

Annals of Mathematics

Quasifaserungen und Unendliche Symmetrische Produkte

Author(s): Albrecht Dold and Rene Thom

Source: *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 67, No. 2 (Mar., 1958), pp. 239-281

Published by: [Annals of Mathematics](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1970005>

Accessed: 28/12/2010 10:17

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/action/showPublisher?publisherCode=annals>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



Annals of Mathematics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *The Annals of Mathematics*.

<http://www.jstor.org>

QUASIFASERUNGEN UND UNENDLICHE SYMMETRISCHE PRODUKTE

VON ALBRECHT DOLD UND RENÉ THOM

(Received March 5, 1957)

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden die in [3] angekündigten Resultate bewiesen und verallgemeinert. Wesentliches Ziel ist die Bestimmung des Homotopietyps des unendlichen symmetrischen Produktes $SP(X)$ und einiger anderer Konstruktionen, die über einem topologischen Raum definiert werden können.

Als Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen dienen die Quasifaserungen. Eine Quasifaserung ist, kurz gesagt, eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$, die sich bezüglich der Homotopiegruppen der Räume E , B , $p^{-1}(x)$, $x \in B$, und ihrer Abbildungen wie eine Faserung verhält. Genauer: Für jedes $x \in B$ und $i \geq 0$ ist $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(x)) \cong \pi_i(B)$. Insbesondere existiert zu jeder "Faser" $p^{-1}(x)$ einer Quasifaserung eine exakte Homotopiefolge

$$\longrightarrow \pi_{i+1}(B) \longrightarrow \pi_i(p^{-1}(x)) \longrightarrow \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B) \longrightarrow .$$

In § 1 werden Quasifaserungen definiert und einige einfache Eigenschaften zusammengestellt. § 2 enthält hinreichende Kriterien dafür, daß eine gegebene stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$ eine Quasifaserung ist (s. 2.2, 2.10, 2.15). Das wichtigste lautet in seiner einfachsten Form (s. 2.2 Korollar): Sind U und V offene Mengen in B , so daß die Teile von $p: E \rightarrow B$ über U , V und $U \cap V$ Quasifaserungen sind, und ist $U \cup V = B$, dann ist p selbst eine Quasifaserung. Ferner wird in § 2 eine abgeschwächte Form des "covering homotopy theorem" bewiesen (s. 2.7): Ist $h: P \rightarrow E$ eine stetige Abbildung eines endlichen Polyeders und ist $D: P \times I \rightarrow B$ eine Deformation der Abbildung $p \circ h$, dann läßt sich eine zu D homotope Deformation \bar{D} in E hochheben. Wenn es in B hinreichend viele offene Mengen U_i gibt, so daß die Teile von $p: E \rightarrow B$ über U_i Quasifaserungen sind, dann kann die Homotopie, die D und \bar{D} verbindet, beliebig klein gewählt werden.

Es folgt (§ 3) die Definition des symmetrischen Produktes $SP(X, 0)$. Ist X eine Menge und $0 \in X$, dann ist $SP(X, 0)$ das abelsche Monoid mit den Elementen von X als Erzeugenden und der einzigen Relation $0 = \text{null}$ (d.h. das freie abelsche Monoid mit $X - 0$ als Basis; die überflüssige Erzeugende 0 wird bei der Definition der Topologie in $SP(X, 0)$ benutzt).

Die Elemente von $SP(X, 0)$ schreiben sich also eindeutig in der Form $\sum_{x \in X-0} n_x \cdot x$ mit ganzzahligen Koeffizienten $n_x \geq 0$, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind. Ist X ein topologischer Raum, dann definieren wir folgendermaßen eine Topologie in $SP(X, 0)$. Sei $X^q = X \times X \times \cdots \times X$ (q Faktoren). Wir erklären eine Abbildung $X^q \rightarrow SP(X, 0)$ durch $(x_1, x_2, \dots, x_q) \rightarrow \sum_{v=1}^q x_v$. Das Bild $SP^q(X)$ verstehen wir mit der Identifikationstopologie und $SP(X, 0)$ mit der Limestopologie, die durch die Folge von Räumen $SP^1(X) \subset SP^2(X) \subset \cdots \subset SP^q(X) \subset \cdots$ definiert wird. Bezüglich dieser Topologie ist die Addition in $SP(X, 0)$ stetig auf kompakten Teilmengen von $SP(X, 0) \times SP(X, 0)$; wenn X ein abzählbarer CW-Komplex ist, dann ist sie überhaupt stetig. $SP(X, 0)$ ist also ein freier abelscher assoziativer H-Raum mit Nullelement. Stetige Abbildungen $(X, 0) \rightarrow (X', 0')$ induzieren stetige Homomorphismen $SP(X, 0) \rightarrow SP(X', 0')$; $SP(X, 0)$ wird damit zum Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt.

Läßt man in den Summen $\sum_{x \in X-0} n_x \cdot x$ auch negative Koeffizienten n_x zu (§ 4), so erhält man die freie abelsche Gruppe $AG(X, 0)$ mit $X - 0$ als Basis. Diese Gruppe kann wieder in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen werden, so daß die Addition auf kompakten Teilmengen stetig ist, zumindest wenn X ein simplizialer Komplex ist; ist X ein abzählbarer Komplex, dann ist die Addition überhaupt stetig, und $AG(X, 0)$ ist eine topologische Gruppe.

Schließlich fassen wir die Koeffizienten als Restklassen mod m auf und erhalten eine Gruppe $AG(Y, 0; m)$. Diese Gruppe ist nichts anderes als die Faktorgruppe $AG(Y, 0)/m \cdot AG(Y, 0)$. Auch die Gruppen $AG(X, 0)$ und $AG(X, 0; m)$ mit ihren Homomorphismen sind Funktoren des Arguments $(X, 0)$.

Da $SP(X, 0)$ ein Funktor von $(X, 0)$ ist, gilt dasselbe für die Homotopiegruppen $\pi_i(SP(X, 0))$. In § 6 beweisen wir, daß dieser Funktor für zusammenhängende CW-Komplexe X mit dem Homologiefunktor $H_i(X, Z)$ übereinstimmt ($i > 0$). Der Beweis stützt sich auf die EILENBERG-STEENRODSche Axiomatik der Homologietheorie. Wir benutzen eine etwas modifizierte Form der Axiome, die uns von D. PUPPE vorgeschlagen wurde und in welcher keine relativen Gruppen auftreten. Wir zeigen, daß die Gruppen $\pi_i(SP(X, 0))$ diesen Axiomen genügen und erhalten das Ergebnis aus dem Eindeutigkeitssatz der Homologietheorie für CW-Komplexe. Auf die gleiche Weise erhalten wir $\pi_i(AG(X, 0)) \cong H_i(X, Z)$ und $\pi_i(AG(X, 0; m)) \cong H_i(X, Z_m)$, $i \geq 0$, für abzählbare simpliziale Komplexe. Insbesondere sind $SP(S^n)$ und $AG(S^n)$ ($S^n = n$ -Sphäre) EILENBERG-MACLANESche Komplexe $K(Z, n)$, und $AG(S^n; m)$ ist ein Komplex $K(Z_m, n)$.

Dieses Ergebnis für S^n bestätigt eine Vermutung von J. P. SERRE. Als Anwendung geben wir einen Beweis des Satzes von J. C. MOORE, daß die k -Invarianten eines abelschen assoziativen H-Raumes verschwinden. Wir zeigen ferner: Sind X und Y zusammenhängende abzählbare CW-Komplexe, dann kann jede Folge von Homomorphismen $\pi_i(SP(X)) \rightarrow \pi_i(SP(Y))$, $i > 0$, durch einen stetigen Homomorphismus $SP(X) \rightarrow SP(Y)$ realisiert werden.

Ein wesentlicher Schritt für die Beweise in § 6 ist der folgende Satz, den wir in § 5 herleiten. Ist X ein CW-Komplex, A ein zusammenhängender Teilkomplex, der 0 enthält, X/A der Raum der aus X durch identifizieren von A zu einem Punkt $\bar{0}$ entsteht und $p: X \rightarrow X/A$ die Identifikationsabbildung, dann ist der durch p induzierte Homomorphismus $SP(X, 0) \rightarrow SP(X/A, \bar{0})$ eine Quasifaserung mit Faser $SP(A, 0)$. Ist X ein abzählbarer simplizialer Komplex und A ein beliebiger Teilkomplex, dann sind die induzierten Abbildungen $AG(X, 0) \rightarrow AG(X/A, \bar{0})$ bzw. $AG(X, 0; m) \rightarrow AG(X/A, \bar{0}; m)$ Projektionen von Hauptfaserbündeln (im Sinne von [12]) mit Strukturgruppe $AG(A, 0)$ bzw. $AG(A, 0; m)$.

1. Quasifaserungen; fasernweise Abbildungen

1.1. DEFINITION. Eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$ des topologischen Raumes E auf den topologischen Raum B heißt *Quasifaserung*, wenn

$$(1) \quad p_*: \pi_i(E, p^{-1}(x), y) \cong \pi_i(B, x)$$

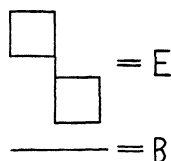
für jedes $x \in B$, $y \in p^{-1}(x)$ und jedes $i \geq 0$.

E heißt *gefaserter Raum*, B *Basis* und $p^{-1}(x)$ *Faser über x* der Quasifaserung.

1.2. BEMERKUNG. Ist X ein topologischer Raum, und $x \in Y \subset X$, so verstehen wir unter $\pi_0(X, x)$ die Menge der Bogenkomponenten von X und nennen die Bogenkomponente von x das *neutrale Element* von $\pi_0(X, x)$. $\pi_0(X, Y, x)$ entsteht aus $\pi_0(X, x)$, indem man alle Bogenkomponenten, die Y treffen, identifiziert; diese Bogenkomponenten bilden das neutrale Element von $\pi_0(X, Y, x)$. Die Elemente von $\pi_i(X, Y, x)$ sind die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen des Intervalls $I = [0, 1]$ in X mit $f(0) = x$, $f(1) \in Y$; dabei sind nur solche Homotopien zugelassen, die den Bildpunkt von 0 fest lassen und den Bildpunkt von 1 innerhalb Y bewegen. Die konstante Abbildung $f([0, 1]) = x$ repräsentiert das neutrale Element von $\pi_i(X, Y, x)$. Die Isomorphie (1) ist für $i = 0, 1$ als eindeutige Beziehung zwischen den so definierten Mengen mit neutralem Element aufzufassen. Vermöge p_*^{-1} verstehen wir $\pi_i(E, p^{-1}(x), y)$

mit der Gruppenstruktur von $\pi_i(B, x)$; p_* ist dann für $i \geq 1$ ein Isomorphismus zwischen Gruppen.

1.3. BEMERKUNG. Jede Faserung im Sinne von J. P. SERRE ([11], S. 443) ist eine Quasifaserung: Aus der Tatsache, daß man Homotopien endlicher Polyeder "hochheben" kann (d.i. die Definition der SERRESchen Faserung) folgt die Isomorphie (1).



Die folgende Quasifaserung ist keine Faserung im Sinne von SERRE: E besteht aus zwei abgeschlossenen Quadraten und einer verbindenden Strecke, B

ist eine abgeschlossene Strecke und p ist in der Zeichnung die vertikale Projektion. Die Identität der Basis ist ein Weg, den man nicht in E hochheben kann.

1.4. Die exakte Folge einer Quasifaserung $p: E \rightarrow B$ (zum Bezugspunkt x)

$$(2) \quad \rightarrow \pi_{i+1}(B, x) \xrightarrow{\Delta} \pi_i(p^{-1}(x), y) \xrightarrow{j_*} \pi_i(E, y) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B, x) \rightarrow \dots \\ \rightarrow \pi_0(B, x) \rightarrow 0$$

entsteht aus der exakten Homotopiefolge des Raumpaars $(E, p^{-1}(x))$

$$(3) \quad \rightarrow \pi_{i+1}(E, p^{-1}(x), y) \xrightarrow{\partial} \pi_i(p^{-1}(x), y) \xrightarrow{j_*} \pi_i(E, y) \rightarrow \dots \\ \rightarrow \pi_0(E, p^{-1}(x), y) \rightarrow 0,$$

indem man die relativen Gruppen $\pi_i(E, p^{-1}(x), y)$ vermöge der Isomorphie (1) durch die Gruppen $\pi_i(B, x)$ ersetzt ($x = p(y)$, $\Delta = \partial \circ p_*^{-1}$).

1.5. BEMERKUNG. Die Folgen (3) und (2) sind auch für $i = 0, 1$ noch exakt in dem Sinne, daß das Bild jeder Abbildung mit dem Urbild des neutralen Elementes bei der folgenden Abbildung übereinstimmt (vgl. 1.2).

1.6. DEFINITION. $p: E \rightarrow B$ und $p': E' \rightarrow B'$ seien Quasifaserungen. Eine stetige Abbildung $h: E \rightarrow E'$ heißt *faserweise Abbildung*, wenn sie Fasern in Fasern überführt, d.h. wenn es eine (nicht notwendig stetige) Abbildung $\bar{h}: B \rightarrow B'$ gibt, so daß das Diagramm

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

kommutativ ist. \bar{h} ist durch h eindeutig bestimmt und heißt die durch

h induzierte Abbildung der Basis.

1.7. Eine fasernweise Abbildung $h: E \rightarrow E'$ induziert wegen $h(p^{-1}(x)) \subset p'^{-1}(x')$, $x' = \bar{h}(x)$, einen Homomorphismus der Homotopiefolge des Paares $(E, p^{-1}(x))$ in die des Paares $(E', p'^{-1}(x'))$

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{i+1}(E, p^{-1}(x)) & \rightarrow & \pi_i(p^{-1}(x)) & \rightarrow & \pi_i(E) & \rightarrow & \pi_i(E, p^{-1}(x)) \rightarrow \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow h_* & & \downarrow \\ \rightarrow \pi_{i+1}(E', p'^{-1}(x')) & \rightarrow & \pi_i(p'^{-1}(x')) & \rightarrow & \pi_i(E') & \rightarrow & \pi_i(E', p'^{-1}(x')) \rightarrow . \end{array}$$

Wegen (1) können wir die relativen Gruppen in (5) durch die absoluten Gruppen der Basis ersetzen und erhalten den

1.8. SATZ. Eine fasernweise Abbildung $h: E \rightarrow E'$ (s. 1.6) induziert einen Homomorphismus der exakten Homotopiefolgen (s. 1.4)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow \pi_{i+1}(B) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_i(p^{-1}(x)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_i(B) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \pi_0(B) & \rightarrow 0 \\ \bar{h}_* \downarrow & & h_{0*} \downarrow & & h_* \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ \rightarrow \pi_{i+1}(B') & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_i(p'^{-1}(x')) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_i(E') & \xrightarrow{p'_*} & \pi_i(B') & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \pi_0(B') & \rightarrow 0 . \end{array}$$

Dabei ist $h_0: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x')$ die Abbildung $h|_{p^{-1}(x)}$ und $x' = \bar{h}(x)$. Der Homomorphismus \bar{h}_* ist diejenige eindeutig bestimmte Abbildung, für die das Diagramm

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \pi_i(E, p^{-1}(x)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_i(B) \\ h_* \downarrow & & \downarrow \bar{h}_* \\ \pi_i(E', p'^{-1}(x')) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_i(B') \end{array}$$

kommutativ ist. Aus der Kommutativität von (4) folgt, daß \bar{h}_* durch die Abbildung \bar{h} induziert wird, wenn \bar{h} stetig ist.

Die Faser $p^{-1}(x)$ einer Quasifaserung ist im wesentlichen dieselbe für alle x ; für eine präzise Formulierung dieser Tatsache benötigen wir eine

1.9. DEFINITION. Zwei topologische Räume X und Y sind vom gleichen schwachen Homotopietyp, wenn es einen Raum W und stetige Abbildungen $f: W \rightarrow X$, $g: W \rightarrow Y$ gibt, die Isomorphismen aller Homotopiegruppen induzieren

$$f_*: \pi_i(W) \cong \pi_i(X), \quad g_*: \pi_i(W) \cong \pi_i(Y), \quad \text{alle } i \geq 0.$$

Ein solches Paar von Abbildungen heißt eine schwache Homotopieäquivalenz (zwischen X und Y). Der Bequemlichkeit halber nennen wir auch eine einzelne Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn sie

Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert (zusammen mit der Identität des Bild- oder Urbildraumes ist sie ja tatsächlich eine schwache Homotopieäquivalenz).

Wir behaupten: *Schwache Homotopieäquivalenz ist eine transitive Relation.*

BEWEIS. Es seien gegeben topologische Räume V, W, X, Y, Z und stetige Abbildungen $f: V \rightarrow X, g_1: V \rightarrow Y, g_2: W \rightarrow Y, h: W \rightarrow Z$ die Isomorphismen aller Homotopiegruppen induzieren. Wir haben eine schwache Homotopieäquivalenz $U \rightarrow X, U \rightarrow Z$ zu konstruieren. Wir können annehmen, daß V ein (i.a. unendliches) Polyeder ist; sonst ersetzen wir V etwa durch die geometrische Realisierung seines singulären Komplexes (s. J. MILNOR, Ann. of Math. 65, 1957, 357–362, Th. 9). Betrachten wir jetzt den Abbildungszylinder $Z(g_2)$ von g_2 . Die relativen Homotopiegruppen $\pi_i(Z(g_2), W)$ sind Null; daher können wir die Abbildung $g_1: V \rightarrow Y \subset Z(g_2)$ innerhalb $Z(g_2)$ in eine Abbildung $g'_1: V \rightarrow W$ deformieren, d.h. es gibt eine Abbildung $g'_1: V \rightarrow W$, so daß g_1 homotop ist zu $g_2 \circ g'_1$. Insbesondere induziert g'_1 Isomorphismen aller Homotopiegruppen, und $f: V \rightarrow X, h \circ g'_1: V \rightarrow Z$ ist eine schwache Homotopieäquivalenz.

1.10. SATZ. *In einer Quasifaserung $p: E \rightarrow B$ mit bogenweise zusammenhängender Basis B sind alle Fasern $p^{-1}(x), x \in B$, vom gleichen schwachen Homotopietyp.*

BEWEIS. Wie jede stetige Abbildung kann man eine Quasifaserung $p: E \rightarrow B$ in der bekannten Weise durch eine Faserung im Sinne von SERRE ersetzen: Man bilde den Raum W aller Wege $w: I \rightarrow B$ in B (mit der kompakt-offenen Topologie) und nehmen in $E \times W$ den Teilraum E' der Paare (y, w) , für die $p(y) = w(0)$ ist. Die Abbildung $(y, w) \rightarrow w(1)$ definiert eine Faserung $p': E' \rightarrow B$ im Sinne von SERRE.

