb{P} \quad \Omega \oplus Z_k([1,1])$	$\mathbb{H} \quad Z_k=A$	$\Omega$
		$S \downarrow$		$S \downarrow \cong$
$\pi_{2n}^S X^n$		$\Omega$		$\Omega$

Definition: Sei  $n > 7$  gerade und  $n+1$  nicht kritisch.

Für  $k=0$  beschreibe  $p$  das Zusammenziehen der  $S^{n-2}$  und es sei

$$\theta_0 : \pi_{2n+1} X^{n+1}(0) \xrightarrow{p_*} \pi_{2n+1} S^{n+1} \rightarrow \pi_{2n+1} S^{n+1} / S^{-1} \pi_n^S \cong Z_2$$

Für  $k > 0$  sei  $p$  die Projektion auf den Anteil der Zweierpotenz  $k_2$  (Vgl. Anfang von ii.) und

$$\theta_k : \pi_{2n+1} X^{n+1}(k) \xrightarrow{p_*} \pi_{2n+1} X^{n+1}(k_2) \xrightarrow{\theta_{k_2}} Z_2$$

mit  $\theta_{k_2}$  wie in Abschnitt ii. definiert.

Definition: Für  $k > 0$ ,  $n$  nicht kritisch sei  $\bar{v} : \pi_{2n} X^n(k) \rightarrow K_n(k) \rightarrow Z_{2k}$  gegeben durch  $jf = \bar{v}(jf) \cdot [e^{n+1}, i^n] \text{ mod } E(S^{-1}\pi_n^S)$ .

Anhand der James-Sequenz prüft man leicht nach, daß  $\bar{v}$  ein wohlbestimmter Homomorphismus ist. Ich definiere nun drei Homomorphismen, aus denen die Invarianten konstruiert werden sollen.

Definition:

$$\psi_k : \pi_{2n} X^n(k) \xrightarrow{\cong} \Omega_n(k) \xrightarrow{\bar{X}^*} \pi_{n-1}^S$$

$$v_k : \pi_{2n} X^n(k) \xrightarrow{j^*} K_n(k) \xrightarrow{\bar{v}} Z_{2k} \xrightarrow{\frac{1}{k}} Q/2Z \quad \text{für } n \text{ ungerade und nicht kritisch und } k > 0$$

$$\Delta_k : \pi_{2n} X^n(k) \xrightarrow{\cong} \pi_{2n+1} X^{n+1}(k) \xrightarrow{\theta^k} Z_2 \quad \text{für } n \text{ gerade und } n+1 \text{ nicht kritisch.}$$

Da ich das Verhalten dieser Homomorphismen unter Abbildungen der  $X^n(k)$  kennenlernen möchte, brauche ich noch die Struktur der Abbildungsmengen zwischen den Torsionsräumen.

Lemma:

(i)  $|m, l|$  ist durch die in der Definition geforderten Eigenschaften bis auf  $\text{in } \chi$  eindeutig bestimmt.

(ii) Seien  $m, l$  und  $k$  positiv,  $m$  und  $l$  teilerfremd. Dann ist

$$[X^n(1k), X^n(mk)] \cong Z_k(|m, l|) \otimes (Z_2(\text{in } \chi) \otimes Z_k)$$

$$[X^n(k), X^n(0)] \cong Z_2(\text{in } \chi) \otimes Z_k$$

$$[X^n(0), X^n(k)] \cong Z_k(|1, 0|) \otimes (Z_2(\text{in } \chi) \otimes Z_k)$$

$$[X^n(0), X^n(0)] \cong Z(|0, 1|) \oplus Z(|1, 0|) \oplus Z_2(\text{in } \chi)$$

Beweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Gruppen zu berechnen, ich benutze die Puppe-Sequenz

$$\pi_{n+1} X^n(q) \xrightarrow{P} \pi_{n+1} X^n(q) \xrightarrow{\chi^*} [X^n(p), X^n(q)] \xrightarrow{1^*} \pi_n X^n(q) \xrightarrow{P} \pi_n X^n(q)$$

es ist  $\pi_{n+1} X^n(q) \cong Z_2(\iota_n \chi)$  für  $q > 0$   
 $\cong Z(\iota^{n+1}) \oplus Z_2(\iota_n \chi)$  für  $q = 0$

und  $\pi_n X^n(q) \cong Z_q(\iota)$

Damit rechnet man aus, daß Gruppenerweiterungen der behaupteten Art vorliegen.  $\square$

Lemma: Bis auf  $\iota_n \chi$  gilt:

(i)  $|m, l| + |p, q| = |m+p, l+q|$   
 $|m, l| \circ |p, q| = |mp, lq|$ ,

wenn alle Abbildungen mit jeweils geeigneten  $k$  existieren.

(ii) Sind  $k = k'k^*$ ,  $l = l'l^*$  und  $m = m'm^*$  jeweils Aufteilungen in Primzahlanteile bezüglich einer Disjunktion der Primzahlen, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X^n(1k) \simeq X^n(1'k') \vee X^n(1^*k^*) & & \\ \downarrow |m, l| & & \downarrow |m', l'| \vee |m^*, l^*| \\ X^n(mk) \simeq X^n(m'k') \vee X^n(m^*l^*) & , \text{ wenn } |m, l| \text{ existiert.} & \end{array}$$

Beweis: Wenn diese Abbildungen überhaupt existieren, was jeweils direkt aus der Voraussetzung folgt, beschreiben die Zahlen  $m$  bzw.  $l$  die Bilder dieser Abbildung unter  $H_n$  bzw.  $H_{n+1}$ , daraus folgen diese Rechenregeln.  $\square$

Lemma:  $\Delta_{mk} \circ |m, l|_* = m\Delta_{1k}$  ;  $\theta_{mk} \circ S|m, l|_* = m\theta_{1k}$

$\psi_{mk} \circ |m, l|_* = l\psi_{1k}$

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus  $\chi_* \circ |m,1|_* = 1\chi_*$

$$\begin{aligned} \text{denn } \psi_{mk} \circ |m,1|_* &= (S^2\chi)_* \circ S^2 \circ |m,1|_* = S^2 \circ \chi_* \circ |m,1|_* \\ &= S^2 \circ 1\chi_* = 1\psi_{1k} \end{aligned}$$

Die erste Aussage folgt aus  $\theta_{mk} \circ S|m,1|_* = m\theta_{1k}$  durch Vorschalten der Einhängung.  $\theta$  ist leider nicht so natürlich definiert wie  $\psi$ ; ich muß verschiedene Fälle unterscheiden. Zunächst stelle ich fest, daß  $\theta_{mk} \circ 1\eta\chi = 0$ , da das Bild von  $1\eta\chi$  nach Lemma  $\eta$  in  ${}_{1}S^{-1}\pi_n^S$  liegt, und  $\theta$  in allen drei Fällen so konstruiert ist, daß  $\theta \circ (S^{-1}\pi_n^S) = 0$  ist. Ich kann daher die Behauptung an beliebigen Darstellungen von  $|m,1|$  nachprüfen.

$$1. \text{ Sp} \circ S|0,1| : X^{n+1}(1k) \xrightarrow{\cong} S^{n+2} \xrightarrow{1i} X^{n+1}(0) \xrightarrow{p} S^{n+1}$$

ist nullhomotop, also  $\theta_0 \circ |0,1|_* = 0$ .

$$2. |S|m,0| : X^{n+1}(0) \xrightarrow{p} S^{n+1} \xrightarrow{m1} X^{n+1}(mk); m, k > 0$$

$\theta_{mk}$  eingeschränkt auf  ${}_{1*}^{n+1}\pi_{2n+1}S^{n+1} = J_n(mk)$  war nach Definition gerade das Kürzen von  ${}_{1*}^{n+1}S^{-1}\pi_n^S$ , damit ist auch diese Aussage bewiesen.

$$3. S|m,1| : X^{n+1}(0) \rightarrow X^{n+1}(0)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow p & & \downarrow p \\ m : S^{n+1} & \rightarrow & S^{n+1} \end{array} \text{ ist kommutativ, daraus folgt die Behauptung.}$$

4. Es bleibt noch der Fall  $m,1,k > 0$ . Hier kann ich für alle drei Zahlen eine Aufteilung in ungeraden Anteil und den Anteil der Zweierpotenzen durchführen und  $S|m,1|$  nach den Rechenregeln aufspalten. Den ungeraden Teil kann ich zusammenziehen. Für den Anteil der Zweierpotenzen ist  $\theta$  im Beweis zum Satz aus ii. gerade so definiert, daß die Behauptung gilt.

Für beliebige natürliche Zahlen  $k$  folgt dann

$$\begin{aligned} \theta_{mk} \circ S|m, 1| &= \theta_{m_2 k_2} \circ S|m_2, 1_2| = m_2 \theta_{1_2 k_2} = m_2 \theta_{1k} \\ &= m \theta_{1k}, \text{ da } \theta \text{ } \mathbb{Z}_2\text{-wertig ist. } \square \end{aligned}$$

Die vier Fallunterscheidungen in diesem Beweis sind nötig, weil ich im Fall von Torsionen nicht die einfache, bis auf die Wahl von  $S^{-1}$  natürliche Definition von  $\theta$  benutzen konnte. Das liegt daran, daß man für  $k > 0$  den Deckel von  $X^{n+1}(k)$  nicht zusammenziehen kann. Dennoch sind die Homomorphismen  $\theta_0$  und  $\theta_k$  verwandt als Projektionen auf  $\mathbb{Z}_2([1^{n+1}, 1^{n+1}])$ .

