

## III A B 3. ANALYSIS SITUS.

VON

**M. DEHN**    UND    **P. HEEGAARD\***)  
IN MÜNSTER I/W.            IN VEDBAEK B/KOPENHAGEN.

---

### Inhaltsübersicht.

Historische Einleitung.

#### Grundlagen.

1. Definition von Punkt-, Linien- und Flächensystemen und der ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten.
2. Indikatrix.
3. Interne Transformation und Homöomorphismus (Elementarverwandtschaft), (Äquivalenz).
4. Elementarmannigfaltigkeiten (Kreis und Kugel).
5. Ausdehnung auf  $n$  Dimensionen.
6. Komplexe mit Singularitäten.
7. Externe Transformation — Homotopie und Isotopie.
8. Das Anschauungssubstrat.
9. Einteilung der Analysis situs.
10. Die Methode.

#### A. Complexus.

1. Übersicht.
2. Liniensysteme.
3. Höhere Komplexe und die (komplektische) *Eulersche* Formel. (Betti'sche Zahlen, Torsionskoeffizienten.)
4. Benutzung von nektischen Methoden für die Theorie höherer Komplexe.

#### B. Nexus.

- I. *Nexus von Linien.*
- II *Nexus von Flächen.*
  1. Einleitung.
  2. Normalform.
  3. Lösung des Hauptproblems.

---

\* Von den beiden Verfassern hat *Heegaard* die literarischen Vorarbeiten zum Artikel geliefert und übrigens an der Ausarbeitung wesentlichen Anteil genommen; verantwortlich für die endgültige Fassung des Artikels ist *Dehn*.

4. Anwendungen der Normalform.
  - a) Beweis des *Neumannschen* Axioms.
  - b) *Möbiussche* Grundform für eine Fläche.
  - c) Minimalzahl von bedeckenden Elementarflächenstücken.
  - d) Normalformen für geschlossene Flächen.
5. Rückkehrschnitte und Querschnitte und die eigentliche *Eulersche* Formel.
6. Zusammensetzung von Flächen.
7. Äquivalenz von Kurven auf Flächen.
8. Analytisch-geometrische Entwicklungen.

### C. Connexus.

I. *Homotopie*.

II. *Isotopie*.

A. Kurven.

1. Eine Kurve (Verknotung).
2. Mehrere Kurven (Verkettung).

B. Flächen und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

### D. Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten.

1. Allgemeine Probleme.
2. *Riemannsche* Flächen.

---

**Einleitung.** In zusammenhängender Form hat sich wohl zuerst *Listing*<sup>1)</sup> mit der heutzutage mit dem Namen *Analysis situs* bezeichneten Disziplin beschäftigt. Er schlägt für sie den Namen *Topologie* vor und versteht darunter<sup>2)</sup> eine „kalkulatorische Bearbeitung der modalen Seite der Geometrie“, die Lehre von den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Teilen oder ihren Aggregaten im Raume, abgesehen von den Maß- und Größenverhältnissen.

---

1) *J. B. Listing*, Vorstudien zur Topologie (Göttinger Studien 1847); als Buch Göttingen 1848.

2) l. c. p. 2—6. *Listing* zieht die Bezeichnung *Topologie* (l. c. p. 6) dem von *Leibniz*, *De Anlysi situs*, L. math. Schriften, her. v. Gerhardt 2. Abt., 1 (1858), p. 178, vorgeschlagenen Namen *Analysis situs* oder *Geometria situs* vor. Vielfach ist eine Äußerung von *Leibniz* in einem Briefe an *Huygens*, Chr. *Huygens*, *Oeuvres compl.* 8 (Correspond. 1676—1684), Nr. 2192 ff., so gedeutet worden, als ob sie die erste Idee der *Analysis situs* enthielte. Die Äußerung lautet: „... je, croy qu'il nous faut encore une autre Analyse proprement géométrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem.“ Jedoch denkt *Leibniz* hier vielmehr an einen geometrischen Algorithmus, der für einzelne geometrische Probleme eher eine genuine Lösungsmethode liefert, als die Methode der gewöhnlichen analytischen Geometrie.

Wesentlich in derselben Weise wird die Analysis situs definiert von *Riemann*<sup>3)</sup>. Indem *Klein*<sup>4)</sup> die Idee der Gruppe und die Auffassung des Raumes als Zahlenmannigfaltigkeit zu Grunde legt, gelangt er zu einer prägnanten Zusammenfassung der *Listingschen* Definitionen, die man etwa so formulieren kann: die Aufgabe der Analysis situs besteht in der Aufstellung aller derjenigen Eigenschaften räumlicher Gebilde, die sich invariant verhalten gegenüber der Gruppe aller stetigen Transformationen des Raumes.

Als die erste Untersuchung auf diesem so definierten Gebiet der Analysis situs oder Topologie kann man wohl die von *L. Euler*<sup>5)</sup> 1736 angestellte bezeichnen, die sich mit dem Königsberger Brückenproblem beschäftigt. Es handelt sich dabei um die Frage, ob es möglich sei, die 7 Brücken bei Königsberg über den Pregel hinter einander, jede immer nur einmal zu passieren. Schon viel früher war von *Descartes*<sup>6)</sup> ohne Beweis ein Satz über die Winkelsummen der Seitenflächen eines Polyeders aufgestellt worden, der äquivalent ist mit der von *Euler*<sup>7)</sup> 1752 aufgestellten Beziehung zwischen den Anzahlen der Begrenzungsgebilde eines Polyeders („*Eulersche Polyederformel*“), welche ein für die *Analysis situs fundamentales Resultat* enthält. Von späteren Untersuchungen sind vielleicht die Abhandlungen von *Euler* und weitere daran sich anschließende über den Rösselsprung zu nennen (I G 1, *Ahrens*, Nr. 3).

Ein neues Element kam in die Analysis situs durch die *Gaußsche*<sup>8)</sup> Entdeckung von dem Zusammenhang zwischen einem gewissen Doppelintegral und den Umschlingungen zweier geschlossener Linien. Es war damit der erste Anfang gemacht zu der später vor allem durch die von *W. Dyck*<sup>9)</sup> benutzte *Kronecker'sche* Charakteristikentheorie erfolgreichen Anwendung der höheren Analysis in unserem Gebiet.

Das Erscheinen von *Listings* „Vorstudien zur Topologie“ (1847) bezeichnet den Zeitpunkt, nach welchem die Analysis situs als eine selbständige mathematische Disziplin hervortritt. Doch erst die *Riemann'schen* Untersuchungen und seine Verwertung derselben für die Funktionentheorie lenkten die allgemeine Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Analysis situs.

3) J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke p. 84.

4) Erlanger Programm 1872.

5) Petrop. Comment. 8 (1741), p. 128. Vgl. I G 1, *Ahrens*, Nr. 7.

6) Oeuvres inédites de *Descartes* par *Foucher de Careil* Paris (1860), 2 p. 214, vgl. Paris C. R. 50 (1860), p. 774 u. Berlin Monatsb. (1861), p. 1043.

7) Petrop. Novi Comm. 4 (1752—53), p. 109. .

8) *Gauß*, Werke 5, p. 605.

9) Math. Ann. 32 (1888), p. 457 ff., 37 (1890), p. 273 ff., München Ber. 25 (1895), p. 261, 447. Vgl. I B 3 a, *Runge*, Nr. 7.

Weitere Arbeitsgebiete sind den Forschungen in unserer Disziplin gewonnen 1) durch die Arbeiten von *Betti* und die in neuere Zeit fallenden Arbeiten von *Poincaré* (vor allem Ausdehnung auf vieldimensionale Räume), 2) durch die Arbeiten insbesondere der englischen Schule, z. B. repräsentiert durch *Tait*, die die Verknötung der Raumkurven und die Komplexe verschiedener Grundgebilde („Bäume“, „Graphen“) behandeln.

### Grundlagen.\*)

**1. Definition von Punkt-, Linien- und Flächenkomplexen.** Seien  $P_0', P_0'', \dots, P_0^{\alpha_0}$  eine erste endliche Reihe von Elementen, die wir *Punkte* nennen und deren Gesamtheit  $\{P_0', P_0'', \dots, P_0^{\alpha_0}\}$  wir als *Punkt-komplex*  $C_0$  bezeichnen. Wir bestimmen nun, daß je zwei dieser Punkte, etwa  $P_0^i$  und  $P_0^k$ , eine beliebige Anzahl von neuen Dingen  $(P_0^i, P_0^k)^1, (P_0^i, P_0^k)^2, \dots$  erzeugen können, die wir als *Strecken* oder *Linienstücke* und mit dem Buchstaben  $S_1$  bezeichnen. Wir nennen ferner  $P_0^i$  und  $P_0^k$  *Eckpunkte* der von ihnen erzeugten Strecken. Es sei nun  $S_1', S_1'', \dots, S_1^{\alpha_1}$  ein solches von den Punkten  $P_0', P_0'', \dots, P_0^{\alpha_0}$  erzeugtes System von Strecken, daß zu ihrer Erzeugung alle Punkte nötig sind (anders ausgedrückt, daß jeder Punkt in diesen Strecken mindestens einmal vorkommt), dann nennen wir die Gesamtheit

$$\{P_0', P_0'', \dots, P_0^{\alpha_0}; S_1', S_1'', \dots, S_1^{\alpha_1}\}$$

einen *Streckenkomplex*, ein *Liniensystem* oder einen *eindimensionalen Komplex*  $C_1$ .<sup>10)</sup> Wir wollen folgende charakteristische, unterscheidende Merkmale für Streckenkomplexe aufstellen: Ein  $C_1$  heißt *zusammenhängend*, wenn für je zwei Punkte  $P_0^i, P_0^k$  eine Gruppe von Strecken von der Art:

$$(P_0^i, P_0^i)^1, (P_0^i, P_0^i)^2, \dots, (P_0^i, P_0^k)^{k-1}$$

im  $C_1$  enthalten ist. Man sagt: diese Gruppe von Strecken oder dieser *Streckenzug verbindet*  $P_0^i$  mit  $P_0^k$ . Jeder  $C_1$  besteht aus einer Anzahl

\*) Für die anschaulichen Grundlagen der abstrakten Entwicklungen der ersten 7 Paragraphen vgl. § 8.

10) Der Name Komplex ist von *Listing* eingeführt, *Census räuml. Kompl.*, Gött. 1862, p. 3 ff. *Listing* braucht für diesen Komplex den Ausdruck *Linear-komplexion* (*Vorstudien*, p. 59), von *F. Lippich* ist der Name *Liniensystem* eingeführt (*Wien Ber.* 69<sup>2</sup> (1874), p. 92). *C. Jordan* sagt *assemblage* (*J. f. Math.* 70 (1869), p. 185), *W. Ahrens* schlägt *Linearcontinuum* vor (*Math. Spiele*, Leipzig 1901, p. 103); *W. K. Clifford* und *J. J. Sylvester*, die die Liniensysteme in der *Invariantentheorie* verwenden (s. I B 2, Nr. 12, 239—242), (und nach ihnen *Bentheimer*, *A. B. Kempe*, *J. Petersen*) gebrauchen den Namen *Graph*.

von zusammenhängenden  $C_1$ . Im Folgenden wollen wir, wenn nichts anderes bestimmt wird, einen Linienkomplex stets als zusammenhängend voraussetzen. — Als *Kreis*  $\Pi_1$  wird ein Komplex bezeichnet von der Art:

$$\{P_0^1, P_0^2, \dots, P_0^i \dots P_0^k \dots, P_0^l; (P_0^1, P_0^2), (P_0^2, P_0^3), \dots, (P_0^l, P_0^1)\},$$

$$(P_0^i \cong P_0^k).$$

Einen  $C_1$ , der keine solchen Komplexe enthält, bezeichnet man als *Baum*<sup>11)</sup>. Ist ein  $C_1$  entweder ein  $\Pi_1$  oder entsteht aus einem solchen durch Weglassung einer Strecke, so wollen wir ihn als *eindimensionale Mannigfaltigkeit* und mit dem Zeichen  $M_1$  bezeichnen.

Wir bestimmen ferner, daß jeder Kreis  $\Pi_1$  eine beliebige Anzahl von neuen Dingen  $(\Pi_1)^1, (\Pi_1)^2, \dots$  erzeugen kann, die wir als *Flächenstücke* und mit dem Buchstaben  $S_2$  bezeichnen. Es sei nun  $\{S_2', S_2'', \dots, S_2^{\alpha_2}\}$  ein solches von den Punkten und Strecken des Komplexes  $C_1$  erzeugtes System von Flächenstücken, daß zu ihrer Erzeugung alle Strecken nötig sind (das ist nur möglich, wenn der  $C_1$  keine *Brücken* oder *Eckpunkte* enthält), dann nennen wir die Gesamtheit

$$\{P_0', P_0^2, \dots, P_0^{\alpha_0}; S_1', S_1^2, \dots, S_1^{\alpha_1}; S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{\alpha_2}\}$$

einen Flächenkomplex oder einen zweidimensionalen Komplex  $C_2$ . In einem  $C_2$ , bei dem jede Strecke gerade zu zwei Flächenstücken gehört, zerfallen alle Flächen, die durch einen Punkt  $P_0$  des Komplexes gehen, in zyklisch geordnete Gruppen. In jeder derselben hat jede Fläche mit der in der Gruppe vorangehenden und mit der nachfolgenden Fläche je eine an  $P_0$  „angeheftete“ Strecke gemeinsam. Bilden die Flächen für jeden Punkt des Komplexes nur *eine* Gruppe, so wollen wir den Komplex als *geschlossene Fläche* bezeichnen. Entfernt man aus einem solchen Komplex einige Flächen, etwa  $S_2', \dots, S_2^r$ , die keine Punkte mit einander gemeinsam haben, so bezeichnen wir den übrig bleibenden  $C_2$  als *berandete Fläche* mit den *Randkurven*  $\Pi_1', \dots, \Pi_1^r$ , wo  $S_2^i = (\Pi_1^i)$  ist. Eine geschlossene oder berandete Fläche bezeichnen wir als *zweidimensionale Mannigfaltigkeit* und mit dem Zeichen  $M_2$ . Einen Kreis  $\Pi_1$  eines Komplexes  $M_2$ , der die einzige Randkurve einer Mannigfaltigkeit ist, deren Teilflächen sämtlich Teilflächen von  $M_2$  sind, nennen wir *homolog null*, in Zeichen  $\Pi_1 \sim 0$ .<sup>12)</sup>

11) S. Näheres Complexus, p. 174 ff

12) Begriff und Bezeichnung ist von *H. Poincaré* eingeführt (*J. éc. polyt.* (2) 1 (1895), p. 18). Für die weitere Ausführung und Erweiterung des Begriffs siehe Complexus, p. 179 ff.

**2. Indikatrix**<sup>13</sup>). Bezeichnen wir den einen Eckpunkt einer Strecke als *Anfangs-*, den anderen als *Endpunkt*, so geben wir der Strecke einen bestimmten (*Durchlaufungs-*)*Sinn*, eine *Indikatrix*, was wir in der Schreibweise ( $P_0'$ ,  $P_0''$ ) durch das Voranstellen des Anfangspunktes ausdrücken können. Wir können jeder Strecke einer  $M_1$  eine solche Indikatrix geben, daß jeder Punkt derselben, an den zwei Strecken stoßen, Anfangspunkt für die eine und Endpunkt für die andere ist. Dies kann auf zwei Weisen geschehen. Die eine erhalten wir aus der anderen, indem wir für alle Strecken die *entgegengesetzte* Indikatrix wählen, d. i. Anfangs- und Endpunkt mit einander vertauschen. Ein Flächenstück, bei dem alle Strecken des erzeugenden Kreises in der obigen Weise mit einer Indikatrix versehen sind, wollen wir selbst als mit einer Indikatrix begabt bezeichnen. Wir nennen die beiden so möglichen Bezeichnungsweisen die beiden verschiedenen, einander entgegengesetzten Indikatricen des Flächenstückes. Können wir bei einer  $M_2$  allen Teilflächenstücken solche Indikatricen geben, daß jede Strecke, die nicht auf einer Randkurve liegt, also an zwei Teilflächen stößt, von der einen derselben infolge der Indikatrixbestimmung eine Indikatrix erhält, die der von der anderen erhaltenen entgegengesetzt ist, so soll die Fläche *zweiseitig* heißen, andernfalls *einseitig*<sup>13</sup>,<sup>14</sup>). Die betreffende Indikatrixbestimmung für eine zweiseitige  $M_2$  kann wieder auf zwei verschiedene Weisen geschehen. Wir haben den Satz: Ist ein Teil einer  $M_2$  einseitig, so ist sie selbst einseitig. Die einfachste von einer Kurve berandete einseitige Fläche hat das Komplexschema:

$$\{ P_0^1, P_0^2, P_0^3, P_0^4; S_1^{1,2}, S_1^{2,3}, S_1^{3,4}, S_1^{4,1}, S_1^{1,3}, S_1^{4,2}, \\ S_2^{(1,2)}, S_2^{(2,3)}, S_2^{(3,4)}, S_2^{(4,1)}, S_2^{(1,2,3,4)}, S_2^{(4,3)}, S_2^{(3,1)} \}$$

13 u. 14) Gewöhnlich wird Ein- und Zweiseitigkeit definiert mit Hilfe der Auffassung der  $M_2$  als einer im dreidim. Raume ausgebreiteten Mannigfaltigkeit: Nimmt man ein „Lot“ auf die Fläche mit bestimmter Richtung und läßt es sich auf einer zweiseitigen Fläche beliebig bewegen, so wird es bei Rückkehr zum Anfangspunkt auch immer wieder die Anfangsrichtung besitzen, was bei einseitigen Flächen nicht der Fall ist. Über die daran sich anschließende analytische Unterscheidung von Ein- und Zweiseitigkeit vgl. z. B. *Poincaré* (J. éc. polyt. (2) 1 (1895), p. 25). *Klein* (Math. Ann. 7 (1871) p. 478) hat darauf hingewiesen, daß die Ein- resp. Zweiseitigkeit nicht vom umgebenden Raume abhängt, vielmehr eine innere Eigenschaft der Fläche ist. *Klein* führt zur Untersuchung dieser Eigenschaft statt des sich bewegenden Lotes eine sich bewegende unendlich kleine Kurve mit Umlaufssinn (Indicatrix) ein. Die obige Definition stellt eine Übertragung der *Kleinschen* Definition ins Diskontinuierliche dar und ist im Anschluß an *A. F. Möbius* gegeben, der zuerst (1858) Werke 2, p. 519, vgl. p. 484 die Existenz einseitiger Flächen erkannt hat. Vgl. ferner *Listing*, Census (1862), p. 13; *L. Schläfli*, J. f. Math. 76 (1873), p. 152 und *G. Weichhold*, Diss. Leipzig 1883 = Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 321.

wo

$$S_1^{i,k} \text{ für } (P_0^i, P_0^k) \text{ und } S_2^{(k_1), (k_2)} \dots \text{ für } (S_1^{k_1}, S_1^{k_2} \dots)$$

steht. Diese Fläche heißt *Möbiussches Blatt*.