Man definiert eine Injektion $h: E \rightarrow E'$ durch $h(y) = (y, p(y))$, wo $p(y)$ den konstanten Weg $I \rightarrow p(y)$ bezeichnet. E' ist auf E zusammenziehbar (eine Deformation ist durch $D_\tau(y, w) = (y, w_\tau)$; $w_\tau(t) = w((1 - \tau)t)$ gegeben), h also eine Homotopieäquivalenz. Andererseits ist h eine faserweise Abbildung, die die Identität der Basis induziert. Betrachten wir den Homomorphismus der exakten Homotopiefolgen, den h nach 1.8 definiert: h_* und $\bar{h}_* = \text{id}$ sind Isomorphismen und daher nach dem 5er-Lemma ([4]; I, 4.3) auch $h_{0*}: \pi_i(p^{-1}(x)) \cong \pi_i(p'^{-1}(x))$ (auch für $i = 0$ ist h_{0*} ein Isomorphismus). h_0 ist also eine schwache Homotopieäquivalenz, und es genügt daher zu zeigen, daß in E' je zwei Fasern $p'^{-1}(x)$ und $p'^{-1}(x')$ vom gleichen (schwachen) Homotopietyp sind.

Es sei $\bar{w}: I \rightarrow B$ ein Weg von x nach x' . Wir definieren eine Abbildung $T(\bar{w}): p'^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x')$ durch $T(\bar{w})(y, w) = (y, w\bar{w})$. $T(\bar{w})$ ist eine Homo-

topieäquivalenz und $T(\bar{w}^{-1})$ ist homotopieinvers zu $T(\bar{w})$; ziehen wir nämlich den Weg $\bar{w} \cdot \bar{w}^{-1}$ in sich auf den Anfangspunkt x zusammen, so erhalten wir eine stetige Schar w_τ von Wegen in B , die mit $\bar{w} \cdot \bar{w}^{-1}$ beginnt und mit dem konstanten Weg x endet. $T(w_\tau)$ ist dann eine Deformation von $T(\bar{w} \cdot \bar{w}^{-1}) \simeq T(\bar{w}^{-1}) \circ T(\bar{w})$ in $T(w_1) = T(x) \simeq \text{id}$. Entsprechendes gilt für $T(\bar{w}) \circ T(\bar{w}^{-1})$. $p'^{-1}(x)$ und $p'^{-1}(x')$ sind also in der Tat vom gleichen Homotopietyp.

2. Kriterien für Quasifaserungen

2.1. DEFINITION. $p: E \rightarrow B$ sei eine stetige Abbildung. Eine Teilmenge $U \subset B$ heißt *ausgezeichnet* (bezüglich p), wenn $U \subset p(E)$ und wenn

$$(7) \quad p_*: \pi_i(p^{-1}(U), p^{-1}(x), y) \cong \pi_i(U, x) \quad \text{für jedes } x \in U, y \in p^{-1}(x) \text{ und } i \geq 0,$$

d.h. wenn $p_U: p^{-1}(U) \rightarrow U$, die Einschränkung von p auf $p^{-1}(U)$, eine Quasifaserung ist.

2.2. SATZ. $p: E \rightarrow B$ sei eine stetige Abbildung. In B gebe es ein System $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ von ausgezeichneten offenen Mengen mit den folgenden Eigenschaften

\mathfrak{E}_1 : Die Mengen U_i überdecken B .

\mathfrak{E}_2 : Zu jedem $x \in U_i \cap U_k$ gibt es ein $U_m \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U_m \subset U_i \cap U_k$.

Dann ist B ausgezeichnet, d.h. p ist eine Quasifaserung.

KOROLLAR. Ist $p: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung und sind U, V und $U \cap V$ ausgezeichnete offene Mengen, dann auch $U \cup V$.

2.3. BEMERKUNG. Man kann die Eigenschaft \mathfrak{E}_2 in Satz 2.2 nicht weglassen, d.h. es genügt nicht, daß die ausgezeichneten offenen Mengen B überdecken.

Gegenbeispiel: B sei die reelle Zahlenebene, E die längs des Intervalls $0 < x < 1, y = 0$ aufgeschlitzte Ebene ohne den "unteren" Schlitzrand (den Schlitzrand von $y < 0$) und $p: E \rightarrow B$ die natürliche Projektion. Die Halbebenen $x > 0$ und $x < 1$ sind ausgezeichnet (alle in (1) vorkommenden Gruppen sind trivial) und überdecken B . Wäre p eine Quasifaserung, dann müßte $p_*: \pi_1(E) \cong \pi_1(B)$ sein (denn alle Fasern sind Punkte). Die Gruppe $\pi_1(B)$ ist aber trivial und $\pi_1(E)$ ist frei zyklisch.

Dieses Beispiel zeigt gleichzeitig, daß eine Teilmenge einer ausgezeichneten Menge nicht notwendig selbst ausgezeichnet ist: Die Halbebene $0 < x$ ist ausgezeichnet, aber der Streifen $0 < x < 1$ ist es nicht—sonst wäre die ganze Ebene ausgezeichnet nach 2.2. Insbesondere induziert eine stetige Abbildung $B' \rightarrow B$ in die Basis einer Quasifaserung $E \rightarrow B$ im allgemeinen keine Quasifaserung $E' \rightarrow B'$.

Dem Beweis des Satzes 2.2 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

2.4. HILFSSATZ. *Es seien $p: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung und $U \subset B$ eine ausgezeichnete Menge. Dann sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig*

- (a) $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(x), y) \cong \pi_i(B, x)$
für jedes $x \in U, y \in p^{-1}(x)$ und $i \geq 0$
- (b) $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(U), y) \cong \pi_i(B, U, x)$
für jedes $x \in U, y \in p^{-1}(x)$ und $i \geq 0$.

BEWEIS. Die Abbildung p induziert für jedes $y \in p^{-1}(x)$ einen Homomorphismus der exakten Homotopiefolge des Tripels $(E, p^{-1}(U), p^{-1}(x))$ in die des Tripels (B, U, x)

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_i(p^{-1}(U), p^{-1}(x)) & \rightarrow \pi_i(E, p^{-1}(x)) & \rightarrow \pi_i(E, p^{-1}(U)) & \rightarrow \pi_{i-1}(p^{-1}(U), p^{-1}(x)) & \rightarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \rightarrow \pi_i(U) & \longrightarrow \pi_i(B) & \longrightarrow \pi_i(B, U) & \longrightarrow \pi_{i-1}(U) & \longrightarrow . \end{array}$$

Unter der Voraussetzung (a) oder (b) sind alle vertikalen Abbildungen in (8) Isomorphismen außer evtl. jeder dritten. Die Behauptung folgt daher aus dem 5er-Lemma (s. [4]; I, 4.3).

2.5. BEMERKUNG. Für $i = 2$ sind die Gruppen im Diagramm (8) unter Umständen nicht abelsch; das beeinträchtigt indessen die Gültigkeit des 5er-Lemmas nicht.

Für $i = 0, 1$ tragen die in (8) auftretenden Mengen mit neutralem Element i.a. keine Gruppenstruktur, für die die Abbildungen in (8) Homomorphismen sind. Die Zeilen sind jedoch exakt im Sinne der Bemerkung 1.5, und man kann wie beim Beweis des 5er-Lemmas schließen, daß das Urbild des neutralen Elementes bei p_* nur aus dem neutralen Element besteht. Um in gleicher Weise zu schließen, daß p_* eine Abbildung auf oder eine eindeutige Abbildung ist, müßte man "Differenzen" in $\pi_i(E, p^{-1}(U), y)$ und $\pi_i(B, U, x)$ bilden, was für $i = 0, 1$ nicht ohne weiteres möglich ist. Man kann jedoch als Differenz z.B. zweier Wege w_1 und w_2 , die in x beginnen und in U enden, den Weg $w_1^{-1} \cdot w_2$ betrachten und mit dieser Differenz den Beweis des 5er-Lemmas übertragen. (Dabei ändert sich u.U. der Bezugspunkt; (8) und die Beziehung (7) sind jedoch für jede Wahl der Bezugspunkte gültig).

Zur Erläuterung dieser Bemerkung beweisen wir ausführlich, daß $p_*: \pi_1(E, p^{-1}(U), y) \rightarrow \pi_1(B, U, x)$ eine Abbildung auf ist. Sei $\bar{w}: I \rightarrow B$ ein Weg in B , der in x beginnt und in U endet. Nach (7) (für $i = 0$) kann

man y durch einen Weg w' in E mit einem Punkt $y' \in p^{-1}(x')$, $x' = \bar{w}(1)$, verbinden. Der geschlossene Weg $p(w')^{-1} \cdot \bar{w}$ definiere das Element $\alpha \in \pi_1(B, x')$. Nach (a) (für $i = 1$) gibt es einen Weg $w'': I \rightarrow E$, der in y' beginnt, in $p^{-1}(x')$ endet und dessen Projektion $p(w'')$ das Element α repräsentiert. Sei nun $w = w' \cdot w''$. Wegen $p(w)^{-1} \cdot \bar{w} \simeq p(w''^{-1}) \cdot (p(w')^{-1} \cdot \bar{w}) \simeq 0$, ist $p(w) \simeq \bar{w}$ unter Festhaltung der Endpunkte. Die Homotopieklasse von \bar{w} ist also Bild (bei p_*) der Homotopieklasse von w .

2.6. HILFSSATZ. *Es seien $p: F \rightarrow U$ eine stetige Abbildung, $V \subset U$, $G = p^{-1}(V)$ und K eine r -dimensionale Vollkugel, $r \geq 0$ (für $r = 0$ ist K ein Punkt). Für jedes $x \in V$, $y \in p^{-1}(x)$ sei $p_*: \pi_i(F, G, y) \rightarrow \pi_i(U, V, x)$ monomorph für $i = r$ und epimorph für $i = r + 1$.¹ Es seien gegeben die stetigen Abbildungen*

$$(1) \quad \bar{H}: (K \times I, K \times 1) \rightarrow (U, V)$$

$$(2) \quad h: (K \times 0 \cup \partial K \times I, \partial K \times 1) \rightarrow (F, G) = (p^{-1}(U), p^{-1}(V))$$

$$(3) \quad d: ((K \times 0 \cup \partial K \times I) \times I, (\partial K \times 1) \times I) \rightarrow (U, V) \text{ mit } d(z, t, 0) = \bar{H}(z, t), d(z, t, 1) = p \circ h(z, t).$$

Dann gibt es Erweiterungen von h und d , d.h. es gibt stetige Abbildungen

$$(a) \quad H: (K \times I, K \times 1) \rightarrow (F, G) \text{ mit } H|_{K \times 0 \cup \partial K \times I} = h$$

$$(b) \quad D: (K \times I \times I, K \times 1 \times I) \rightarrow (U, V) \text{ mit}$$

$$D|_{(K \times 0 \cup \partial K \times I) \times I} = d \text{ und}$$

$$D(z, t, 0) = \bar{H}(z, t), D(z, t, 1) = p \circ H(z, t).$$

BEWEIS. Die Abbildung h definiert ein Element $\alpha \in \pi_r(F, G)$, dessen Projektion in $\pi_r(U, V)$ Null ergibt. In der Tat ist $p \circ h$ zunächst vermöge d in \bar{H} deformierbar und dann in die konstante Abbildung, weil \bar{H} auf ganz $K \times I$ definiert ist. Nach Voraussetzung ist daher $\alpha = 0$, d.h. h läßt sich zu einer Abbildung $H': (K \times I, K \times 1) \rightarrow (F, G)$ erweitern. (Unpräzise formuliert verläuft der Beweis nun so: Wir haben zwei Nullhomotopien von $p \circ h$, nämlich $p \circ H'$ und die durch d und \bar{H} gegebene Deformation. Diese beiden Nullhomotopien definieren ein Element β aus $\pi_{r+1}(U, V)$. Wir können β um ein beliebiges Element aus $p_*(\pi_{r+1}(F, G))$ abändern, wenn wir H' geeignet abändern. Weil p_* epimorph ist, können wir insbesondere $H' = H$ so wählen, dass $\beta = 0$ wird. D ist dann die entsprechende Nullhomotopie.) Wir können annehmen, daß H' eine kleine $(r + 1)$ -dimensionale Zelle der Form $K' \times [s, 1]$ konstant, etwa in den Punkt $y \in p^{-1}(V)$ abbildet; dabei ist K' eine homothetische Verkleinerung

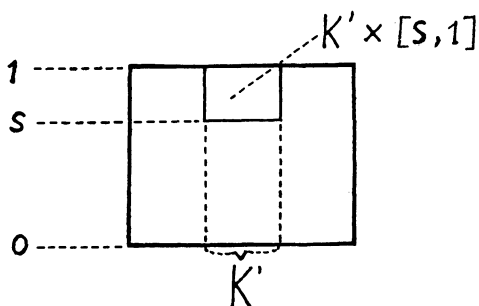
¹ Monomorph=isomorph in, epimorph=homomorph auf.

von K und $0 < s < 1$ (s. Figur). Wir betrachten nun die $(r+1)$ -dimensionale Zelle

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \partial(K \times I \times I) - K \times 1 \times I \\ &= K \times I \times 0 \cup K \times I \times 1 \cup K \times 0 \times I \cup \partial K \times I \times I\end{aligned}$$

und definieren eine Abbildung D' dieser Zelle in U , die den Rand in V überführt, wie folgt:

$$\begin{aligned}D'(z, t, 0) &= \bar{H}(z, t); \quad D'(z, t, 1) = p \circ H'(z, t); \\ D' \mid (K \times 0 \cup \partial K \times I) \times I &= d \quad (z \in K, t \in I).\end{aligned}$$



D' bildet $K' \times [s, 1] \times 1$ in den Punkt $x = p(y)$ ab und repräsentiert ein gewisses Element $\beta \in \pi_{r+1}(U, V)$. Wir wählen nun eine Abbildung $H'': (\bar{K}, \partial \bar{K}) \rightarrow (F, G)$, deren Projektion $p \circ H''$ das Element $-\beta$ repräsentiert und die das Komplement von $K' \times [s, 1] \times 1$ konstant in den Punkt y abbildet. Dann definieren wir $H: (K \times I, K \times 1) \rightarrow (F, G)$ durch

$$H(z, t) = \begin{cases} H''(z, t, 1) & \text{für } (z, t) \in K' \times [s, 1] \\ H'(z, t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $D: (\bar{K}, \partial \bar{K}) \rightarrow (U, V)$ durch

$$\begin{aligned}D(z, t, 1) &= p \circ H''(z, t, 1) = p \circ H(z, t) \quad \text{für } (z, t) \in K' \times [s, 1] \\ D(z, t, u) &= D'(z, t, u) \quad \text{sonst.}\end{aligned}$$

D repräsentiert das Element $(-\beta) + \beta = 0$ aus $\pi_{r+1}(U, V)$ und kann daher zu einer Abbildung $D: (K \times I \times I, K \times 1 \times I) \rightarrow (U, V)$ erweitert werden. Die so konstruierten Abbildungen H und D genügen den Bedingungen des Hilfssatzes.

Wie das Beispiel 1.3 zeigt, läßt sich in einer Quasifaserung i.a. nicht jede Homotopie eines endlichen Polyeders "hochheben". Eine abgeschwächte Form des "covering homotopy theorem" bleibt indessen richtig, nämlich der

2.7. SATZ. $p: E \rightarrow B$ sei eine stetige Abbildung und $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ ein System ausgezeichneteter offener Mengen in B mit den Eigenschaften \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 des Satzes 2.2 (p ist also nach dem vorläufig noch unbewiesenen Satz 2.2 eine Quasifaserung). P sei ein endliches Polyeder und $h: P \rightarrow E$ und $H: \bar{P} \times I \rightarrow$

B seien stetige Abbildungen mit $\bar{H}(z, 0) = p \circ h(z)$, $z \in P$. Ferner seien endlich viele kompakte Mengen $K_\lambda \subset P \times I$ gegeben, und es sei $\bar{H}(K_\lambda) \subset U_\lambda \in \mathcal{U}$. Dann gibt es stetige Abbildungen $H: P \times I \rightarrow E$ und $D: P \times I \times I \rightarrow B$ mit

$$(1) H(z, 0) = h(z)$$

$$(2) D(z, t, 0) = \bar{H}(z, t), D(z, t, 1) = p \circ H(z, t), D(z, 0, u) = \bar{H}(z, 0)$$

für $u, t \in I$

$$(3) D(K_\lambda \times I) \subset U_\lambda.$$

Offenbar können die kompakten Mengen K_λ bei gegebenem \bar{H} so gewählt werden, daß sie $P \times I$ überdecken. Dann kann man den Satz 2.7 kurz so formulieren: Die Homotopie \bar{H} läßt sich nach einer geeigneten Deformation rel. $P \times 0$ in E hochheben; die Deformation kann klein von der Ordnung \mathcal{U} gewählt werden. Wenn insbesondere \mathcal{U} eine Basis der Topologie von B ist, dann kann die Deformation D beliebig klein gewählt werden, und wir erhalten die ursprüngliche Definition der Quasifaserung in [3].

BEWEIS. $\{\sigma_\mu\}$ resp. $\{I_\nu\}$ seien Zellenzerlegungen von P resp. I ($I_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1}]$, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$). Wir beweisen weiter unten

2.8. HILFSSATZ. Bei geeigneter Wahl von $\{\sigma_\mu\}$ resp. $\{I_\nu\}$ können wir jeder Zelle ρ der Produktzerlegung $\{\sigma_\mu\} \times \{I_\nu\}$ von $P \times I$ eine Menge $U^\rho \in \mathcal{U}$ zuordnen, sodaß gilt

$$(a) \bar{H}(\rho) \subset U^\rho$$

$$(b) \text{ Ist } \rho \text{ Seite von } \rho', \text{ so ist } U^\rho \subset U^{\rho'}$$

$$(c) \text{ Ist } \rho \cap K_\lambda \neq \emptyset, \text{ dann ist } U^\rho \subset U_\lambda.$$

Wir ordnen nun die Zellen $\sigma_\mu \times I_\nu$ einer solchen Zerlegung folgendermaßen. Zuerst kommen die Zellen $\sigma_\mu \times I_1$ und zwar die mit höherer Dimension später als die mit niedrigerer, dann die Zellen $\sigma_\mu \times I_2$, wiederum nach aufsteigender Dimension geordnet usw. Die Abbildungen H und D konstruieren wir dann sukzessive auf den Zellen $\sigma_\mu \times I_\nu$ resp. $\sigma_\mu \times I_\nu \times I$ und zwar so, daß $D(\rho \times I) \subset U^\rho$ für alle Zellen ρ der Zerlegung von $P \times I$. Wegen (c) ist dann die Bedingung (3) automatisch erfüllt. Bei jedem Schritt der Konstruktion haben wir das folgende Problem: Gegeben ist $\bar{H}: (\sigma \times I, \sigma \times 1) \rightarrow (U^{\sigma \times I}, U^{\sigma \times 1})$ und gegeben sind H auf $\sigma \times 0 \cup \partial\sigma \times I$ sowie D auf $(\sigma \times 0 \cup \partial\sigma \times I) \times I$. Gesucht sind Erweiterungen von H und D . Diese Erweiterungen existieren nach Hilfssatz 2.6 (mit $V = U^{\sigma \times 1}$; $U = U^{\sigma \times I}$; V und U erfüllen die Voraussetzungen von 2.6 wegen (b) und Hilfssatz (2.4).