Um diese Homomorphismen auf allgemeine Grundräume  $W$  von  $P_{n-1}^{2n+1}$ -Räumen anwenden zu können, benutze ich die Darstellung

$$W \simeq \bigvee_a X^n(k_a) \text{ aus der Einleitung zu diesem Kapitel und}$$

definiere die Inklusionen  $i_a$  von und die Projektionen  $p_a$  auf  $X^n(k_a)$ . Ich führe die Rohinvarianten

$$\psi_a := \psi_{k_a} \circ p_{a*}; \quad v_a := v_{k_a} \circ p_{a*} \quad \text{und}$$

$$\Delta_a := \Delta_{k_a} \circ p_{a*} = \theta_{k_a} \circ S \circ p_{a*}$$

ein und untersuche die Operation von  $\text{Aut}(W)$  auf diesen Homomorphismen- $(\phi + \tau)$ tupeln. Jede Homotopieäquivalenz in  $\text{Aut}(W)$  erzeugt einen Automorphismus auf  $C_*(W)$ , dem zellulären Kettenkomplex von  $W$ , da man jede Abbildung zu einer Zellulären Abbildung deformieren kann. Da ich homologische Invarianten definieren will, biete ich  $\text{Aut}(W)$  in die kurze exakte Sequenz

$$\underline{1} \rightarrow \text{Kern } C_* \rightarrow \text{Aut}(W) \rightarrow C_*(\text{Aut}(W)) \rightarrow \underline{1}$$



ein. Ich werde feststellen, daß die Operationen von Abbildungen in Kern  $C_*$  weder  $\psi$  noch  $\Delta$  oder  $v$  verändern; die Operation von  $\text{Aut}(W)$  auf den Rohinvarianten faktorisiert also über  $C_*$ . Dies kann man auch direkt zeigen, ich werde auf die Operation von Kern  $C_*$  später zurückkommen.

Die Wirkung von  $C_*(\text{Aut}(W))$  werde ich in einem allgemeineren Rahmen behandeln: Sei  $U$  der Grundraum eines anderen  $P_{n-1}^{2n+1}$ -Raumes, und sei  $U$  dargestellt wie  $W$ , nur daß die Indexmenge eine Teilmenge von  $Z' = \{z' | z \in Z\}$  ist. Auf diese markierten Zahlen beziehe ich mich mit griechischen Indizes  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wieder gilt  $k_\alpha > 0$  für  $\alpha < 0$  und  $k_\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$ . Sei nun  $g : W \rightarrow U$  eine zelluläre Abbildung, dann ist der induzierte Kettenhomomorphismus gegeben durch

$$C_n(g) = (g|_{W^n})_* : \pi_n(W^n) \rightarrow \pi_n(U^n)$$

$$C_{n+1}(g) = g_* : \pi_{n+1}(W, W^n) \rightarrow \pi_{n+1}(U, U^n)$$

da  $W^{n+1} = W$  und  $W^{n-1} = *$ . Ich betrachte alle zellulären Abbildungen  $g, i_a, p_a$  ohne Änderung des Namens auch als Abbildung zwischen den Raumpaaren und schreibe  $e_p := i_p \circ e^{n+1}$  für  $p$  aus  $Z$  oder  $Z'$ . Dann sind durch  $\{e_p\}$  und  $\{i_p\}$  Basen für die Kettenkomplexe von  $W$  und  $U$  gegeben. Kettenhomomorphismen  $h$  schreibt man als Matrizenpaare  $((m), (l)) = ((m_{\alpha\alpha}), (l_{\alpha\alpha}))$ :

$$h_{n+1}(e_a) = \sum_\alpha l_{\alpha a} e_\alpha \quad ; \quad h_n(i_a) = \sum_\alpha m_{\alpha a} i_\alpha$$

Lemma |h|: Sei  $h = ((m), (l))$  ein Paar von Homomorphismen  $(C_n W, C_{n+1} W) \rightarrow (C_n U, C_{n+1} U)$ .

(i) Für jede topologische Abbildung  $g$  mit  $g_* = h$  gilt:

$$p_\alpha \circ g \circ i_a = |m_{\alpha\alpha}, l_{\alpha\alpha}| + ? \text{ in } X$$

(ii)  $h$  wird genau dann von einer topologischen Abbildung induziert, wenn alle Abbildungen  $|m_{a\alpha}, l_{a\alpha}|$  existieren und es ist  $|h|_* = h$  mit

$$|h| := \sum_{a, \alpha} i_\alpha |m_{a\alpha}, l_{a\alpha}|_{P_a}$$

Beweis: Für (i) hat man lediglich die Homologie von  $p \circ g \circ i_a$  zu berechnen. Aus (i) folgt (ii) durch Berechnen von  $h_*$  auf  $\pi_n(W)$  und  $\pi_{n+1}(W, W^n)$ .  $\square$

Aus diesem Lemma und der Definition von  $|m, l|$  folgt auch, daß jeder Kettenhomomorphismus topologisch darstellbar ist. Ich bin nun in der Lage, die Invarianten zu definieren:

Definition: Morphismen in der Kategorie  $P_{n-1}^{2n+1}$  seien die Abbildungen vom Grad 1.

Satz:  $\Delta := \sum_a \Delta_a(f) \otimes i_a$  in  $H_n(P, \mathbb{Z}_2)$  für  $n$  gerade,  $n+1$  nicht kritisch und

$$\psi := \sum_a \psi_a(f) \otimes e_a \text{ in } H_{n+1}(P, \pi_{n-1}^S)$$

sind natürliche Homotopieinvarianten in  $P_{n-1}^{2n+1}$ .

Beweis: Ein Morphismus zwischen zwei Poincaré-Räumen aus dieser Klasse induziert eine Abbildung  $h$  zwischen den Grundräumen  $W$  und  $U$ . Ist  $g$  die Klebeabbildung in  $\pi_{2n}(U)$  und  $f$  die Klebeabbildung in  $\pi_{2n}(W)$ , so gilt  $g = h \circ f$ . Sei  $h_* = ((m), (l))$  wie vorher.

$$\Delta_\alpha(h \circ f) = \theta_\alpha(S(h \circ f))$$

$$= \theta_\alpha \left( (S \sum_{b, \beta} i_\beta (|m_{b\beta}, l_{b\beta}| + ? \cdot \chi)_{P_b}) \circ S f \right)$$

$$= \theta_\alpha \left( \sum_{b, \beta} (S i_\beta S |m_{b\beta}, l_{b\beta}|_{S P_b} S f) \right)$$

(Wegen der Linksdistributivität für eingehängte Abbildungen, und da  $\theta(S \cup_X p_b f) = 0$ )

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{b, \alpha} \theta_{\alpha} (S(i_{\beta} | m_{b\beta}, l_{b\beta} | p_b f)) \\
 &= \sum_b \theta_{k_{\alpha}} (S | m_{b\alpha}, l_{b\alpha} | p_b f) \\
 &= \sum_b m_{b\alpha} \theta_{k_b} (S p_b f) \\
 &= \sum_b m_{b\alpha} \theta_b (S f) \\
 &= \sum_b \Delta_b (f) \cdot m_{b\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\text{also } \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} (h \circ f) \otimes l_{\alpha} = \sum_{\alpha, b} \Delta_b (f) \otimes m_{b\alpha} l_{\alpha} = \sum_b \Delta_b (f) \otimes h_{*} (l_b)$$

Die zweite Behauptung folgt durch eine ganz ähnliche Rechnung, wenn man erst einmal gezeigt hat, daß der Ausdruck überhaupt ein Zyklus ist. Dies folgt aber aus  $k_a \psi_a (f) = 0$ .  $\square$