**3. Interne Transformation und Homöomorphismus (Elementarverwandtschaft)**<sup>15)</sup>. Zwei *Streckenkomplexe*  $C_1'$  und  $C_1''$  heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph*, 1) wenn sie nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungswiese der erzeugenden Punkte sich als identisch herausstellen, 2) wenn dasselbe der Fall ist nach vorhergehender, beliebig oft wiederholter (*interner*) *Transformation* einzelner Strecken nach dem Schema:  $\alpha$ ) Einführung eines neuen Punktes  $Q_0$ ,  $\beta$ ) Ersatz der Strecke  $(P_0^i, P_0^k)_1$  durch zwei Strecken  $(P_0^i, Q_0)$  und  $(Q_0, P_0^k)$ .

Zwei *Flächenkomplexe*  $C_2'$  und  $C_2''$  heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph*, 1) wenn sie sich nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungswiese der Elemente als identisch herausstellen, 2) wenn dasselbe der Fall ist a) nach vorhergehender interner Transformation der  $C_2'$  und  $C_2''$  erzeugenden Streckenkomplexe, b) nach vorhergehender, beliebig oft wiederholter (*interner*) *Transformation* einzelner Teilflächenstücke nach folgendem Schema:  $\alpha$ ) Einführung einer *neuen* Strecke  $(P_0^i, P_0^k) = T_1$ , wo  $P_0^i$  und  $P_0^k$  erzeugende Punkte eines ein Flächenstück  $S_2$  erzeugenden Kreises  $\Pi_1$  sind;  $\beta$ ) Ersatz von  $S_2$  durch zwei Flächenstücke  $(T_1, M_1')$  und  $(T_1, M_1'')$ , wo  $M_1'$  und  $M_1''$  die beiden von  $P_0^i$  und  $P_0^k$  begrenzten Mannigfaltigkeiten sind, die zusammen  $\Pi_1$  bilden.

Es gelten die grundlegenden Sätze: Sind zwei Komplexe mit einem dritten homöomorph, dann sind sie auch mit einander homöomorph. — Ist von zwei homöomorphen Komplexen der eine eine Mannigfaltigkeit, dann ist es auch der andere. — Zwei homöomorphe  $M_2$  sind entweder beide einseitig oder beide zweiseitig. — Zwei homöomorphe  $M_2$  haben die gleiche Anzahl Randkurven. — Jede geschlossene  $M_2$  (resp. jeder Kreis) kann mit sich in der Weise als homöomorph nachgewiesen werden, daß bei der betreffenden Beziehung der  $M_2$  (des Kreises) auf sich selbst sich zwei ganz beliebige Punkte derselben entsprechen;

15) Der Begriffsbildung im Text kommt am nächsten die *Möbiussche* Definition der „Elementarverwandtschaft“ [Werke, 2, p. 433 (1863)]. Indem er die Zerlegung in unendlich kleine Teile benutzt, vermeidet er die apodiktische Einführung der „Flächenstücke“. Es ist jedoch zu beachten, daß zwei unendlich wenig ausgedehnte, gleichdimensionale Gebilde von mehr als 2 Dimensionen im Sinne der Anal. situs nicht äquivalent zu sein brauchen (vgl. Grundlagen Nr. 5). Auch ist natürlich die Definition modernen Ansprüchen an Strenge nicht ganz gewachsen (vgl. hierzu die Artikel III A B 1 und 2 von *Enriques* und *v. Mangoldt*).

und umgekehrt: hat ein  $C_2$  (ein  $C_1$ ) diese Eigenschaft und verliert sie auch nicht durch irgend eine interne Transformation, so ist er eine geschlossene  $M_2$  (ein Kreis), d. i. die geschlossene  $M_2$  resp. die Kreise sind die homogenen  $C_2$  resp.  $C_1$ .

Aus dem Begriff der homöomorphen Beziehung einer Mannigfaltigkeit auf sich selbst entspringt auch der Begriff der Äquivalenz. Zwei Komplexe auf einer Mannigfaltigkeit heißen äquivalent, wenn sie eventuell nach interner Transformation durch eine homöomorphe Beziehung der Mannigfaltigkeit auf sich selbst in einander übergehen. Wir haben die Sätze: Irgend zwei ungeschlossene  $M_1$  auf einer Mannigfaltigkeit, die keinen Punkt mit der eventuellen Berandung der Mannigfaltigkeit gemeinsam haben, sind äquivalent. Irgend zwei Randkurven auf einer  $M_2$  sind äquivalent (s. *Nexus* Nr. 7). Der Begriff der Äquivalenz ist von besonderer Bedeutung bei der Konstruktion von mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten (s. *Grundlagen* Nr. 5).

Gelegentlich wollen wir dem Namen „Mannigfaltigkeit“, die wir, im bisherigen Sinne verstanden „Mannigfaltigkeit im engeren Sinne“ nennen wollen, eine erweiterte Bedeutung geben: Mit *Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne* bezeichnen wir: die gegebene Mannigfaltigkeit oder irgend eine aus ihr durch interne Transformationen entstehende Mannigfaltigkeit. Also z. B.: Ein Kreis auf einer Mannigfaltigkeit  $M_2$  im weiteren Sinn bedeutet einen geschlossenen Streckenzug auf dieser selbst resp. auf einer aus ihr durch interne Transformation entstehenden  $M_2$  usw. In dem Abschnitte: *Complexus* hat mit Ausnahme des letzten Paragraphen das Wort Mannigfaltigkeit stets die ursprüngliche Bedeutung, in dem Abschnitte *Connexus* und „Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“ die zweite Bedeutung. Im übrigen ist allemal, wo es nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, die Bedeutung, die man an der betreffenden Stelle dem Worte beilegen muß, unmittelbar einleuchtend.

**4. Elementarmannigfaltigkeiten, Kreis und Kugel.** Die Mannigfaltigkeit  $\{P_0^1, P_0^2; (P_0^1, P_0^2)\}$  und jede mit ihr homöomorphe  $M_1$  bezeichnen wir als *eindimensionale Elementarmannigfaltigkeit, Streckenzug* oder kurz als Strecke mit dem Zeichen  $E_1$ . Die Mannigfaltigkeit

$$\{P_0^1, P_0^2; (P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^1, P_0^2)^2; ((P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^2, P_0^1)^2)^2\}$$

und jede mit ihr homöomorphe  $M_2$  bezeichnen wir als *zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit, Elementarflächenstück*, oder kurz als Flächenstück und mit dem Zeichen  $E_2$ . Die (geschlossene)  $M_2$ :

$$\{P_0^1, P_0^2; S_1^1, S_1^2; (S_1^1, S_1^2)^1, (S_1^1, S_1^2)^2\}$$

(wo  $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$  gesetzt ist) und jede mit ihr homöomorphe  $M_2$

bezeichnen wir als *Kugelfläche* oder *zweidimensionale Sphäre* und mit dem Zeichen  $\Pi_2$ .

Wir haben dann die Sätze: Jede  $M_1$  ist entweder ein Kreis oder eine  $E_1$ . — Jeder Kreis einer  $E_2$  ist die Randkurve eines Elementarflächenstückes, das ein Teil der  $E_2$  ist. Ein Teil dieses Satzes ist äquivalent mit dem Satze: Auf einer  $E_2$  ist jeder Kreis homolog null. —  $E_2$  und  $\Pi_2$  sind zweiseitige  $M_2$ . — Auf einer  $\Pi_2$  ist jeder Kreis homolog null. — Jede  $\Pi_2$  wird durch eine  $\Pi_1$  in zwei  $E_2$  zerlegt.

**5. Ausdehnung auf  $n$  Dimensionen**<sup>16)</sup>. Die Erzeugung von höheren Komplexen  $C_3$  und weiter  $C_n$  aus den Flächenkomplexen kann auf verschiedene Weise vor sich gehen, je nachdem man zu dem Aufbau der  $C_3$  beliebige geschlossene  $M_2$ , oder nur zweiseitige oder endlich nur Kugelflächen benutzen will. Im folgenden soll die dritte Methode benutzt werden, weil sie die einfachste und anschaulichste ist, und weil die anderen doch nur scheinbar allgemeiner sind.

Wir bestimmen, daß jede Kugelfläche  $\Pi_2$  eine beliebige Anzahl von neuen Dingen  $(\Pi_2)_1, (\Pi_2)_2, \dots$  erzeugen kann, die wir als *dreidimensionale Raumstücke* und mit den Buchstaben  $S_3$  bezeichnen. Es sei nun  $\{S_3^1, S_3^2, \dots, S_3^{\alpha_3}\}$  ein solches von den Punkten, Strecken und Flächenstückes des Komplexes  $C_2$  erzeugtes System von  $S_3$ , daß zu ihrer Erzeugung alle Flächenstücke nötig sind (das erfordert besondere Eigenschaften für den  $C_2$ ), dann nennen wir die Gesamtheit:  $\{P_0^1, P_0^2, \dots, P_0^{\alpha_3}; S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{\alpha_1}; S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{\alpha_2}; S_3^1, S_3^2, \dots, S_3^{\alpha_3}\}$  einen *Raumkomplex* oder *dreidimensionalen Komplex*  $C_3$ .

Um aus dem  $C_3$  durch Spezialisierung die  $M_3$  zu bekommen, sind wieder verschiedene Wege möglich. Wir wollen die Spezialisierung so vornehmen, daß die entstehenden  $M_3$  homogen sind (s. Nr. 3). Ein  $C_3$  ist eine *geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn drei Bedingungen erfüllt sind: 1) Jede  $S_2$  gehört zu zwei  $S_3$ . Dann ordnen sich an jeder  $S_1$  alle  $S_3$  zu „Gruppen“ (s. Nr. 1); 2) alle  $S_3$  an einer  $S_1$  bilden nur eine Gruppe. Bezeichnen wir dann die  $S_1, S_2, S_3$ , die durch einen bestimmten

16) Über  $n$ -dimensionale Gebilde s. vor allem Complexus Nr. 3 u. 4. Diese Theorie ist besonders gefördert von *B. Riemann*, Werke 2. Aufl., p. 474; *E. Betti*, Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 140; *V. Eberhardt*, Math. Ann. 36 (1890), p. 121; *W. Dyck*, Math. Ann. 37 (1890), p. 273; *Poincaré*, s. Fußn. 4. — Die Ausdehnung auf über 2 Dimensionen hat ihre Bedeutung: 1) weil mehrdimensionale Gebilde ganz eigenartige und zum Teil sehr verborgene Eigenschaften aufweisen, 2) weil eine Reihe von topologischen Problemen, die nicht über den dreidimensionalen Raum herauszugehen scheinen, zu ihrer Lösung polydimensionale Betrachtungen erfordern (z. B. Knotenprobleme), 3) weil der Verlauf algebraischer Flächen vollständig nur durch vierdimensionale Mannigfaltigkeiten dargestellt werden kann.

Punkt des Komplexes gehen, als Pseudopunkte, Pseudostrecken und Pseudoflächenstücke, so bilden diese Elemente vermöge der Bedingungen 1) und 2) einen oder mehrere Komplexe, von denen wir jeden entsprechend als eine geschlossene Pseudofläche bezeichnen dürfen. Wir wählen dann als dritte Bedingung: 3) An jedem Punkt soll es nur eine solche Pseudofläche geben, und zwar soll diese eine Kugelfläche sein<sup>17)</sup>. Jetzt wird die folgende Fassung dieser drei Bedingungen verständlich sein: An jeder Fläche soll der  $C_3$  sich wie ein Punktepaar, an jeder Strecke wie ein Kreis, an jedem Punkt wie eine Kugelfläche verhalten. Die zweite Bedingung enthält die erste, die dritte die erste und zweite.

Eine *berandete*  $M_3$  kann dann wie folgt erklärt werden: Bei einer berandeten  $M_3$  unterscheiden wir innere Punkte, Linien und Flächenstücke von Randpunkten, -linien resp. -flächenstücken. An den inneren Flächen verhält sich die berandete  $M_3$  wie ein Punktepaar, an den Randflächen wie ein Punkt (d. i. es hängt an den Randflächen je nur ein Raumstück), an den inneren Strecken wie ein Kreis, an den Randstrecken wie ein Streckenzug, an den inneren Punkten wie eine Kugel, an den Randpunkten wie ein Elementarflächenstück. Es gelten dann die Sätze: An jeder Randstrecke hängen zwei Randflächen, von jedem Randpunkte aus gehen Randstrecken, die sich zu einer Gruppe zusammenordnen. Alle Strecken auf einer Randfläche, alle Punkte auf einer Randstrecke sind Randstrecken resp. Randpunkte. Daraus folgt dann: Alle Randelemente sind auf eine Reihe von geschlossenen Flächen verteilt. Ferner: Durch Hinzufügen von Raumstücken kann jede berandete  $M_3$  zu einer geschlossenen  $M_3$  gemacht werden. Die einfachste berandete  $M_3$  liefert das Raumstück zusammen mit seiner Begrenzung.

Da die Kugelfläche (s. Nr. 4) zweiseitig ist, so können wir jetzt auch einem  $S_3$  zwei verschiedene *Indikatricen* geben, indem wir auf zwei Weisen den Flächenstücken der erzeugenden Kugelfläche zusammengehörige Indikatricen verleihen können. Wir nennen dann, weiter verallgemeinernd, eine  $M_3$  *zweiseitig*, wenn wir jeder seiner  $S_3$  eine solche Indikatrix geben können, daß ein  $S_2$ , das an zwei  $S_3$  stößt, von dem einen derselben infolge dieser Indikatrixbestimmung die umgekehrte Indikatrix erhält wie von der anderen; ist das nicht möglich, so nennen wir die  $M_3$  *einseitig*.

Zwei  $C_3$  heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph*, 1) wenn sie

17) Ein Beispiel, bei dem die dritte Bedingung nicht erfüllt ist, s. p. 183, ferner Heegaard, Diss. Kopenhagen, 1898, p. 87.

sich nach einer eventuellen Abänderung der Bezeichnungsweise der Elemente als identisch herausstellen; 2) wenn dasselbe der Fall ist a) nach einer internen Transformation des erzeugenden  $C_2$ , b) nach beliebig oft wiederholter *interner Transformation* einzelner  $S_3$  nach folgendem Schema:  $\alpha$ ) Einführung eines *neuen* Flächenstücks  $T_2 = (\Pi_1^i)$ , wo  $\Pi_1^i$  ein Kreis einer ein Raumstück  $S_3$  erzeugenden Kugelfläche  $\Pi_2$  ist,  $\beta$ ) Ersatz von  $S_3$  durch zwei Raumstücke  $(T_2, E_2')$  und  $(T_2, E_2'')$ , wo  $E_2'$  und  $E_2''$  die beiden von  $\Pi_1^i$  begrenzten  $E_2$  sind, die zusammen  $\Pi_2$  bilden (s. Nr. 4). Wir können jetzt die Begriffe der Homologie, Äquivalenz sowie den Begriff der „Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne“ unmittelbar auch für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten aufstellen.

Die Mannigfaltigkeit

$$\{P_0^1, P_0^2; S_1^1, S_1^2; (S_1^1, S_1^2)^1, (S_1^1, S_1^2)^2; ((S_1^1, S_1^2)^1, (S_1^1, S_1^2)^2)\}$$

(wo  $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$  gesetzt ist) und jede ihrer homöomorphe  $M_3$  heißt *dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeit* oder *Elementarraumstück*  $E_3$ .