BEWEIS DES HILFSSATZES 2.8. Wir beweisen durch absteigende Induk-

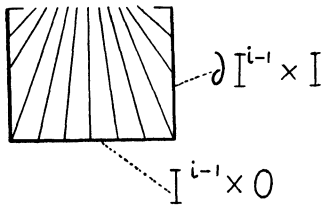
tion nach k : Es gibt Zerlegungen $\{\sigma_\mu\}$ von P , $\{I_\nu\}$ von I und eine Zuordnung $\rho \rightarrow U^\rho$, so daß (a), (b) und (c) für alle Zellen erfüllt sind, deren Dimension größer als k ist. Es sei unter dieser Induktionsvoraussetzung τ eine k -Zelle von $\{\sigma_\mu\} \times \{I_\nu\}$. Zu jedem $y \in \tau$ gibt es wegen der Eigenschaft \mathfrak{G}_2 eine Umgebung u_y in $P \times I$ und eine Menge $U^y \in \mathfrak{U}$, so daß gilt

- (i) $\bar{H}(u_y) \subset U^y$
- (ii) $U_y \subset U^\rho$ für alle ρ , die τ als Seite haben
- (iii) $U^y \subset U_\lambda$ für alle K_λ , die u_y treffen.

Unterteilt man τ genügend fein, so liegt jede Zelle $\bar{\tau}$ dieser Unterteilung in einer Menge u_y , also $\bar{H}(\bar{\tau}) \subset U^y = U^{\bar{\tau}}$. Wir erhalten solche Unterteilungen gleichzeitig für alle τ , wenn wir die Zerlegungen $\{\sigma_\mu\}$ und $\{I_\nu\}$ genügend fein unterteilen. Dabei werden allerdings auch die Zellen ρ weiter zerlegt, deren Dimension größer als k ist; den auf diese Weise aus ρ neu entstehenden Zellen $\bar{\rho}$ ordnen wir die Menge $U^{\bar{\rho}} = U^\rho$ zu.

2.9. BEWEIS DES SATZES 2.2. Es sei $U \in \mathfrak{U}$ und $x \in U$, $y \in p^{-1}(x)$. Wir beweisen $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(U), y) \cong \pi_i(B, U, x)$. Da die Mengen U die Basis B überdecken, folgt hieraus die Behauptung nach Hilfssatz 2.4.

(a) p_* ist epimorph. Ein Element $\alpha \in \pi_i(B, U, x)$, $i > 0$ (der Fall $i = 0$ ist trivial, weil p eine Abbildung auf ist) wird repräsentiert durch eine stetige Abbildung $\bar{H}: (I^{i-1} \times I, I^{i-1} \times 1) \rightarrow (B, U)$ eines i -dimensionalen



Würfels, die $I^{i-1} \times 0 \cup \partial I^{i-1} \times I$ konstant in den Punkt x abbildet. Wir schreiben $I^{i-1} \times I$ in der Form $I^{i-1} \times I = P \times I$ mit $P = I^{i-1} \times 0 \cup \partial I^{i-1} \times I$ (die Figur erläutert, wie dies zu geschehen hat). Wir wenden den Satz 2.7 an mit $h(P) = y$, $K_0 = I^{i-1} \times 1$, $U_0 = U$. Wir finden eine Erweiterung

$$H: (I^{i-1} \times I, I^{i-1} \times 1) = (P \times I, K_0) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$$

von h , deren Projektion $p \circ H$ der Abbildung \bar{H} homotop ist vermöge einer Deformation

$$D: (I^{i-1} \times I \times I, I^{i-1} \times 1 \times I) = (P \times I \times I, K_0 \times I) \rightarrow (B, U),$$

bei der das Bild von P fest bleibt. $p \circ H$ ist also ein Repräsentant von α .

(b) p_* ist monomorph. Sei $\alpha \in \pi_i(E, p^{-1}(U), y)$ und $p_*(\alpha) = 0$. Es seien $h: (I^i, \partial I^i) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$ ein Repräsentant von α und $\bar{H}: (I^i \times I, \partial I^i \times I) \rightarrow (B, U)$ eine Deformation von $p \circ H$ in die konstante Abbildung $\bar{H}(I^i \times 1) = x$. Wir wenden den Satz 2.7 an mit $P = I^i$, $K_0 = \partial I^i \times I \cup I^i \times 1$, $U_0 = U$ und erhalten eine stetige Abbildung $H: (I^i \times I, \partial I^i \times I) \rightarrow$

$(E, p^{-1}(U))$ mit $H(z, 0) = h(z)$ und $H(z, 1) \in p^{-1}(U)$, d.h. aber $\alpha = 0$ (N.B. Bei der Konstruktion einer Nullhomotopie ist es nicht erforderlich, den Basispunkt festzuhalten).

Die folgenden Abschnitte dieses Paragraphen enthalten zwei weitere Kriterien für Quasifaserungen.

2.10. HILFSSATZ. *Es seien $q: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung auf B , $B' \subset B$ eine bezüglich q ausgezeichnete Teilmenge und $E' = q^{-1}(B')$. Es gebe Deformationen $D_i: E \rightarrow E$ und $d_i: B \rightarrow B$ mit*

$$D_0 = \text{id}, D_i(E') \subset E', D_i(E) \subset E' \quad d_0 = \text{id}, d_i(B') \subset B', d_i(B) \subset B'$$

und

$$(9) \quad q \circ D_i = d_i \circ q.$$

Für jedes $x \in B$ und $i \geq 0$ gelte

$$(10) \quad D_{1*}: \pi_i(q^{-1}(x)) \cong \pi_i(q^{-1}(d_i(x))).$$

Dann ist auch B ausgezeichnet bezüglich q .

BEWEIS. d_i und D_i sind Deformationen; daher gilt für alle i

$$(11) \quad d_{1*}: \pi_i(B, x) \cong \pi_i(B', x') \quad x' = d_i(x)$$

$$(12) \quad D_{1*}: \pi_i(E, y) \cong \pi_i(E', y') \quad y' = D_i(y).$$

D_i bildet $q^{-1}(x)$ in $q^{-1}(x')$ ab und induziert daher einen Homomorphismus der Homotopiefolge von $(E, q^{-1}(x))$ in die von $(E', q^{-1}(x'))$. Nach (10) und (12) werden die absoluten Gruppen dabei isomorph abgebildet und daher nach dem 5er-Lemma auch die relativen:

$$(13) \quad D_{1*}: \pi_i(E, q^{-1}(x)) \cong \pi_i(E', q^{-1}(x')).$$

Betrachten wir nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(E, q^{-1}(x)) & \xrightarrow{D_{1*}} & \pi_i(E', q^{-1}(x')) \\ q^* \downarrow & & \downarrow (q|_{E'})_* \\ \pi_i(B, x) & \xrightarrow{d_{1*}} & \pi_i(B', x'). \end{array}$$

Wegen (9) ist das Diagramm kommutativ. d_{1*} und D_{1*} sind Isomorphismen nach (11) und (13) und ebenso $(q|_{E'})_*$, weil B' nach Voraussetzung ausgezeichnet ist. Also ist auch q_* ein Isomorphismus, q.e.d.

2.11. DEFINITION. $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ sei eine Folge von topologischen Räumen und Inklusionen. In der Vereinigungsmenge $B = \bigcup B_i$ definieren wir eine Topologie durch die folgende Festsetzung (vgl. [2]): Eine Teilmenge $A \subset B$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Durch-

schnitt mit jeder Menge B_ν offen (abgeschlossen) ist in B_ν . Die Menge B mit dieser Topologie heisst *induktiver Limes* der Folge $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, in Zeichen $\lim_\nu B_\nu$.

Diese Topologie ist die *feinste* Topologie in B , bei der die Injektionen $B_q \rightarrow B$ stetig sind. *Tatsächlich sind die Injektionen $i_q: B_q \rightarrow \lim_\nu B_\nu$ sogar topologisch.* Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die Abbildung $i_q: B_q \rightarrow i_q(B_q)$ offen ist, d.h. wir haben zu jeder offenen Menge $V_q \subset B_q$ eine Menge $V \subset \lim_\nu B_\nu$ anzugeben, so daß $V \cap B_q = V_q$ ist und so daß $V \cap B_\nu$ offen ist in B_ν für jedes ν .

Weil B_q Teilraum von B_{q+1} ist, gibt es jedenfalls eine offene Menge $V_{q+1} \subset B_{q+1}$ mit $V_{q+1} \cap B_q = V_q$. Ebenso gibt es eine offene Menge $V_{q+2} \subset B_{q+2}$ mit $V_{q+2} \cap B_{q+1} = V_{q+1}$ usw. Die Vereinigung $V = \bigcup_\nu V_{q+\nu} \subset \lim_\nu B_\nu$ besitzt dann offenbar die gewünschten Eigenschaften. Aus der Definition von $\lim_\nu B_\nu$ folgt: *Eine Abbildung von $\lim_\nu B_\nu$ ist genau dann stetig, wenn ihre Einschränkung auf B_ν stetig ist für jedes ν .*

2.12. HILFSSATZ. *Ist B induktiver Limes der Folge $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ und ist C ein abgeschlossener (offener) Teilraum von B , dann ist C induktiver Limes der Folge $C_\nu = C \cap B_\nu$.*

BEWEIS. Es sei $A \subset C$ und $A_\nu = A \cap C_\nu$ abgeschlossen (offen) in C_ν für alle ν . C_ν ist abgeschlossen (offen) in B_ν , also A_ν abgeschlossen (offen) in B_ν . Nach Definition von $\lim_\nu B_\nu$ ist daher A abgeschlossen (offen) in B , also erst recht in C , q.e.d.

2.13. HILFSSATZ. *Ist Y ein lokal kompakter Raum und B induktiver Limes der Folge B_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, dann ist $Y \times B$ induktiver Limes der Folge $Y \times B_\nu$.*

BEWEIS. Die Identität der Menge $Y \times B$ induziert eine stetige (eindeutige) Abbildung $f: \lim_\nu (Y \times B_\nu) \rightarrow Y \times \lim_\nu B_\nu$, denn die Einschränkung $f|Y \times B_\nu$ ist stetig. Wir haben zu zeigen, daß die Umkehrung $g = f^{-1}: Y \times \lim_\nu B_\nu \rightarrow \lim_\nu (Y \times B_\nu)$ stetig ist. Sei \mathfrak{F} der Raum der stetigen Abbildungen von Y in $\lim_\nu (Y \times B_\nu)$ mit der "kompakt-offenen" Topologie (s. BOURBAKI, Topologie générale, Chap. X). Die Abbildung g definiert eine Abbildung $\tilde{g}: \lim_\nu B_\nu \rightarrow \mathfrak{F}$, und zwar ordnet \tilde{g} dem Punkt $b \in B$ die Abbildung $y \rightarrow g(y, b)$ zu. Die Einschränkung von \tilde{g} auf B_ν ist stetig, denn die Einschränkung von g auf $Y \times B_\nu$ ist stetig. Daher ist \tilde{g} selbst stetig und damit auch die Abbildung g .

2.14. HILFSSATZ. *Ist B induktiver Limes der Folge $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ und genügen die B_ν dem ersten Trennungsaxiom (d.h. die Punkte sind abgeschlossene Mengen in B_ν), dann liegt jede kompakte Teilmenge K von B bereits in einer der Mengen B_ν .*

BEWEIS. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es

eine Folge $\{x_\nu\}$ mit $x_\nu \in K, x_\nu \notin B_\nu$. Diese Folge, ebenso wie jede Teilfolge, ist eine abgeschlossene Menge in B , weil in jedem B_ν nur endlich viele ihrer Punkte liegen. Die Teilfolgen $\{x_\mu, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots\}$, $\mu = 1, 2, 3, \dots$, stellen daher ein System von abgeschlossenen Teilmengen von K dar, dessen Durchschnitt leer ist, ohne daß bereits der Durchschnitt eines endlichen Teilsystems leer wäre—ein Widerspruch zur Kompaktheit von K .

2.15. SATZ. $p: E \rightarrow B$ sei eine stetige Abbildung. B sei induktiver Limes der Folge von Räumen $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ (s. 2.11), die dem ersten Trennungsaxiom genügen. Wenn jede der Mengen B_ν ausgezeichnet ist bezüglich p , dann auch B , d.h. dann ist p eine Quasifaserung.

BEWEIS. Ist K ein kompakter topologischer Raum und $f: K \rightarrow B$ eine stetige Abbildung, dann ist $f(K)$ nach 2.14 bereits in einer der Mengen B_ν enthalten. Ebenso liegt das Bild bei jeder stetigen Abbildung $F: K \rightarrow E$ bereits in einem $p^{-1}(B_\nu)$, denn $p \circ F(K)$ liegt in einer der Mengen B_ν . Bei der Bildung von Homotopiegruppen werden aber nur Abbildungen von kompakten Räumen, nämlich Würfeln, betrachtet. Daher folgt die zu beweisende Isomorphie $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(x)) \cong \pi_i(B)$ leicht aus den nach Voraussetzung für alle B_ν gültigen entsprechenden Isomorphismen.

3. Symmetrische Produkte

Alle im weiteren Verlauf der Arbeit vorkommenden topologischen Räume sind *hausdorffsch*.

3.1. DEFINITION (vgl. LIAO [6]). X sei ein topologischer Raum. Das q -fache symmetrische Produkt $SP^q(X)$ entsteht aus der q -ten Potenz $X^q = X \times X \times \dots \times X$ (q Faktoren), indem man alle Punkte identifiziert, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Komponenten voneinander unterscheiden. Die Punkte von $SP^q(X)$ sind also die ungeordneten q -tupel von Punkten aus X . Mit $[x_1, x_2, \dots, x_q]$ bezeichnen wir den durch $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in X^q$ definierten Punkt aus $SP^q(X)$.

3.2. BEISPIEL (s. [6]). Der Raum X sei die 2-Sphäre S^2 , die wir als Riemannsche Zahlenkugel auffassen. Ein Punkt aus $SP^q(S^2)$ ist ein ungeordnetes q -tupel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ von komplexen Zahlen (einschließlich ∞). Es gibt ein bis auf Multiplikation mit einem komplexen Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmtes Polynom vom Grade höchstens q mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Fassen wir die Koeffizienten diese Polynoms als homogene Koordinaten im komplexen projektiven Raum $PC(q)$ aus, so erhalten wir einen Homöomorphismus $SP^q(S^2) \approx PC(q)$.

3.3. (s. [6]). Ist X ein simplizialer Komplex (mit der schwachen Topologie, d.h. eine Menge ist abgeschlossen in X , wenn ihr Durchschnitt mit

jedem Simplex abgeschlossen ist), dann ist die übliche simpliziale Zerlegung von X^q von der Art, daß jede Vertauschung der Faktoren in X^q eine simpliziale Abbildung ist. Daher wird eine simpliziale Zerlegung von $SP^q(X)$ induziert. Es ist jedoch zu beachten, daß X^q und $SP^q(X)$ unter Umständen nicht mit der schwachen Topologie versehen sind, wenn X mehr als abzählbar viele Simplexe hat (vgl. [5], Th. 1.9).

Die Teilmenge Δ_{ij} der Punkte $(x, x_2, \dots, x_q) \in X^q$ für welche $x_i = x_j$ ist, bildet einen Teilkomplex von X^q (vgl. [7], 2.2) und damit auch ihr Bild in $SP^q(X)$.

3.4. DEFINITION. Wir zeichnen in X einen Punkt 0 als *Grundpunkt* aus und definieren damit eine Injektion

$$(14) \quad i_q: SP^q(X) \rightarrow SP^{q+1}(X) \text{ durch } [x_1, x_2, \dots, x_q] \rightarrow [0, x_1, x_2, \dots, x_q].$$

Als *unendliches symmetrisches Produkt* von X (zum Grundpunkt 0) oder auch symmetrisches Produkt von X schlechthin bezeichnen wir den induktiven Limes $SP(X, 0)$ der Folge

$$X = SP^1(X) \xrightarrow{i_1} SP^2(X) \xrightarrow{i_2} \dots \rightarrow SP^q(X) \xrightarrow{i_q} \dots$$

(s. 2.11). Die Menge $SP(X, 0)$ ist also die "Vereinigungsmenge" der $SP^q(X)$, d.h. die Menge der ungeordneten "endlich-tupel" von Punkten aus X , wobei zwei endlich-tupel zu identifizieren sind, wenn sie sich nur durch die Anzahl der Komponenten 0 unterscheiden. Eine Teilmenge von $SP(X, 0)$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Durchschnitt mit jedem $SP^q(X)$ offen (abgeschlossen) ist. Eine Abbildung von $SP(X, 0)$ ist genau dann stetig, wenn ihre Einschränkungen auf die $SP^q(X)$ stetig sind.

Eine andere äquivalente Definition ist die folgende: Man bilde die topologische Summe $\sum_q SP^q(X)$ und erzeuge darin eine Äquivalenzrelation durch

$$(15) \quad [x_1, x_2, \dots, x_q] \sim [0, x_1, x_2, \dots, x_q].$$

Durch Identifizieren äquivalenter Punkte entsteht dann der Raum $SP(X, 0)$.

3.5. $SP(X, 0)$ ist ein hausdorffscher Raum. Der Beweis verläuft fast wörtlich wie der entsprechende Beweis von JAMES [5] für den reduced product space. Ist X ein simplizialer Komplex und $0 \in X$ eine Ecke, dann ist $SP^q(X)$ ein Teilkomplex von $SP^{q+1}(X)$ (bezüglich der Injektion i_q in 3.4 und der in 3.3 zitierten simplizialen Zerlegung). Daher wird eine simpliziale Zerlegung von $SP(X, 0)$ induziert, in der $SP^q(X)$ Teilkomplex

ist (für nicht-abzählbare simpliziale Komplexe X ist die Bemerkung in 3.3 zu beachten).