Für  $v$  gilt ein solcher Satz nicht,  $v$  verhält sich nicht linear gegenüber Morphismen, da es nicht über die Einhängung faktorisiert. Um seine Transformationseigenschaften zu beschreiben, brauche ich die Verschlingungszahlen. Ich betrachte sie hier als Bilinearform

$$V_f : \tau H^{n+1} W \times \tau H^{n+1} W \xrightarrow{f \times \epsilon^*} H^n (W, Q/Z) \times \tau H^n W \rightarrow Q/Z$$

wobei  $\epsilon^*$  auf  $\tau H^{n+1} W = \text{Bild } \delta^*$  ein Linksinverses zum Randoperator der Koeffizientensequenz  $Z \rightarrow Q \rightarrow Q/Z$  ist.  $v$  und  $V$  sind insofern miteinander verwandt, als beide über  $j : W \rightarrow (W, W^n)$  faktorisieren.  $j f$  ist in  $\pi_{2n} (W, W^n)$  eine Summe von Elementen aus  $E_a := i_a E(S^{-1} \pi_n^S)$  und Whitehead-Produkten  $[e_a, l_b]$  (vergleiche Abschnitt ii. und STÜCKER, Abschnitt 4.1. zusammen mit der einfachen Hilton-Milnor-Formel in I,iii.). Bezeichne ich mit  $E$  die von den  $E_a$  aufgespannte Untergruppe, so kann ich  $v$  und  $V$  direkt ablesen aus

$$jf = \sum_{a,b} x_{ab}(f) [e_a, i_b] \text{ mod } E, \text{ denn f\u00fcr } a < 0 \text{ gilt:}$$

$$v_a(f) = x_{aa}/k_a \text{ mod } 2\mathbb{Z}$$

$\epsilon^*]e_a[(i_b) = \delta_{ab}/k_b$  ist ein geeignetes Rechtsinverses zu  $\delta^*$

$$]e_a[ \cap f = e_a \# jf = \sum_c x_{ac} i_c$$

$$V_{ab}(f) := V_f(]e_a[, ]e_b[) = \epsilon^*(]e_b[) \left( \sum_c x_{ac} i_c \right)$$

$$= x_{ab}/k_b \text{ f\u00fcr } a, b < 0$$

Die erste Gleichung folgt aus der letzten Definition von  $\bar{v}$ , die zweite Aussage rechnet man mit der vorgegebenen kanonischen Basis des zellul\u00e4ren Kettenkomplexes leicht nach. Sp\u00e4ter werde ich brauchen, da\u00df aus dieser Gleichung auch folgt:  $x_{ac} = 0$  f\u00fcr  $a < 0$  und  $c > 0$ . Die dritte Gleichung folgt aus I,viii.; der Ausdruck ist wohlbestimmt, da  $e_a \# E = 0$ . Die vierte Gleichung folgt aus den beiden vorhergehenden.

Ich untersuche nun das Verhalten von  $v$  gegen\u00fcber Abbildungen  $|h| : W \rightarrow U$ ,  $h = ((m), (l))$ .  $|h|$  bildet  $E$  auf sich selbst ab, und mod  $E$  gilt:

$$\begin{aligned} j|h|f &= j \sum_{a,\alpha} i_\alpha (|m_{a\alpha}, l_{a\alpha}| + ? \cap \chi) p_a f \\ &= \sum_{a,\alpha} i_\alpha (|m_{a\alpha}, l_{a\alpha}| + ? \cap \chi) p_a \sum_{c,d} x_{cd}(f) [e_c, i_d] \end{aligned}$$

(dabei werden  $|m_{a\alpha}, l_{a\alpha}|$  und  $\cap \chi$  als relative Abbildungen  $(X^n(k_\alpha), S^n) \rightarrow (X^n(k_\alpha), S^n)$  betrachtet, in diesem Sinn ist  $\cap \chi = 0$ .)

$$= \sum_{c,d} x_{cd}(f) \left[ \sum_{a,\alpha} i_\alpha |m_{a\alpha}, l_{a\alpha}| p_a i_c e^{n+1}, \sum_{a,\alpha} i_\alpha |m_{a\alpha}, l_{a\alpha}| p_a i_d i^n \right]$$

$$= \sum_{c,d} x_{cd}(f) \left[ \sum_\alpha i_\alpha |m_{c\alpha}, l_{c\alpha}| e^{n+1}, \sum_\alpha i_\alpha |m_{d\alpha}, l_{d\alpha}| i^n \right]$$

$$= \sum_{c,d} x_{cd}(f) \left[ \sum_\alpha l_{c\alpha} i_\alpha e^{n+1}, \sum_\beta m_{d\beta} i_\beta i^n \right]$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, c, d} x_{cd}(f) l_{c\alpha} m_{d\alpha} [e_\alpha, l_\beta] = \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta}(hf) [e_\alpha, l_\beta]$$

$$\text{also } x_{\alpha\beta}(hf) = \sum_{c, d} x_{cd}(f) l_{c\alpha} m_{d\beta}$$

Ich interessiere mich nur für die Fälle  $\alpha = \beta < 0$ . Ist  $c > 0$ , so ist nach der Definition von  $|m, l|$   $l_{c\alpha} = 0$ . Ist  $c < 0$  und  $d > 0$ , so ist  $x_{cd} = 0$ , denn  $|e_c \cap f = e_c \# jf = x_{cd} l_d$ , und  $\cap f$  ist ein Homomorphismus. Also ist mod  $2Z$

$$v_\alpha(hf) = x_{\alpha\alpha}(hf)/k_\alpha = \sum_{d, c < 0} l_{c\alpha} (x_{cd}(f)/k_d) m_{d\alpha} \frac{k_d}{k_\alpha}$$

Nun ist aber

$$|m_{d\alpha}, l_{d\alpha}| : X^n(l_{d\alpha}k) \rightarrow X^n(m_{d\alpha}k) : x^n(k_d) \rightarrow x^n(k_\alpha)$$

für ein  $k > 0$ , und daher  $\frac{k_d}{k_\alpha} = \frac{l_{d\alpha}}{m_{d\alpha}}$ , also

$$\begin{aligned} v_\alpha(hf) &= \sum_{c, d < 0} l_{c\alpha} l_{d\alpha} (x_{cd}(f)/k_d) \\ &= \sum_{c < 0} l_{c\alpha}^2 v_c(f) + \sum_{d < c < 0} l_{c\alpha} l_{d\alpha} 2v_{cd}(f) \end{aligned}$$

Da  $v_{cd}(f) \text{ mod } Z$  bestimmt ist, ist  $2v_{cd}(f)$  und damit die ganze Gleichung mod  $2Z$  bestimmt.

Ich bin jetzt auch in der Lage,  $v$  als Invariante zu definieren.

Definition:  $v : \tau H^{n+1} P \rightarrow Q/2Z$  sei für  $P$  aus  $P_{n-1}^{2n+1}$ ,

$P \simeq \bigvee_a X^n(k_a) \cup_f e^{2n+1}$  definiert als

$$v\left(\sum_{a < 0} t_a [e_a]\right) = \sum_{a < 0} t_a^2 v_a(f) + \sum_{b < c < 0} t_b t_c 2v([e_b], [e_c])$$

Satz:  $v_P : H^{n+1}(P) \rightarrow Q/2Z$  ist eine quadratische Form und es gilt  $v_P(x) = V_P(x,x) \bmod 1$ . Für eine Abbildung  $a : P \rightarrow Q$  vom Grad 1 gilt:  $v_Q(x) = v_P(a*x)$ .  $\square$

Zum Schluß dieses Abschnittes komme ich auf den kritischen Fall zurück. Ist  $n$  kritisch, so wähle ich in  $\pi_{2n-1} S^n$  einen direkten Summanden  $Z_c(\kappa)$  aus mit  $\frac{c}{2}\kappa = [1,1]$ . Ist  $c$  minimal, so ist es eine Zweierpotenz. Weiter wähle ich einen Summanden  $\tilde{\pi}$  mit  $\tilde{\pi} \oplus Z_c(\kappa) = \pi_{2n-1} S^n$ .  $S$  ist auf  $\tilde{\pi}$  injektiv. Das Bild nenne ich  $\tilde{\pi}_{n-1}^S$  und definiere  $\tilde{\pi}_{n-1}^{-a} :=$  Urbild von  $\tilde{\pi}_{n-1}^S$  unter  $S^a$ . Ich kann  $\tilde{\pi}$  stets so wählen, daß  $\tilde{\pi}_{n-1}^S$  das Bild von  $J$  enthält, da  $S^{-1}[\text{Bild } J] \cong \text{Bild } J \oplus [1,1]$ . Außerdem enthält  $\tilde{\pi}_{n-1}^S$  alle Elemente von ungerader Ordnung in  $\pi_{n-1}^S$ . Für die Folge  $(\tilde{\pi}_{n-1}^{-a}, S)_{a=0,1,2,3}$  gelten dieselben formalen Regeln wie für  $\pi_{n-1}^{-a}$  im nichtkritischen Fall; man kann sie in das Whitehead-Gitter (siehe Thomeier-Tabelle in i.) einbauen, ohne die Exaktheit zu zerstören.  $S^3 : \tilde{\pi}_{n-1}^{-3} \rightarrow \tilde{\pi}_{n-1}^S$  ist rechtsinvertierbar, ich kann also  $\tilde{S}^{-a}$  für  $a = 1,2,3$  definieren.

Die Berechnung von  $\tilde{\pi}_{2n-a} X^{n-a} := \{f | S^N \chi f \in \tilde{\pi}_{n-1}^S \text{ für } a=0, \pm 1\}$  kann man nun mit denselben Lemmata durchführen wie für un-kritisches  $n$ , indem man über jedes  $\pi_{n-1}^{-a}$  eine  $\sim$  setzt. Man kommt zu denselben formalen Ergebnissen. Entsprechend werden  $\tilde{\pi}_{2n}(W) := \{f | \psi_a(f) \in \tilde{\pi}_{n-1}^S \forall a\}$  und  $\tilde{\pi}_{2n}(W, W^n)$  behandelt. Mit  $\tilde{E} := \sum_i e_i^{n+1} \circ \partial_D^{-1} \tilde{S}^{-1} \tilde{\pi}_{n-1}^S$  kann man  $V$  und  $v$  in  $\tilde{\pi}_{2n}(W, W^n) \bmod \tilde{E}$  definieren wie im nichtkritischen Fall.