Die (geschlossene)  $M_3$ :

$$\{P_0^1, P_0^2; S_1^1, S_1^2; S_2^1, S_2^2; (S_2^1, S_2^2)^1, (S_2^1, S_2^2)^2\}$$

(wo  $S_1^i = (P_0^1, P_0^2)^i$  und  $S_2^i = (S_1^1, S_1^2)^i$  gesetzt ist) und jede mit ihr homöomorphe  $M_3$  bezeichnen wir als dreidimensionale Sphäre und mit dem Zeichen  $\Pi_3$ .

Von wichtigen Sätzen, die sich aus dem Vorhergehenden ergeben, erwähnen wir unter Beiseitelassung einer Reihe genauer Analoga zu den in Nr. 3 und 4 aufgeführten die folgenden: Jede geschlossene Fläche eines  $E_3$  ist die Randfläche eines Teiles des  $E_3$ , oder, mit analoger Bezeichnung wie in Nr. 1: Jede geschlossene Fläche eines  $E_3$  ist homolog null. — Jede geschlossene Fläche eines  $E_3$  ist zweiseitig.

Nun haben wir alle Mittel in der Hand, um ganz analog weiter zu den  $C_4$  und den  $M_4$  und weiter zu den  $C_n$  und  $M_n$  aufzusteigen, worauf deshalb nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

**6. Komplexe mit Singularitäten.** Es sei vorgelegt ein Komplex  $C_n$ , der auf einen anderen Komplex  $C_n'$  abgebildet werden soll. Diese Abbildung möge nun aber nicht ein-eindeutig sein, sondern es soll einer ganzen Reihe von Punkten  $P_0^1, \dots, P_0^r$ , wenn keine der Strecken, Flächenstücke usw. des  $C_n$  zwei dieser Punkte enthält, ein einziger Punkt des  $C_n'$  entsprechen dürfen; es soll ferner einer Reihe von Strecken, deren erzeugende Punkte dieselben beiden Bildpunkte haben, wenn nur kein Flächenstück, Raumstück usw. des  $C_n$  zwei Strecken dieser Reihe enthält, eine einzige Strecke des  $C_n'$  entsprechen. So fortfahrend erhalten wir eine Abbildung von  $C_n$  in  $C_n'$ , bei der jedem  $P_0$  oder  $S_k$  des  $C_n$  ein  $C_0$  resp.  $S_k$  des  $C_n'$  entspricht, aber mehreren  $P_0$  oder  $S_k$

derselbe Punkt resp. dasselbe Raumstück. Jedes Element von  $C_n'$  aber ist das Bild von mindestens einem Element von  $C_n$ . Wir nennen nun  $C_n'$ , *aufgefaßt als das Abbild eines bestimmten  $C_n$* , einen *n-dimensionalen Komplex mit Singularitäten* (mehrfachen Punkten, Strecken usw.) und geben ihm die Bezeichnung  $C_n'(C_n)$ . Es kann ein solcher Komplex als das Bild von beliebig vielen verschiedenen Komplexen aufgefaßt werden. Ist das Original von  $C_n'$  eine Mannigfaltigkeit  $M_n$ , so nennen wir  $C_n'(M_n)$  eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Singularitäten*.

Sprechen wir von zwei (resp.  $k$ ) Punkten, Strecken usw. des  $C_n'(C_n)$ , oder von Elementarmannigfaltigkeiten und Sphären der verschiedenen Dimensionen usw. des  $C_n'(C_n)$ , so sind damit die Bilder von zwei ( $k$ ) Punkten, Strecken usw. des  $C_n$ , resp. die Bilder von Elementarmannigfaltigkeiten und Sphären usw. des  $C_n$  gemeint. Unter interner Transformation des  $C_n'(C_n)$  soll das Abbild einer internen Transformation des  $C_n$  verstanden werden.  $C_n^1(C_n)$  und  $C_n^3(C_n^2)$  sind dann und nur dann homöomorph, wenn  $C_n$  und  $C_n^2$  homöomorph sind. Endlich erklären wir  $C_n'(C_n)$  und jeden mit ihm homöomorphen Bildkomplex homöomorph mit  $C_n$  und jeden mit  $C_n$  homöomorphen Komplex. — Die Wichtigkeit dieser Einführung geht schon aus den Sätzen hervor: Jeder  $C_n$  kann abgebildet werden auf einen Teil einer  $E_n$ ; jeder  $C_n'$  kann so auf einen Teil  $C_n'$  einer  $E_{n+1}$  abgebildet werden, daß  $C_n'(C_n)$  keine mehrfachen  $n$ -dimensionalen Raumstücke enthält. Eine solche Abbildung wird auch wohl eine *Projektion* des  $C_n$  auf die  $E_{n+1}$  genannt. Unungänglich nötig aber ist diese Einführung für die Entwicklungen der folgenden Nummer.

**7. Externe Transformation. Homotopie und Isotopie.** Sei  $C_1'(C_1)$  ein Streckenkomplex mit (oder ohne) Singularitäten auf einer Mannigfaltigkeit  $M_n$  ( $n > 1$ ) (d. i. jedes der Elemente von  $C_1'(C_1)$  ist konstituierendes Element der  $M_n$ ). Angenommen nun, man könnte jedem Punkte  $P_0^i$  desselben einen ebenfalls der  $M_n$  angehörigen Punkt  $Q_0^i$  zuordnen, ferner jeder Strecke  $(P_0^i, P_0^k)' = S_1^i$  eine Strecke  $(Q_0^i, Q_0^k)' = T_1^i$  von  $M_n$ , so ist der neue Komplex jedenfalls auch ein Abbild von  $C_1$  und wir bezeichnen ihn deshalb mit  $C_1''(C_1)$ . Wir nehmen nun ferner an, man könnte je zwei Punkte  $P_0^i$  und  $Q_0^i$  so durch eine Strecke  $U_1^i$  der  $M_n$  verbinden, daß zu jedem geschlossenen Kreis  $\{S_1^i, U_1^k, T_1^i, U_1^i\}$  sich eine von ihm begrenzte Elementarmannigfaltigkeit der  $M_n$  finden läßt, so sagen wir:  $C_1'(C_1)$  und  $C_1''(C_1)$  *gehen ineinander durch externe Transformation auf der  $M_n$  über*. Sei ferner  $C_2'(C_2)$  ein Flächenkomplex mit (oder ohne) Singularitäten auf einer Elementarmannigfaltigkeit  $M_n$  ( $n > 2$ ). Angenommen nun, wir könnten jedem

Punkte  $P_0^i$  dieses Komplexes einen Punkt  $Q_0^i$ , einer Verbindungsstrecke  $S_1^i$  zweier Punkte eine Verbindungsstrecke  $T_1^i$  der entsprechenden Punkte, jedem Flächenstück  $S_2^h$  ein von den entsprechenden Elementen erzeugtes Flächenstück  $T_2^h$  zuordnen, so ist der neue Komplex jedenfalls auch ein Abbild von  $C_2$  und darf also mit  $C_2''$  ( $C_2$ ) bezeichnet werden. Angenommen nun ferner, daß zwei entsprechende Punkte  $P_i$  und  $Q_i$  durch eine Strecke  $U_1^i$  verbunden werden könnten, daß es ferner für jeden geschlossenen Kreis  $\{S_1^i, U_1^k, T_1^i, U_1^i\}$  ein der  $M_n$  angehöriges, von ihm begrenztes Elementarflächenstück  $E_2^i$  und endlich zu jeder der von zwei entsprechenden Flächen  $T_2^h$  und  $S_2^h$  und den zu ihren Begrenzungsstrecken gehörenden  $E_2^i$  gebildeten Sphäre ein Elementarraumstück  $E_3^h$  der  $M_n$  gäbe, so sagen wir:  $C_2'(C_2)$  und  $C_2''(C_2)$  entstehen aus einander durch externe Transformation. So fortfahrend können wir die externe Transformation eines auf einer  $M_n$  liegenden  $C'_{n-m}(C_{n-m})$  definieren. Wir stellen ferner die Definition auf:

*Gehen zwei Komplexe eventuell nach vorhergehenden internen Transformationen aus einander durch eine Reihe von externen Transformationen hervor, so nennen wir sie homotop<sup>18)</sup>.*

Wir haben die Sätze: Zwei homotope Komplexe sind homöomorph. — Zu jedem Komplex kann man einen homotopen mit vorgegebener Lage der Punkte finden. Begrenzen in einer  $M_n$  alle geschlossenen Kreise Elementarflächenstücke, so kann man zu jedem der  $M_n$  angehörigen Komplex (von weniger als  $n$  Dimensionen) einen ihm homotopen mit vorgeschriebener Lage der Strecken finden usw. Es ergibt sich so der grundlegende Satz:

*Zwei homöomorphe, einem  $E_n$  angehörige  $n - m$ -dimensionale Komplexe mit (oder ohne) Singularitäten sind homotop.*

Die externen Transformationen der geschlossenen Mannigfaltigkeiten lassen sich noch aus spezielleren, einfacheren Transformationen zusammensetzen, die wir *Elementartransformationen* nennen wollen: Es möge  $E_{n-m}$  auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $C_{n-m}(M_{n-m})$  auf einer  $M_n$  liegen und mit  $E'_{n-m}$  zusammen die Begrenzung einer  $E_{n-m+1}$  auf  $M_n$  bilden, dann ersetzen wir in  $C_{n-m}(M_{n-m})$  die  $E_{n-m}$  durch

18) Der Begriff der Homotopie im  $E_3$  ist der am häufigsten der Analysis situs zugrunde gelegte Begriff und wird häufig mit: „Äquivalenz im Sinne der Analysis situs“ bezeichnet. Zwei auf einer Fläche homotope Kurven nennt *Jordan*, J. d. math. 2 (11), (1866), p. 100 ineinander reduzibel. Zwei im  $E_n$  homotope Komplexe nennt *Poincaré* (J. éc. pol. (2) 1 (1895), p. 1) „homéomorphe“. Wegen des Bestehens des „Fundamentalsatzes“ (s. im Text) ist diese Bezeichnung im Einklang mit der im Text vorgeschlagenen.

$E'_{n-m}$  und nennen das eine Elementartransformation der  $C_{n-m}(M_{n-m})$  auf der  $M_n$ .

Wir haben den Satz: Jede Elementartransformation ist eine externe Transformation, und: jede externe Transformation von geschlossenen Mannigfaltigkeiten läßt sich aus Elementartransformationen zusammensetzen.

Ist in der obigen Bezeichnung kein innerer Punkt weder von  $E'_{n-m}$  noch von der von  $E_{m-n}$  und  $E'_{n-m}$  begrenzten  $E_{n-m+1}$  ein Punkt der (singularitätenfreien geschlossenen)  $M_{n-m}$ , so wollen wir die Transformation eine *spezielle externe Transformation* nennen, und zwei einer  $M_n$  angehörende  $M_{n-m}$ , die aus einander nach eventuell vorhergegangener interner Transformationen durch spezielle externe Transformationen hervorgehen, *isotop* nennen.

Wir haben den Satz: Zwei homöomorphe  $M_{2n-m}$  auf einer  $E_{2n}$  sind isotop (dagegen gibt es z. B. im  $E_3$  homöomorphe geschlossene Flächen resp. Kurven, die nicht isotop sind: verschieden geschlungene Kreisschläuche resp. Kurven). Hier ist auch die Betrachtung von mehreren nicht zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Bedeutung: Haben wir zwei Mannigfaltigkeiten  $M_{n-m}$  und  $\bar{M}_{n-m}$  ohne gemeinsame Punkte, die durch spezielle externe Transformation übergehen in  $M'_{n-m}$  und  $\bar{M}'_{n-m}$ , so nennen wir die *Gesamtheit*  $\{M_{n-m}, \bar{M}_{n-m}\}$  *speziell extern transformiert in die Gesamtheit*  $\{M'_{n-m}, \bar{M}'_{n-m}\}$ , wenn (in der obigen Bezeichnungsweise) kein Punkt weder von  $E'_{n-m}$  resp.  $\bar{E}'_{n-m}$  noch von der von  $E_{m-n}$  resp.  $\bar{E}_{m-n}$  und  $E'_{n-n}$  resp.  $\bar{E}'_{n-n}$  begrenzten  $E_{n-m+1}$  resp.  $\bar{E}_{n-m+1}$  ein Punkt von  $\bar{M}_{n-m}$  oder  $\bar{M}'_{n-m}$  resp.  $M'_{n-m}$  oder  $M_{n-m}$  ist. Die analoge Definition gilt für spezielle externe Transformation einer Gesamtheit von beliebig vielen Mannigfaltigkeiten ohne gemeinsame Punkte. Zwei Gesamtheiten von geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind isotop, wenn sie mittels interner und spezieller externer Transformationen aus einander hervorgehen.

Jetzt sind wir im Stande, die externen Transformationen von  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten auf  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M_n$ , d. i. von *Domänen* zu erklären. Die einzelnen eine Domäne (mit oder ohne Singularitäten) konstituierenden Raumstücke werden begrenzt durch singularitätenfreie Sphären  $\Pi_{n-1}$ . Transformieren wir den die Domäne konstituierenden Komplex extern, so zwar, daß dabei die externen Transformationen der einzelnen  $\Pi_{n-1}$  sich aus speziellen externen Transformationen zusammensetzen lassen, so nennen wir diese Operation eine (allgemeine) *externe Transformation* der entsprechenden Domänen. Können zwei Domänen nach eventuell internen Transformationen durch externe Transformationen in einander

übergeführt werden, so nennen wir sie *homotop*. Im Gegensatz von Mannigfaltigkeiten von relativ niedrigeren Dimensionen sind *zwei*, einer Elementarmannigfaltigkeit zugehörnde, *homöomorphe Domänen* mit Singularitäten *nicht allemal homotop*. (Einfachstes Beispiel: Die zwei Domänen auf dem Streckenzug  $P_0^1 P_0^2 P_0^3$  mit den Strecken  $P_0^1 P_0^2$  resp.  $P_0^1 P_0^2$ ,  $P_0^2 P_0^3$ ,  $P_0^3 P_0^2$  sind homöomorph aber nicht homotop. Dasselbe gilt von den beiden Domänen einer  $E_2$ , die durch die Fig. 1 angedeutet sind. Zwei *singularitätenfreie* Domänen sind dann und nur dann homotop, wenn die Systeme ihrer Berandungen

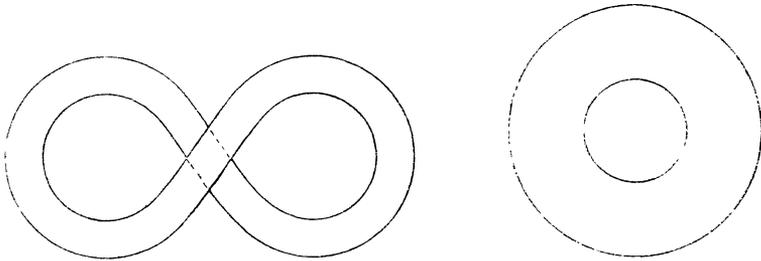


Fig. 1.

homotop sind. — Es sei eine Domäne und eine externe Transformation derselben gegeben. Dann kann man für jede interne Transformation jene externe Transformation so zu einer der neuen Domäne „erweitern“, daß dabei die alten Elemente in der ursprünglichen Weise transformiert werden. — Die speziellen externen Transformationen von (*singularitätenfreien*) Domänen erhält man so: Eine externe Transformation heißt dann *speziell*, wenn man zu jedem Paare von konstituierenden Raumstücken  $S_{n-m}^1$  und  $S_{n-m}^2$  nach event. interner Transformation ein sie beide enthaltendes Elementarraumstück  $E_n$  finden kann, dessen Begrenzung bei der betreffenden (event. gemäß der internen Transformation erweiterten) Transformation speziell transformiert wird. *Zwei aus einander durch spezielle externe Transformationen entstehende Domänen heißen isotop*. Endlich: *Zwei beliebige (singularitätenfreie) Komplexe sind isotop, wenn sie entsprechende Komplexe in isotopen Domänen sind*<sup>18a)</sup>.

Wir bemerken die Sätze: Sind zwei  $C_m$  auf einer  $M_l$ , die ein Teil einer  $M_n$  ist, isotop, so sind sie es auch auf der  $M_n$ . Zwei homöomorphe  $C_1$  auf einem  $E_4$  sind isotop (d. i. im speziellen: die Knoten sind in

18a) Zwei im  $E_n$  isotope Komplexe sind ineinander überführbar durch stetige Transformationen des zugehörigen  $n$ -dimensionalen Raumes; vgl. Nr. 8 und 10.

vier Dimensionen auflösbar<sup>18b)</sup>). Zwei isotope Kreise auf einer  $M_n$  ( $n > 2$ ) sind entsprechende Gebilde in isotopen Ringräumen.