3.6. (s. [6]). Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow X'$ induziert eine stetige Abbildung

(16) $f^{\Sigma, q}: SP^q(X) \rightarrow SP^q(X')$, $f^{\Sigma, q}[x_1, x_2, \dots, x_q] = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_q)]$. Ist f eine Abbildung "mit Grundpunkt", $f: (X, 0) \rightarrow (X', 0')$, dann sind die Abbildungen $f^{\Sigma, q}$ mit den Injektionen i_q (s. (14)) verträglich und setzen sich daher zu einer stetigen Abbildung $f^{\Sigma}: SP(X, 0) \rightarrow SP(X', 0')$ zusammen: $f^{\Sigma}|_{SP^q(X)} = f^{\Sigma, q}$. Sind $f_0, f_1: X \rightarrow X'$ homotope Abbildungen, dann sind auch $f_0^{\Sigma, q}$ und $f_1^{\Sigma, q}$ homotop; ist f_t eine Deformation von f_0 in f_1 , dann ist $f_t^{\Sigma, q}$ eine Deformation von $f_0^{\Sigma, q}$ in $f_1^{\Sigma, q}$. Sind f_0, f_1 Abbildungen mit Grundpunkt und ist f_t eine Homotopie rel. 0, dann ist auch f_t eine Deformation rel. 0 (Beweis s. unten). Daraus folgt: *Der Homotopietyp von $SP^q(X)$ hängt nur vom Homotopietyp von X ab; der Homotopietyp von $SP(X, 0)$ hängt nur vom Homotopietyp von $(X, 0)$ ab.* Wenn in einem topologischen Raum X der Homotopietyp von $(X, 0)$ unabhängig von der Auswahl des Grundpunktes 0 ist (wie z.B. in einem CW-Komplex), werden wir daher auch einfacher $SP(X)$ statt $SP(X, 0)$ schreiben.

BEWEIS DER STETIGKEIT VON f_t^{Σ} : Wir schreiben die Deformation f_t als Abbildung $F: X \times I \rightarrow X'$, d.h. $F(x, t) = f_t(x)$. Die Abbildung F definiert eine stetige Deformation $F^q: X^q \times I \rightarrow X'^q$, nämlich $F^q(x_1, x_2, \dots, x_q, t) = (F(x_1, t), F(x_2, t), \dots, F(x_q, t))$. Durch Übergang zum Quotienten erhält man eine stetige Deformation $F^{\Sigma, q}: SP^q(X) \times I \rightarrow SP^q(X')$ und durch Übergang zum induktiven Limes $\lim_q (SP^q(X) \times I) = SP(X, 0) \times I$ (s. 2.13) eine Deformation $F^{\Sigma}: SP(X, 0) \times I \rightarrow SP(X', 0')$, d.h. die Deformation f_t^{Σ} .

3.7. HILFSSATZ. *Ist A ein abgeschlossener (offener) Teilraum von X und ist $i: A \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung, dann sind auch $i^{\Sigma, q}: SP^q(A) \rightarrow SP^q(X)$ und (falls $0 \in A$) $i^{\Sigma}: SP(A, 0) \rightarrow SP(X, 0)$ topologisch, d.h. Inklusionsabbildungen.*

BEWEIS. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^q & \xrightarrow{i^q} & X^q \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ SP^q(A) & \xrightarrow{i^{\Sigma, q}} & SP^q(X) \end{array},$$

in welchem σ und σ' die Identifikationsabbildungen bezeichnen. Die Abbildungen σ , i^q , und σ' sind abgeschlossen (offen), also auch $i^{\Sigma, q}$. Daher ist $i^{\Sigma, q}$ eine Inklusionsabbildung und $i^{\Sigma, q}(SP^q(A))$ ist abgeschlossen (offen) in $SP^q(X)$. Dann ist aber $i^{\Sigma}(SP(A, 0))$ abgeschlossen (offen) in $SP(X, 0)$,

und die Behauptung folgt aus 2.12.

3.8. In $SP(X, 0)$ ist in natürlicher Weise eine Addition $\alpha: SP(X, 0) \times SP(X, 0) \rightarrow SP(X, 0)$ erklärt. Sie besteht darin, q -tupel und r -tupel zu $(q + r)$ -tupeln zu "vereinigen",

$$(17) \quad \alpha([x_1, x_2, \dots, x_q], [y_1, y_2, \dots, y_r]) = [x_1, x_2, \dots, x_q] + [y_1, y_2, \dots, y_r] \\ = [x_1, x_2, \dots, x_q, y_1, y_2, \dots, y_r].$$

Insbesondere ist

$$(18) \quad [x_1, x_2, \dots, x_q] = x_1 + x_2 + \dots + x_q = \sum_{\nu=1}^q x_\nu.$$

$SP(X, 0)$ ist bezüglich dieser Addition die *freie abelsche Halbgruppe über X mit 0 als Nullelement*. Im Beispiel 3.2 ist diese Addition die gewöhnliche Multiplikation der Polynome (der Grundpunkt ist ∞). Wir wollen zeigen, daß α unter gewissen Voraussetzungen stetig ist. Zunächst ist die Abbildung $\bar{\alpha}_{q,r}: X^q \times X^r \rightarrow SP(X, 0)$ stetig, die das Paar $((x_1, x_2, \dots, x_q), (y_1, y_2, \dots, y_r))$ in $[x_1, x_2, \dots, x_q, y_1, y_2, \dots, y_r]$ überführt; $\bar{\alpha}_{q,r}$ kann nämlich zerlegt werden in den natürlichen Homöomorphismus $X^q \times X^r \rightarrow X^{q+r}$, die Identifikationsabbildung $X^{q+r} \rightarrow SP^{q+r}(X)$ und die Injektion $SP^{q+r}(X) \rightarrow SP(X, 0)$. $\bar{\alpha}_{q,r}$ ändert seinen Wert nicht, wenn man die Komponenten des Arguments vertauscht und definiert daher durch Übergang zum Quotienten eine stetige Abbildung $\alpha_{q,r}: SP^q(X) \times SP^r(X) \rightarrow SP(X, 0)$ (dabei haben wir Produkt- und Quotientenbildung vertauscht; das ist erlaubt, weil die Identifikationsabbildungen $X^m \rightarrow SP^m(X)$ offen sind). $\alpha_{q,r}$ ist nichts anderes als die Einschränkung von α auf $SP^q(X) \times SP^r(X)$. Wenn nun, wie dies bei lokal abzählbaren Polyedern der Fall ist (s. [5], Th. 1.9) $SP(X, 0) \times SP(X, 0)$ induktiver Limes der $SP^q(X) \times SP^r(X)$ ist, so folgt hieraus die Stetigkeit von α .

3.9. SATZ. Die Addition (17) in $SP(X, 0)$ ist stetig in jeder Teilmenge $SP^q(X) \times SP^r(X)$ und erst recht in jeder kompakten Teilmenge von $SP(X, 0) \times SP(X, 0)$. Ist X ein lokal abzählbares Polyeder, dann ist die Addition überhaupt stetig.

Zu beweisen ist nur noch, daß jede kompakte Teilmenge K von $SP(X, 0) \times SP(X, 0)$ bereits in einem $SP^q(X) \times SP^r(X)$ enthalten ist. Das ist richtig, weil K bei den beiden natürlichen Projektionen $SP(X, 0) \times SP(X, 0) \rightarrow SP(X, 0)$ in kompakte Mengen übergeht; diese müssen aber (s. 2.14) bereits in einem $SP^m(X)$ liegen.

3.10. BEMERKUNG. Eine Multiplikation mit Einselement in einem topologischen Raum H , die wie im Beispiel des unendlichen symmetrischen Produktes *stetig ist auf kompakten Teilmengen*, genügt bereits, wie leicht einzusehen, um den Satz von Hopf über die Kohomologiestruktur von H zu beweisen.

3.11. Die Gleichung $a + x = b$ ist in $SP(X, 0)$ entweder gar nicht oder nur auf eine Weise lösbar, d.h. die "Differenz" $x = b - a$ ist eindeutig bestimmt, wenn sie überhaupt definiert ist. Es gilt

HILFSSATZ. Die Differenzabbildung $(a, b) \rightarrow a - b$ ist stetig im Durchschnitt ihres Definitionsbereiches mit $SP^r(X) \times SP^s(X)$ (für alle r, s), also erst recht stetig in jeder kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches.

BEWEIS. Wir können $r \geq s$ annehmen und setzen $r = q + s$ ($q \geq 0$). Wir betrachten die Menge $X^{q,s}$ derjenigen Punkte $((a_1, a_2, \dots, a_{q+s}), (b_1, b_2, \dots, b_s))$ aus $X^{q+s} \times X^s$, für welche $b_i = a_{q+i}$ ist für alle $i \geq 0$. Das Bild von $X^{q,s}$ bei der Identifikationsabbildung $\sigma: X^{q+s} \times X^s \rightarrow SP^{q+s}(X) \times SP^s(X)$ ist gerade der Definitionsbereich von $a - b$. Die Abbildung

$$((a_1, a_2, \dots, a_{q+s}), (b_1, b_2, \dots, b_s)) \rightarrow [a_1, a_2, \dots, a_q]$$

von $X^{q,s}$ in $SP(X, 0)$ ist mit der Identifikationsabbildung $\sigma|_{X^{q,s}}$ verträglich. Durch Übergang zum Quotienten $\sigma(X^{q,s})$ erhält man also eine stetige Abbildung $\sigma(X^{q,s}) \rightarrow SP(X, 0)$ und zwar gerade die Differenzabbildung.

3.12. **KOROLLAR ZU 3.9 UND 3.11.** Es sei a ein fester Punkt aus $SP(X, 0)$. Die Abbildungen $x \rightarrow a + x$ ("Linksverschiebung") und $x \rightarrow a - x$ (falls definiert), $x \in SP(X, 0)$, sind stetig.

BEWEIS. Die Linksverschiebung $x \rightarrow a + x$ ist nach 3.9 stetig in allen $SP^q(X)$, also überhaupt stetig. Die Abbildung $x \rightarrow a - x$ ist stetig im Durchschnitt ihres Definitionsbereiches mit $SP^q(X)$. Dieser Durchschnitt ist abgeschlossen, wie aus dem Beweis von 3.11 hervorgeht ($X^{q,s}$ ist abgeschlossen und σ ist eine abgeschlossene Abbildung). Daher ist der ganze Definitionsbereich abgeschlossen in $SP(X, 0)$ und die Behauptung folgt aus 2.12.

3.13. Wir wollen in diesem Abschnitt einen Satz über das symmetrische Produkt der "Vereinigung" $(X' \vee X'', 0)$ zweier Räume $(X', 0')$ und $(X'', 0'')$ beweisen; dabei entsteht $X' \vee X''$ aus der topologischen Summe $X' + X''$ durch Identifizieren der Punkte $0'$ und $0''$ zum Punkt 0 . Wir definieren eine Abbildung $\rho: SP(X', 0') \times SP(X'', 0'') \rightarrow SP(X' \vee X'', 0)$ durch

$$(19) \quad \rho([x'_1, x'_2, \dots, x'_q], [x''_1, x''_2, \dots, x''_r]) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_q, x''_1, x''_2, \dots, x''_r].$$

Dabei fassen wir X' und X'' in der natürlichen Weise als Teilräume von $X' \vee X''$ auf. ρ ist offenbar eine eineindeutige Beziehung zwischen Bild- und Urbildmenge. Wie steht es mit der Stetigkeit? Wir zerlegen ρ in die Abbildungen

$$\begin{aligned} SP(X', 0') \times SP(X'', 0'') &\xrightarrow{i'^{\Sigma} \times i''^{\Sigma}} \\ &\xrightarrow{\alpha} SP(X' \vee X'', 0) \end{aligned}$$

($i': X' \rightarrow X' \vee X''$ und $i'': X'' \rightarrow X' \vee X''$ bezeichnen die natürlichen Injektionen) und erhalten aus 3.9 daß jedenfalls die Einschränkung von ρ auf $SP^q(X') \times SP^r(X'')$ stetig ist für jedes q, r . Wie bei 3.9 folgt hieraus die Stetigkeit von ρ selbst, falls X' und X'' lokal abzählbare Polyeder sind.

ρ^{-1} ist immer stetig. Dazu genügt es zu zeigen, daß die zusammengesetzte Abbildung

$$SP(X' \vee X'', 0) \xrightarrow{\rho^{-1}} SP(X', 0') \times SP(X'', 0'') \xrightarrow{p'} SP(X', 0')$$

stetig ist, in welcher p' die natürliche Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet (und entsprechend für p''). $p' \circ \rho^{-1}$ ist aber nichts anderes als die Abbildung r'^{Σ} , wenn $r': X' \vee X'' \rightarrow X'$ die natürliche Retraktion bedeutet ($r' \mid X' = \text{id}$, $r'(X'') = 0$). $p' \circ \rho^{-1}$ ist daher stetig nach 3.6.

3.14. SATZ. *Die Abbildung $\rho^{-1}: SP(X' \vee X'', 0) \rightarrow SP(X', 0') \times SP(X'', 0'')$ (s.(19)) ist stetig und eineindeutig. Ihre Umkehrung ist stetig in jeder Teilmenge $SP^q(X') \times SP^r(X'')$ und erst recht in jeder kompakten Teilmenge von $SP(X', 0') \times SP(X'', 0'')$. ρ^{-1} ist daher eine schwache Homotopieäquivalenz.*

Falls X' und X'' lokal abzählbare Polyeder sind, ist ρ ein Homöomorphismus.

Daß ρ^{-1} eine schwache Homotopieäquivalenz ist, d.h. Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert, ist richtig, weil ρ^{-1} (bzw. ρ) eine eindeutige Beziehung herstellt zwischen den stetigen Abbildungen kompakter Räume in $SP(X' \vee X'', 0)$ und denen in $SP(X', 0') \times SP(X'', 0'')$.

4. Mit dem symmetrischen Produkt verwandte Konstruktionen

4.1. Das symmetrische Produkt $SP(X, 0)$ ist eine Konstruktion derselben Art wie der "reduced product space" X_{∞} von JAMES (s.[5]): X_{∞} ist die mit einer geeigneten Topologie versehene freie Halbgruppe über X mit 0 als Einselement, $SP(X, 0)$ ist die abelsche freie Halbgruppe über X mit 0 als Nullelement. Es liegt nahe, andere algebraische Konstruktionen über der Menge $(X, 0)$ zu topologisieren. Wir werden zunächst die freie abelsche topologische Gruppe $AG(X, 0)$ über X mit 0 als Nullelement definieren² und anschließend noch andere Konstruktionen beschreiben.

Das "Argument" $(X, 0)$ setzen wir dabei stets als *abzählbaren simplizialen Komplex* mit 0 als Ecke voraus. Die Ergebnisse lassen sich (mit unwesentlichen Abschwächungen) auf nicht-abzählbare simpliziale Komplexe verallgemeinern; die Beweise werden aber unangenehm kompliziert, weil die Bildung topologischer Produkte von CW-Komplexen aus

² Vgl. A. MARKOFF, *Izvest. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 9 (1945), 3-64.

dem Bereich der CW-Komplexe herausführt.

4.2. DEFINITION. Wir bilden die Vereinigung $(X \vee X, 0)$ zweier Exemplare $(X, 0)$. τ bezeichne die Selbstabbildung von $X \vee X$, die in der Vertauschung der beiden Summanden besteht. Wir erzeugen in $SP(X \vee X, 0)$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(20) \quad x \sim x + x' + \tau^{\mathbb{Z}}(x') \quad x, x' \in SP(X \vee X, 0).$$

In Worten: Man darf zu $x \in SP(X \vee X, 0)$ einen Fixpunkt von $\tau^{\mathbb{Z}}$ hinzufügen (addieren) oder man darf einen Fixpunkt weglassen, d.h. einen Punkt, der die gleichen Komponenten im ersten und zweiten Summanden von $X \vee X$ hat. Insbesondere sind mit 0 gerade die Fixpunkte von $\tau^{\mathbb{Z}}$ äquivalent.

Durch Identifizieren äquivalenter Punkte entsteht aus $SP(X \vee X, 0)$ der Raum $AG(X, 0)$; wir bezeichnen mit $\gamma: SP(X \vee X, 0) \rightarrow AG(X, 0)$ die Identifikationsabbildung.

4.3. Der Raum $AG(X, 0)$ ist induktiver Limes der Folge von Teilräumen $\gamma(SP^q(X \vee X))$, $q = 1, 2, \dots$.

BEWEIS. Es sei $U \subset AG(X, 0)$ und $U \cap \gamma(SP^q(X \vee X))$ offen in $\gamma(SP^q(X \vee X))$ für alle q . Dann ist $\gamma^{-1}(U) \cap SP^q(X \vee X)$ offen in $SP^q(X \vee X)$, also $\gamma^{-1}(U)$ offen in $SP(X \vee X, 0)$ und schließlich U offen, weil γ eine Identifikationsabbildung ist.

4.4. Die Äquivalenzrelation (20) ist mit der Addition in $SP(X \vee X, 0)$ verträglich. Daher ist auch in $AG(X, 0)$ in natürlicher Weise eine (kommutative, assoziative) Addition erklärt, und γ ist ein Homomorphismus. $AG(X, 0)$ ist eine abelsche Gruppe: Ist $\gamma(x) \in AG(X, 0)$, dann ist $\gamma(x) + \gamma(\tau^{\mathbb{Z}}(x)) = \gamma(0)$, also $\gamma(\tau^{\mathbb{Z}}(x)) = -\gamma(x)$.

Fassen wir X als Teilraum von $X \vee X$ auf, etwa als den ersten Summanden ($i: X \subset X \vee X$), dann wird $SP(X, 0)$ vermöge $i^{\mathbb{Z}}$ zum Teilraum von $SP(X \vee X, 0)$ (s. 3.7). Bei γ wird dieser Teilraum eineindeutig abgebildet, und wir haben daher (jedenfalls für die zugrunde liegenden Mengen) die folgenden Inklusionen

$$(21) \quad X \subset SP(X, 0) \subset AG(X, 0).$$

Wir werden in 4.7 sehen, daß es sich dabei sogar um topologische Inklusionen handelt.

$AG(X, 0)$ ist nichts anderes als die "Quotientengruppe" der abelschen Halbgruppe $SP(X, 0)$. Der Punkt $0 \in X$ ist das Nullelement in $AG(X, 0)$, und die übrigen Punkte von X bilden eine Basis von $AG(X, 0)$. Die Elemente von $AG(X, 0)$ schreiben sich also eindeutig in der Form $\sum_{x \in X-0} n_x \cdot x$ mit ganzzahligen Koeffizienten n_x , von denen nur endlich viele von Null verschieden sind. $SP(X, 0)$ ist die durch $n_x \geq 0$ definierte

Unterhalbgruppe von $AG(X, 0)$.

Im Falle der 2-Sphäre (s. 3.2) ist $AG(X, 0)$ die Gruppe der von Null verschiedenen rationalen Funktionen über dem komplexen Zahlkörper; dabei sind zwei Funktionen zu identifizieren, wenn sie sich nur durch einen komplexen Faktor unterscheiden. Die "Addition" ist durch die gewöhnliche Multiplikation gegeben. Die Polynome definieren die Unterhalbgruppe $SP(S^2, \infty)$.

4.5. Eine stetige Abbildung $f: (X, 0) \rightarrow (X', 0')$ induziert wie im Falle des symmetrischen Produktes (s. 3.6) einen stetigen Homomorphismus

$$(22) \quad f^G: AG(X, 0) \rightarrow AG(X', 0'), \quad f^G(\sum n_x \cdot x) = \sum n_x \cdot f(x).$$

Es ist $f^G|SP(X, 0) = f^S$. Ferner: Der Homotopietyp von $AG(X, 0)$ hängt nur vom Homotopietyp von $(X, 0)$ ab.