Definition: Sei für jedes kritische  $n$   $\tilde{\pi}_{n-1}^{-a}$ ,  $\tilde{S}^{-a}$  gewählt. Ich nenne einen Raum  $P$  aus  $P_{n-1}^{2n+1}$  normal und schreibe  $P \in \tilde{P}_{n-1}^{2n+1}$ , wenn Bild  $\psi(P)$  in  $\tilde{\pi}_{n-1}^{-a}$  liegt. Ist weder  $n$  noch  $n+1$  kritisch, nenne ich alle Räume aus  $P_{n-1}^{2n+1}$  normal.

iv. Die Realisierung von Homotopieäquivalenzen

In diesem Abschnitt soll das Klassifikationsproblem in folgendem Sinne gelöst werden: Seien  $P$  und  $Q$   $(2n+1)$ -dimensionale  $(n-1)$ -zusammenhängende Poincaré-Räume und sei  $h : H_n P \rightarrow H_n Q$  ein Isomorphismus. Unter welchen Bedingungen wird  $h$  durch eine Abbildung  $|h| : P \rightarrow Q$  induziert? Ich beschränke mich im folgenden in der Kategorie  $P_{n-1}^{2n+1}$  auf die Homotopieäquivalenzen vom Grad 1 als Morphismen.

Definition und Lemma  $h_+, h^+$ : Respektiert ein Isomorphismus  $h : H_n P \rightarrow H_n Q$  für  $P, Q \in P_{n-1}^{2n+1}$  die Verschlingungszahlen, so seien die abgeleiteten Isomorphismen definiert durch

$$h_n(A) = h \otimes A; \quad h^n(A) = \text{Hom}(h, A)$$

$$\Pi\Delta(Q) = h_n \circ \Pi\Delta(P) \circ h^{n+1}; \quad \Pi\Delta(Q) = h_{n+1} \circ \Pi\Delta(P) \circ h^n$$

Diese Isomorphismen  $h_+, h^+$  haben bezüglich des universellen Koeffiziententheorems und der Produkte alle Eigenschaften von induzierten Homomorphismen. Sie werden von einer Abbildung  $|h| : W \rightarrow U$  zwischen den Grundräumen induziert, die bis auf Kern  $C_*(W)$  (Kern  $C_*(U)$ ) durch  $h$  eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Die kurzen exakten Sequenzen des UKT kommutieren mit der  $\Pi\Delta$   $\square$

Damit ein  $H_n$ -Isomorphismus realisierbar ist, müssen er und seine abgeleiteten Cohomologie-Isomorphismen die natürlichen Invarianten aus Abschnitt iii. respektieren. Es gibt noch eine weitere Invariante: die Normalenfaserung. Ich komme hier mit der auf den Grundraum  $W$  eingeschränkten Normalenfaserung  $\nu^\circ(P)$  aus. Die Gruppe  $K_H(W) \cong \{W, S^1\} \cong [W, BH]$  der Faserungen über  $W$  ist aus der Puppe-Sequenz

$$\text{Rand}\{C_{n+1}\} \rightarrow W^n \xrightarrow{i} W \xrightarrow{f} W/W^n \cong S(\text{Rand}\{C_{n+1}\}) \rightarrow SW^n$$

(siehe Diagramm in III,ii.) zu berechnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_H(SW^n) & \rightarrow & K_H(W/W^n) & \xrightarrow{r^*} & K_H(W) & \xrightarrow{i^*} & K_H(W^n) \rightarrow K_H(\text{Rand}\{C_{n-1}\}) \\
 \cong & & \cong & & \cong & & \cong \\
 C^n(W, \pi_n^S) & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1}(W, \pi_n^S) & \rightarrow & K_H(W) & \rightarrow & C^n(W, \pi_{n-1}^S) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(W, \pi_{n-1}^S)
 \end{array}$$

Aus dieser exakten Leiter gewinnt man eine natürliche kurze exakte Sequenz (sei  $a : W \rightarrow U$ ):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^{n+1}(W, \pi_n^S) & \xrightarrow{r^*} & K_H(W) & \xrightarrow{i^*} & H^n(W, \pi_{n-1}^S) \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow a^* & & \uparrow a^K & & \uparrow a^* \\
 0 & \rightarrow & H^{n+1}(U, \pi_n^S) & \xrightarrow{r^*} & K_H(U) & \xrightarrow{i^*} & H^n(U, \pi_{n-1}^S) \rightarrow 0
 \end{array}$$

Es ist  $H^n(W, \pi_{n-1}^S) \cong \text{Hom}(H_n W, \pi_{n-1}^S)$  und für einen Raum  $P$  mit Grundraum  $W$  gilt:  $i^*(v^\circ(P)) = \psi(P) : H_n W \rightarrow \pi_{n-1}^S$ . (siehe II,vi.)

Zur Konstruktion von  $v^\circ$  in  $K_H(W)$  mußte ich von einer beliebigen minimalen Zellzerlegung von  $P$  ausgehen. Die Frage ist, wie weit diese Konstruktion wohlbestimmt und natürlich ist. Aus den beiden Lemmata vom Anfang dieses Abschnitts schließe ich, daß jeder Isomorphismus zwischen  $H_n P$  und  $H_n Q$ , der von einer topologischen Abbildung induziert wird, auch eine Homologieäquivalenz zwischen den entsprechenden Grundräumen  $W$  und  $U$  induziert, der eindeutig bis auf Kern  $C_*$  festgelegt ist. Ich werde deshalb die Operation von Kern  $C_*$  auf  $K_H(W)$  untersuchen.

Lemma Kern  $C_*$ : (i) Ist

$$\begin{aligned}
 \Sigma(W) &:= \{a \mid C_*(a) = 0\}, \text{ so ist} \\
 \Sigma(W) &= r^* i_* [W/W^n, W^n] = [W, S^{n+1}] \circ \pi_1^S \circ [S^n, W] \text{ und} \\
 (\Sigma, +) &\rightarrow (\text{Kern } C_*, \circ) : \sigma \rightarrow \text{id}_W + \sigma \text{ ein Isomorphismus.}
 \end{aligned}$$

(ii) Das Orbit von  $x$  aus  $K_H(W)$  unter der Operation von Kern  $C_*$  besteht aus den Faserungen  $x + r^*y$  mit

$$y \in H^{n+1}(W, \eta_* \text{Bild}(i^*x)), \quad i^*x : H_n(W) \rightarrow \pi_{n-1}^S.$$

Beweis: Daß die Abbildung  $\sigma \rightarrow \text{id} + \sigma$  bijektiv ist, folgt aus der Additivität des Funktors  $C_*$ . Daß sie in diesem Fall sogar



homomorph ist, liegt daran, daß die Verknüpfung  $\circ$  in  $\Sigma$  trivial ist. (ii) folgt dann mit Hilfe der exakten Leiter und der kurzen exakten Sequenz für  $K_H(W)$ .  $\square$

Definition:  $K^\circ(P) := H^n(P, \pi_{n-1}^S) \& H^{n+1}(P, \pi_n^S / \eta_* \text{Bild } \psi_P)$   
 ist ein Funktor in  $P_{n-1}^{2n+1}$  und  $v^\circ(P) \in K(P)$  ist eine natürliche Homotopie-Invariante.

Ein Teil von  $v^\circ$  ist durch  $\psi$  beschrieben; sicher wäre es erstrebenswert, auch den Rest durch eine Invariante in  $H^{n+1}(P, \pi_n^S / \eta_* \text{Bild } \psi_P)$  zu beschreiben. Dies scheint möglich, da die Erweiterung in  $K^\circ(P)$  im allgemeinen trivial ist, nur beim Auftreten von Torsionen der Ordnung 2 muß man etwas aufpassen. Schwierigkeiten macht vor allem die Natürlichkeit.

Satz: Seien  $P$  und  $Q$  in  $P_{n-1}^{2n+1}$ ,  $n > 8$ . Ein Isomorphismus  $h : H_n P \rightarrow H_n Q$ , der die Verschlingungszahlen respektiert, wird genau dann von einer Homotopieäquivalenz induziert, wenn seine abgeleiteten Isomorphismen die Invarianten  $\psi$ ,  $v^\circ$ ,  $\Delta$  und  $v$  ineinander überführen :

$$\psi(Q) = h_+ \psi(P) \text{ in } H_{n+1}(Q) \text{ bzw. } \psi_P = \psi_Q \circ h : H_n(P) \rightarrow \pi_{n-1}^S$$

$$v^\circ(P) = h^+ \& h^+ v^\circ(Q) \text{ in } K^\circ(P)$$

$$\Delta(Q) = h_+ \Delta(P) \text{ in } H_n(Q, \mathbb{Z}_2)$$

$$v_Q = v_P \circ h^+ : H^{n+1} P \rightarrow Q/2\mathbb{Z},$$

und wenn ein letztes Realisierungshindernis  $\zeta(h)$  im symmetrischen Tensorraum von  $\eta_* \text{Bild } \psi_Q$  verschwindet.