Gelegentlich ist es von Bedeutung, auch den Indikatrixbegriff mit bei der Homotopie und Isotopie zu benutzen. Wir definieren: zwei (zweiseitige) Mannigfaltigkeiten  $M_i^1$  und  $M_i^2$  mit gegebenen Indikatricen sind miteinander homotop resp. isotop, wenn bei den betreffenden externen Transformationen gleichzeitig die Indikatrixbestimmungen in einander übergeführt werden. Es gilt der Satz: Die einzige Fläche, deren sämtliche geschlossenen Kurven auch mit Umlaufssinn einander isotop sind, ist die Kugel. (Auf einem Elementarflächenstück sind je zwei Kurven *blos ohne* Ansehen des Umlaufssinns isotop.)

**8. Das Anschauungssubstrat.** Dasjenige, was der im vorhergehenden entwickelten Theorie allein Wert verleihen kann, ist das Anschauungssubstrat, für das wir im folgenden diejenigen Eigenschaften axiomatisch aufstellen wollen, die die Grundlegung dieser Theorie, soweit sie ein anschauliches Substrat hat, ermöglichen.

#### I. Existentialaxiome.

- 1) Es gibt beliebig viele Punkte.
- 2) Linienstücke (Strecken), Flächen- und Raumstücke sind Punkt-mengen.
- 3) Zu je zwei Punkten gibt es beliebig viele von diesen Punkten begrenzte Linienstücke (Strecken), die sonst keine gemeinsamen Punkte haben.
- 4) Zu je zwei Linienstücken mit gemeinsamen Grenzpunkten, sonst aber ohne gemeinsame Punkte, gibt es beliebig viele von diesen zwei Linien begrenzte Flächenstücke ohne sonstige gemeinsame Punkte.
- 5) Zu je zwei Flächenstücken, die durch dieselben beiden Linien begrenzt werden und ohne sonstige gemeinsame Punkte, gibt es ein und nur ein von ihnen begrenztes Raumstück.

#### II. Zerlegungsaxiome.

- a) 1) Jedes Linienstück mit den Grenzpunkten  $P_0'$  und  $P_0''$  ist gleich der Gesamtheit von zwei Linienstücken mit einem gemeinsamen Punkt  $Q_0$ , die durch die Punkte  $P_0'$  und  $Q_0$  resp. durch  $Q_0$  und  $P_0''$  begrenzt werden.

---

<sup>18b)</sup> Klein, Math. Ann. 9 (1876), p. 478. Beispiele bei R. Hoppe, Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 224; H. Durège, Wien Ber. 82<sup>2</sup> (1880), p. 135; Hoppe, Arch. Math. Phys. 65 (1880), p. 423; vgl. auch V. Schlegel, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 105; F. Zöllner, Wiss. Abh. 1 (1878), p. 272; O. Simony, Gemeinf. Lösung . . ., Wien (3. Aufl.) 1881, p. 38 ff.

- 2) Jedes Flächenstück mit den Grenzstrecken  $S_1'$  und  $S_1''$  ist gleich der Gesamtheit von zwei Flächenstücken, die bloß eine Strecke  $T_1$  gemeinsam haben, und von  $S_1'$  und  $T_1$  resp. von  $T_1$  und  $S_1''$  begrenzt werden.
- 3) Jedes Raumstück mit den Grenzflächen  $S_2'$  und  $S_2''$  ist gleich der Gesamtheit von zwei Raumstücken, die bloß eine Fläche  $T_2$  gemeinsam haben, und von  $S_2'$  und  $T_2$  resp.  $T_2$  und  $S_2''$  begrenzt werden.
- b) Gegeben sei irgendwie eine endliche Anzahl von Punkten, Strecken, Flächen und Raumstücken. Dann kann man ein Raumstück  $S_3$  so finden, daß jedes einzelne dieser Elemente ein *inneres* Element einer aus  $S_3$  durch Zerlegung nach [II a) 1), 2), 3)] entstehenden  $E_3$  ist. Man kann für *alle* Elemente *eine* solche  $E_3$  finden, wenn zwei Linien des gegebenen Systems nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, zwei Flächen eine endliche Anzahl von isolierten Punkten und Strecken, zwei Raumstücke nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, Strecken und Flächen gemeinsam haben.

Hiernach sind zwei *homöomorphe*, im Raum ausgebreitete *Komplexe* anschaulich als *analog zusammensetzbar* oder *überdeckbar* zu betrachten. Eine interne Transformation eines Komplexes entspricht hier einer Zerlegung desselben.

### III. *Deformationsaxiom.*

Zwei auf einer Linie, Fläche oder räumlichen Domäne gelegene Komplexe sind dann und nur dann in einander mit resp. ohne Selbstdurchdringung *stetig deformierbar*, wenn sie homotop resp. isotop sind.

Dieses Axiom ist die Zusammenfassung einer großen Reihe von einzelnen Aussagen, z. B.: Begrenzen zwei Linien ein Flächenstück, so sind sie auf diesem in einander stetig deformierbar. Ferner: Zwei in einander ohne Selbstdurchdringung im Raume deformierbare Komplexe können so mit räumlichen Domänen umgeben werden, daß diese Domänen in einander stetig deformierbar sind, wobei die beiden Komplexe in einander übergehen. Der Fundamentalsatz (Nr. 7) über den Zusammenhang zwischen Homotopie und Homöomorphie kann jetzt so ausgesprochen werden:

*Zwei gleichzusammensetzbare Flächen sind (mit Durchdringung) in einander stetig deformierbar.*

**9. Einteilung der Analysis situs.** Alle diejenigen Eigenschaften topologisch definierter Gebilde, bei denen weder interne noch externe Transformation in Betracht kommt, fassen wir unter dem Namen

*Complexus*<sup>18c)</sup> zusammen. In ihrer Anwendung auf geometrische Gebilde sind bloß die Existentialaxiome und die ersten drei Zerlegungsaxiome, soweit mit ihrer Hilfe auf die Existenz gewisser Komplexe geschlossen werden kann, nötig. Alle die Eigenschaften, für welche die interne, aber nicht die externe Transformation eingeführt werden müssen, d. i. die bei internen Transformationen invariant bleibenden Eigenschaften topologischer Gebilde, gehören der Theorie des *Nexus* (Zusammenhang) an. Hier sind zur geometrischen Deutung alle Zerlegungsaxiome von Nöten. Die Invarianten für interne und externe Transformationen gehören der Theorie des *Connexus* („relativer“ Zusammenhang, Zusammenhang von Mannigfaltigkeiten auf anderen Mannigfaltigkeiten) an. Hier müssen zur räumlichen Deutung auch die Deformationsaxiome gebraucht werden. Endlich, für sich wollen wir im folgenden die *Theorie der Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten* behandeln, die je nach verschiedenen Gesichtspunkten der Complexus- oder der Connexustheorie zugerechnet werden kann.

**10. Die Methode.** Durch die Entwicklungen der ersten sieben Nummern dieses Abschnittes ist die *Analysis situs* dargestellt als ein *durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichnete Teil der Kombinatorik*. Das ist schon für die Widerspruchslosigkeit der in Nr. 8 aufgestellten Axiome von großer Bedeutung. In der nun folgenden Darstellung des bisher in der *Analysis situs* Erreichten wird dieser Standpunkt nicht immer streng eingehalten; es werden vielmehr häufig mit Hilfe der Anschauung wichtige Schlüsse gezogen: Die Anschauung ist nicht nur der Maßstab für die Bedeutung der einzelnen Resultate, sondern sie ist auch der beste Führer in der Entdeckung neuer Sätze und ihrer Beweise. Aber in jedem einzelnen dieser Fälle kann man ohne Schwierigkeit sehen, daß die in Betracht kommenden Schlüsse auch allein mit Hilfe der vorangehenden abstrakten Entwicklungen gemacht werden können, wie denn überhaupt alle speziellen Überlegungen, die zu irgend einer Zeit auf unserem Gebiet angestellt worden sind, als natürliches Fundament unsere obigen Definitionen haben, während die oft an die Spitze gestellte Theorie der stetigen Raumdeformationen (s. Einleitung) wesent-

---

18c) Bei der Definition von  $C_3$  und höheren Komplexen haben wir (Nr. 5) den Begriff der  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  usw. benutzt, den wir mit Hilfe der Einführung der internen Transformationen begründet haben. Eine rein komplektische Definition der  $\Pi_2$  wird uns durch den Umstand geliefert, daß eine geschlossene  $M_2$  dann und nur dann eine  $\Pi_2$  ist, wenn auf ihr jeder Kreis begrenzt; und Entsprechendes gilt für  $\Pi_3$  usw. — Dies sind auch die einzigen Eigenschaften von  $\Pi_2$  usw., die im Abschnitt Complexus vorkommen.

lich nur einen rein dogmatischen Zweck zu erfüllen hat. Die *Analysis situs* ist eben der *primitivste Abschnitt der Geometrie*, wo der Grenzbegriff noch nirgendwo von Bedeutung ist.

## A. Complexus.

**1. Übersicht.** Die Untersuchungen, die für diesen Teil charakteristisch sind, treten klar hervor bei der Theorie der Liniensysteme (Nr. 2), die in voller Allgemeinheit studiert sind. Bei dem Studium höherer Komplexe dagegen werden zumeist Eigenschaften, die eigentlich der reinen Theorie des Complexus angehören, mit Untersuchungen nektischen Charakters vermischt entwickelt, und zwar aus dem Grunde, weil beinahe nur die spezielle Komplexgattung der Mannigfaltigkeiten untersucht wird. Hierher gehört vor allem die Ableitung der gewöhnlichen und erweiterten (komplektischen) *Eulerschen Formel* für zwei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

**2. Liniensysteme (Streckenkomplexe).** ( $\alpha_0$  Anzahl der Punkte,  $\alpha_1$  Anzahl der Linien der als zusammenhängend vorausgesetzten Systeme.) Ein Punkt des Systems, auch *Knotenpunkt* genannt, heißt von der Multiplizität  $k$ , wenn  $k$  Linien in dem Punkt zusammenstoßen. Für einen *Endpunkt* ist  $k = 1$ . Wenn  $k \geq 3$ , nennt man den betreffenden Punkt auch einen Kreuzungspunkt ( $k - 2$ )<sup>ter</sup> Ordnung<sup>19</sup>). Etwas anders wie in diesem Artikel (Grundlagen Nr. 1) wird bei *Jordan*<sup>20</sup>) und bei *G. Brunel*<sup>21</sup>) ein gegebener  $C_1$  durch Symbole dargestellt, und zwar bei dem ersteren durch die Form  $\sum a_{i,k} x_i x_k$ , wo  $x_1 \cdots x_i \cdots x_k \cdots x_{\alpha_0}$  die Punkte sind und  $a_{i,k}$  die Zahl, die angibt, wie oft  $x_i$  mit  $x_k$  verbunden ist, bei *Brunel* durch die Determinante dieser Form.

Von grundlegender Bedeutung für die Theorie des  $C_1$  sind die beiden Begriffe, die von *Listing* zuerst betrachtet und mit dem Namen *Cyklose* und *Dialyse* bezeichnet wurden<sup>22</sup>). Eine *Cyklose* ist ein geschlossener Kreis, die *Dialyse* besteht in der Zerstörung dieses Kreises durch Wegnahme einer Strecke.

Durch Wegnahme ~~von~~

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

passend gewählter Linien wird der Komplex in einen *Baum* (s. Fig. 2)

19) *Ahrens*, Math. Ann. 49 (1897), p. 312. Bei *Listing* (Census räuml. Kompl., p. 29)  $k$ -zügiger Ausgang.

20) *J. f. Math.* 70 (1869), p. 185.

21) *Bordeaux*, Extr. proc. verb. 1892—93, p. IX; *Bordeaux Mém.* (4) 5 (1895), p. 165.

22) *Census* § 7 ff.

verwandelt, d. i. in einen  $C_1$  ohne Kreise, der also, wenn „innere“ Linien vorhanden sind, durch die Fortnahme einer solchen zerfällt<sup>23)</sup>.  $\mu_1$  heißt bei Listing die *cyklomatische Ordnungszahl*<sup>24)</sup>. Für singuläre

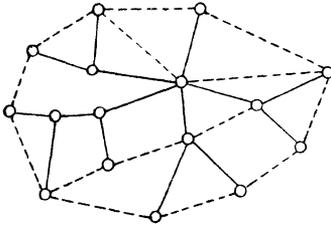


Fig. 2.

Komplexe auf einer  $\Pi_2$  mit keinen anderen Singularitäten als  $q$  Doppelpunkten, d. i. zusammenfallenden Knotenpunkten von der Multiplizität 2 (nach Listing Traversen) gibt Listing die Formel für  $\mu$ :<sup>25)</sup>

$$\mu_1 = m - q + 1,$$

wenn  $m$  die Anzahl der „Felder“ ist, in die die  $\Pi_2$  von dem Komplexe eingeteilt wird, wo ein Feld eine von Komplexstrecken begrenzte  $E_2$  ist, in der kein Punkt und keine Strecke des Komplexes liegt.

Bedeutet  $v_k$  die Anzahl der Knotenpunkte von der Multiplizität  $k$ , so ist:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sum (k v_k)$$

$$\alpha_0 = \sum v_k,$$

also:

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \sum (v) + 1,$$

wo  $\sum (v)$  die Summe der Ordnungen aller Knotenpunkte bedeutet<sup>26)</sup>.

Geben wir jeder Strecke  $S_1^i$  eines  $C_1$  einen bestimmten Sinn, dann verstehen wir unter der *Kongruenz*<sup>27)</sup>

$$\Pi_1 \equiv \sum \varepsilon_i S_1^i,$$

wo  $\varepsilon_i$  gleich  $+1$ ,  $-1$  oder Null sein kann, daß, wenn man den Kreis  $\Pi_1$  in bestimmter Richtung durchläuft, die Strecke  $S_1^i$ , wo  $\varepsilon_i = 0$  ist, überhaupt nicht, diejenige, für die  $\varepsilon = +1$  resp.  $-1$  ist, in dem gegebenen resp. in einem dem gegebenen entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. Dann besteht folgender Satz: Für jeden  $C_1$  gibt es gerade  $\mu_1$  linear von einander unabhängige solche Aggregate. Also: jeder Kreis ist „linear auszudrücken“ durch ein *Fundamentalsystem* von  $\mu_1$  Kreisen. Der Beweis hierfür folgt leicht mit Hilfe des Satzes:

23) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 72 (1847), p. 498 ff.; Listing, Census (1862), § 21; Jordan, J. f. Math. 70 (1869), p. 185; Ahrens, Math. Ann. 49 (1897), p. 315. Näheres s. Anm. 47.

24) Census § 21.

25) Census § 22, Formel (3).

26) Ahrens, Fussn. 23, p. 312 u. 315.

27) Diese Methode ist von Poincaré, Palermo Rend. 13 (1899), p. 285 eingeführt worden.

Gibt es für ein System linearer Formen  $\mu_1$  und nicht weniger Variable, von denen in jedem linearen Aggregat jener Formen mindestens eine vorkommt, so sind gerade  $\mu_1$  Formen des Systems von einander unabhängig. Man hat dann nur noch zu berücksichtigen, daß jede von null verschiedene lineare Verbindung obiger Aggregate Strecken enthält, die zusammen einen Kreis bilden. — Jedes Fundamentalsystem bestimmt Kombinationen von  $\mu_1$  „nicht zerstückelnden Linien“: eine „Gruppe von  $\mu_1$  Linien“, in der Weise, daß jede der Linien einem und nur einem der  $\mu_1$  Kreise des Fundamentalsystems angehört, und umgekehrt: zu jeder Gruppe gibt es Fundamentalsysteme<sup>28)</sup>. — Es kann höchstens  $2^{\mu_1} - 1$  Kreise geben<sup>29)</sup>.

Es hat ein besonderes Interesse, wenn sich unter den *Kreisen* eines Liniensystems solche finden, *welche alle Punkte enthalten*, jeden nur einmal. Die Frage, ob solche existieren, und dann in welcher Zahl, läßt sich nicht durch bloße Angabe der Ordnungszahlen der Punkte bestimmen. *Brunel*<sup>30)</sup> setzt die Lösung in Verbindung mit der Berechnung der früher<sup>31)</sup> besprochenen Determinante. Die Lösung verschiedener *mathematischer Spiele*<sup>32)</sup> läßt sich auf die Aufstellung solcher Kreise reduzieren. Vgl. I G 1, *Ahrens*, Nr. 3 und 7.

Eine ähnliche Frage ist die nach der *Minimalzahl von Zügen*, in welchen alle Linien des Systems je einmal durchlaufen werden können. Ein „Zug“ ist in unserer Bezeichnungsweise eine  $M_1$  mit Singularitäten. Zu dieser Frage wurde *Euler*<sup>33)</sup> durch das „Königsberger Brückenproblem“ (s. Einleitung) geführt. Ist die Zahl der Knotenpunkte von ungerader Multiplizität, die für jeden Komplex immer gerade ist, etwa  $2p$ , dann ist die kleinste Zahl von Zügen gleich  $p$ . Ist  $p = 0$ , dann

28) *Ahrens* l. c. p. 315.

29) *Ahrens* l. c. p. 317.

30) Anm. 21. 31) S. 171.