4.6. SATZ. *Ist X ein abzählbarer simplizialer Komplex, dann kann $AG(X, 0)$ als CW-Komplex aufgefasst werden.*

Der Beweis verläuft sehr ähnlich wie der von MILNOR zu Lemma 3.2 in [7]. Wir werden uns daher kurz fassen und nur die wesentlichen Analogien herausstellen. Zu diesem Zwecke geben wir zunächst eine etwas andere Beschreibung von $AG(X, 0)$. Wir betrachten die Abbildung $\eta \circ \rho: SP(X, 0) \times SP(X, 0) \rightarrow AG(X, 0)$ (s. (19)) und ihre Einschränkung auf $SP^q(X) \times SP^r(X)$. Diese Einschränkungen definieren eine Abbildung $\bar{\eta}$ der topologischen Summe $S = \sum_{q,r} SP^q(X) \times SP^r(X)$ auf $AG(X, 0)$. Wir behaupten: $\bar{\eta}$ ist eine Identifikationsabbildung. Wir haben zu zeigen, daß jede Menge $U \subset AG(X, 0)$, deren Urbild bei $\bar{\eta}$ offen ist, selbst offen ist. Wenn $\bar{\eta}^{-1}(U)$ offen ist, dann ist $\eta^{-1}(U) \cap \rho(SP^q(X) \times SP^r(X))$ offen für jedes q, r . Nun ist $SP(X \vee X, 0)$ induktiver Limes der Doppelfolge von Teilräumen $\rho(SP^q(X) \times SP^r(X))$ ($SP(X \vee X, 0)$ ist zunächst induktiver Limes der Folge $SP^m(X \vee X)$; jedes $SP^m(X \vee X)$ ist aber in einem geeigneten $\rho(SP^q(X) \times SP^r(X))$ enthalten) und daher $\eta^{-1}(U)$ selbst offen. η ist aber eine Identifikationsabbildung, also U offen.

Nehmen wir in X^{q+r} die übliche simpliziale Zerlegung, so induziert diese eine Zerlegung des Quotienten $SP^q(X) \times SP^r(X)$, und die Identifikationsabbildung $X^{q+r} \rightarrow SP^q(X) \times SP^r(X)$ ist simplizial (vgl. 3.3). Verfahren wir so für jedes q, r , so erhalten wir eine simpliziale Zerlegung von S . Vorübergehend und um uns der MILNORSchen Bezeichnungsweise anzupassen, nennen wir einen Punkt

$$(23) \quad P = ([x'_1, x'_2, \dots, x'_q], [x'_1, x'_2, \dots, x'_r]) \in SP^q(X) \times SP^r(X) \subset S$$

ausgeartet, wenn bereits $[x'_1, x'_2, \dots, x'_q] \in SP^{q-1}(X)$ oder $[x'_1, x'_2, \dots, x'_r] \in SP^{r-1}(X)$ oder wenn einer der Punkte x'_i mit einem x'_k zusammenfällt, d.h. wenn es einen zu P äquivalenten Punkt in S gibt, der sich mit weni-

ger Komponenten x', x'' schreibt. *Äquivalent* bedeutet hier: gleiches Bild bei η . Es gilt

(A) Jeder Punkt P aus S ist zu genau einem nicht ausgearteten Punkt P' äquivalent. Man erhält den Punkt P' aus der Darstellung (23) von P , indem man alle "überflüssigen" Komponenten oder Komponentenpaare austreicht.

(B) Die Menge D der ausgearteten Punkt ist ein Teilkomplex von S . D setzt sich nämlich nach Definition aus Bildern von Teilkomplexen der X^{q+r} bei der Identifikationsabbildung $X^{q+r} \rightarrow SP^q(X) \times SP^r(X)$ zusammen (vgl. 3.3).

(C) Ist σ ein Simplex aus S , dann gibt es genau eine lineare Abbildung von σ auf ein nicht ausgeartetes Simplex $\sigma' \subset S$, die jeden Punkt in einen äquivalenten überführt. Dabei nennen wir ein Simplex *nicht ausgeartet*, wenn es nicht in D liegt, d.h. (s. (B)), wenn alle seine inneren Punkte nicht ausgeartet sind. Zum Beweis von (C) vgl. [7], S. 277.

Genau wie bei MILNOR [7], S. 276, ergibt sich nun aus den Eigenschaften (A), (B), (C) daß $AG(X, 0)$ ein CW-Komplex ist (mit der schwachen Topologie), wenn man als Zellen die Bilder der Inneren der nicht ausgearteten Simplexe von S bei der Abbildung $\bar{\eta}$ nimmt.

4.7. Die in 4.6 angegebene Zellenzerlegung von $AG(X, 0)$ hat, wie aus dem Beweis hervorgeht, die folgenden Eigenschaften: Die Identifikationsabbildung $\eta: SP(X \vee X, 0) \rightarrow AG(X, 0)$ ist eine Zellenabbildung, genauer: sie bildet Zellen der Zerlegung 3.5 von $SP(X \vee X, 0)$ auf Zellen von $AG(X, 0)$ ab. Insbesondere wird der Teilkomplex $SP(X, 0) \subset SP(X \vee X, 0)$ (s. 4.4) bei η topologisch abgebildet. Ist $f: (X, 0) \rightarrow (X', 0')$ eine simpliziale Abbildung, dann ist $f^c: AG(X, 0) \rightarrow AG(X', 0')$ eine Zellenabbildung (bildet Zellen auf Zellen ab). Ist A ein Teilkomplex von X , der 0 enthält und ist $i: A \subset X$ die Inklusion, dann wird $AG(A, 0)$ vermöge i^c zum Teilkomplex von $AG(X, 0)$.

4.8. SATZ. *Bezüglich der in 4.4 erklärten Addition ist $AG(X, 0)$ eine topologische Gruppe.*

BEWEIS. Wir betrachten das Diagramm

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} SP(X \vee X) \times SP(X \vee X) & \xrightarrow{\alpha} & SP(X \vee X) \\ \eta \times \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ AG(X) \times AG(X) & \xrightarrow{\alpha'} & AG(X), \end{array}$$

in welchem die horizontalen Abbildungen die Additionen bezeichnen. Die Einschränkung von $\eta \times \eta$ auf Produkte $\sigma \times \tau$ von Zellen von $SP(X \vee X)$ ist eine Identifikationsabbildung. Aus der Stetigkeit von α und

η folgt daher, daß $\alpha'|\sigma \times \tau$ stetig ist und daher α' selbst, denn $AG(X) \times AG(X)$ ist ein CW-Komplex (s. [5], Th. 1.9).

Die Bildung des Negativen in $AG(X)$ entsteht aus der stetigen Selbstabbildung $\tau^{\mathbb{Z}}$ von $SP(X \vee X)$ durch Übergang zum Quotienten und ist daher stetig.

4.9. *Die Gruppe $AG(X, 0; m)$.* Es sei X ein abzählbarer simplizialer Komplex mit 0 als Ecke. In der Gruppe $AG(X, 0)$ betrachten wir die Untergruppe $m \cdot AG(X, 0)$ der durch m teilbaren Elemente. $AG(X, 0; m)$ bezeichne den Quotienten $AG(X, 0)/m \cdot AG(X, 0)$ mit der Identifikations-topologie. Ähnlich wie in den vorstehenden Betrachtungen läßt sich beweisen: $AG(X, 0; m)$ verhält sich "funktoriell" gegenüber stetigen Abbildungen des Arguments $(X, 0)$; sein Homotopietyp hängt nur vom Homotopietyp von $(X, 0)$ ab (vgl. 3.6 oder 4.5). $AG(X, 0; m)$ kann als CW-Komplex aufgefaßt werden, so daß die Identifikationsabbildung $AG(X) \rightarrow AG(X; m)$ eine Zellenabbildung ist. Die Addition in $AG(X)$ geht in eine abelsche Addition in $AG(X; m)$ über; $AG(X; m)$ wird dadurch zum freien topologischen Z_m -Modul (Z_m = Ring der ganzen Zahlen mod m) über X mit 0 als Nullelement.

$AG(X, 0; m)$ kann auch als Quotient von $SP(X, 0)$ durch $m \cdot SP(X, 0)$ definiert werden.

5. Quasifaserungen und Faserungen der Funktoren

$SP(X)$, $AG(X)$, und $AG(X, m)$

5.1. $(X, 0)$ sei ein (hausdorffscher) topologischer Raum mit Grundpunkt 0, $A \subset X$ eine abgeschlossenen Teilmenge, die 0 enthält und $(X/A, \bar{0})$ der Raum, der aus X durch Identifizieren von A zu einem Punkt $\bar{0}$, dem Grundpunkt von X/A , entsteht. $p: (X, 0) \rightarrow (X/A, \bar{0})$ bezeichne die Identifikationsabbildung. Um uns der Vereinbarung zu Beginn des Kapitels anzupassen, setzen wir auch X/A als hausdorffsch voraus, was für reguläres X von selbst der Fall ist. Die Abbildung p induziert einen Homomorphismus $p^{\mathbb{Z}}: SP(X, 0) \rightarrow SP(X/A, \bar{0})$ des symmetrischen Produktes (s. 3.6). Unter gewissen Voraussetzungen ist dieser Homomorphismus eine Quasifaserung:

5.2. SATZ. Die Abbildung $p^{\mathbb{Z}}: SP(X, 0) \rightarrow SP(X/A, \bar{0})$ aus 5.1 ist eine Quasifaserung mit Faser $(p^{\mathbb{Z}})^{-1}(\bar{0}) = SP(A, 0)$, wenn folgendes gilt:

(a) A ist bogenweise zusammenhängend.

(b) Es gibt eine Deformation von X , die A in sich deformiert und eine offene Umgebung u von A in A zusammenzieht, d.h. eine Deformation $d_i: X \rightarrow X$ mit $d_0 = \text{id}$, $d_i(A) \subset A$, $d_i(u) \subset u$ und $d_1(u) \subset A$.

BEWEIS. Nach Satz 2.15 genügt es zu zeigen, daß $p_q: SP_q(X, 0) \rightarrow SP^q(X/A)$, die Einschränkung von p^z auf $SP_q(X, 0) = (p^z)^{-1}(SP^q(X/A))$ für jedes q eine Quasifaserung ist. Dies beweisen wir durch Induktion nach q .

Definieren wir $SP^0(X/A) = 0$, so ist $SP_0(X, 0) = SP(A, 0)$ (s. 3.7) und die Behauptung für $q = 0$ trivial. Wir setzen daher $q > 0$ voraus und nehmen an, die Behauptung sei für $q - 1$ bereits bewiesen. Wir wollen in $SP^q(X/A)$ ein System ausgezeichnete offener Mengen mit den Eigenschaften \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 des Satzes 2.2 konstruieren. Betrachten wir zunächst die Menge $V = SP^q(X/A) - SP^{q-1}(X/A)$. Ein Punkt $P \in p_q^{-1}(V)$ hat genau q Komponenten x_1, x_2, \dots, x_q in $X - A$, die anderen y_1, y_2, \dots, y_r in A . Die durch $P \rightarrow (p_q[x_1, x_2, \dots, x_q], [y_1, y_2, \dots, y_r])$ definierte Abbildung $\sigma: p_q^{-1}(V) \rightarrow V \times SP((A, 0))$ ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Bild- und Urbildmenge. Wir werden zeigen, daß σ und σ^{-1} auf kompakten Teilmengen stetig sind. Bezüglich der kompakten Teilmengen verhält sich σ also wie ein Homöomorphismus; daher ist V und jede Teilmenge von V ausgezeichnet bezüglich p_q .

Wir betrachten zunächst die folgenden Abbildungen

$$X \supset X - A \xrightarrow{p} X/A - \bar{0} \subset X/A.$$

Sie induzieren Homöomorphismen (s. 3.7)

$$\begin{aligned} SP^q(X) \supset SP^q(X - A) &\approx SP^q(X/A - \bar{0}) \\ &\approx SP^q(X/A) - SP^{q-1}(X/A) = V. \end{aligned}$$

Wir können also V vermöge der Abbildung p_q mit einem Teilraum von $SP^q(X)$ identifizieren. Nun zur Stetigkeit von σ . Wir haben zu zeigen, daß die Abbildungen $\sigma_1: P \rightarrow p_q[x_1, x_2, \dots, x_q]$ und $\sigma_2: P \rightarrow [y_1, y_2, \dots, y_r]$ auf kompakten Teilmengen stetig sind. Es ist aber $\sigma_1 = p_q$ und $\sigma_2(P) = P - p_q(P)$ (wir fassen $p_q(P)$ als Punkt von $SP^q(X)$ auf), und die Behauptung folgt aus 3.11.

Die Umkehrung σ^{-1} erhält man, wenn man die Addition $SP(X) \times SP(X) \rightarrow SP(X)$ im ersten Faktor auf V und im zweiten auf $SP(A)$ einschränkt.

Als zweites werden wir eine ausgezeichnete offene Menge $U \subset SP^q(X/A)$ angeben, die $SP^{q-1}(X/A)$ enthält. Damit ist der Beweis dann vollständig, denn U, V und $U \cap V$ bilden ein System ausgezeichneter Mengen, wie wir es konstruieren wollten. Die Menge U besteht aus denjenigen Punkten von $SP^q(X/A)$, die mindestens eine Komponente in der offenen Menge $\tilde{u} = p(u) \subset X/A$ haben. U ist auf $SP^{q-1}(X/A)$ zusammen-

ziehbar. In der Tat: Weil A bei d_i (als ganzes) fest bleibt, ist $\tilde{d}_i = p \circ d_i \circ p^{-1}$ eine Deformation von X/A , die $\bar{0}$ fest läßt und \tilde{u} in sich auf zusammenzieht. Die Einschränkung von \tilde{d}_i^{Σ} (s. 3.6) auf U zieht U auf $SP^{q-1}(X/A)$ zusammen. Ebenso zieht die Deformation \tilde{d}_i^{Σ} den Teilraum $p_q^{-1}(U)$ auf $p_q^{-1}(SP^{q-1}(X/A)) = SP_{q-1}(X, 0)$ zusammen, und es gilt $p_q \circ d = \tilde{d}_i^{\Sigma} \circ p_q$. Nach Hilfssatz 2.10 ist U ausgezeichnet bezüglich p_q , wenn $d^x: p_q^{-1}(x) \rightarrow p_q^{-1}(x')$ ($x' = \tilde{d}_i^{\Sigma}(x)$), die Einschränkung von \tilde{d}_i^{Σ} auf $p_q^{-1}(x)$ eine (schwache) Homotopieäquivalenz ist. Dazu sei x' derjenige Punkt aus $p_q^{-1}(x)$, der keine von Null verschiedene Komponente in A hat. Entsprechend sei $x^0 \in p_q^{-1}(x')$ definiert. Die Abbildungen $y \rightarrow x^0 + y$ und $y \rightarrow x' + y$ sind Homöomorphismen von $SP(A, 0)$ auf $p_q^{-1}(x)$ bzw. $p_q^{-1}(x')$ (s. 3.12). Mit diesen Homöomorphismen geht d^x in eine Selbstabbildung von $SP(A, 0)$ über, nämlich in $y \rightarrow y^0 + d_i^{\Sigma}(y)$ wobei $y^0 = d_i^{\Sigma}(x^0) - x^0$ ist (die Differenz $d_i^{\Sigma}(x^0) - x^0$ ist definiert, weil $d_i^{\Sigma}(x^0) \in p_q(x')$ ist). Diese Abbildung ist aber in die Identität von $SP(A, 0)$ deformierbar: Weil A bogenweise zusammenhängend ist, kann man y^0 durch einen Weg y^t in $SP(A, 0)$ mit 0 verbinden, und wir erhalten die gewünschte Deformation durch die Festsetzung $y \rightarrow y^t + d_{i-1}(y)$.

5.3. BEMERKUNG. Wenn man verlangt, daß es beliebig kleine Umgebungen u von A in X gibt, die sich wie in Satz 5.2 auf A zusammenziehen lassen (Beispiel: CW-Komplex X und Teilkomplex A), so kann man beweisen, daß jede offene Menge von $SP(X/A)$ ausgezeichnet ist bezüglich p^{Σ} , d.h. daß p^{Σ} eine Quasifaserung im Sinne von [3] ist. Es ist uns nicht bekannt, ob die etwas schwächere Voraussetzung in [3], Th. 1, bereits genügt. Th. 1, [3] ist also in diesem Sinne zu berichtigen.

5.4. SATZ. *Es sei X ein abzählbarer simplizialer Komplex, A ein Teilkomplex und 0 eine Ecke in A . $(X/A, \bar{0})$ und die Abbildung $p: (X, 0) \rightarrow (X/A, \bar{0})$ seien wie in 5.1 erklärt. Dann ist die Abbildung $p^G: AG(X, 0) \rightarrow AG(X/A, \bar{0})$ (s. 4.5) Projektion eines Hauptfaserbündels (im Sinne von [12]) mit Faser und Strukturgruppe $(p^G)^{-1}(\bar{0}) = AG(A, 0)$.*

BEWEIS. Als Zellenabbildung ist p^G (s. 4.7) eine Identifikationsabbildung, $AG(X/A) = AG(X)/AG(A)$, und es genügt zum Beweis, eine lokale Schnittfläche $s: U \rightarrow AG(X)$ (U eine Umgebung von $\bar{0}$ in $AG(X/A)$; $p^G \circ s = \text{id}$) zu konstruieren (s. [12], 7.4).

Wir konstruieren die Schnittfläche s sukzessive auf Umgebungen U_i von $\bar{0}$ in $AG^q(X/A)$. Dabei ist $AG^q(X/A) = \gamma(SP^q(X/A \vee X/A)$ (s. 4.2), d.i. die Menge derjenigen Punkte von $AG(X/A)$, die höchstens q von $\bar{0}$

verschiedene Komponenten haben. Für $q = 0$ setzen wir $AG^0(X/A) = \bar{0}$ und $s(\bar{0}) = 0$. Es sei nun $q > 0$ und $s = s_{q-1}$ in einer offenen Umgebung U_{q-1} von $\bar{0}$ in $AG^{q-1}(X/A)$ bereits definiert. Wir definieren eine Abbildung

$$\sigma_{q-1}: AG^q(X) \cap (p^G)^{-1}(U_{q-1}) \rightarrow (p^G)^{-1}(\bar{0}) = AG(A)$$

$$\text{durch } \sigma_{q-1}(x) = s_{q-1} \circ p^G(x) - x.$$

Die Menge $AG^q(X) \cap (p^G)^{-1}(U_{q-1})$ ist offen in $K = AG^q(X) \cap (p^G)^{-1}(AG^{q-1}(X/A))$ und $AG^q(X)$ sowie $(p^G)^{-1}(AG^{q-1}(X/A))$ sind Teilkomplexe von $AG(X)$ in der Zerlegung 4.6. Als Teilkomplex ist K Retrakt einer (offenen) Umgebung in $AG^q(X)$. Daher gibt es eine Erweiterung σ_q von σ_{q-1} auf eine offene Menge u_q in $AG^q(X)$ mit $u_q \cap K = AG^q(X) \cap (p^G)^{-1}(U_{q-1})$. Aus der letzten Gleichung ergibt sich $u_q = (p^G)^{-1}(p^G(u_q)) \cap AG^q(X)$, denn in $AG^q(X) - K$ ist die Abbildung p^G offenbar eineindeutig. Weil $p^G|_{AG^q(X)}$ eine Identifikationsabbildung ist, folgt hieraus, daß $U_q = p^G(u_q)$ offen ist in $AG^q(X/A)$.