Beweis: Ich benutze weiterhin die Schreibweise

$$W \simeq \bigvee_a X^n(k_a), \quad P \simeq W \bigcup_f e^{2n+1}, \quad Q \simeq U \bigcup_g e^{2n-1}. \text{ Inverse}$$

Einhängungen werden wieder durch ein Apostroph gekennzeichnet.  
 Nach Lemma  $h_+ h^+$  gibt es eine Homotopieäquivalenz  $|h| : W \rightarrow U$ ,  
 die  $h_+$  und  $h^+$  induziert.  $h$  wird genau dann von einer Abbildung  
 $P \rightarrow Q$  vom Grad 1 induziert, wenn es ein solches  $|h|$  giebt mit  
 $|h| \circ f = g$ .

(i)  $j_* |h| \circ f = j_* g \text{ mod } E$ .

Es ist  $j_* |h| \circ f = \sum_{a,b} x_{ab}(|h| \circ f) [e_a, i_b] \text{ mod } E$

$j_* g = \sum_{a,b} x_{ab}(g) [e_a, i_b] \text{ mod } E$

$x_{ab}$  für  $a, b < 0$  ist mod  $k_b$  bestimmt durch die Verschlingungs-  
 zahlen, für  $a < 0 < b$  ist  $x_{ab} = 0$ ,  $x_{aa}$  mod  $2k_a$  ist durch  
 $v$  festgelegt, und die restlichen  $x_{ab}$  durch die Bilinearform der  
 Schnittzahlen. Also ist  $x_{ab}(|h| \circ f) = x_{ab}(g) \forall a, b$ .

(ii)  $S^2(|h| \circ f - g)$

Wir haben das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{W', S^0\} & \xrightarrow{Hf!} & \{S^{2n}, W\} \\ |h|'_* \downarrow & & \downarrow |h|_* \\ \{U, S^0\} & \xrightarrow[Hg!]{H(|h| \circ f)!} & \{S^{2n}, U\} \end{array}$$

$Hg$  ist durch  $j_* g \text{ mod } E$  festgelegt bis auf Elemente der Untergruppe

$\tilde{\Sigma} := \bigoplus_{a,b} (i_a \wedge i_b) \circ \pi_1^S$  von  $\pi_{2n}(U \wedge U')$ . Wegen (i) ist also

$Hg = H(|h| \circ f) + \sigma, \sigma \in \tilde{\Sigma}$ . Außerdem ist für  $v$  aus  $\{U, S^0\}$  :

$$\begin{aligned} |h|_* (Hf! (|h|'_* v)) &= |h| \circ (\text{id} \wedge v \circ |h|'_*) \circ Hf = (|h| \wedge v \circ |h|'_*) \\ &= (\text{id} \wedge v) \circ (|h| \wedge |h|'_*) \circ Hf = H(|h| \circ f)! v \end{aligned}$$

Also ist  $-S^2 g = Hg! v_U(Q) = (H(|h| \circ f) + \sigma)! v_U(Q)$   
 $= -S^2 f + \sigma! v_U(Q)$  und schließlich

$$\begin{aligned} ((i_a \wedge i_b) \circ \eta)! v_U(Q) &= (\text{id} \wedge v_U(Q)) \circ (i_a \wedge i_b)' \circ \eta \\ &= i_a \wedge (v_U \circ i_b)' \circ \eta = i_a \wedge (\psi_Q(i_b) \circ \eta) \\ &= i_a \circ (\eta_* \psi(i_b)), \text{ also insgesamt} \end{aligned}$$

$S^2 g = S^2 f \text{ mod } \sum_{a,b} i_a \circ \pi_1^S \circ \psi(i_b)$ .

(iii) Aus der Natürlichkeit von  $\Delta$  gegen  $h_+$  folgt  $\Delta(|h| \circ f - g) \in$

Damit liegt  $|h|-g$  in der von  $\{[\iota_a, \iota_b] \circ \eta, \iota_a \circ \eta \circ \psi(\iota_b) \mid a, b\}$  aufgespannten Untergruppe.  $h$  ist bis auf Kern  $C_*(U)$  bestimmt, ich untersuche nun die Operation dieser Gruppe genauer:

Lemma Kern  $C_*$ : (iii) Das Orbit von  $f \in \pi_{2n} W$  unter der Operation von Kern  $C(W) = \text{id} + \Sigma$  besteht aus den Funktionen

$$f + \sum_{a,b} \gamma_{ab} ([\iota_a, \iota_b] \circ \eta + \iota_a \eta \psi_P(\iota_b)), \text{ mit } P = W \cup_f e^{2n+1}.$$

Beweis: Mit  $W = SW', \chi = S\chi'$  erzeugt  $\text{Hf} \in C \pi_{2n}(W, W')$  einen Isomorphismus

$$\text{Hf}!: [W', S^n] \rightarrow \pi_{2n}(W, S^n) : \chi' \rightarrow (\text{id} \wedge \chi') \circ \text{Hf}.$$

Sei  $\chi'_a := \text{Hf}!^{-1}(\iota_a \wedge \iota^n)$ .  $\Sigma$  wird erzeugt von  $\{\iota_a \eta \chi_b \mid a, b\}$  und

$$(\text{id} + \iota_a \eta \chi_b) f = f + \iota_a \eta \chi_b f + [\text{id}, \iota_a \eta \chi_b] \circ \text{Hf}$$

$$\begin{aligned} [\text{id}, \iota_a \eta \chi_b] \circ \text{Hf} &= [\text{id} \circ S \text{id}', \iota_a \eta \circ S \chi'_b] \circ \text{Hf} \\ &= [\text{id}, \iota_a \chi] \circ S(\text{id}' \wedge \chi'_b) \circ \text{Hf} = [\text{id}, \iota_a \eta] \circ \text{Hf}! \chi'_b \\ &= [\text{id}, \iota_a \eta] \circ S(\iota_b \wedge \iota^n) = [\iota_b, \iota_a \eta] \\ &= [\iota_a, \iota_b] \circ \eta \end{aligned}$$

$$\chi_b f = \psi_P(\Pi \Delta(\chi_b^* \wedge S^{n+1}]) = \psi_P(\iota_b)$$

$$(\text{id} + \iota_a \eta \chi_b) \circ f = f + \iota_a \eta \psi_P(\iota_b) + [\iota_a, \iota_b] \circ \eta$$

Ich setze nun voraus, daß für ein  $I \in \{-\tau, \dots, \phi\}$  gilt:

$\{\psi_P(\iota_a) \mid a \in I\}$  ist eine Basis des  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraums  $\eta_*$ Bild  $\psi_Q$  und  $\psi_P(\iota_a) = 0$  für  $a \notin I$ . Dies kann ich durch elementare Operationen stets erreichen. Wende ich ein geeignetes Kern  $C_*$ -Element  $z$  auf  $g$  an, so kann ich  $|h| \circ f - g$  weiter reduzieren:

$$|h| \circ f - z \circ g = \sum_{a,b \in I} \zeta_{ab} [\iota_a, \iota_b] \circ \eta = z^{-1} \circ |h| \circ f - g$$

Diesen Rest kann ich im allgemeinen nicht mehr durch Veränderung von  $|h|$  weiter reduzieren, da ich dazu Elemente der Form  $\text{id} + \iota_a \eta \chi_b$  mit  $a$  und  $b$  aus  $I$  brauchte, die aber im allgemeinen auch  $S^2|h|-g$  verändern.

$\sum_{a \geq b} \zeta_{ab} \eta \psi(\iota_a) \otimes \eta \psi(\iota_b)$  ist das Realisierungshindernis  $\zeta(h)$ .  $\square$

Der Fall  $\eta$  Bild  $\psi_p \neq 0$  entspricht dem "exceptional case" bei WALL, wenn er auch bei Poincaré-Räumen in allen Dimensionen auftreten kann. Im "non-exceptional case" ist das Invariantensystem  $(H_n, V, v, \Delta, v^\circ)$  also vollständig. In jedem Fall ist die Höchstzahl von nicht homotopieäquivalenten Räumen in  $P_{n-1}^{2n+1}$  mit gleichen Invarianten gegeben durch  $d(d+1)/2$ ,  $d = \dim \eta_* \text{Bild } \psi$ . Sie ist im allgemeinen kleiner, denn es gibt in dem Tensorraum, in dem  $\zeta(h)$  liegt, außer der Symmetrie noch weitere Relationen:

- (i)  $\eta \psi(\iota_a) \otimes \eta \psi(\iota_a) = 0$ , wenn  $n = 3 \pmod{4}$  oder  $n \neq 1 \pmod{4}$  und  $\iota_a$  von Ordnung 2 in  $H_n Q$
- (ii)  $\eta \psi(\iota_a) \otimes \eta \psi(\iota_b) = 0$ , wenn  $\iota_b \otimes \eta_* \psi(\iota_a)$  in  $H_n(P, \pi_n^S)$ .