32) Vgl. *E. Lucas*, *Réc. math.*, Paris 1882—94, 4, p. 221. Beispiele: 1) *W. R. Hamilton*, *Dodekaederspiel*; *Lucas*, *Réc. math.* 2, p. 201 ff.; *Ahrens*, *Math. Spiele*, p. 327 ff.; eine ähnliche Aufgabe *Brunel*, *Bordeaux Extr. proc. verb.* 1893—94 (*Mém.* (4) 5, 1895, p. 165), p. XXVIII. 2) Der Rösselsprung (*Lucas* 4, p. 205; *Ahrens*, p. 165; vgl. *Brunel*, *Bordeaux Extr. proc. verb.* 1892—93 (*Mém.* (4) 4, 1894, p. 273), p. IX u. p. LIII; *Bordeaux Mém.* (4) 5 (1895), p. 165. 3) Das später zu nennende *Problem des Taitischen Graphes* ist jedenfalls lösbar, wenn das hier besprochene Problem gelöst werden kann; vgl. *M. de Polignac*, *Bull. soc. math. de Fr.* 27 (1899), p. 142. Ähnliche Anwendungen von Liniensystemen liegen vor z. B. bei Problemen verwandschaftlicher Beziehungen (*Litt.*: *Ahrens*, l. c. p. 78); vgl. *Brunel*, *Bordeaux Extr. proc. verb.* 1892—93 (*Mém.* (4) 4, 1894, p. 273), p. XXV; ein anderes Problem *Brunel*, ebenda, 1893—94, p. XIV.

33) *Petrop. Comm.* 8 (1741), p. 128 ff.: vgl. *Lucas*, *Réc. math.* 1, p. 21 ff. u. p. 222; *Ahrens*, *Math. Spiele*, p. 317.

kann man die sämtlichen Linien in *einem geschlossenen Zuge* durchlaufen. Dieser von *Euler* bewiesene Satz wurde später wiedergegeben oder wiedergefunden von *Th. Clausen*<sup>34</sup>), *Listing*<sup>35</sup>), *C. Hierholzer*<sup>36</sup>), *M. de Polignac*<sup>37</sup>), *Jul. Petersen*<sup>38</sup>) und *O. Steinert*<sup>39</sup>). Nach einer Bemerkung von *C. A. Laisant*<sup>40</sup>) kommt die Lösung des *Dominoproblems* auf eine Anwendung dieses Satzes heraus. Verwandt mit dem Satz ist die Aufgabe, den Weg durch ein *Labyrinth* zu finden<sup>41</sup>), und die Aufgabe der sogenannten *Schmuggerreise*<sup>42</sup>). Die Fragestellungen von *A. Thue*<sup>43</sup>) und *E. Steinitz*<sup>44</sup>) gehen in derselben Richtung.

Wenn ein Zug durch einen Knotenpunkt höchstens einmal hindurchlaufen darf, wird die Minimalzahl der Züge im allgemeinen größer. Sie hängt allein von den Ordnungszahlen der Knotenpunkte ab und ist sehr einfach zu bestimmen<sup>45</sup>).

*Jordan*<sup>46</sup>) nennt zwei Liniensysteme *A* und *A'* einander *gleich* (*pareils*), wenn sie in unserer Ausdrucksweise ohne interne Transformation einander homöomorph sind, d. i. wenn sie sich nur durch die Bezeichnungweise unterscheiden, und behandelt die Frage, ob und eventuell wie oft ein Liniensystem mit sich selbst gleich sein kann.

Die Liniensysteme von der cykломatischen Ordnungszahl 0 (einfach zusammenhängende) sind die *Bäume*<sup>47</sup>). Für einen Baum ist also

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 1.$$

34) Astr. Nachr. 21 (1844), p. 216.

35) Vorstudien, p. 59 ff.

36) Math. Ann. 6 (1873), p. 30.

37) Bull. Soc. math. de Fr. 8 (1880), p. 121 (nur für Bäume ausgesprochen), wiedergegeben in *Lucas*, Récr. math. (Paris, 2. éd., 1891) 1, p. 51 ff.

38) Acta math. 15 (1891), p. 196 u. p. 210 (nur für reguläre Liniensysteme ausgesprochen).

39) Arch. Math. Phys. (2) 13 (1895), p. 220.

40) *Lucas*, Récr. math. 2, p. 229 (Note 1) u. 4, p. 126; *Ahrens*, Math. Spiele, p. 373. Da auch die Bestimmung von der Anzahl von Lösungen durchgeführt von *G. Tarry*, Ass. fr. Nancy 2 (1886), p. 49. Vgl. auch *Brunel*, Bord. Proc. verb. 1895—96, p. 62.

41) *Ch. Wiener*, Math. Ann. 6 (1873), p. 29; *Lucas*, Récr. math. 1, p. 45 (Lösung von *Trémeaux*); *Tarry*, Nouv. Ann. (3) 14 (1895), p. 187; vgl. *Ahrens*, Math. Spiele, p. 321 ff.

42) *Lucas*, Récr. math. 1, p. 38.

43) Tidskr. f. Math. (5) 3 (1885), p. 102.

44) Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 293.

45) *F. Lippich*, Wien Ber. 69<sup>2</sup> (1874), p. 95.

46) J. f. Math. 70 (1869), p. 185.

47) *A. Cayley* nennt sie *trees*, *C. Jordan* *assemblages à continuité simple*, *M. de Polignac* *arbres, ramifications, arborescences*. Vor allem hat sich *Cayley* mit den Bäumen beschäftigt: Phil. mag. 13 (1857), p. 172 = *Papers* 3, p. 242 (um eine Reihe Differentiationsprozesse zu veranschaulichen); Phil. mag. 18 (1859), p. 374

Die meisten Untersuchungen bezwecken die Aufzählung von Bäumen, welche gegebenen Bedingungen genügen, z. B. gegebene Anzahlen von Linien, freien Endpunkten usw. haben. Diese Aufzählungen werden verschieden, je nachdem man sich den Baum als einen *Wurzelbaum*<sup>48)</sup>, von einem bestimmten Knotenpunkt entspringend, denkt oder nicht.

Diese Untersuchungen sind in *der organischen Chemie* von Bedeutung bei der Bestimmung der Anzahl von *isomeren Verbindungen*<sup>49)</sup>.

*Jordan*<sup>50)</sup> hat bewiesen, daß ein Baum immer eine *Mitte* — entweder einen zentralen Knotenpunkt, *Zentrum*, oder eine zentrale *Achse* — besitzt mit folgender Eigenschaft: im ersten Falle ist die Zahl von Linien, welche in jedem von dem zentralen Knotenpunkte entspringenden partiellen Baum enthalten sind,  $\leq \frac{\alpha_1}{2}$ ; im zweiten Falle, der nur möglich ist, wenn die Anzahl der Linien ungerade ist, teilt jeder Endpunkt der Achse (*Bizentrum*) den Baum in zwei Bäume mit resp.  $\frac{\alpha_1 + 1}{2}$  und  $\frac{\alpha_1 - 1}{2}$  Linien. Von jedem anderen Knotenpunkte entspringt in beiden Fällen ein partieller Baum mit mehr als  $\frac{\alpha_1 + 1}{2}$  Linien.

Im Gegensatz zu dieser *Jordanschen Mitte* (etwa Mitte der gesamten „Masse“ — „centre of magnitude or of number“<sup>6)</sup> definiert

= Papers 4, p. 112; Phil. mag. 47 (1874), p. 444 = Papers 9, p. 202; Rep. Brit. Ass. 1875, p. 257 = Papers 9, p. 427; Phil. mag. (5) 3 (1877), p. 34 = Papers 9, p. 544; Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598; Am. J. of math. 4 (1881), p. 266 = Papers 11, p. 365; J. Hopkins Circular 1882, p. 202 = Papers 10, p. 401; Quart. J. of math. 23 (1889), p. 376 = Papers 13, p. 26; vgl. auch Phil. Trans. 158 (1868), p. 141 = Papers 6, p. 260. Mit Bäumen beschäftigen sich auch: *Listing*, Census (1862), § 27; *Jordan*, J. f. Math. 70 (1869), p. 186; *Sylvester*, Educ. Times 30 (1878), p. 52; *S. Tebay*, Educ. Times 30 (1878), p. 81; *de Polignac*, Bull. soc. math. de France 8 (1880), p. 120; *ibid.* 9 (1881), p. 30; *Brunel*, Bord. Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. 18 u. p. 25; *ibid.* 1893—94 (Mém. (4) 5, p. 165), p. 14, 39 u. 44; Proc. verb. 1894—95, p. 8; *P. A. Mac Mahon*, Phil. mag. (5) 40 (1895), p. 153. Vgl. auch die Darstellungen: *Lucas*, Réc. math. (2. éd.) 1 (1891), p. 51 und *Ahrens*, Math. Spiele (1901), p. 304 ff.

48) *Cayley*, Phil. mag. 13 (1857), p. 172 = Papers 3, p. 242.

49) *Cayley*, Phil. mag. 47 (1874), p. 444 = Papers 9, p. 202; Rep. Brit. Ass. 1875, p. 257 = Papers 9, p. 427 (Refer. in Ber. deutsch. chem. Ges. 8 (1875), p. 1056); Phil. mag. (5) 3 (1877), p. 34 = Papers 9, p. 544; *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1892—93 (Mém. (4) 4, 1894, p. 273), p. 18; *ibid.* 1893—94 (Mém. (4) 5, 1895, p. 165), p. 39; Bordeaux Proc. verb. 1894—95, p. 8; *H. Delannoy*, Assoc. franç. Caen 2 (1894), p. 102; Phil. mag. (5) 40 (1895), p. 153. Auszug: L'interméd. 1 (1894), p. 72; Paris. Bull. soc. chim. (3) 11 (1894), p. 239; Ber. deutsch. chem. Ges. 27 (1894), p. 725. Vgl. V 6, Chemische Atomistik, *Hinrichsen*, *Mamlock* und *Study*, Nr. 36, 37 und bes. 46.

50) J. f. Math. 70 (1869), p. 186; vgl. *Cayley*, Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598.

*Sylvester*<sup>51)</sup> eine *Mitte* (*Zentrum* oder *Achse*) der *linearen Ausdehnung* („*centre and bicentre of length*“), indem er den Abstand zweier Knotenpunkte durch die Zahl der zwischenliegenden Linien mißt. Wenn der größte Abstand zweier Endpunkte  $2n$  ist, hat das Liniensystem ein *Sylvestersches Zentrum*, von welchem gerechnet die Entfernungen der Endpunkte  $\leq n$  sind; ist sie dagegen  $2n + 1$ , so hat das Liniensystem eine *Sylvestersche Achse*, von deren Endpunkten (*Bicentra*) die Knotenpunkte des Liniensystemes höchstens um  $n$  entfernt sind. Für alle anderen Knotenpunkte gibt es einen Knotenpunkt, welcher von ihm eine größere Entfernung als  $n$  hat. *Jordan* konstruiert a. a. O. noch eine andere Art von *Mitte*, die, wie man leicht sieht, gerade die *Sylvestersche Mitte* ist. Entfernt man nämlich von einem Baum alle „äußeren“ Strecken, so entsteht wieder ein Baum, entfernen wir von diesem wieder alle äußeren Strecken und fahren so fort, so bekommt man zum Schluß entweder eine einzelne Strecke (*Sylvestersche Achse*) oder lauter äußere Strecken mit einem gemeinsamen Punkt (*Sylvestersches Zentrum*).

Die *Minimalanzahl von Zügen*, mit welcher ein Baum gezeichnet werden kann, ist nach dem *Eulerschen Satz*<sup>52)</sup> die Hälfte der Anzahl von Knotenpunkten ungerader Ordnung. Für diese Zahl gibt *de Polignac*<sup>53)</sup> verschiedene Ausdrücke an. Sie ist z. B. gleich

$$\sum \left[ \frac{k+1}{2} \right] - (\alpha_0 - 1) = \sum \left[ \frac{k-1}{2} \right] - 1,$$

wo  $k$  die Multiplizität eines Knotenpunktes bedeutet,  $[a]$  (nach *Gauß*, Werke 2, p. 5) die größte ganze Zahl, die in  $a$  enthalten ist, bedeutet und wo die Summationen über alle Knotenpunkte erstreckt sind.

Ganz wie galvanische Elemente entweder in Reihen oder parallel verbunden werden können, kann man auch Kette — — — — —  
Linien in „Ketten“ oder „Joch“ zusammen- Joch   
fügen. Die speziellen Liniensysteme, welche durch sukzessives „Zusammenketten“ und „Zusammenjochen“ entstehen, nennt *Cayley Jochkette* (*yoke-chain*) und *P. A. Mac Mahon*<sup>54)</sup> zeigt, daß ihre Bildung eng mit denen von Bäumen verknüpft ist.

51) Vgl. *Cayley*, Rep. Brit. Ass. 1875, p. 259 = Papers 9, p. 428; Educ. Times 27 (1877), p. 81 = Papers 10, p. 598; Am. J. of math. 4 (1881), p. 266 = Papers 11, p. 365; *de Polignac*, Bull. soc. math. de Fr. 9 (1881), p. 39; *Brunel*, Bord. Extr. proc. verb. 1893–94, p. 29.

52) s. Anm. 33.

53) Bull. soc. math. de Fr. 8 (1880), p. 120 ff.; *ibid.* 9 (1881), p. 34 ff.; vgl. *Lucas*, Réc. math. (2 éd.) 1, p. 51.

54) Lond. Proc. math. soc. 22 (1894), p. 330.

Bei Anwendung von Liniensystemen in der Invariantentheorie<sup>55)</sup> sind insbesondere die *regulären Graphen*<sup>56)</sup> von Bedeutung, in deren Knotenpunkten überall dieselbe Anzahl  $g$  von Linien zusammenlaufen,  $g$  ist der *Grad des Graphes*,  $\alpha_0$  wird die *Ordnung* genannt. Wenn man den Graph durch Überlagerung von regulären Graphen von derselben Ordnung aber von niedrigerem Grade herstellen kann, ist er zerlegbar, sonst *primitiv*. *Jul. Petersen*<sup>57)</sup> hat folgende Sätze bewiesen: Jeder Graph *geraden* Grades läßt sich in Graphen zweiten Grades zerlegen, und zwar im allgemeinen auf verschiedene Weisen. Dagegen gibt es primitive Graphen von jedem *ungeraden* Grade. Von den Untersuchungen über Primitivität in diesem Falle ist besonders hervorzuheben, daß ein primitiver Graph *von drittem Grade* wenigstens drei Blätter haben muß, wo ein Blatt ein Teil des Graphes ist, welcher nur durch eine Linie (eine Brücke) mit den übrigen Teilen des Graphes zusammenhängt. Ein Graph *vom dritten Grade ohne Blätter* läßt sich in einen Graph ersten und einen Graph zweiten Grades zerlegen.

Der Satz von *P. G. Tait*<sup>58)</sup>, daß ein solcher Graph sich immer in drei vom ersten Grade zerlegen läßt, ist wenigstens nicht im allgemeinen richtig<sup>59)</sup>. Ob er für Graphen, welche auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte  $p = 0$  gezeichnet sind, gilt, muß vorläufig dahinstehen; bisher ist kein befriedigender Beweis dafür geführt.

Dasselbe ist der Fall, trotz vieler Mühe<sup>60)</sup>, für das damit in Verbindung stehende<sup>61)</sup> *Kartenfarbenproblem*, unter den Mathematikern

55) Vgl. Anm. 10.

56) Bei *Brunel réseaux réguliers* genannt; Bord. Proc. verb. 1894—95, p. 3.

57) *Jul. Petersen*, Acta math. 15 (1891), p. 193 ff.

58) Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657; Listings Topology, Phil. mag. (5) 17 (1884), p. 30.

59) *Jul. Petersen*, L'interméd. 5 (1898), p. 225.

60) Das Problem wird behandelt bei *Tait*, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 501 und p. 729; Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657; *Cayley*, Proc. R. Geogr. Soc. 1 (1879), p. 259 = Pap. 11, p. 7; *A. B. Kempe*, Am. J. of math. 2 (1879), p. 193; Nature 20 (1879), p. 275; 21 (1880), p. 399; *Brunel*, Bordeaux Extr. proc. verb. 1888—89 [Mém. (3) 5], p. 89; *P. J. Heawood*, Quart. J. 24 (1890), p. 332; ibid. 29 (1898), p. 270; *P. Wernicke*, Am. math. soc. Bull. (2) 4 (1897), p. 4. In L'intermédiaire als Antwort auf die Fragen Nr. 51 (1, 1894, p. 20), Nr. 360 (1, p. 213) und Nr. 425 (2, 1895, p. 8): 1, p. 192 (*Delannoy, Ramsey*); 2, p. 232 (*Delannoy, H. Brocard*); 2, p. 270 (*E. Borel*); 2, p. 395 (*Delannoy, C. Juél*); 3, 1896, p. 179 (*Ch. J. de la Vallée-Poussin*); 3, p. 225 (*Delannoy*); 5, 1898, p. 225 und 6, 1899, p. 36 (*Jul. Petersen*); *de Polignac*, Bull. soc. math. de Fr. 27 (1899), p. 142; *Wernickes* Beweis (Math. Ann. 58 (1901), p. 413) ist nicht ausreichend. Vgl. auch *Lucas*, Récér. math. 4, p. 168 [= Revue scientif. (3) 32 (1883), p. 11].