Betrachten wir jetzt die Abbildung $x \rightarrow \sigma_q(x) + x$ von u_q in $AG(X)$. Sie stimmt in $u_q \cap K$ mit $s_{q-1} \circ p^G$ überein, und ist daher mit der Identifikationsabbildung p^G verträglich. Durch Übergang zum Quotienten liefert sie eine Abbildung $s_q: U_q \rightarrow AG(X)$ und zwar eine Erweiterung der Schnittfläche s_{q-1} auf U_q , q.e.d.

5.5. Im Falle, daß in 5.4 A Retrakt von X ist, läßt sich dieser Satz verschärfen und gleichzeitig einfacher beweisen. Sei nämlich $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion. Dann ist der Homomorphismus $r^G: AG(X) \rightarrow AG(A)$ ebenfalls eine Retraktion. Die Selbstabbildung $\mathcal{S}: x \rightarrow x - r^G(x)$ von $AG(X)$ ist mit der Identifikationsabbildung p^G verträglich, und es ist $p^G \circ \mathcal{S} = p^G$. Daher entsteht aus \mathcal{S} durch Übergang zum Quotienten eine stetige Abbildung $s: AG(X/A) \rightarrow AG(X)$ mit $p^G \circ s = \text{id}$. s ist also eine globale Schnittfläche der Abbildung p^G .

Hieraus folgt (s. [12], 8.3)

5.6. SATZ. Ist unter den Voraussetzungen des Satzes 5.4 A Retrakt von X und $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion, dann ist

$$(p^G, r^G): AG(X, 0) \rightarrow AG(X/A, \bar{0}) \times AG(A, 0)$$

ein Homöomorphismus, d.h. die Faserung p^G ist trivial.

5.7. SATZ. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.4 ist die durch p induzierte Abbildung $p^m: AG(X, 0; m) \rightarrow AG(X/A, \bar{0}; m)$ Projektion eines Hauptfaserbündels mit Strukturgruppe $(p^m)^{-1}(\bar{0}) = AG(A, 0; m)$. Ist A Retrakt von X , dann ist diese Faserung trivial.

Der Beweis verläuft wie der zu 5.4 und 5.6.

5.8. SATZ. Ist X ein abzählbarer simplizialer Komplex, dann ist die

Identifikationsabbildung $p: AG(X, 0) \rightarrow AG(X, 0; m)$ *Projektion eines Hauptfaserbündels mit Strukturgruppe* $p^{-1}(0) = m \cdot AG(X, 0) \cong AG(X, 0)$.

BEWEIS. Wie beim Beweis von 5.4 genügt es, eine lokale Schnittfläche der Abbildung p anzugeben. Die Konstruktion verläuft genau so wie in 5.4. Man hat nur die Abbildung p^q durch p zu ersetzen, die Mengen $AG^q(X)$ durch $SP^q(X) (\subset AG(X))$ und $AG^q(X/A)$ durch $p(SP^q(X))$. σ_{q-1} und σ_q werden dabei zu Abbildungen in $p^{-1}(0) = m \cdot AG(X) (\subset AG(X))$.

6. Die Homotopiegruppen der Funktoren

$SP(X, 0)$, $AG(X, 0)$, und $AG(X, 0; m)$

6.1. Wir wollen in diesem Paragraphen beweisen, daß für zusammenhängende CW-Komplexe X die Gruppen $\pi_q(SP(X))$ für $q > 0$ in natürlicher Weise mit den ganzzahligen Homologiegruppen $H_q(X, Z)$ identifiziert werden können; mit anderen Worten, daß die Funktoren $X \rightarrow \pi_q(SP(X))$ und $X \rightarrow H_q(X, Z)$ mit ihren induzierten Homomorphismen auf der Kategorie der zusammenhängenden CW-Komplexe und ihrer stetigen Abbildungen äquivalent sind. Wir stützen uns dabei auf die EILENBERG-STEENROD-sche Axiomatik der Homologietheorie. In der Tat erfüllen die Gruppen $h_q(X, A) = \pi_q(SP(X), SP(A)) \cong \pi_q(SP(X/A))$ die EILENBERG-STEENROD-schen Axiome, allerdings mit gewissen (unerheblichen) Abweichungen. Z.B. induzieren zunächst nur Abbildungen $f: X \rightarrow X'$ "mit Grundpunkt" Homomorphismen $h_q(X, 0) \rightarrow h_q(X', 0')$. Ferner ist A zusammenhängend vorauszusetzen (s. 5.2) und $h_0(X)$ ist zunächst nicht definiert. Der Eindeutigkeitssatz ([4]; III, 10.1) ist aber in leicht abgeänderter Form auch unter diesen Umständen gültig. Wir benutzen hier eine gegenüber [4] etwas modifizierte Axiomatik, die uns von D. PUPPE vorgeschlagen wurde und in welcher keine relativen Homologiegruppen auftreten.

Im wesentlichen der gleiche Beweis ergibt $\pi_q(AG(X)) \cong H_q(X, Z)$ und $\pi_q(AG(X; m)) \cong H_q(X, Z_m)$ für $q \geq 0$ auf der Kategorie der abzählbaren simplizialen Komplexe. Unter $\pi_q(AG(X))$ verstehen wir dabei die Gruppe der Bogenkomponenten von $AG(X)$; entsprechend ist $\pi_q(AG(X; m))$ erklärt. $H_0(X)$ bezeichnet die *reduzierte* 0-te Homologiegruppe von X .

Der Einfachheit halber setzen wir alle auftretenden topologischen Räume als CW-Komplexe voraus, obwohl diese Voraussetzung—zunächst jedenfalls—unnötig scharf ist. Alle Räume besitzen eine ausgezeichnete Nullzelle, den Grundpunkt. Alle Abbildungen sind Zellenabbildungen (d.h. sie führen für jedes $i \geq 0$ das i -dimensionale Gerüst in das i -dimensionale Gerüst über) und ordnen dem Grundpunkt den Grundpunkt des Bildraumes zu. Bei einer Homotopie hat das Bild des Grundpunktes stets fest zu bleiben. Dementsprechend sind Homotopieäquivalenz und

Homotopietyp definiert.

6.2. Wir erinnern an einige Konstruktionen, die mit einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ verknüpft sind. Zunächst der *Abbildungszylinder* Z_f : Er entsteht aus der topologischen Summe $X \times I + Y$, indem man jeden Punkt $(x, 1) \in X \times I$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert; außerdem wird noch die Strecke $0 \times I$ (0 der Grundpunkt von X) zu einem Punkt, dem Grundpunkt von Z_f identifiziert. X und Y können in natürlicher Weise als Teilräume von Z_f aufgefaßt werden: X entspricht dem Teilraum $X \times 0$, Y dem Teilraum Y von $X \times I + Y$. Die Abbildung f ist der Inklusion $X \subset Z_f$ homotopieäquivalent.

Identifiziert man den Teilraum $X \subset Z_f$ zu einem Punkt, so erhält man den *Abbildungskegel* C_f . Bei der Identifikationsabbildung $Z_f \rightarrow C_f$ wird der Teilraum Y topologisch abgebildet; $Pf: Y \rightarrow C_f$ bezeichne diese Inklusionsabbildung. Die Identifikationsabbildung $Z_f \rightarrow C_f$ und die Abbildung Pf sind homotopieäquivalent. Ist $X = Y$ und $f = \text{id}$, so ist $C_f = CX$ der *Kegel über X* .

Identifiziert man in C_f den Teilraum $Pf(Y) \approx Y$ zu einem Punkt, so erhält man die *Einhängung* EX des Raumes X . Sie hängt nicht von der Abbildung f sondern nur von X ab. EX entsteht auch aus $X \times I$ durch Identifizieren von $X \times 0 \cup X \times 1 \cup 0 \times I$ zu einem Punkt. Unter der Einhängung $Ef: EX \rightarrow EY$ der Abbildung f verstehen wir diejenige Abbildung, die aus $f \times \text{id}: X \times I \rightarrow Y \times I$ durch Übergang zu den Quotienten entsteht.

6.3. Wir beschreiben nun das modifizierte Axiomensystem der Homologietheorie.

Jedem topologischen Raum X (einer gewissen Kategorie) und jedem ganzzahligen q ist eine abelsche Gruppe $H_q(X)$ zugeordnet: jeder stetigen Abbildung (mit Grundpunkt!) $f: X \rightarrow Y$ und jedem q ein Homomorphismus $f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ und es gilt

1. $(\text{id})_* = \text{Identität}$.
2. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
3. Sind f und g homotope Abbildungen, dann ist $f_* = g_*$.
4. Es gibt eine Äquivalenz $\mathfrak{E}: H_q(X) \cong H_{q+1}(EX)$,

d.h. für jedes X einen Isomorphismus $\mathfrak{E}: H_q(X) \cong H_{q+1}(EX)$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ \mathfrak{E} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{E} \\ H_{q+1}(EX) & \xrightarrow{(Ef)_*} & H_{q+1}(EY) \end{array}$$

kommutativ ist für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$.

5. Für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist die Folge

$$H_q(X) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \xrightarrow{(Pf)_*} H_q(C_f)$$

(s. 6.2) exakt.

6. $H_q(S^1) = 0$ für $q \neq 1$ ($S^1 =$ Kreislinie)

6'. $H_q(S^0) = 0$ für $q \neq 0$ ($S^0 =$ zwei Punkte)

Das folgende letzte Axiom wird uns den Übergang von endlichen zu unendlichen Polyedern gestatten. Es sei X ein Raum und $\{X_\lambda\}$ das System der kompakten Unterräume, die den Grundpunkt enthalten; vermöge der Inklusionen ist $\{X_\lambda\}$ ein gerichtetes System. $i_\mu^\lambda: X_\lambda \rightarrow X_\mu$ und $i^\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ bezeichne die Inklusionen (für $X_\lambda \subset X_\mu$). Wir betrachten das gerichtete System der Gruppen $H_q(X_\lambda)$ und Homomorphismen $i_{\mu*}^\lambda: H_q(X_\lambda) \rightarrow H_q(X_\mu)$ und seine Grenzgruppe $\lim H_q(X_\lambda)$. i^λ induziert Homomorphismen $i_*^\lambda: H_q(X_\lambda) \rightarrow H_q(X)$ und durch Übergang zur Grenze einen Homomorphismus $i_*: \lim H_q(X_\lambda) \rightarrow H_q(X)$. Dann besagt das Axiom

7. $i_*: \lim H_q(X_\lambda) \cong H_q(X)$.

Die gewöhnlichen singulären (in der Dimension 0 reduzierten) Homologiegruppen genügen den vorstehenden Axiomen (etwa in der Kategorie aller CW-Komplexe und Zellenabbildungen). Für die Gruppen $\pi_q(SP(X))$ gilt

6.4. SATZ. *Die Gruppen*

$$h_q(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < 1 \\ \pi_q(SP(X)) & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

mit den induzierten Homomorphismen

$$f_*: h_q(X) \rightarrow h_q(Y) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < 1 \\ f_*^\Sigma & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

genügen den Axiomen 1. bis 7. in der Kategorie der zusammenhängenden CW-Komplexe.

BEWEIS. 1.–3. sind trivial.

4. Die Identifikationsabbildung $CX \rightarrow EX$ (s. 6.2) induziert nach Satz 5.2 eine Quasifaserung $p^\Sigma: SP(CX) \rightarrow SP(EX)$ mit der Faser $SP(X)$. Die Homotopiegruppen von $SP(CX)$ sind trivial, weil CX zusammenziehbar ist. Der Homomorphismus $\Delta: h_{q+1}(EX) \rightarrow h_q(X)$ der exakten Homotopiefolge der Quasifaserung p^Σ ist also ein Isomorphismus und wir setzen $\mathfrak{E} = \Delta^{-1}$. Die Kommutativität des Diagramms in 4. folgt aus Satz 1.8.

5. Bis auf Homotopieäquivalenz stimmt f mit der Injektion $X \subset Z_f$ in den Abbildungszylinder und Pf mit der Identifikationsabbildung $p: Z_f \rightarrow C_f$ überein. Die Folge in 5. wird damit zu einem Stück der exakten

Homotopiefolge der Quasifaserung $p^{\mathbb{Z}}: SP(Z_f) \rightarrow SP(C_f)$ (s. 5.2).

6. Als Repräsentant von S^1 wählen wir die zweifach punktierte komplexe Zahlenkugel $S^2 - 0 - \infty$. $SP^q(S^1)$ ist nach 3.2 nichts anderes als der Raum der von Null verschiedenen "homogenen" komplexen Polynome $\sum_{i=0}^q a_i z^i$ vom Grade höchstens q . $SP^q(S^1)$ besteht aus denjenigen Polynomen, die weder 0 noch ∞ als Nullstelle besitzen, d.h. für die $a_0 \neq 0$ und $a_q \neq 0$ ist. $SP^q(S^1)$ entsteht also aus dem komplexen projektiven Raum $PC(q) = SP(S^1)$ durch Herausnehmen der beiden Hyperebenen $a_0 = 0$ und $a_q = 0$; $SP^q(S^1)$ ist also vom Homotopietyp der Kreislinie und die Injektion $S^1 \rightarrow SP^q(S^1)$ ist eine Homotopieäquivalenz. Hieraus ergibt sich die folgende Präzisierung von 6.

6.5. SATZ. Die natürliche Injektion $S^1 \subset SP(S^1)$ der Kreislinie in ihr symmetrisches Produkt ist eine Homotopieäquivalenz.

Wir haben noch das Axiom 7. für die Gruppen $\pi_q(SP(X))$ zu verifizieren. Die Injektionen i_μ^λ resp. i^λ induzieren Injektionen $i_\mu^{\lambda, \mathbb{Z}}: SP(X_\lambda) \rightarrow SP(X_\mu)$ resp. $i^{\lambda, \mathbb{Z}}: SP(X_\lambda) \rightarrow SP(X)$ (s. 3.7); diese wiederum definieren eine Abbildung i des induktiven Limes $\lim_\lambda SP(X_\lambda)$ in $SP(X)$, die eineindeutig und stetig ist. Ihre Umkehrung ist unter Umständen nicht stetig, aber immerhin stetig in jeder kompakten Teilmenge. Dafür genügt es zu zeigen, daß jede kompakte Teilmenge K von $SP(X)$ bereits in einem $SP(X_\lambda)$ liegt. Sicher liegt sie bereits in einem $SP^q(X)$. Ihr Urbild K' bei der Identifikationsabbildung $X^q \rightarrow SP^q(X)$ ist selbst kompakt³ und also auch die Bildmengen K_v von K' bei den q natürlichen Projektionen $X^q \rightarrow X$. Daher ist $K' \subset (\bigcup_v K_v)^q$, also $K \subset SP^q(\bigcup_v K_v) \subset SP(\bigcup_v K_v)$. Die Abbildung i induziert also Isomorphismen der Homotopiegruppen, w.z.b.w.

Analog zu Satz 6.4 beweist man

6.6. SATZ. Die Gruppen $h'_q(X) = \pi_q(AG(X))$ ($= 0$ für $q < 0$) bzw. $h''_q(X) = \pi_q(AG(X; m))$ mit den induzierten Homomorphismen $f'_* = f_*^q$ bzw. $f''_* = f_*^m$ genügen den Axiomen 1. – 5., 6' und 7. in der Kategorie der abzählbaren simplizialen Komplexe X und simplizialen Abbildungen f .

Für die Nullsphäre S^0 ist $\pi_0(AG(S^0)) = AG(S^0) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_0(AG(S^0; m)) = AG(S^0; m) \cong \mathbb{Z}_m$.

6.7. FOLGERUNGEN AUS DEN AXIOMEN.

(1) Ist X ein Punkt, dann ist $H_q(X) = 0$ für alle q : Das Produkt von Injektion $X \rightarrow S^1$ und Retraktion $S^1 \rightarrow X$ ist die Identität von X . Daher folgt aus 6., daß $H_q(X) = 0$ ist für $q \neq 1$. Wegen $EX = X$ folgt aus 4., daß $H_1(X) = 0$ ist.

³ Ist \mathfrak{U} eine offene Überdeckung von K' , dann gibt es eine Verfeinerung \mathfrak{B} von \mathfrak{U} , die invariant ist bezüglich der Vertauschung der Faktoren in X^q . Weil K kompakt ist, enthält \mathfrak{B} eine endliche Teilüberdeckung, also auch \mathfrak{U} , d.h. K' ist kompakt.

$$(2) \quad i_1 + i_2: H_q(X_1) + H_q(X_2) \cong H_q(X_1 \vee X_2).$$

BEWEIS. Die Injektion $i_k: X_k \rightarrow X_1 \vee X_2$ bildet $H_q(X_k)$ monomorph in $H_q(X_1 \vee X_2)$ ab, weil die natürliche Retraktion $r_k: X_1 \vee X_2 \rightarrow X_k$ linksin-

vers zu i_k ist. In der Folge $X_1 \xrightarrow{i_1} X_1 \vee X_2 \xrightarrow{Pi_1} C_{i_1}$ (s. 6.2) können wir bis auf Homotopieäquivalenz C_{i_1} mit X_2 und Pi_1 mit r_2 identifizieren.

Aus der Exaktheit von $H_q(X_1) \xrightarrow{i_{1*}} H_q(X_1 \vee X_2) \xrightarrow{r_{2*}} H_q(X_2)$ folgt daher die Behauptung.

(3) Hat $g^n: S^1 \rightarrow S^1$ den Grad n , so ist $g_*^n(c) = n \cdot c$ für $c \in H_1(S^1)$.

BEWEIS. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, weil eine nulhomotope Abbildung nach (1) den trivialen Homomorphismus induziert.

$n = -1$: Sei $f: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ eine Abbildung, die den ersten Summanden mit dem Grad 1, den zweiten mit dem Grad -1 überdeckt. Dann ist $r_1 \circ f \simeq g^1 \simeq \text{id}$, $r_2 \circ f \simeq g^{-1}$, also $f_*(c) = i_{1*} \circ g_*^1(c) + i_{2*} \circ g_*^{-1}(c)$ (s. (2)). Die Abbildung $g: S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$ bilde jeden Summanden identisch ab. Dann ist $g \circ f \simeq 0$, also $(g \circ f)_*(c) = g_*^1(c) + g_*^{-1}(c) = 0$.