Nur bis auf diese Relationen ist  $\zeta(h)$  wohlbestimmt. Außerdem kann  $\zeta$  noch von  $h$  abhängen, wenn es mehrere Isomorphismen gibt, die die Invarianten respektieren. Darum kann man aus  $\zeta$  auch keine Rauminvariante herleiten.

Für die kritischen Fälle ist die Klassifikation in derselben Art durchführbar, jedoch wäre die Formulierung eines Invariantensystems recht umständlich. Sie hinge z.B. von der minimalen Ordnung  $c$  des direkten Summanden ab, der  $[i^n, i^n]$  enthält, ab, denn für Zweierpotenzen  $k$  hat das Whitehead-Gitter zu  $\pi_{2n} X^n(k)$  für  $k < c$ ,  $k=c$  und  $k > c$  jeweils eine andere Gestalt. Ich verzichte daher auf eine detaillierte Beschreibung dieser Fälle. Ebenso verzichte ich darauf, die kleinen Dimensionen ( $n \leq 8$ ) zu betrachten. Ein Diagramm analog zu dem THOMEIER-Diagramm erhält man für kleine  $n$  aus dem Kapitel V und den Tabellen in TODÁ; die Methoden aus IV,ii. sind dann auch zum größten Teil für diese Dimensionen anwendbar, wenn man den Exaktheitsbereich der Whitehead-Sequenz berücksichtigt. Nur für die niedrigsten Dimensionen (vor allem für  $n=2$ ) treten neue Probleme auf.

## V. Quasi-geometrische Konstruktionen und Vergleich mit den Ergebnissen von Wall

### i. Poincaré-Räume und Mannigfaltigkeiten

In BROWDER werden hinreichende und notwendige Bedingungen dafür angegeben, daß ein Poincaré-Raum den Homotopietyp einer Mannigfaltigkeit hat. Eine notwendige Bedingung ist stets, daß sich die Normalfaserung  $\nu$  auf  $P$  als Bündel darstellen läßt. Im Falle gerader Dimensionen kommen weitere Bedingungen hinzu. Obwohl diese zusätzlichen Obstruktionen sehr gut bekannt sind, werde ich ihnen aus dem Weg gehen, indem ich einen etwas erweiterten Begriff von geschlossenen Mannigfaltigkeiten benutze und Ränder zulasse, die den Homotopietyp einer Sphäre haben. Zieht man den Rand dieser fast geschlossenen Mannigfaltigkeiten zusammen, so erhält man geschlossene Mannigfaltigkeiten in der topologischen und der PL-Kategorie, also insbesondere Poincaré-Räume. Um einen Vergleich zu ermöglichen, schneide ich auch in die Poincaré-Räume Löcher, indem ich den null-dimensionalen Poincaré-Raum  $*$  einbette.

Definition: (LEVITT) Eine Einbettung eines  $n$ -dimensionalen Poincaré-Raums  $K^n$  in einen  $r$ -dimensionalen Poincaré-Raum  $P^r$  ist eine Abfolge von Abbildungen

$$K^n \xrightarrow{\cong} N \rightarrow N \cup M \xrightarrow{\cong} P^r$$

wobei  $(N, N \cap M)$  und  $(M, N \cap M)$  Poincaré-Paare sind, und  $N \cap M \rightarrow N$   $(r-n-1)$ -zusammenhängend ist.

Ich schreibe  $\partial N = \partial M := N \cap M$ .

Satz: (QUINN) Sei  $K^n \rightarrow P^r$  eine  $n - \frac{r-1}{2}$  zusammenhängende Abbildung zwischen Poincaré-Räumen und sei  $r \geq n+3$ . Dann ist diese Abbildung homotopieäquivalent zu einer Einbettung.  $\square$

Das Ergebnis einer Einbettung von  $*$  ist also ein Poincaré-Paar  $(P^\circ, S^{r-1})$ . Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz rechnet man nach, daß  $P^\circ$  homotopieäquivalent zum Grundraum  $W$  von  $P$  ist.

$\nu|_{P^\circ} \in K_H(P^\circ) \cong K_H(W)$  ist für  $P$  aus  $P_{n-1}^{2n+1}$  in  $K^\circ(P)$  gerade gleich  $\nu^\circ$ .  $\nu|_{S^{r-1}} =: \nu_S$  ist ein triviales Sphärenbündel.

Mit  $\nu$  ist auch das Bündelpaar  $(\nu_W, \nu_S)$  reduzibel (siehe SPIVAK); Die notwendige Homotopieklasse erhält man nach dem Ausschneidungssatz. Es gilt daher nach BROWDER II.3.10.:

Satz:  $(P^\circ, S^{r-1})$  ist genau dann homotopieäquivalent zu einer fast geschlossenen Mannigfaltigkeit, wenn  $\nu_W$  äquivalent zu einem Bündel ist.

Außer dem Wegfallen der zusätzlichen Obstruktionen hat dieser Satz für mich den Vorteil, daß nur  $\nu_W$  benutzt wird, was zumindest in der Klasse  $P_S^r$  der höher als  $\dim/3$ -zusammenhängenden Poincaré-Räume in einfacher Weise aus der Klebeabbildung  $f$  der Topzelle zu berechnen ist.

Ich betrachte nun die Klasse  $P_{n-1}^{2n+1}$ . Nach IV,iii. sind alle Mannigfaltigkeiten in dieser Klasse normal für  $n$  ungerade. Normale Räume zeichnen sich dadurch aus, daß

$$0 \rightarrow \text{Kern } S^2 \rightarrow \pi_{2n} W \rightarrow \pi_{2n}^S W \rightarrow 0$$

spaltet, und daher die Kern  $S$ -Invarianten  $V$ ,  $v$  und  $\Delta$  sowie das Realisierungshindernis  $\zeta$  auf der einen und die  $S^2f$ -Invariante  $\nu^\circ$  auf der anderen Seite unabhängig sind. Alle möglichen Werte von Invarianten der erstgenannten Klasse treten bei Poincaré-Räumen beliebiger "Oberflächenstruktur" auf, also auch bei glatten und topologischen Mannigfaltigkeiten, und klassifizieren auch diese Raumklassen bis auf Homotopie. Sie sind dann auch Diffeomorphie- bzw. Homöomorphie-Invarianten; allerdings wird man im allgemeinen erwarten, daß weitere Invarianten bezüglich der eingeschränkten Äquivalenzrelationen auftreten.

Die folgenden Überlegungen legen jedoch den Schluß nahe, daß die Homotopieäquivalenz nur in wenigen Fällen echt schwächer ist als die Diffeomorphie. Ich vergleiche die in IV definierten Invarianten mit denen von Wall:

Satz (WALL): Diffeomorphieklassen von fast geschlossenen Mannigfaltigkeiten in  $P_{n-1}^{2n+1}$  stehen im Verhältnis 1-1 zu Isomorphieklassen der folgenden Diffeomorphie-Invarianten

1. eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe  $G := H_n P$

2. eine  $(n+1)$ -symmetrische Bilinearform

$$b : \tau(G) \times \tau(G) \rightarrow Q/Z$$

3. ein Homomorphismus  $\alpha : G \rightarrow \pi_{n-1} SO$

4. wenn  $\eta_* \text{ Bild } \alpha = 0$ , eine Klasse  $\hat{\beta}$  in  $H^{n+1}(P, \pi_n SO)$

5. für  $n$  ungerade eine quadratische Form

$$q : \tau(G) \rightarrow Q/2Z \text{ mit } \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = b(x, y) \pmod{1}$$

für  $n$  gerade, eine Klasse  $\hat{\phi}$  in  $H^{n+1}(P, Z_2)$

6. wenn  $\eta_* \text{ Bild } \alpha \neq 0$ , ein  $\omega$  in  $Z_2$  für  $n = 0 \pmod{8}$  und ein  $\omega$  in  $Z_8$  für  $n = 1 \pmod{8}$ , das aber  $\pmod{4}$  durch  $b$  und  $\alpha$  festgelegt ist.

$\alpha$  aus diesem Satz und  $\psi$  aus IV und II hängen über

$J : \pi_n SO \rightarrow \pi_n^S$  zusammen.  $\beta$  in  $H^n(P, \pi_n^S)$  zu  $\hat{\beta}$  läßt sich für jeden Poincaré-Raum definieren, wenn  $\psi(\tau H_n P) = 0$ .

Auch bei WALL ist  $\alpha(\tau G) = 0$  die eigentliche Bedingung für die Definition einer nichttrivialen und wohlbestimmten Invariante  $\hat{\beta}$ ; man beachte, daß wegen der Struktur von  $\pi_{n-1} SO$  diese Bedingung nur im Fall  $n = 1$  oder  $2 \pmod{8}$  verletzt werden kann.

Für  $n = 2 \pmod{8}$  ist  $\pi_n SO = 0$  und  $\hat{\beta}$  formal definierbar.