61) *Tait* l. c.; vgl. auch *Ahrens*, Math. Spiele; *Lucas*, Récér. math. 4, p. 193; *Jul. Petersen*, L'interméd. 6 (1899), p. 37.

zuerst von *F. Guthrie* und *C. de Morgan*<sup>62)</sup> berührt. Das Problem kommt darauf hinaus, folgenden Satz zu beweisen: Vier Farben genügen, um die Gebiete einer Landkarte so zu färben, daß überall zwei aneinander (längs Linien) grenzende Gebiete verschiedene Farben haben<sup>60)</sup>. Daß vier Farben notwendig sind, geht schon hervor aus dem Satze von *Möbius* (oder *H. A. Weiske*), daß auf einer der Kugel homöomorphen Fläche vier *Nachbargebiete* (*spatia confinia*) existieren<sup>63)</sup>, d. i. vier Gebiete, von denen jedes Gebiet mit jedem anderen eine Grenzstrecke gemeinsam hat. Eine obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben ist leicht zu finden, sie ist = 5 für die Kugel, = 7 für die Torusfläche. Da auf dieser aber sieben Nachbargebiete existieren<sup>63)</sup>, so ist für diese Fläche das Kartenfarbenproblem gelöst<sup>64)</sup>.

*Brunel*<sup>65)</sup> berechnet die Werte, welche  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$  und der Grad eines regulären Graphes annehmen können für  $\mu$  gleich 1 bis 8, ohne doch zu untersuchen, ob es Graphen gibt, welche jedes Wertsystem realisieren.

*Jul. Petersen*<sup>66)</sup> beweist mittels der Theorie der regulären Graphen die Unlösbarkeit des sogenannten „*Eulerschen Problems* der 36 Offiziere“<sup>67)</sup>.

**3. Höhere Komplexe und die (komplektische) Eulersche Formel. (Bettische Zahlen, Torsionskoeffizienten.)** Die allgemeine Theorie der höheren Komplexe, also zunächst der Flächenkomplexe oder -systeme, ist lange nicht so ausgebildet wie die der Liniensysteme. Zunächst entsteht die Frage nach den Eigenschaften derjenigen Linienkomplexe, die Flächensystemen von besonderen Eigenschaften zugrunde liegen können. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß aus einem  $C_1$

62) Edinb. Proc. 10 (1880), p. 727.

63) *R. Baltzer*, Leipzig Ber. 1885, p. 1. Die Theorie der Nachbargebiete und Nachbarpunkte auf Flächen von willkürlichem Geschlechte behandelt *L. Heffter*, Math. Ann. 38 (1891), p. 477; *ibid.* 49 (1897), p. 101; *ibid.* 50 (1897), p. 261 und setzt die Untersuchungen mit *Tripelsystemen* (I A 2, Netto, Nr. 10) in Verbindung. Im Raume gibt es keine obere Grenze der Gebiete; vgl. *F. Guthrie*, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 727 und *P. Stäckel*, Zeitschr. Math. Phys. 42 (1897), p. 275; selbst die Beschränkung auf konvexe Gebiete ändert hieran nichts, *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 16 (1905).

64) *P. J. Heawood*, Quart. J. 24 (1890), p. 332.

65) Bordeaux Proc. verb. 1894—95, p. 3.

66) Annuaire des math., Paris 1901—02, p. 413.

67) *Euler*, Vlissingen Verhandl. 9 (1782), p. 85 = Comm. arithm. coll. 2, p. 302; vgl. auch L'interméd. 2, 1895, p. 17; 2, p. 79; 3, 1896, p. 17; 3, p. 90; 5, 1898, p. 83; 5, p. 176; 5, p. 252; 6, 1899, p. 251; 6, p. 273; 7, 1900, p. 14; 7, p. 311, und *Ahrens*, Math. Spiele, p. 248 ff.

durch Hinzufügung von Flächenstücken ein  $C_2$  werden kann, ist die, daß jede Strecke des  $C_1$  zu mindestens einem geschlossenen Kreise gehört. Über Eigenschaften von solchen  $C_1$ , die einer zweiseitigen  $M_2$  angehören, siehe weiter unten. Im übrigen ist die Theorie gerade so weit entwickelt worden, um die *Eulersche Formel* und damit zusammenhängende Probleme zu erledigen.

*Homologie*<sup>68</sup>): Es sei gegeben ein im allgemeinen nicht singularitätenfreies System von *zweiseitigen* Mannigfaltigkeiten  $C_2(\{M_2\})$  auf einem  $C_n$ , deren Berandungen ebenfalls ganz oder teilweise singular sein können. Diese Berandungen mögen sich aus den geschlossenen Kreisen  $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \dots, \Pi_1^n$  zusammensetzen, die einzelne Punkte gemeinsam haben dürfen. Geben wir dann allen konstituierenden Flächenstücken von  $C_2(\{M_2\})$  einen solchen Umlaufssinn, daß jede Strecke von den zwei in ihr zusammenstoßenden Flächen entgegengesetzte Richtungen erhält, dann werden auch die Strecken von  $C_n$ , die die Berandung von  $C_2(\{M_2\})$  bilden, ein oder mehrere Male in gleichem oder verschiedenem Sinne durchlaufen werden, je nach den verschiedenen Flächenstücken des  $C_2(\{M_2\})$ , deren gemeinsame (singuläre) Kanten sie sind. Wird eine Kante  $\alpha$ -mal in dem einen Sinne,  $\beta$ -mal in dem anderen Sinne durchlaufen, so sagen wir, sie wird  $(\alpha - \beta)$ -mal im ersten Sinne oder  $(\beta - \alpha)$ -mal im zweiten Sinne durchlaufen. Ist aber  $\alpha = \beta$ , so sagen wir, die Strecke wird Nullmal durchlaufen. Wir geben nun  $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \dots$  einen beliebig bestimmten Durchlaufungssinn. Werden dann bei der obigen Umlaufbestimmung alle Strecken von  $\Pi_1^1$   $v_1$ -mal, alle Strecken von  $\Pi_1^2$   $v_2$ -mal, alle Strecken von  $\Pi_1^n$   $v_n$ -mal im gegebenen Sinne durchlaufen, so sagen wir: *Die Kreise  $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \dots, \Pi_1^n, v_1, \text{ resp. } v_2, \dots, \text{ resp. } v_n$ -mal im gegebenen Sinne durchlaufen, begrenzen  $C_2(\{M_2\})$ . Oder auch kurz:  $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \dots, \Pi_1^n$  begrenzen zusammen einen Teil des  $C_n$ . Oder endlich*

$$v_1 \Pi_1^1 + v_2 \Pi_1^2 + \dots + v_n \Pi_1^n$$

ist homolog null, in Zeichen:

$$v_1 \Pi_1^1 + v_2 \Pi_1^2 + \dots + v_n \Pi_1^n \sim 0.$$

Ist  $v_1 \Pi_1^1 + v_2 \Pi_1^2 \sim 0$ , so sagen wir  $v_1 \Pi_1^1$  ist homolog  $-v_2 \Pi_1^2$ .

Mit Hilfe des Begriffes der Kongruenz (siehe oben p. 172) können wir die Definition der Homologie kürzer so fassen: Es sei  $\Pi_{e_i}$  irgend ein Kreis, der eines der konstituierenden Flächenstücke des  $C_n$  begrenzt, und es möge die Kongruenz bestehen:

<sup>68</sup>) S. *Poincaré*, J. éc. polyt. (2) 1 (1895), p. 18; Palermo Rend. 13 (1899). p. 285 ff.

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \mu_i \Pi_{e_i}^i,$$

dann besteht auch die Homologie:

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \simeq 0.$$

Denn in der Tat: Wegen der Kongruenz begrenzen im oben definierten Sinne  $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \dots, \Pi_1^n, \nu_1$ - resp.  $\nu_2, \dots$  resp.  $\nu_n$ -mal gezählt, das System von Mannigfaltigkeiten, das aus den  $\mu_i$ -fach gezählten, von den  $\Pi_{e_i}^i$  begrenzten Flächenstücken besteht. Umgekehrt folgt aus der Homologie

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \simeq 0,$$

wie sofort einleuchtend ist, eine Kongruenz von der Form

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \mu_i \Pi_{e_i}^i.$$

Es gilt nun für Kreissysteme auf zweiseitigen  $M_2$  der charakteristische Satz: Haben in der Kongruenz

$$\nu_1 \Pi_1^1 + \nu_2 \Pi_1^2 + \cdots + \nu_n \Pi_1^n \equiv \sum \lambda_i \Pi_{e_i}^i$$

die Koeffizienten der linken Seite einen gemeinsamen Faktor, so haben denselben auch die Koeffizienten der rechten Seite gemeinsam. Hieraus folgt dann weiter: Eine auf einer zweiseitigen  $M_2$  gültige Homologie darf man durch einen gemeinsamen Faktor der Koeffizienten dividieren<sup>69</sup>). — Der Beweis für den ersten Satz wird ganz einfach so geführt: Wir setzen voraus, daß die Kreise  $\Pi_{e_i}^i$  alle voneinander linear unabhängig sind. Dann fehlt auf der rechten Seite, wegen der vorausgesetzten Zweiseitigkeit des  $M_2$ , mindestens einer der konstituierenden Kreise. Denn nach Definition der Zweiseitigkeit ist ein konstituierender Kreis der Summe aller übrigen kongruent. Nehmen wir an, etwa  $\lambda_1$  wäre durch  $\varrho$ , den gemeinsamen Faktor aller  $\nu_k$ , nicht teilbar, so folgt leicht durch Betrachtung der an  $\Pi_{e_1}^1$  anschließenden  $\Pi_{e_i}^i$ , daß kein  $\lambda_i$  durch  $\varrho$  teilbar ist und daß deswegen auf beiden Seiten jedes  $\Pi_1^i \Pi_{e_1}^k$  angrenzen müssen. Das ist aber unmöglich. Denn dann müßte an jeder Seite eines  $\Pi_{e_1}^i$  ein  $\Pi_{e_1}^k$  angrenzen und die  $\Pi_{e_1}^i$  die ganze Fläche erfüllen, was ja nicht der Fall ist.

Sei nun  $P_1 - 1$  die Maximalanzahl von zusammen nicht begrenzenden Kreisen auf einer zweiseitigen geschlossenen  $M_2$ , so ist  $\mu_1 = \alpha_2 - 1 + P_1 - 1$  nach obigem die Anzahl der Kreise eines Fundamen-

69) Bei Poincaré gleich in der Verallgemeinerung für  $n$  Dimensionen mit Hilfe der Theorie der Torsionskoeffizienten bewiesen (s. p. 184). Der Textbeweis läßt sich unmittelbar verallgemeinern.

talsystems für den der  $M_2$  zugrunde liegenden  $C_1$ . Es ist aber nach *Complexus* Nr. 2

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1.$$

Wir haben also:

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - P_1,$$

das ist die *erweiterte komplektische Eulersche Formel*. Für eine Kugel ist also (wie übrigens anders leichter zu zeigen):

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = 2.$$

Das ist die *gewöhnliche Eulersche (Polyeder-)Formel*<sup>70)</sup>. Es ergibt sich noch der Satz: Zu irgend  $P_1 - 1 - n$  nicht begrenzenden Kreisen existieren stets  $n$  weitere mit den ersten zusammen nicht begrenzende Kreise.

Gewisse fundamentale Betrachtungen bei der Theorie der  $C_1$  können in der Theorie der  $C_2$  wiederholt werden: Wir geben jeder Fläche  $S_2^i$  einen bestimmten Sinn (Indikatrix) (siehe Grundlagen Nr. 2). Dann bedeutet die *Kongruenz*

$$M_2 \equiv \sum \varepsilon_i S_2^i \quad (\varepsilon_i = 0 \text{ oder } +1 \text{ oder } -1)$$

daß, wenn man der *zweiseitigen* Fläche  $M_2$  eine bestimmte Indikatrix erteilt, die Flächenstücke  $S_2^i$ , wenn  $\varepsilon_i = 0$  ist, nicht auf  $M_2$  liegen, diejenigen für die  $\varepsilon_i = +1$  oder  $-1$  ist, durch die Indikatrixbestimmung für  $M_2$  eine mit der gegebenen übereinstimmende resp. nicht übereinstimmende Indikatrix erhalten. Für jede  $C_2$  gibt es  $\mu_2$  linear voneinander unabhängige solche Aggregate. Also jede geschlossene zweiseitige Fläche des  $C_2$  ist kongruent mit einem linearen Aggregat von  $\mu_2$  Flächen, die ein *Fundamentalsystem von geschlossenen Flächen* bilden. Jedes solche System bestimmt wieder Kombinationen von  $\mu_2$  nicht zerstückelnden Flächen von der Eigenschaft, daß nach Wegnahme der  $\mu_2$  Flächen in dem  $C_2$  keine geschlossene zweiseitige Fläche mehr vorkommt, so daß der  $C_2$  in einen *Flächenbaum* verwandelt ist. Ebenso wie oben läßt sich zeigen, daß für den  $C_2$ , der eine zweiseitige  $M_3$  bildet, die Zahl  $\mu_2 = \alpha_3 - 1 + P_2 - 1$  ist, wo  $P_2 - 1$  die *Maximalanzahl der* (einfach oder mehrfach gezählt) zusammen nicht begrenzenden zweiseitigen Flächen auf der  $M_3$  ist. Betrachten wir den die  $M_3$  bildenden  $C_1$ , so haben wir jetzt, da nach Fortnahme von  $\mu_2$  Flächenstücken keine geschlossene zweiseitige Fläche mehr übrig bleibt,  $\alpha_2 - \mu_2$  voneinander linear unabhängige  $H_{\alpha_1}^i$ , und folglich ist,

70) Dieser rein der Komplexustheorie entspringende Beweis der (komplektischen) Eulerschen Formel rührt im wesentlichen von Poincaré her, Palermo Rend. 13 (1899), § 3. Betreffs des Zusatzes „komplektisch“ s. Anm. 98.

da durch die Fortnahme der  $\mu_2$  Flächenstücke keine Kante weggefallen sein kann, für diesen  $C_1$  die Zahl  $\mu_1 = \alpha_2 - \mu_2 + P_1 - 1$ , wenn  $P_1 - 1$  die Maximalanzahl der zusammen auf  $M_3$  nicht begrenzenden Kreise von  $C_1$  ist. Nun ist aber wieder  $\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$  und so erhalten wir die Beziehung:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -P_1 + P_2.$$

Einer Verallgemeinerung auf  $n$  Dimensionen steht nichts im Wege, so daß für die Anzahlen der Teilmannigfaltigkeiten einer zweiseitigen  $M_n$  die Beziehung gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^n \alpha_n \\ & = 1 + (-1)^n - (P_1 - 1) + (P_2 - 1) + \dots + (-1)^{n-1} (P_{n-1} - 1), \end{aligned}$$

wenn  $P_k$  dem Obigen entsprechend definiert ist. Dies ist die erweiterte (komplektische) Eulersche Formel für  $n$  Dimensionen.<sup>71)</sup>  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  heißen die Betti'schen Zahlen der Mannigfaltigkeit  $M_n$ .<sup>72)</sup> Um für einseitige  $M_n$  die analoge Formel zu erhalten, braucht man nur auf der rechten Seite der obigen Gleichung die Zahl  $(-1)^n$  fortzulassen.

Wie aus dieser Art der Ableitung hervorgeht, gilt diese Formel auch für Komplexe  $C_n$ , welche bloß die Forderung erfüllen, daß ein

71) S. Poincaré a. a. O.; vgl. auch die folg. Anm. Für eine Sphäre für die (nach „Grundlagen“ Nr. 5) alle Zahlen  $P_1, \dots, P_{n-1}$  gleich 1 sind, ergibt sich

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^n \alpha_n = 0$$

oder  $= 2$ , je nachdem  $n$  ungerade oder gerade ist. Über die Literatur zu diesem Satze, der sich viel leichter mit Hilfe des Begriffes des Homöomorphismus resp. der internen Transformation ableiten läßt, vgl. *Complexus* Nr. 4 und *Nexus* II Nr. 1 und Anm. 99.