$n > 0$: Es sei $f: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$ (n Summanden) eine Abbildung, die jeden Summanden mit dem Grad $+1$ überdeckt, $g: S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1 \rightarrow S^1$ die Abbildung, die jeden Summanden identisch abbildet. Analog zum Fall $n = -1$ beweist man $(g \circ f)_*(c) = g_*^n(c) = n \cdot c$.

6.8. SATZ. Auf der Kategorie der zusammenhängenden CW-Komplexe mit Grundpunkt (bezw. der zusammenhängenden endlichen oder abzählbaren CW-Komplexe) seien zwei Funktoren $\{H_q(X); \mathfrak{E}; f_*\}$ und $\{H'_q(X); \mathfrak{E}'; f'_*\}$ definiert, die den Axiomen 1. – 7. genügen. Ferner sei ein Homomorphismus $j_1: H_1(S^1) \rightarrow H'_1(S^1)$ gegeben. Dann lässt sich j_1 in eindeutiger Weise zu einem System von Homomorphismen $j: H_q(X) \rightarrow H'_q(X)$ erweitern, für das gilt: Jedes Diagramm

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} & \mathfrak{E} & \\ H_q(X) & \longrightarrow & H_{q+1}(EX) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ H'_q(X) & \xrightarrow[\mathfrak{E}']{} & H'_{q+1}(EX) \end{array}$$

ist kommutativ; jedes Diagramm

$$(26) \quad \begin{array}{ccc} & f_* & \\ H_q(X) & \longrightarrow & H_q(Y) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ H'_q(X) & \xrightarrow[f'_*]{} & H'_q(Y) \end{array}$$

ist kommutativ.

Wenn j_1 ein Isomorphismus ist, dann sind auch alle j Isomorphismen.

BEWEIS. Wegen des Axioms 7. genügt es, den Satz für endliche CW-Komplexe zu beweisen. Diesen Beweis führen wir durch Induktion nach der Dimension n von X . Gleichzeitig beweisen wir, daß $H_q(X) = H'_q(X) = 0$ ist für $q > n$ oder $q \leq 0$.

Der Fall $n = 0$ ist trivial nach 6.7 Abschnitt (1). Jeder eindimensionale CW-Komplex ist vom Homotopietyp einer "Vereinigung" (mit gemeinsamem Punkt) von Kreislinien $\bigvee_{\lambda=1}^q S^1_\lambda$. Durch Induktion nach q folgt hier wegen 6.7 Abschnitt (2) und (3) die Behauptung.

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für CW-Komplexe von kleinerer Dimension als $n (> 1)$ bereits bewiesen. X sei ein n -dimensionaler CW-Komplex, X^{n-1} sein $(n-1)$ -dimensionales Gerüst. Bis auf Homotopieäquivalenz entsteht X aus X^{n-1} durch "Anheften" einer Vereinigung von Zellen $Z = \bigvee_{\lambda=1}^q Z_\lambda$. Es bezeichne $h: S \rightarrow X^{n-1}$ die anheftende Abbildung; dabei ist $S = \text{Rand}(Z) = \bigvee_{\lambda=1}^q S^{n-1}_\lambda$ eine Vereinigung von $(n-1)$ -Sphären (mit dem gemeinsamen Punkt als Grundpunkt) und $Z = CS$ ist der Kegel über S . Wir betrachten die Folge von Abbildungen

$$(27) \quad S \xrightarrow{h} X^{n-1} \xrightarrow{Ph} X = C_h \xrightarrow{p} ES \xrightarrow{Eh} EX^{n-1}$$

(vgl. 6.2). Dabei bezeichne ES die Einhängung von S , die aus X durch Identifizieren von X^{n-1} zu einem Punkt entsteht; p ist die Identifikationsabbildung. Es ist nicht schwer einzusehen (vgl. z.B. [10]), daß die Folge (27) bis auf Homotopieäquivalenz mit der Folge

$$S \xrightarrow{h} X^{n-1} \xrightarrow{Ph} C_h \xrightarrow{PPh} C_{Ph} \xrightarrow{PPPh} C_{PPPh}$$

übereinstimmt. Aus Axiom 5. folgt daher die Exaktheit der Folge

$$H_q(S) \xrightarrow{h_*} H_q(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{p_*} H_q(ES) \xrightarrow{(Eh)_*} H_q(EX^{n-1});$$

entsprechend für $H'(X)$. Wir ersetzen nun die Gruppen der Einhängung gemäß Axiom 4. und bilden das Diagramm

$$(28) \quad \begin{array}{ccccccc} H_q(S) & \xrightarrow{h_*} & H_q(X^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{\mathbb{G}^{-1} \circ p_*} & H_{q-1}(S) & \xrightarrow{h_*} & H_{q-1}(X^{n-1}) \\ j \downarrow & 1 & j \downarrow & 3 & J & \downarrow & 4 & j \downarrow & 2 & j \downarrow \\ H'_q(S) & \xrightarrow{h'_*} & H'_q(X^{n-1}) & \xrightarrow{i'_*} & H'_q(X) & \xrightarrow{\mathbb{G}'^{-1} \circ p'_*} & H'_{q-1}(S) & \xrightarrow{h'_*} & H'_{q-1}(X^{n-1}). \end{array}$$

Die durch 1 und 2 gekennzeichneten Rechtecke in (28) sind nach Voraussetzung kommutativ. Wir beweisen, daß es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus J gibt (im Diagramm durch \downarrow gekennzeichnet), für

welchen auch die Rechtecke 3 und 4 kommutativ sind.

X^{n-1} und S sind höchstens $(n-1)$ -dimensional; ihre Gruppen H_q resp. H'_q sind also null für $q \geq n$ (oder $q \leq 0$). Daher folgt aus der Exaktheit der Zeilen in (28), daß $H_q(X) = H'_q(X) = 0$ ist für $q > n$ oder $q \leq 0$. In diesen Dimensionen haben wir für J also einfach die Nullabbildung einzusetzen. Die Gruppen $H_{q-1}(S)$ und $H'_{q-1}(S)$ sind aber auch null für $q < n$. Das folgt aus dem Axiom 4., wenn man beachtet, daß S die $(n-2)$ -fache Einhängung einer Vereinigung von Kreislinien ist, für die nur die Gruppe $H_1(H_1)$ evtl. von null verschieden ist. $i_*: H_q(X^{n-1}) \rightarrow H_q(X)$ ist also epimorph für $q < n$, und es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $J: H_q(X) \rightarrow H'_q(X)$, mit dem 3 kommutativ wird: $J = i'_* \circ j \circ i_*^{-1}$ (man beachte, daß die Zeilen exakt sind und 1 kommutativ ist). 4 ist automatisch kommutativ, weil $\mathfrak{G}^{-1} \circ p_*$ und $\mathfrak{G}'^{-1} \circ p'_*$ null sind. Für $q = n$ ist $H_q(X^{n-1}) = H'_q(X^{n-1}) = 0$, also $\mathfrak{G}^{-1} \circ p_*$ und $\mathfrak{G}'^{-1} \circ p'_*$ monomorph, und J ist eindeutig als die Abbildung $(\mathfrak{G}'^{-1} \circ p'_*)^{-1} \circ j \circ (\mathfrak{G}^{-1} \circ p_*)$ festgelegt.

Wenn j_1 ein Isomorphismus war, dann auch J . Das folgt aus der Konstruktion oder auch aus (28) mit Hilfe des 5er-Lemmas.

Wir haben nun nachzuweisen, daß die Diagramme (25) und (26) für n -dimensionale CW-Komplexe kommutativ sind. Zunächst (26): $f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung zwischen höchstens n -dimensionalen CW-Komplexen. Nach Voraussetzung 6.1 ist $f(X^{n-1}) \subset Y^{n-1}$. Sei zunächst $q \neq n$. Dann induzieren die Injektionen $i: X^{n-1} \rightarrow X$ resp. $Y^{n-1} \rightarrow Y$ einen Homomorphismus des nach Voraussetzung kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_q(X^{n-1}) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y^{n-1}) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ H'_q(X^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H'_q(Y^{n-1}) \end{array}$$

auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ H'_q(X) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H'_q(Y) \end{array}$$

(Z.B. ist $i_*: H_q(X^{n-1}) \rightarrow H_q(X)$ epimorph, weil $H_{q-1}(S) = 0$ ist und wegen der Exaktheit der ersten Zeile von (28).) Man erhält, mit anderen Worten, einen "Würfel" von Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(Y^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(Y) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_q(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H'_q(Y^{n-1}) & \dashrightarrow & H'_q(Y) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H'_q(X^{n-1}) & \longrightarrow & H'_q(X)
 \end{array}$$

in welchem alle Seiten bis auf evtl. die rechte kommutativ sind und in welchem die Abbildungen von links nach rechts epimorph sind. Daher ist auch die rechte Seite kommutativ, d.i. das Diagramm (26).

Für den Fall $q = n$ bemerken wir, daß f wegen $f(X^{n-1}) \subset Y^{n-1}$ eine stetige Abbildung $\bar{f}: ES_X = X/X^{n-1} \rightarrow Y/Y^{n-1} = ES_Y$ induziert; dabei entsteht X/X^{n-1} aus X durch Identifizieren von X^{n-1} zu einem Punkt; entsprechend für Y/Y^{n-1} . \bar{f} ist (bis auf Homotopie) Einhängung $E\varphi$ einer (bis auf Homotopie) eindeutig bestimmten Abbildung $\varphi: S_X \rightarrow S_Y$. Die Identifikationsabbildungen $p: X \rightarrow ES_X$ bzw. $Y \rightarrow ES_Y$ zusammen mit \mathfrak{E}^{-1} definieren daher einen Monomorphismus des Diagramms (26), nämlich

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y) \\
 j \downarrow & & \downarrow j \\
 H'_n(X) & \xrightarrow{f'_n} & H'_n(Y)
 \end{array}$$

in das nach Voraussetzung kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_{n-1}(S_X) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_{n-1}(S_Y) \\
 j \downarrow & & \downarrow j \\
 H'_{n-1}(S_X) & \xrightarrow{\varphi'_*} & H'_{n-1}(S_Y)
 \end{array}$$

(Z.B. ist $\mathfrak{E}^{-1} \circ p_*: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(S_X)$ monomorph, weil $H_n(X^{n-1}) = 0$ ist und wegen der Exaktheit der ersten Zeile von (28)). Daher ist (26) auch für $q = n$ kommutativ. Der Beweis für die Kommutativität von (25) verläuft ganz entsprechend.

Analog wie 6.8 beweist man den

6.9. SATZ. *Auf der Kategorie der (endlichen, abzählbaren, beliebigen) simplizialen Komplexe und simplizialen Abbildungen seien zwei Funktoren $\{H_q(X); \mathfrak{E}; f_*\}$ und $\{H'_q(X); \mathfrak{E}'; f'_*\}$ definiert, die den Axiomen 1. – 5., 6' und 7. genügen. Ferner sei ein Homomorphismus $j_0: H_0(S^0) \rightarrow H'_0(S^0)$ gegeben. j_0 lässt sich in eindeutiger Weise zu einem System von Homomor-*

phismen $j: H_q(X) \rightarrow H_q(X)$ erweitern (einer Transformation), für das alle Diagramme (25) und (26) kommutativ sind.

Ist j_0 ein Isomorphismus, dann auch alle j .

Eine Anwendung der vorstehenden Sätze ergibt nun das Hauptresultat dieser Arbeit.

6.10. SATZ. I. Es gibt natürliche Isomorphismen $j: H_q(X, Z) \rightarrow \pi_q(SP(X))$, für $q > 0$ (d.h. solche, für die die Diagramme (25) und (26) kommutativ sind) bzw. $j': H_q(Y, Z) \rightarrow \pi_q(AG(Y))$ und $j'': H_q(Y, Z_m) \rightarrow \pi_q(AG(Y; m))$, $q \geq 0$ für zusammenhängende CW-Komplexe X bzw. abzählbare simpliziale Komplexe Y . Dabei verstehen wir unter $H_0(Y, G)$ die 0-te Homologiegruppe von Y modulo dem Grundpunkt (und mit Koeffizienten in G .) Diese Isomorphismen sind eindeutig bestimmt, wenn man folgendes verlangt: $j: \pi_1(S^1) = H_1(S^1, Z) \rightarrow \pi_1(SP(S^1))$ ist der durch die Inklusion $S^1 \subset SP(S^1)$ induzierte Isomorphismus. Bei $j': H_0(S^0, Z) \rightarrow \pi_0(AG(S^0))$ geht der vom Grundpunkt verschiedene Punkt y aus S^0 (aufgefasst als Element von $H_0(S^0)$) in den Punkt $y \in AG(S^0) = \pi_0(AG(S^0))$ über; entsprechendes gilt für $j'': H_0(S^0, Z_m) \rightarrow \pi_0(AG(S^0; m))$.

II. Im Diagramm

$$(29) \quad \begin{array}{ccc} & i & \\ \pi_r(X) & \longrightarrow & \pi_r(SP(X)) \\ h \downarrow & \nearrow j & \downarrow h' \\ H_r(X) & \longrightarrow & H_r(SP(X)), \\ & i_* & \end{array}$$

in welchem h, h' die Hurewiczschen Homomorphismen sind, i, i_* durch die Inklusion induziert werden und j den Isomorphismus aus I bezeichnet, gilt stets $i = j \circ h$, aber im allgemeinen nicht $i_* = h' \circ j$. Ein entsprechender Satz gilt für $AG(X)$ und $AG(X; m)$.

III. Die Inklusion $SP(X) \subset AG(X)$ (s. 4.4) induziert Isomorphismen der Homotopiegruppen, wenn X ein zusammenhängender abzählbarer simplizialer Komplex ist.

IV. Bei den Isomorphismen j und j' des Abschnittes I geht die zur Koeffizientenfolge $0 \rightarrow Z \xrightarrow{m} Z \rightarrow Z_m \rightarrow 0$ gehörige exakte Homologiefolge

$$\rightarrow H_q(X, Z) \xrightarrow{m} H_q(X, Z) \xrightarrow{r} H_q(X, Z_m) \xrightarrow{\partial_m} H_{q-1}(X, Z) \rightarrow$$

in die exakte Homotopiefolge der Faserung $AG(X) \rightarrow AG(X)/m \cdot AG(X) = AG(X; m)$ über.

BEWEIS. Der Beweis zu I folgt unmittelbar aus den Sätzen 6.4 und

6.8 bzw. 6.6 und 6.9.

II. Wir beweisen die Gleichung $i = j \circ h$ zunächst für $X = S^n$ und $r = n$ durch Induktion nach n ; im Falle $n = 1$ ist sie nach Definition von j richtig. Betrachten wir nun die $(n + 1)$ -dimensionale Vollkugel V^{n+1} ($n > 1$). Durch Identifizieren ihres Randes S^n zu einem Punkt entsteht S^{n+1} , und diese Identifikation induziert eine Quasifaserung $SP(V^{n+1}) \rightarrow SP(S^{n+1})$ (s. 5.2). Der Homomorphismus $\Delta: \pi_{n+1}(SP(S^{n+1})) \rightarrow \pi_n(SP(S^n))$ der exakten Homotopiefolge dieser Quasifaserung ist ein Isomorphismus, und in $\pi_{n+1}(S^{n+1})$ gilt $i \circ (h^{-1} \circ \mathfrak{E}^{-1} \circ h) = \Delta \circ i$, also $i \circ h^{-1} = \Delta \circ i \circ h^{-1} \circ \mathfrak{E}$ in $H_n(S^n, \mathbb{Z})$. Die Kommutativität von (25) besagt $j = \Delta \circ j \circ \mathfrak{E}$ in $H_n(S^n, \mathbb{Z})$. Die linken Seiten dieser beiden Beziehungen sind nach Induktionsvoraussetzung gleich; daher ergeben die rechten Seiten die Behauptung für $n + 1$.

Allgemein sei $\alpha \in \pi_r(X)$ und $f: S^r \rightarrow X$ ein Repräsentant von α . Dann sind die beiden Diagramme kommutativ, die man erhält, wenn man in

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(S^r) & \longrightarrow & \pi_r(SP(S^r)) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_*^\Sigma \\ \pi_r(X) & \longrightarrow & \pi_r(SP(X)) \end{array}$$

für die horizontalen Abbildungen einmal i , das andere Mal $j \circ h$ einsetzt. Daher ist $i(\alpha) = i \circ f_*(1) = f_*^\Sigma \circ i(1) = f_*^\Sigma \circ j \circ h(1) = j \circ h \circ f_*(1) = j \circ h(\alpha)$.

Die Gleichung $i_* = h' \circ j$ ist sicher richtig für sphärische Homologieklassen $c \in H_r(X, \mathbb{Z})$. Ist nämlich $c = h(\alpha)$, dann folgt $i_*(c) = i^* \circ h(\alpha) = h' \circ i(\alpha) = h' \circ j \circ h(\alpha) = h' \circ j(c)$. Das einfachste Beispiel einer nicht-sphärischen Homologiekategorie ist die Grundklasse des Torus $T = S^1 \times S^1$; wir bezeichnen sie selbst mit T . Die Elemente u und v seien eine Basis der eindimensionalen Kohomologiegruppe von T . Da $H_1(T, \mathbb{Z})$ bei der Inklusion $i: T \rightarrow SP(T)$ isomorph abgebildet wird, gibt es eindimensionale Kohomologieklassen u^* und v^* in $SP(T)$ mit $i^*(u^*) = u$, $i^*(v^*) = v$. Das Kup-Produkt $u^* \smile v^*$ hat auf $i_*(T)$ den Wert $\langle u^* \smile v^*, i_*(T) \rangle = \langle i^*(u^*) \smile i^*(v^*), T \rangle = \langle u \smile v, T \rangle = \pm 1$. Die Klasse $i_*(T)$ ist also nicht in $h'(\pi_2(SP(T)))$ enthalten, weil sonst dieses Kup-Produkt den Wert Null haben müßte.

III. Die Behauptung folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 6.8, wenn wir zeigen können, daß die Injektion $SP(S^1) \rightarrow AG(S^1)$ Isomorphismen der Fundamentalgruppe induziert. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{i_1} & SP(I) & \xrightarrow{i_2} & AG(I) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_3 \\ S^1 & \xrightarrow{i_3} & SP(S^1) & \xrightarrow{i_4} & AG(S^1) \end{array}$$

S^1 entsteht aus I durch Identifizieren der Endpunkte S^0 . Die Abbildungen p_k sind durch diese Identifikation definiert, die Abbildungen i_k sind die Inklusionen. $i_2 \circ i_1|S^0$ repräsentiert ein erzeugendes Element von $\pi_0(AG(S^0)) \cong Z$. Aus der exakten Homotopiefolge der Faserung p_3 folgt daher, daß $i_4 \circ i_3$ ein erzeugendes Element von $\pi_1(AG(S^1)) \cong Z$ repräsentiert (denn $AG(I)$ ist asphärisch). Die Inklusion i_3 repräsentiert aber ein erzeugendes Element von $\pi_1(SP(S^1)) \cong Z$ (s. 6.5). Daher induziert i_4 einen Isomorphismus wie behauptet.