Die Verschlingungszahlen sind für Poincaré-Räume und Mannigfaltigkeiten gleich definiert, es bleiben also noch die Invariantenpaare  $\Delta - \hat{\phi}$ ,  $v - q$  und  $\zeta - \omega$ . Die Ähnlichkeit zwischen diesen Größen ist in der Tat überzeugend; zu  $\zeta - \omega$  beachte man, daß  $\eta_*$  Bild  $\alpha$  höchstens eindimensional über  $Z_2$  ist, und daß  $\omega$  in jedem Fall genau zwei verschiedene Werte annehmen kann. Für  $\hat{\phi}$  auf dem Torsionsteil fehlt mir die Definition, WALL verweist hier auf eine für mich nicht auffindbare Fortsetzung seiner Arbeit. Zu  $v$  werde ich eine Konstruktion angeben, die der von WALL zu  $q$  entspricht.

ii. Einbettung von Homotopieklassen

Sei  $S^n \rightarrow B \rightarrow B \cup X \rightarrow P$  die Poincaré-Einbettung zu  $x \in \pi_n P$ ,  $P \in P^r$ . Die Homologie von  $\partial B := B \cap X \in P^{r-1}$  wird von  $[1]$ ,  $[\partial B]$  und zwei weiteren Elementen  $\phi$  und  $\sigma$  erzeugt, denn

$$H_{n+1}(B, \partial B) \rightarrow H_n(\partial B) \rightarrow H_n B \rightarrow 0, \quad H_{n+1}(B, \partial B) \cong H^{r-n-1} B$$

ist eine exakte Sequenz. Es ist also

$$\partial B \simeq S_\phi^{r-n-1} \cup_{e_\sigma^n} \cup_g e^{r-1}, \quad jg \equiv [e_\sigma^n, \phi]$$

$B$  entsteht aus  $\partial B$  durch Ankleben von zwei Zellen:

$$B \simeq \partial B \cup_\phi e^{r-1} \cup_F e^r.$$

$]e^{r-n}[$  ist eine Cohomologieklass in  $H^{r-n}(B, \partial B) = H^{r-n}(P, X)$  und in  $H^{r-n} P$ . Mit Hilfe der folgenden Überlegungen und der Wang-Sequenz kann man im allgemeinen zeigen, daß  $i_B : \partial B \rightarrow B$  eine sphärische Faserung ist, die Normalfaserung von  $x$  in  $P$ , und  $]e^{r-n}[$  ihre Thom-Klasse. In jedem Fall gilt

Lemma:  $]e^{r-n}[ \in H^{r-n} P$  ist das Poincaré-Duale zu  $x$ .

Beweis:  $\cup ]e^{r-n}[ : H^{m-r} B \rightarrow H^{m-n}(B, \partial B)$  ist ein Isomorphismus, der Thom-Isomorphismus, da  $[B, \partial B]$  ein Poincaré-Paar ist. Daraus folgt  $]e^{r-n}[ \cap [B] = x$  in  $H^n B$  bei geeigneter Orientierung von  $e^{r-n}$  und mit der Natürlichkeit des  $\cap$ -Produktes die Behauptung.



Ich betrachte nun den Spezialfall  $r = 2n+1$ . In diesem Fall liegen  $\phi$  und  $\sigma$  in derselben Gruppe. Die Faser  $\phi$  ist bestimmt durch  $\phi = \partial e^{r-1}$ . Damit ist

$$\partial B = S_\phi \vee S_\sigma \cup_g e^{2n}, \quad g = [\phi, \sigma] + \phi \circ \alpha', \quad \alpha' \in \pi_{2n-1} S^n$$

Lemma:  $\text{Kern}[i_{XP} : X \rightarrow P] = Z(i_X \phi)$

Beweis: Die beiden ersten Zeilen in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}X & \rightarrow & H_{n+1}P & \rightarrow & H_n(\partial B) & \xrightarrow{i_{X^*} \oplus i_{B^*}} & H_n X \oplus H_n B \\ = & & = & & & & \\ H_{n+1}X & \rightarrow & H_{n+1}P & \rightarrow & H_{n+1}(P, X) & & \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\ & & H^n P & \rightarrow & H^n B & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ & & \text{Hom}(H_n P, Z) & \rightarrow & \text{Hom}(H_n B, Z) & & \end{array}$$

sind exakte Sequenzen, und  $\text{Hom}(i_{BP^*}, Z) = 0$ , da  $x$  ein Torsions-  
element ist. Damit ist  $i_{X^*} \oplus i_{B^*}$  injektiv, und  $i_X \phi$  von  
unendlicher Ordnung.

Nun kann ich die WALL'sche Definition von  $q$  wörtlich übernehmen.

Mit  $kx = 0$  ist  $k \cdot i_{XP} i_X \sigma = 0$ , also  $k \cdot i_X \sigma = 1 \cdot i_X \phi$ .  $q(x) := \frac{k}{1}$   
ist zunächst mod  $Z$  bestimmt, da  $\phi$  eindeutig und  $\sigma$  bis auf  $\phi$   
festgelegt ist. Man kann aber über  $g$  zusätzlich fordern:

$\alpha' = S^{-1} S \alpha' = S^{-1} \alpha$  und erhält  $q : \pi_n P \rightarrow Q/2Z$ . Mit  $\tilde{\sigma} := \sigma + \phi$   
hat man nämlich  $g = [\phi, \tilde{\sigma}] + \phi \circ (\alpha + [i^n, i^n])$ . Diese Zu-  
satzforderung entspricht bei geeigneter Wahl von  $S^{-1}$  genau  
der Forderung " $\phi(\alpha_1) = 0$ " bei WALL.

Um  $q$  auf  $v$  zurückzuführen, vergleiche ich die oben angegebene  
Zellzerlegung von  $P$  mit der am Anfang von IV. benutzten.

$$P \simeq W \cup_f e^{2n+1} = \bigvee_a X^n(k_a) \cup_f e^{2n+1}$$

Satz:  $v([e_a]) = -q([\Pi \Delta]) e_a$

Beweis: Sei  $x := \Pi \Delta ] e_a [$  eingebettet und  $k := k_a$ . Es ist  $P \simeq X \cup_{\phi} e^{n+1} \cup_F e^{2n+1}$  und  $] e^{n+1} [ = ] e^a [$ .

Es gibt also eine Homotopieäquivalenz  $H : X \cup_{\phi} e^{n+1} \rightarrow W$ , und da  $X \rightarrow W \xrightarrow{P_a} X^n(k) \xrightarrow{\chi} S^{n+1}$  nullhomotop ist, führt dies nach der Puppe-Sequenz zu einer Paarabbildung  $(H, \tilde{A}) :$

$$\begin{array}{l}
 (S_{\sigma} \vee S_{\phi} \cup_{\phi} e^{n+1}, S_{\sigma} \vee S_{\phi}) \\
 \downarrow (inj, in) \\
 (\partial B \cup_{\phi} e^{n+1}, \partial B) \xrightarrow{j} \partial B \cup_{\phi} e^{n+1} \xrightarrow{F} S^{2n} \\
 \downarrow (i_X \cup e^{n+1}, i_X) \\
 (X \cup_{\phi} e^{n+1}, X) \\
 \downarrow (u, \tilde{u}) \quad \downarrow (H, \tilde{A}) \\
 (W, \bigvee_{a \neq b} X^n(k_b) \vee S^n) \\
 \downarrow P_a \\
 (X^n(k), S^n)
 \end{array}$$

Es ist  $(u, \tilde{u}) \circ e^{n+1} = e^{n+1}$ ,  $\tilde{u}\phi = k_1^n$  und  $k \cdot \tilde{u}\sigma = 1 \cdot \tilde{u}\phi = k_1^n$ , da  $k \cdot i_X \sigma = 1 \cdot i_X \phi$ .  $F$  induziert einen Isomorphismus in  $H_{2n}$ , da  $H_{2n} P = 0$ .  $F$  läßt sich also wie folgt zusammenkleben:

$$F = (inj \circ N) \cup_g e^{2n} : D^{2n} \cup_{S^{2n-1}} D^{2n} \rightarrow \partial B \cup_{\phi} e^{n+1}.$$

$e^{2n}$  ist die charakteristische Abbildung der  $2n$ -Zelle in  $\partial B$  und  $N$  eine Nullhomotopie von  $g$  in  $\pi_{2n}(S_{\sigma} \vee S_{\phi} \cup e^{n+1}, S_{\sigma} \vee S_{\phi})$ .