72) Diese Bezeichnung rührt von Poincaré her: J. éc. polyt. (2) 1 1895, p. 19. Betti selbst definiert die Zahlen anders, indem er nämlich den Zusatz, daß die begrenzenden Mannigfaltigkeiten einfach oder mehrfach gezählt werden dürfen, nicht macht. Die so definierten Zahlen sind von denen Poincarés im allgemeinen verschieden, und es gilt für sie die obige Formel nicht mehr. Hierauf hat Heegaard, Forstudier . . . , Dissert. Kopenhagen 1898, p. 87 ff. aufmerksam gemacht, was Poincaré Palermo Rend. 13 (1899), p. 1 ff. weiter ausführt. Dieselbe Definition wie Betti gibt Riemann in seinem Fragment über An. sit. Werke 2. Aufl., p. 479. Es ist nicht unmöglich, daß die Arbeiten von Betti und Riemann nicht unabhängig voneinander entstanden sind (Riemanns Aufenthalt in Italien, vgl. R. Werke, 2. Aufl., p. 555 f.). Vgl. A. Tonelli, Rom Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 594; E. Bartolotti, Rom Linc. Rend. (4) 5<sup>2</sup> (1889), p. 229; Tonelli, Rom Linc. Rend. (4) 6<sup>1</sup> (1890), p. 139. Ferner E. Picard et G. Simart, Th. d. f. d. 2 variables, Paris, 1 (1897), p. 27 ff. Der Beweis, den Poincaré für die Formel im J. éc. polyt. gegeben hat, ist, wie Heegaard l. c. bemerkt hat, unrichtig, ebenfalls wegen Nichtbeachtung der beiden verschiedenen Definitionen der Betti'schen Zahlen.

konstituierendes Raumstück  $S_{n-1}$  zu zwei und nur zu zwei konstituierenden  $S_n$  gehört, d. i. für unhomogene Komplexe (siehe Grundlagen Nr. 5), so z. B. für Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, bei denen die Umgebung nicht jedes Punktes sich wie eine Kugel verhält, sondern bei denen Punkte etwa mit ringflächenförmigen Umgebungen existieren. (Beispiel: Eine Mannigfaltigkeit bestehe aus zwei Raumstücken mit zwei gemeinsamen Flächenstücken (d. i. einem Torus) und den Pyramiden mit gemeinsamer Spitze, deren Basen die anderen die beiden Raumstücke begrenzenden Flächenstücke sind.) Eine andere Art von Beispielen liefern  $C_2$ , die geschlossene  $M_2$  mit singulären Punkten (Selbstberührungspunkten) darstellen. Nennt man  $\bar{\alpha}_n$  die Anzahl der  $S_n$  eines  $C_n$ , zwischen deren Berandungen keine Kongruenz besteht ( $\bar{\alpha}_n = \alpha_n$  resp.  $= \alpha_n - 1$  für ein- resp. zweiseitige  $M_n$ ), dann ist folgende Verallgemeinerung der komplexistischen Eulerschen Formel für einen beliebigen Komplex  $C_n$  gültig:

$$\sum_0^{-1} (-1)^k \alpha_k + (-1)^n \bar{\alpha}_n = 1 + \sum_1^{n-1} (P_i - 1) (-1)^i.$$

Nur für gewöhnliche (homogene) geschlossene Mannigfaltigkeiten dagegen gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Größen, die wir *kombinierte Anzahlen*<sup>73)</sup> nennen wollen: Unter  $\alpha_{i,k} (M_n)$  verstehen wir, wenn  $i > k$  ist, die Anzahl der  $M_n$  konstituierenden Mannigfaltigkeiten  $i^{\text{ter}}$  Dimension, jede so oft gezählt, als sie von Mannigfaltigkeiten  $k^{\text{ter}}$  Dimension begrenzt wird, wenn  $i < k$  die Anzahl der  $M_n$  konstituierenden Mannigfaltigkeiten  $i^{\text{ter}}$  Dimension, jede so oft gezählt, als die Anzahl der Mannigfaltigkeiten  $k^{\text{ter}}$  Dimension angibt, zu deren Begrenzung sie gehört. Allgemein ist  $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$  und  $\alpha_{1,0} = 2\alpha_1$ , für jede (geschlossene)  $M_n (n > 1) \alpha_{2,0} = \alpha_{2,1}$ , für jede  $M_n (n > 2) : \alpha_{3,0} + \alpha_{3,2} = \alpha_{3,1} + 2\alpha_3$ , ferner für jede  $M_2 : \alpha_{0,1} = \alpha_{0,2}$ , für jede  $M_3 : \alpha_{2,3} = 2\alpha_2$ ,  $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2}$ ,  $\alpha_{0,1} + \alpha_{0,3} = \alpha_{0,2} + 2\alpha_0$ ; diese Formel folgt, weil die Umgebung jedes Punktes sich wie eine Kugel verhält. Aus diesen Formeln folgt für eine geschlossene  $M_3$  der Satz:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0,$$

woraus nach dem Obigen folgt:

$$P_1 = P_2,$$

ein fundamentaler Satz, der zuerst von *Poincaré* richtig ausgesprochen und bewiesen wurde<sup>74)</sup>. — Allgemein ergibt sich für jede ungerade

73) Von *Poincaré*, J. éc. polyt. (2) 1 (1895), § 17, eingeführt.

74) Der Satz wurde zuerst von *Betti* l. c. ausgesprochen, ist aber unrichtig für seine Definition der *Bettischen* Zahlen. *Poincaré's* Beweis im J. éc. polyt. ist

Anzahl von Dimensionen die Formel:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots - \alpha_n = 0,$$

woraus nach dem Obigen für zweiseitige Mannigfaltigkeiten

$$P_1 - P_2 + P_3 - P_4 - \cdots - P_{n-1} = 0$$

folgt. Bei einseitigen Mannigfaltigkeiten ist das Aggregat auf der linken Seite gleich 1. Für manche Zwecke ist es praktisch, kompliziertere Anzahlen einzuführen, die von drei und mehr Argumenten abhängen<sup>75</sup>).

*Poincaré* hat noch eine ganz andere Art von Größen eingeführt, die Mannigfaltigkeiten (von mehr als zwei Dimensionen) charakterisieren, nämlich die *Torsionskoeffizienten*<sup>76</sup>). Wir erweitern die Definition von Homologien für mehrdimensionale zweiseitige Mannigfaltigkeiten und es sei etwa:

$$k \sum v_i \Pi_q^i \sim 0, \quad (k > 1),$$

und  $k$  die kleinste Zahl, die diese Homologie erfüllt (es darf also z. B. nicht  $\sum v_i \Pi_q^i$  selbst  $\sim 0$  sein), dann wird  $k$  ein  $q$ -dimensionaler Torsionskoeffizient der Mannigfaltigkeit  $M_n$  genannt. Den Namen rechtfertigt *Poincaré*, indem er nachweist, daß Mannigfaltigkeiten mit Torsionskoeffizienten (oder kurz mit Torsion) notwendigerweise einseitige Mannigfaltigkeiten enthalten müssen. Doch ist dieser Grund nicht recht zwingend, da umgekehrt  $M_n$  ohne Torsion, z. B. eine  $E_4$ , sogar geschlossene einseitige Gebilde enthalten können. Geschlossene einseitige  $M_{n-1}$  wird allerdings bloß eine  $M_n$  mit Torsion besitzen können. (*Poincaré* beweist übrigens nur die Existenz ungeschlossener einseitiger Gebilde<sup>77</sup>.) Sehr wichtig ist die analytische Methode zur

unzureichend (s. Anm. 72), stichhaltig dagegen in den Palermo Rend. 3 (1899). Dasselbe gilt von dem Beweise bei *Picard-Simart* l. c. p. 44 ff. Der Beweis im Text ist eine Kombination der *Poincaréschen* Betrachtungen in den beiden Arbeiten, die nur für  $M_3$  zum Ziele führt. Vgl. Complexus Nr. 4.

75) S. M. Dehn, Math. Ann. 61 (1906), p. 561.

76) Lond. Math. Soc. 32 (1900), p. 281 ff.

77) Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit Torsion bei *Poincaré*, J. éc. polyt. (2) 1895, p. 52; *Heegaard*, Forstudier; *Poincaré*, Palermo Rend. 13, p. 287 f. Die den Beispielen zugrunde gelegten  $M_3$  sind alle homöomorph mit dem projektiven dreidimensionalen Raum oder, was dasselbe ist, mit dem Kugelraum, dessen Oberfläche zentral auf sich selbst bezogen ist, d. i. der zweiseitigen dreidimensionalen Erweiterung des geschlossenen *Möbiusschen* Bandes (s. Connexus II B). Eine einfache Zusammensetzung dieser Mannigfaltigkeit aus Raumstücken erhält man in einer Mannigfaltigkeit, die aus 4 Hexaedern (Würfeln), 12 Vierecken, 16 Strecken (den Kanten und Körperdiagonalen eines Würfels) und 8 Punkten besteht.

Bestimmung der Torsionskoeffizienten<sup>78)</sup>. Man gibt jedem Raumstück  $S_{q+1}^i$  und  $S_q^k$  eine bestimmte Indikatrix. Dann setzt man  $\varepsilon_{ik} = 0$ , wenn  $S_q^k$  nicht auf  $S_{q+1}^i$  liegt, gleich  $+1$  oder  $-1$ , wenn  $S_q^k$  auf  $S_{q+1}^i$  liegt und durch die Indikatrix des letzteren eine mit ihrer eigenen übereinstimmende resp. ihr entgegengesetzte Indikatrix bestimmt wird. Man macht sich aus den  $\varepsilon_{ik}$  eine Tabelle  $T_{q+1}$ , mit  $\alpha_{q+1}$  Linien und  $\alpha_q$  Kolonnen, in der  $\varepsilon_{ik}$  in der  $i^{\text{ten}}$  Linie und  $k^{\text{ten}}$  Kolonne zu stehen kommt. Die Tabelle kann durch Addition und Subtraktion einzelner Kolonnen oder Linien, ferner durch Vertauschung mit gleichzeitigem Zeichenwechsel in eine solche übergeführt werden, in der alle Elemente null sind mit Ausnahme der Elemente, für die  $i = k$  ist. Diese sind, wenn sie von null,  $+1$  und  $-1$  verschieden sind, die Torsionskoeffizienten der betreffenden Mannigfaltigkeit. Solche Tabellen sind auch sonst sehr praktisch, z. B. zur Entscheidung der Frage, ob eine vorliegende Mannigfaltigkeit ein- oder zweiseitig ist.

**4. Benutzung von nektischen Methoden für die Theorie höherer Komplexe.** Da die Zusammenhangstheorie (nexus) für mehr als zwei Dimensionen bisher nur unvollkommen entwickelt ist, andererseits die bisherigen Resultate derselben in engstem Zusammenhange mit dem Vorhergehenden stehen, sollen diese gleich an dieser Stelle auseinandergesetzt werden. Da bei jedem einzelnen der Prozesse, die eine interne Transformation (siehe Grundlagen Nr. 5) zusammensetzen, jedesmal gleichzeitig zwei aufeinanderfolgende Anzahlen einer  $M_n$  je um Eins vermehrt werden, so ergibt sich der Satz, daß für zwei homöomorphe  $M_n$  die alternierende Summe der Anzahlen  $\alpha_i$  gleich sein muß. Diese Summe entspricht nach Dych<sup>79)</sup> der Kroneckerschen Charakteristik eines die Mannigfaltigkeit darstellenden Funktionensystems (siehe auch Nexus Nr. 8). Man überzeugt sich ferner leicht, daß die Maximalanzahl nicht begrenzender Kurven, Flächen usw. durch eine interne Transformation ungeändert bleibt. Wir erhalten so den Satz: Zwei homöomorphe  $M_n$  haben gleiche Bettische Zahlen (s. Nr. 3), die übrigens auch Zusammenhangszahlen genannt werden. Speziell erhalten wir hierdurch das Resultat, daß die Zusammenhangszahlen für eine Mannigfaltigkeit im engeren Sinne (reduzierte Bettische Zahlen nach Poincaré) gleich den Zusammenhangszahlen für eine Mannigfaltigkeit im weiteren Sinne (siehe Grundlagen Nr. 4) sind. Dadurch gewinnen die Sätze des vorigen Abschnittes eine tiefere Bedeutung. Ganz dasselbe, was hier über die Zusammen-

78) Poincaré, Lond. Math. Soc. 32 (1900), p. 281 ff.

79) Math. Ann. 37 (1890), p. 273 ff.

hangszahlen gesagt ist, gilt auch für die Torsionskoeffizienten, infolge des ebenfalls leicht zu beweisenden Satzes, daß zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten gleiche Torsionskoeffizienten haben. Nach *Poincaré*<sup>80)</sup> gibt es zu jeder Mannigfaltigkeit  $M_n$  eine homöomorphe zu ihr reziproke  $M'_n$  von der Art, daß jedem Punkt von  $M_n$  ein  $S_n$  von  $M'_n$ , jedem  $S_{n-m}$  von  $M_n$  ein  $S_m$  von  $M'_n$ , endlich jedem  $S_n$  von  $M_n$  ein Punkt von  $M'_n$  in der Weise zugeordnet werden kann, daß, wenn auf  $M_n$  ein  $S_i$  zur Begrenzung eines  $S_k$  gehört, das  $S_k$  entsprechende  $S_{n-k}$  auf  $M'_n$  zur Begrenzung des entsprechenden  $S_{n-i}$  gehört. Es läßt sich dann zeigen, daß die Maximalanzahl der nicht begrenzenden  $\Pi_k$  auf  $M_n$  gleich der Maximalanzahl der nicht begrenzenden  $\Pi_{n-k}$  auf  $M'_n$  ist, woraus nach dem Obigen, weil  $M_n$  und  $M'_n$  homöomorph sind, für jede geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit  $M_2$  der wichtige Satz folgt:

$$P_k \equiv P_{n-k} \cdot^{81)}$$

Ebenso folgt, daß die  $q$ -dimensionalen Torsionskoeffizienten mit den  $(n-1-q)$ -dimensionalen Torsionskoeffizienten übereinstimmen<sup>82)</sup> müssen und daß eine zweiseitige  $M_n$  keine  $(n-1)$ -dimensionale Torsion haben kann<sup>83)</sup>, was gleichbedeutend mit dem Satz ist, der für  $M_2$  oben bereits abgeleitet ist und auch direkt verallgemeinert werden kann: Homologien, die auf zweiseitigen  $M_n$  zwischen  $n-1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten bestehen, können durch einen allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor dividiert werden.

Die Vermutung<sup>84)</sup>, daß eine  $M_n$ , ohne Torsion, deren sämtliche Zusammenhangszahlen gleich 1 sind, einer Hypersphäre homöomorph ist, hat *Poincaré* durch ein Beispiel als irrig nachgewiesen<sup>85)</sup>, das in folgende Form gebracht werden kann. Man nehme zwei von Doppelringflächen  $r$  und  $r'$  begrenzte Räume  $R$  und  $R'$  und stelle aus ihnen einen geschlossenen Raum dadurch her, daß man die Oberflächen  $r$  und  $r'$  in folgender Weise aufeinander bezieht: Seien  $C_1$  und  $C_2$  resp.  $C'_1$  und  $C'_2$  zwei zusammen nicht begrenzende Kreise der Ringfläche  $r$  resp.  $r'$ , die je ein Flächenstück des betreffenden Ring-

80) Palermo Rend. 13 (1899), p. 314 ff.

81) Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes, daß für eine  $M_3$   $P_1 = P_2$  ist; für den Beweis gilt dasselbe wie für den Beweis des letzteren (s. Anm. 75). Der Beweis im Text ist der von *Poincaré* in Palermo Rend. 13, § 8 und Lond. Math. Soc. 32 (1900), § 5, p. 295.

82) *Poincaré*, Lond. Math. Soc. a. a. O. p. 302.

83) *Poincaré*, a. a. O. p. 307.

84) *Poincaré*, a. a. O. p. 308.

85) Palermo Rend. 18 (1904), p. 45.

raumes begrenzen (also auf diesem homolog null sind) (siehe Figur 3). Seien ferner  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei Kurven auf  $r$ , von denen  $\Gamma_1$  mit  $C_1$  einen und mit  $C_2$  keinen Punkt, und  $\Gamma_2$  mit  $C_1$  keinen und mit  $C_2$  einen Punkt gemeinsam hat. Endlich seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei sich nicht schneidende Kurven auf  $r$ , die bei geeigneter Wahl des Durchlaufungssinus von  $C_1, C_2, \Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  die Homologie

$$(1) \quad D_1 + 2\Gamma_1 + \Gamma_2 + C_1 \sim 0 \dots$$

und

$$(2) \quad D_2 + 3\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + C_1 + C_2 \sim 0 \dots$$

befriedigen (siehe Figur 3). Da man wegen der Ersetzbarkeit von

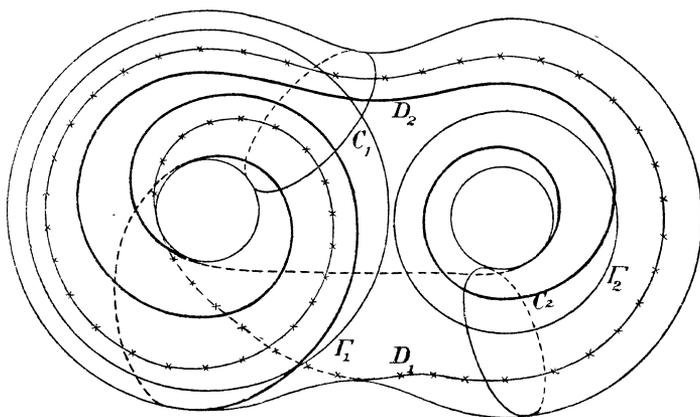


Fig. 3.