IV. Wir haben zu zeigen, daß alle Rechtecke im Diagramm

$$(30) \quad \begin{array}{ccccccc} H_{q+1}(X, Z_m) & \xrightarrow{\partial_m} & H_q(X, Z) & \xrightarrow{m} & H_q(X, Z) & \xrightarrow{r} & H_q(X, Z_m) \\ \downarrow j'' & 1 & \downarrow j' & 2 & \downarrow j' & 3 & \downarrow j'' \\ \pi_{q+1}(AG(X; m)) & \xrightarrow{\Delta_m} & \pi_q(AG(X)) & \xrightarrow{m} & \pi_q(AG(X)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_q(AG(X; m)) \end{array}$$

kommutativ sind.

Zunächst das Rechteck 3. Die Homomorphismen $p_* \circ j'$ und $j'' \circ r$ definieren Transformationen der Homologie $H(X, Z)$ in die Homologie $H(X) = \pi(AG(X; m))$. Da sie, wie leicht einzusehen, für $X = S^0$ übereinstimmen, folgt aus Satz 6.9, daß sie für alle (abzählbar) triangulierbaren X übereinstimmen. Genau so folgt die Kommutativität von 2.

Die Kommutativität von 1 beweisen wir zunächst in einem Spezialfall. Es sei S^q die q -Sphäre ($q > 0$), $f: S^q \rightarrow S^q$ eine Abbildung vom Grade m und $X = C_f$ der zugehörige Abbildungskegel (s. 6.2). X entsteht also aus S^q durch Anheften einer $(q+1)$ -dimensionalen Vollkugel vermöge einer Abbildung ihrer Randsphäre vom Grade m ; es sei $Pf: S^q \subset X$ die Inklusionsabbildung. Durch Identifizieren des Teilraums $S^q \subset X$ zu einem Punkt entsteht aus X die Sphäre $ES^q = S^{q+1}$; wir bezeichnen mit $\rho: X \rightarrow S^{q+1}$ die Identifikationsabbildung. Die Orientierungen von X , S^q und S^{q+1} seien so gewählt, daß $\rho(X) = +S^{q+1}$ und $\text{Rand}(X) = +m \cdot S^q$. Bezeichnet u die $(q+1)$ -dimensionale Grundhomologiekategorie mod m von X und s die durch S^q repräsentierte ganzzahlige Homologiekategorie von X , so ist offenbar $\partial_m(u) = s$.

Wir definieren eine Abbildung $\mu: S^q \rightarrow AG(S^q)$ durch $x \rightarrow m \cdot x$. Sie repräsentiert das Element $m \cdot \alpha' \in \pi_q(AG(S^q))$, wenn α' die Homotopieklasse der Inklusion $i: S^q \rightarrow AG(S^q)$ bezeichnet. Dasselbe gilt für $i \circ f$, denn f ist vom Grade m . Fassen wir $AG(S^q)$ vermöge $(Pf)^q$ als Teilraum von $AG(X)$ auf, so können wir also die Abbildung μ im Teilraum $AG(S^q)$ in $i \circ f$ deformieren und anschließend $i \circ f$ im ganzen Raum $AG(X)$ in die konstante Abbildung (denn $(Pf) \circ f$ ist offenbar nullhomotop). Wir erhal-

ten auf diese Weise eine Abbildung D einer $(q + 1)$ -dimensionalen Vollkugel V (mit dem Rand S^q) in $AG(X)$ mit den folgenden Eigenschaften: (i) $D|S^q = \mu$, (ii) $p \circ D: V \rightarrow AG(X, m)$ bildet S^q in einen Punkt ab und repräsentiert ein erzeugendes Element $a \in \pi_{q+1}(AG(X; m))$; bezeichnet $\rho^m: AG(X; m) \rightarrow AG(S^{q+1}; m)$ die durch ρ induzierte Abbildung, dann ist $a' = \rho_*^m(a) \in \pi_{q+1}(AG(S^{q+1}))$ die Homotopieklasse der Inklusion $S^{q+1} \rightarrow AG(S^{q+1}; m)$.

Aus (i) folgt $\Delta_m(a) = \alpha =$ Homotopieklasse der Inklusion $S^q \rightarrow AG(X)$. Nach II ist $j'(s) = \alpha$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $j''(u) = a$ ist. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$(31) \quad \begin{array}{ccc} H_{q+1}(X, Z_m) & \xrightarrow{\rho_*} & H_{q+1}(S^{q+1}, Z_m) \\ j'' \downarrow & & \downarrow j'' \\ \pi_{q+1}(AG(X; m)) & \xrightarrow{\rho_*^m} & \pi_{q+1}(AG(S^{q+1}; m)) . \end{array}$$

Alle Abbildungen sind Isomorphismen. Bezeichnen wir mit u' die Grundhomotopieklasse mod m von S^{q+1} , dann ist (nach II) $j''(u') = a'$. Ferner ist $\rho_*(u) = u'$ und wie wir oben gesehen haben $\rho_*^m(a) = a'$. Daher folgt $j''(u) = a$ aus der Kommutativität von (31).

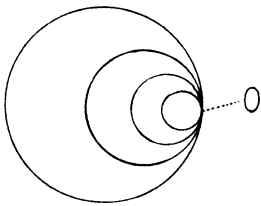
Es sei nun X ein beliebiger (abzählbarer) simplizialer Komplex. Durch Identifizieren seines $(q - 1)$ -dimensionalen Gerüsts X^{q-1} zu einem Punkt entstehe der Raum $Y = X/X^{q-1}$. Die Identifikationsabbildung $X \rightarrow Y$ induziert Monomorphismen der Homologiegruppen $H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ für $r \geq q$, d.h. die Homologiegruppen von X werden zu Untergruppen der Homologiegruppen von Y , so daß es genügt, die Behauptung des Satzes für Y zu beweisen. Im Falle $q = 1$ können wir außerdem annehmen, daß $\pi_1(Y)$ abelsch ist; andernfalls heften wir 2-Zellen an, die die Fundamentalgruppe abelsch machen, aber keine Relationen in den Homologiegruppen hervorrufen.

Es sei z ein $(q + 1)$ -dimensionaler Zykel mod m und $v \in H_{q+1}(Y, Z_m)$ seine Homotopieklasse. z kann als ein Element von $\pi_{q+1}(Y^{q+1}, Y^q)$ aufgefaßt werden und wird als solches durch eine Abbildung $\Phi: (V, S^q) \rightarrow (Y^{q+1}, Y^q)$ einer $(q + 1)$ -dimensionalen Vollkugel repräsentiert mit $\Phi(\partial V = S^q) \subset Y^q$. Da z ein Zykel mod m ist, läßt sich $\Phi|S^q$ bis auf Homotopie = Homotopie in der Form $\psi \circ f$ schreiben, wo $f: S^q \rightarrow S^q$ den Grad m hat. Die Abbildung Φ läßt sich daher bis auf Homotopie folgendermaßen faktorisieren

$$\begin{array}{ccc} & (C, S^q) & \\ \nearrow & & \nwarrow \Psi \\ (V, S^q) & \xrightarrow{\Phi} & (Y^{q+1}, Y^q) . \end{array}$$

Dabei ist C_f wie oben definiert, und es ist $\Psi_*(u) = v$. Wegen $j' \circ \partial_m(u) = \Delta_m \circ j''(u)$ folgt hieraus $j' \circ \partial_m(v) = j' \circ \partial_m \circ \Psi_*(u) = \Psi_*^G \circ j' \circ \partial_m(u) = \Psi_*^G \circ \Delta_m \circ j''(u) = \Delta_m \circ j''(v)$, was zu beweisen war.

6.11. Wir geben zum Schluß dieses Paragraphen ein Beispiel eines topologischen Raumes, dessen Homologiegruppen nicht mit den Homotopiegruppen seines symmetrischen Produktes übereinstimmen. Es sei Y



eine Folge von Kreisen in der Ebene, deren Radius gegen Null konvergiert und die nur den Nullpunkt 0 der Ebene gemeinsam haben (s. Figur). Durch Projektion von einem Punkt des 3-dimensionalen Raumes außerhalb der Ebene erhalten wir den Kegel X über Y . Bilden wir die Vereinigung $X \vee X$ mit 0 als gemeinsamem Punkt, dann ist

$H_i(X \vee X, Z)$ eine unendliche Gruppe (s. H. B. GRIFFITHS, Quart. Jour. of Math, Oxford, (2) vol. V, 1954, S. 77), während $H_i(X, Z)$ trivial ist. Nach 3.14 ist aber $\pi_1(SP(X \vee X)) \cong \pi_1(SP(X)) + \pi_1(SP(X))$. Daher ist $\pi_1(SP(X, 0)) \not\cong H_1(X, Z)$ oder $\pi_1(SP(X \vee X, 0)) \not\cong H_1(X \vee X, Z)$.

7. Ein Satz von J. C. MOORE ; Homomorphismen symmetrischer Produkte

Es handelt sich um den folgenden

7.1. SATZ (J. C. MOORE [1], 19.6). Ist H ein (bogenweise zusammenhängender) topologischer Raum mit einer kommutativen, assoziativen Addition $H \times H \rightarrow H$ mit Nullelement, die stetig ist auf kompakten Teilmengen von $H \times H$, dann verschwinden alle k -Invarianten des Raumes H .

BEWEIS. Es sei Y_r ein zusammenhängender CW-Komplex mit

$$H_i(Y_r, Z) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq r, i \neq 0 \\ \pi_r(H) & \text{für } i = r. \end{cases}$$

Ein solcher "Moorescher Raum" (s. [8]) kann folgendermaßen erhalten werden: Man stelle die Gruppe $\pi_r(H)$ als Faktorgruppe F/R einer freien abelschen Gruppe F dar. $\{\alpha_i\}$ sei eine Basis von F , $\{\rho_r(\alpha_i)\}$ eine Basis von R . Jedem α_i ordne man eine r -Sphäre S_i^r zu und bilde ihre Vereinigung $S = \bigvee S_i^r$ mit dem gemeinsamen Punkt 0_r . Es ist $H_r(S, Z) = F$ mit $\{S_i^r\}$ als Basis. Jeder Relation $\rho_r(\alpha_i)$ entsprechend hefte man nun eine $(q+1)$ -Zelle an S an, die das Element $\rho_r(S_i^r)$ annulliert. Der so erhaltene Raum Y_r hat dann die gewünschten Homologiegruppen.

Es ist klar, daß man eine stetige Abbildung $\varphi^r: Y_r \rightarrow H$ finden kann, die die Gruppe $H_r(Y_r) = \pi_r(Y_r)$ (bezw. $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ für $r = 1$) isomorph auf $\pi_r(H)$ abbildet (und den Grundpunkt 0_r in $0 \in H$ überführt). Die Abbildung

φ^r induziert einen auf kompakten Teilmengen stetigen Homomorphismus $\Phi^r: SP(Y_r) \rightarrow H$, nämlich $\Phi^r(\sum_{\nu} y_{\nu}) = \sum_{\nu} \varphi^r(y_{\nu})$. Aus 6.10 folgt, daß $SP(Y_r)$ ein EILENBERG-MACLANEScher Komplex $K(\pi_r(H), r)$ ist und daß $\Phi_*^r: \pi_r(SP(Y_r)) \cong \pi_r(H)$.

Wir bilden nun das "schwache" Produkt $K = \prod_{r=1}^{\infty} SP(Y_r) = \prod_{r=1}^{\infty} K(\pi_r(H), r)$. Die Punkte in K sind die Folgen $\{y_r\}, y_r \in SP(Y_r)$, in denen fast alle Glieder y_r mit 0_r übereinstimmen. Als topologischer Raum ist K induktiver Limes der Folge von Räumen $\prod_{r=1}^{\nu} SP(Y_r)$, $\nu = 1, 2, \dots$. Wir definieren eine Abbildung $\Phi: K \rightarrow H$ durch $\Phi\{y_r\} = \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^r(y_r)$. Φ ist ein auf kompakten Teilmengen stetiger Homomorphismus des Monoids K in das Monoid H , der Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert. Daraus folgt die Behauptung. Wenn die Homotopiegruppen von H abzählbar sind, dann kann Y_r abzählbar und die Abbildung Φ stetig gewählt werden.

Der Raum K stimmt im wesentlichen mit dem unendlichen symmetrischen Produkt von $\bigvee_{r=1}^{\infty} Y_r$ überein (vgl. 3.14). Der folgende Satz gibt eine Verallgemeinerung der Abbildung Φ für den Fall eines beliebigen $SP(X)$.

7.2. SATZ. *Es sei H ein Raum mit einer abelschen Addition wie in 7.1. Ferner sei X ein abzählbares zusammenhängendes Polyeder und $h_i: \pi_i(SP(X)) \rightarrow \pi_i(H)$, $i > 0$, eine Folge von Homomorphismen. Dann gibt es einen stetigen Homomorphismus $F: SP(X) \rightarrow H$, der $h = \{h_i\}$ induziert, d.h. $F_* = \{h_i\}$.*

7.3. SATZ. *Es seien X und Y abzählbare zusammenhängende Polyeder und $F: SP(X) \rightarrow SP(Y)$ ein Homomorphismus, der Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert. Dann gibt es einen stetigen Homomorphismus $F^-: SP(Y) \rightarrow SP(X)$, so daß $F \circ F^- \cong \text{id}$, $F^- \circ F \cong \text{id}$.*

Das Zeichen \cong bedeutet: Es gibt eine Deformation $F_t: SP(X) \rightarrow SP(X)$, $t \in I$, von $F^- \circ F$ in die Identität von $SP(X)$ (entsprechend für $F \circ F^-$), in welcher jedes F_t ein Homomorphismus ist.

7.4. KOROLLAR ZU 7.2 UND 7.3. *Es seien X und Y zusammenhängende abzählbare Polyeder mit isomorphen Homologiegruppen, $\varphi: H_i(X, Z) \cong H_i(Y, Z)$, $i > 0$. Dann gibt es stetige Homomorphismen $F: SP(X) \rightarrow SP(Y)$ und $F^-: SP(Y) \rightarrow SP(X)$, so daß $F \circ F^- \cong \text{id}$ und $F^- \circ F \cong \text{id}$ und so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_i(X, Z) & \xrightarrow{\varphi} & H_i(Y, Z) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ \pi_i(SP(X)) & \xrightarrow{F'_*} & \pi_i(SP(Y)) \end{array}$$

kommutativ ist.

BEWEIS VON 7.3. Da F Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert, ist F eine Homotopieäquivalenz, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $F': SP(Y) \rightarrow SP(X)$, so daß $F \circ F' \simeq \text{id}$ (\simeq bedeutet gewöhnliche Homotopie); $F'_t: SP(Y) \rightarrow SP(X)$ sei eine Deformation von $F \circ F'$ in die Identität von $SP(Y)$. Wir definieren nun $F^-: SP(Y) \rightarrow SP(X)$ als den eindeutig bestimmten Homomorphismus der auf dem Teilraum Y von $SP(Y)$ mit F' übereinstimmt, $F^-|Y = F'|Y$; ebenso $F'_t: SP(Y) \rightarrow SP(X)$ als den eindeutig bestimmten Homomorphismus mit $F'_t|Y = F'_t|Y$. Dann ist F_t , $t \in I$, eine Homotopie $F \circ F^- \simeq \text{id}$ (Beweis der Stetigkeit wie in 3.6).

Wenden wir nun dasselbe Argument auf F^- an, dann erhalten wir einen stetigen Homomorphismus $F^{--}: SP(X) \rightarrow SP(Y)$ mit $F^- \circ F^{--} \simeq \text{id}$. Daraus folgt $F \simeq F \circ (F^- \circ F^{--}) = (F \circ F^-) \circ F^{--} \simeq F^{--}$, also $F^- \circ F \simeq \text{id}$.

BEWEIS VON 7.2. Wenn X ein Raum von der gleichen Art ist wie die im Beweis von 7.1 betrachteten Y_r , dann verfahren wir wie dort: Wir konstruieren zunächst eine Abbildung $f: X \rightarrow H$, die den richtigen Homomorphismus der r -ten Homotopiegruppe induziert, und wählen für $F: SP(X) \rightarrow H$ die homomorphe Erweiterung von f . Analog kann man verfahren, wenn X eine Vereinigung (mit einem gemeinsamen Punkt) von solchen Räumen ist.

Im allgemeinen Fall wählen wir eine solche Vereinigung X' mit $H(X', Z) \cong H(X, Z)$. Wir wenden den bereits bewiesenen Spezialfall an und erhalten Homomorphismen $G: SP(X') \rightarrow SP(X)$ und $F': SP(X') \rightarrow H$ mit $G_*: \pi_i(SP(X')) \cong \pi_i(SP(X))$ und $F'_* = h_i \circ G_*: \pi_i(SP(X')) \rightarrow \pi_i(H)$, $i > 0$. Nach 7.3 gibt es einen Homomorphismus $G^-: SP(X) \rightarrow SP(X')$ mit $G^- \circ G \simeq \text{id}$, also $G_*^- = (G_*)^{-1}$. Dann ist $F = F' \circ G^-: SP(X) \rightarrow H$ ein Homomorphismus mit $F_* = F'_* \circ G_*^- = F'_* \circ (G_*)^{-1} = h \circ G_* \circ (G_*)^{-1} = h$, was zu beweisen war.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY UND HEIDELBERG
THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY UND STRASBOURG

LITERATUR

1. H. CARTAN, Séminaire 7: Algèbres d'Eilenberg-MacLane et Homotopie, Paris, 1955.
2. D. E. COHEN, *Spaces with weak topology*, Quart. Jour. of Math., Oxford, 2^d ser., V (1954), 77–80.
3. A. DOLD und R. THOM, *Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis*, C. R. Acad. Sci., Paris, 242 (1956), 1680–1682.
4. S. EILENBERG und N. E. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Math. Ser. 15.
5. I. M. JAMES, *Reduced product spaces*, Ann. of Math., 62 (1955), 170–197.
6. S. D. LIAO, *On the topology of cyclic products of spheres*, Trans. Am. Math. Soc., 77 (1954), 520–551.
7. J. MILNOR, *Construction of universal bundles*, I, Ann. of Math., 63 (1956), 272–284.

8. J. C. MOORE, *On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group*, Ann. of Math., 59 (1954), 549–557.
9. und J. MILNOR, Mimeographed seminar notes on semi-simplicial complexes, Princeton, 1956.
10. D. PUPPE, *Über Homotopiemengen und ihre Abbildungen* (erscheint in der Math. Zeitschrift).
11. J. P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math., 54 (1951), 425–505.
12. N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton Math. Ser. 14.