Also gilt  $jF = e^{2n} + inj_* N$

und  $(P_a \circ (H, \tilde{A}) \circ (i_X \cup e^{n+1}, i_X))_* jF = j_* P_a f = (u, \tilde{u})_* N$

Nach James ist  $N = m_1 [e^{n+1}, \phi] + m_2 [e^{n+1}, \sigma] + E(\beta')$ .

$$\partial N = -m_1 [\phi, \phi] - m_2 [\phi, \sigma] + \phi \circ \beta' = g,$$

also  $m_1 = 0 \pmod{2}$  und  $m_2 = -1$ .

$$j_* P_a f = m_1 [e^{n+1}, k_1^n] + m_2 [e^{n+1}, l_1^n] + E(\beta')$$

$$= -1 [e^{n+1}, i^n] \pmod{E} \quad \square$$

## VI. Klassifikation in grösseren Raumklassen

Die in den beiden vorhergehenden Kapiteln behandelte Klasse von Poincaré-Räumen ist die zweit-einfachste nach  $P_{n-1}^{2n}$ , deren Klassifikation man in STÖCKER findet. Es stellt sich die Frage, ob sich die Methoden aus Kapitel IV. auch für Räume mit mehr nichttrivialen Homologiegruppen und entsprechend komplizierteren Zellstrukturen anwenden lassen. Geht man schrittweise vor, so stellt man fest, daß das Diagramm zum Satz aus IV,ii. auch genügend Informationen enthält, um den Fall  $P_{n-2}^{2n}$  zu behandeln. Ich unterscheide wieder Invarianten, die über die Einhängung faktorisieren und deshalb einen linearen Charakter in der Homologie haben, von den eher zur Bilinearität neigenden Kern-S-Invarianten. In der ersten Gruppe ist

für  $n$  ungerade ein  $[S\beta] \in H_n(P, Z_2)$ ,

für  $n = 2 \pmod 4$  ein  $[S\epsilon] \in H_{n-1}(P, Z_4)$ ,

für  $n = 1 \pmod 4$  ein  $[S\delta\eta] \in H_{n-1}(P, Z_2)$  und

für  $n = 0 \pmod 4$  ein  $[S\xi] \in H_{n-1}(P, Z_2)$

zu erwarten. Die Definition der letzten drei Invarianten müßte der von  $\Delta$  in IV. ähneln und auf dieselben Schwierigkeiten stoßen. Bei allen vier Invarianten sind Komplikationen durch das Zerlegungshindernis  $[u]$  zu befürchten; sie werden in jedem Fall von  $[u]$  abhängig sein. Die Homotopieklassen in Kern  $S \in \pi_{2n-1}W$  geben nur in wenigen Fällen homologische Invarianten ab. Betrachtet man nämlich die Operation von Kern  $C_*(W) = \text{id} + \Sigma(W)$  mit  $\Sigma(W)$  wie in IV,iii., so hat man

$$\begin{aligned} (\text{id} + \sigma) \circ f &= f + \sigma \circ f + [\text{id}, \text{id}] \circ Hf! \sigma \\ &= f + \sigma \circ f + P((SUS)^{-1} Hf! \sigma) \end{aligned}$$

und auf diese Weise wird gerade Bild  $P = \text{Kern } S$  durch solche Homotopieäquivalenzen sehr stark betroffen. Allein die für die Schnitt- und Verschlingungszahlen verantwortlichen Homotopie-  
 klassen, die größtenteils in Kern  $S$  liegen, und die Klassen  $[i_a^n, i_b^n]$  für  $i_a^n, i_b^n \in \tau H_n P$  liegen nicht in  $P((SUS)^{-1}HF!\Sigma)$  und liefern Invarianten in der Art von Bilinearformen.

Zu der Frage der additiven Zerlegung in  $P_{n-2}^{2n}$  trage ich jetzt der Vollständigkeit halber nach

Satz: Der Diagonalteil von  $[u]$  verschwindet für  $n = 0 \pmod 4$  stets, für  $n \neq 2 \pmod 4$  verschwindet der Diagonalteil bis auf die Diagonale in  $A \otimes A \otimes Z_2$ ,  $A$  besteht aus den direkten Summanden der Ordnung 2 in  $H_{n-1}P$ .

Beweis: Die Bedingung für den Diagonalanteil lautet:

$$i_1^{n-1} \circ (\eta \circ (\sum_j u_{ji} \circ a_j) - u_{ii} [i_1^{n-1}, i_1^{n-1}] \circ \eta) = 0$$

Die Behauptung folgt dann aus Lemma  $\eta$  in IV,i. und aus dem Satz aus IV,ii.

Im übrigen ist trotz der einfachen Form des Zerlegungshinder-  
 nisses die Frage nach den möglichen Zellstrukturen unzerlegbarer  $P_{n-2}^{2n}$ -Räume überraschend kompliziert.

Für Poincaré-Räume mit noch mehr Zellschichten treten drei Probleme auf. Das erste entsteht aus der technischen Schwierig-  
 keit, zu der Injektion

$$0 \rightarrow \pi_r(V) / \text{Kern}(i) \xrightarrow{i} \pi_r(V \cup W)$$

Linksinverse zu finden, die auch möglichst nicht rein willkürlich sein sollen. Zum zweiten häufen sich die Ausnahmen in der Perio-  
 dizität der instabilen Homotopiegruppen der Sphären, dem Aus-  
 gangsmaterial zur Berechnung von Homotopiegruppen, um so mehr, je tiefer man in den instabilen Bereich vordringt. Dies liefert, wie man bei den kritischen Zahlen sehen kann, keine grundsätzliche Schwierigkeit bei der Klassifikation, führt aber zu sehr un-  
 schönen Invariantensystemen und dazu, daß man schließlich auf

periodische Sätze ganz verzichten und jede Dimension einzeln behandeln muß. Zum dritten ist die Kenntnis über die instabilen Homotopiegruppen der Sphären selbst begrenzt; die Ergebnisse von THOMEIER würden höchstens noch für  $P_{n-3}^{2n+1}$  ausreichen.

Versucht man, in Grundräumen, die aus Zellen von mehr als drei verschiedenen Dimensionen bestehen, die Klebeabbildungen durch Objekte wie [u] zu beschreiben, so stößt man auf eine der Obstruction-Theorie eigene Schwierigkeit: Zerlegungshindernisse aus  $kal_n^i$ ,  $i > 1$ , sind nur dann natürlich definierbar, wenn die Hindernisse niedrigerer Ordnung verschwinden.

Schließlich braucht man zur Behandlung der Gleichung für  $(id \mp \sigma) \circ f$  Kenntnisse über  $\sigma_*$ , also Verallgemeinerungen des Lemma  $\eta$ . Auch bei der Herleitung von Relationen in den Zerlegungshindernissen treten solche Terme auf, wie im Beweis zum Satz [u]. Der Beweis von Lemma  $\eta$  stützt sich aber ganz wesentlich auf die THOMEIER-Ergebnisse. Daher ist zu befürchten, daß auch in dieser Hinsicht die Methoden aus IV im instabilen Bereich der Homotopiegruppen der Sphären steckenbleiben.

## Literaturverzeichnis

Blakers, A.L. u. W.S. Massey

Products in homotopy theory. Ann. of Math. (2) 58 S. 295 - 324 (1953)

Boardman, J.M. u. B. Steer

On Hopf invariants. Commt. Math. Helv. 42 180 - 221 (1967)

Browder, W.

Surgery on simply connected manifolds.- Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1972

James, I.M.

On the homotopy groups of certain pairs and triads. Quart. J. Math. Oxford (2) 5 260 - 270 (1964)

Lang, G.E. jr.

The evaluation map and EHP sequences. Pacific J. Math. 44 201 - 210 (1975)

Levitt, N.

On the structure of Poincaré duality spaces. Topology 7 369 - 388 (1968)

Quinn, F.

Surgery on Poincaré and normal spaces. Bull. AMS 78, 2, 262-267 (1972)

Sasao, S. u. H. Takahashi (1)

Inner product spaces associated with Poincaré complexes. Transactions of the AMS 260 No. 2 411 - 419 (1980)

Sasao, S. u. H. Takahashi (2)

Highly connected Poincaré complexes. Kodai Math. J. 2 139 - 147 (1979)

Spanier, E.H.

Function spaces and duality. Ann. of Math. (2) 70 338 - 378 (1959)

Spivak, M.

Spaces satisfying Poincaré duality. Topology 6 77 - 101 (1967)

Stöcker, R.

Zur Topologie der Poincaré-Räume. Habilitationsschrift Ruhr-Universität Bochum (1974) (Typ.)

Stöcker, R.

Thom complexes, Hopf invariants and Poincaré duality spaces.  
Bochum (1980) (Typ.)

Thomeier, S.

Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären. Mathem.  
Ann. 164 225 - 250 (1966)

Toda, H.

Composition methods in homotopy groups of spheres. Princeton  
University Press, Princeton 1962

Wall, C.T.C.

Classification problems in differential topology VI. Classi-  
fication of  $(s-1)$ -connected  $(2s+1)$ -manifolds. Topology 6  
273 - 296 (1967)

Wall, C.T.C. (Z)

Finiteness conditions for CW-complexes. Ann. of Math. 81 56 - 69  
(1965)

Wente-Drüge, H.

Zur Klassifikation hochzusammenhängender unzerlegbarer Poincaré-  
Räume. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1981) (Typ.)

Whitehead, G.W.

Elements of homotopy theory.- Berlin/Heidelberg/New York: Springer,  
1978

Diese Arbeit habe ich selbst  
verfasst und dabei keine  
anderen als die angegebenen  
Hilfsmittel verwendet

Andreas Floer