Homologien durch Kongruenzen (siehe Seite 179) dieselben mit ganzen Zahlen multiplizieren und voneinander abziehen kann, so folgen aus diesen Homologien die weiteren:

$$(3) \quad \Gamma_1 + 2D_1 - D_2 + C_1 - C_2 \sim 0 \dots$$

und

$$(4) \quad \Gamma_2 - 3D_1 + 2D_2 - C_1 + 2C_2 \sim 0 \dots$$

Da das System  $\{D_1, D_2\}$  äquivalent (siehe Grundlagen Nr. 3 und Nexus Nr. 7) ist mit dem System  $\{C_1, C_2\}$ , so kann man die Ringflächen  $r$  und  $r'$  so homöomorph auf einander beziehen, daß  $D_1$  und  $D_2, C_1'$  und  $C_2'$  entsprechen. Erklärt man nun überhaupt sich so entsprechende Elemente von  $r$  und  $r'$  als identisch, so erhält man einen geschlossenen Raum, ohne Torsion, dessen Bettische Zahlen = 1 sind. Denn: Jede der  $M_3$  angehörige Kurve begrenzt und zwar einmal genommen. Denn in  $R$  begrenzen  $C_1$  und  $C_2$ , in  $R'$   $D_1$  und  $D_2$ , und folglich nach (3) und (4)

auch  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , weil jede einem Aggregat von begrenzenden Kurven homologe Kurve selbst begrenzt. Jede andere Kurve aber ist homolog mit einem linearen Aggregat von  $C_1, C_2, \Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Also ist die  $M_3$  ohne Torsion und es ist  $P_1 = 1$ . Also auch  $P_2 = 1$  (siehe p. 183). Aber diese  $M_3$  ist nicht mit einer Hyperkugel homöomorph. Denn: Zerlegt man eine Hyperkugel irgendwie in zwei Doppelringräume,  $R$  und  $R'$  mit der gemeinsamen Begrenzungsfläche  $r$ , dann sind die in  $R$  begrenzenden Kurven von  $r$  in der obigen Bezeichnung homolog mit  $C_1, C_2$  oder  $C_1 + C_2$ , und die in  $R'$  begrenzenden mit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  oder  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ , wo, wie oben  $\Gamma_1 C_1$  in einem und  $C_2$  in keinem Punkt, und  $\Gamma_2 C_1$  in keinem und  $C_2$  in einem Punkt schneidet. Das ist aber für die oben konstruierte  $M_3$  nicht der Fall.

Die Lösung des Hauptproblems in der Zusammenhangstheorie, nämlich notwendige und hinreichende Bedingungen für den Homöomorphismus zweier  $M_n$  aufzustellen, ist für mehr als zwei Dimensionen leider nicht gelungen. Das liegt vor allem daran, daß es bisher nicht gelungen ist, Normalformen für  $M_n$  ( $n > 2$ ) (siehe *Nexus* Nr. 3) aufzustellen<sup>85a)</sup>86).

## B. Nexus.

### I. Nexus von Linien.

Hier ist die ganze Theorie erschöpft in dem Satze: Jede ein-dimensionale Mannigfaltigkeit ist entweder mit einer Strecke oder mit einem aus zwei Strecken bestehenden Kreise homöomorph<sup>87)</sup>.

Doch sollen hierher, wegen der späteren Verallgemeinerung, noch gerechnet werden gewisse Betrachtungen analytisch-geometrischer Natur, die von *Dyck*<sup>88)</sup> herrühren. *Dyck* bestimmt eine Charakteristik  $K$  für ein System  $\{M_1\}$  von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten, die

85a) Hierauf weist *Dyck*, *Math. Ann.* 37 (1890), p. 306 hin. Vgl. bei *Heegaard*, *Dissert.* Kopenhagen 1898, den Versuch, das Verfahren zur Herstellung von Normalformen von  $M_2$  für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten zu erweitern, p. 43 ff.

86) Über weitere polydimensionale Untersuchungen s. *Nexus* Nr. 8, *Connexus* I und II B; vgl. ferner: *P. Wernicke*, Über die An. sit. mehrdimensionaler Räume, Göttingen 1904 (*Dissert.*). Schon *Möbius*, *Leipzig Ber.* 15 (1863), p. 18 = *Werke* 2 (1886), p. 435, hat sich mit 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, nämlich mit den von Ring- und Kugelflächen begrenzten Teilen eines  $E_3$  beschäftigt. Sein Hauptresultat ist, daß alle von je einer Ring- und einer Kugelfläche begrenzten Raumteile einander elementarverwandt sind. Seine Behauptung, daß alle von je zwei Ringflächen begrenzte Körper elementarverwandt sind, ist, wie leicht einzusehen, unrichtig.

87) *S. F. Möbius*, *Leipzig Ber.* 15 (1863), p. 18 = *Werke* 2 (1886), p. 435.

88) *Leipzig Ber.* 13 (1886), p. 53; *Math. Ann.* 32 (1888), p. 465 ff.

gleich der Anzahl der ungeschlossenen Linien dieses Systems ist. Mit Hilfe der *Kroneckerschen* Charakteristikentheorie [I B 3a, *Runge*, Nr. 7] bestimmt er zunächst die Charakteristik desjenigen  $\{M_1\}$ , welcher von den „innerhalb“ einer Kurve  $\psi(x, y) = 0$  liegenden Teilen der Geraden  $y = y_\alpha$ <sup>89)</sup> gebildet wird. Dann wird anstatt der Geraden eine beliebige Kurve  $\varphi(x, y) = 0$  genommen<sup>90)</sup>. Durch stetige Umformung läßt er die gegebene  $\{M_1\}$  aus einer  $\{M_1\}$  mit bekanntem  $K$  entstehen. Es ändert sich  $K$  für solche Lagen der sich deformierenden  $\{M_1\}$ , bei denen die Kurven  $\psi = 0$  und  $\varphi = 0$  sich berühren. Durch Untersuchung des Einflusses, den die verschiedenen Arten von Berührungspunkten auf die Änderung von  $K$  haben, ergibt sich  $K$  d. i. also: die Anzahl der Stücke von  $\varphi = 0$ , die innerhalb  $\psi = 0$  liegen, als die *Kroneckersche* Charakteristik des Funktionensystems<sup>91)</sup>

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta = 0,$$

wo  $\Delta$  die Funktionaldeterminante von  $\varphi$  und  $\psi$  bedeutet.

## II. Nexus von Flächen.

**1. Einleitung.** Das Hauptproblem unserer Theorie ist die *Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus zweier gegebener Flächen.  $M_2$  und  $M_2'$* .<sup>92)</sup> Die Lösung ist die folgende:

89) Leipzig Ber. I. c., p. 62 und Leipzig Ber. 14 (1887), p. 40.

90) Math. Ann. 32 (1888), p. 466 ff.

91) *L. Kronecker*, Berlin Monatsber. 1878, p. 145.

92) Der wesentliche Kern dieses Problems ist zuerst von *Riemann* behandelt worden (Diss. Gött. (1851) Nr. 6 = Werke (2. Aufl.), p. 9 und J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke (2. Aufl.), p. 91) und zwar nach zwei verschiedenen Methoden, nämlich erstens mit Hilfe der Theorie der Querschnitte (Diss.) und zweitens mit Hilfe der Theorie der Rückkehrschnitte (J. f. Math.). Bei unserer Darstellung ergeben sich die *Riemannschen* Resultate über Querschnitte und Rückkehrschnitte als Korollare der allgemeinen Theorie (s. Nr. 4, 5). Das Problem ist nach dem Fundamentalsatz der Homotopie (Grundlagen Nr. 7) äquivalent mit dem Problem: Wann sind zwei  $M_2$  im  $E_3$  miteinander homotop, oder, anschaulicher, ineinander stetig transformierbar? In dieser Form ist das Problem von *Jordan* (J. de math. (2) 11 (1866), p. 105) formuliert und für zweiseitige Flächen behandelt worden. Daß hierbei alle möglichen sogenannten anschaulichen Annahmen gemacht werden, ist von vorneherein klar. Es wird z. B. die Endlichkeit des Geschlechts (s. Nexus Nr. 5) vorausgesetzt, ferner folgende Annahme über die stetige Deformierbarkeit gemacht: „Deux surfaces  $S, S'$  sont applicables l'une sur l'autre, si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quiconques contigus de  $S$  correspondent des éléments contigus de  $S'$ .“ Naturgemäß werden nachher beim Beweis auch

Sei  $\alpha_2$  resp.  $\alpha_2'$  die Anzahl der (Elementar-)Flächenstücke, aus denen  $M_2$  resp.  $M_2'$  zusammengesetzt sind,  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_1'$  die Anzahlen der auf ihnen liegenden Strecken,  $\alpha_0$  resp.  $\alpha_0'$  die Anzahlen der auf ihnen liegenden Punkte. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus von  $M_2$  und  $M_2'$ :

- A.  $\left\{ \begin{array}{l} 1) M_2 \text{ und } M_2' \text{ haben gleich viel Randkurven,} \\ 2) M_2 \text{ und } M_2' \text{ sind entweder beide einseitig oder beide zweiseitig,} \\ 3) \quad \quad \quad -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_0' + \alpha_1' - \alpha_2'. \end{array} \right.$

Daß 1), 2) und 3) *notwendige* Bedingungen sind, ist sofort einzusehen. Für 1) ist das selbstverständlich, für 2) folgt es aus Grundlagen Nr. 5, endlich, da durch die beiden Fundamentaltransformationen des Homöomorphismus sich  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gleichzeitig um eine Einheit vermehren, so ergibt sich auch 3) als notwendig. Es ist ferner auch keine von den Bedingungen in den beiden anderen enthalten, d. i. man kann zwei einander nicht homöomorphe Flächen konstruieren, die zwei der Bedingungen, aber nicht die dritte befriedigen. Im speziellen folgt aus 3), daß für alle der Kugel homöomorphe Flächen  $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2 = 0$  sein muß. Diese Formel heißt die *spezielle Eulersche Polyederformel*<sup>92a)</sup>. Daß die drei Bedingungen A. hinreichende Bedingungen sind, ergibt sich durch Konstruktion einer Normalform für jede Fläche resp. einer Normalüberdeckung einer gegebenen Fläche mit Flächenstücken.

**2. Normalform**<sup>93)</sup>. Wir machen die gegebene Fläche  $M_2$  zunächst dadurch zu einer unberandeten Fläche  $M_2^0$ , daß wir Elementar-

stillschweigend Annahmen über die Entstehung solcher unendlich kleiner Teile gemacht. Charakteristisch für die anschauungsgemäße Beweisführung ist endlich, daß die Voraussetzung der Zweiseitigkeit gar nicht ausdrücklich gemacht wird, sondern nur in abgeleiteten Eigenschaften (s. p. 107 a. a. O.) zu Tage tritt.

Wesentlich in der vorliegenden Formulierung ist das Problem vor *Jordan* von *Möbius* für zweiseitige geschlossene Flächen in unbedingt ausreichender Strenge erledigt worden (Leipzig Ber. 15 (1863), p. 19 = Werke 2 (1886), p. 436 ff.), indem er von den als elementarverwandt (s. Anm. 15) nachzuweisenden Flächen voraussetzt, daß sie endliche Ausdehnung haben, stetig gekrümmt und ohne Doppellinien sind.

Der allgemeinste Fall des Problems wird von *Dyck* (Math. Ann. 32 (1888), p. 457) behandelt. Jedoch ist die Behandlung nicht als vollständig zu bezeichnen, weil die Überführbarkeit aller Flächen in gewisse Normalformen ohne Beweis angenommen wird. Gerade hierin liegt aber die Schwierigkeit (vgl. Anm. 93).

92\*) Literatur s. Anm. 99.

93) Die erste Idee, auf die hier entwickelte Weise eine Normalform zu erhalten, findet sich bei *Listing*, Der Census räumlicher Komplexe, 1862, Nr. 13 =

flächenstücke hinzufügen, die von den Randkurven von  $M_1$  begrenzt werden. Nach der Ausführung dieses Prozesses greifen wir irgend eines der konstituierenden Flächenstücke, etwa  $S_2^1$ , heraus, dessen Begrenzung  $b'$  sein möge. Gibt es ein Elementarflächenstück  $S_2^2$ , das mit  $b'$  nur einen Streckenzug gemeinsam hat, so wollen wir auch dies herausgreifen. Die  $S_2^1$  und  $S_2^2$  nicht gemeinsamen Kanten bilden eine Berandung  $b''$ . Gibt es dann ein Elementarflächenstück  $S_2^3$ , das mit  $b''$  einen und nur einen Streckenzug gemeinsam hat, so vereinigen wir dieses wieder mit  $S_2^1$  und  $S_2^2$ . Diejenigen Kanten dieser drei Flächen, die je nur einer von ihnen angehören, bilden eine Berandung  $b'''$ . So fahren wir fort, bis wir zu einer Gesamtheit von Elementarflächenstücken  $S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^m$  gelangen, die zusammen ein Elementarflächenstück  $P_2^{(m)}$  mit der Berandung  $b^{(m)}$  bilden, von der Art, daß jedes andere der konstituierenden Polygone (Flächenstücke) mit  $b^{(m)}$  entweder mindestens zwei getrennte Streckenzüge oder keinen Streckenzug gemeinsam hat. Den zweiten Fall können wir ausschließen durch eine geeignete Abänderung der gegebenen Überdeckung (interne Transformation) („Kanal“ von  $b^{(m)}$  zu dem betreffenden Polygon; Fig. 4).

Durch eine weitere ähnliche Abänderung der Überdeckung können wir erreichen, daß jeder Eckpunkt irgend eines der nicht zu  $P_2^{(m)}$  gehörenden Polygone auf  $b^{(m)}$  liegt (Fig. 5). Endlich durch eine dritte Abänderung kann bewirkt werden, daß in jedem Eckpunkt höchstens zwei

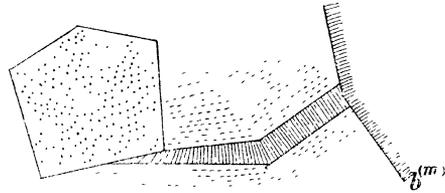


Fig. 4.

Polygone (Fig. 6) zusammenstoßen. Durch diese Abänderungen sei  $P_2^{(m)}$  in  $P_2^0$  (die „Punktierungsfläche“) übergegangen,  $b^{(m)}$  in  $b^0$ . Die nicht zu  $P_2^0$  gehörenden Polygone bilden eine Fläche  $R_2^0$  („Restfläche“). Wir nehmen eines dieser Polygone, etwa  $F_2'$  heraus, bezeichnen ein mit diesem zusammenhängendes zweites Polygon mit  $F_2''$ , ein mit  $F_2''$

Gött. Abh. 10 (1862). Sie ist von *Betti* insbesondere auch auf Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension angewandt (Ann. di mat. (2) 4 (1871), p. 146 ff.), und später von *Petersen* für zweiseitige Flächen weiter ausgebildet worden (Forelæsninger over Funktionstheori, Kopenhagen, (1895), p. 83 = Vorlesungen über Funktionentheorie, Kopenhagen, (1898), p. 76). Im Nachlaß von *Möbius* (Werke 2, Nachlaß I (§ 9)) findet sich bereits diese Konstruktion der Normalform auseinandergesetzt. Da, wie aus einer Anmerkung an der betreffenden Stelle hervorgeht, *Gauß* sich mit der Normalform im speziellen Falle der Ringfläche beschäftigt hat, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß die Idee der Konstruktion überhaupt ursprünglich von *Gauß* her stammt.

zusammenhängendes mit  $F_2'''$  usw., bis wir zu einem Polygon  $F_2^{(m_1)}$  kommen, das außer mit  $F_2^{(m_1-1)}$  auch noch mit anderen der vorangehenden Polygone Strecken gemeinsam hat, etwa mit  $F_2^{(l_1)}, F_2^{(l_2)}, \dots, F_2^{(l_{n_1})}$ . Wir verbinden dann die zwei Kanten von  $F_2^{(m_1)}$ , die zu  $b^0$  gehören, und die von der mit  $F_2^{(l_1)}$  gemeinsamen Kante ausgehen, mit einem Streckenzug, der in  $F_2^{(m_1)}$  verläuft, und schneiden so von  $F_1^{(m_1)}$  das Polygon  $G_2'$  ab. Entsprechende Streckenzüge ziehen wir zwischen den Kanten von  $F_2^{(m_1)}$ , die von denjenigen Kanten ausgehen, die  $F_2^{(m_1)}$

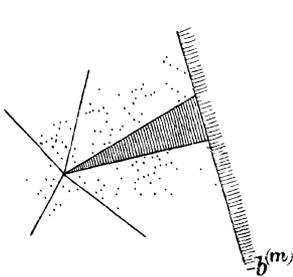


Fig. 5.

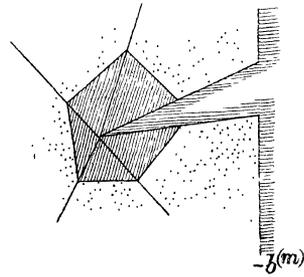


Fig. 6.

mit  $F_2^{(l_2)}$  resp.  $F_2^{(l_3)}, \dots$  gemeinsam hat. Sorgen wir dafür, daß diese Streckenzüge sich nicht schneiden, so erhalten wir weitere Polygone  $G_2'', \dots, G_2^{(n_1)}$  und ein Polygon  $\bar{F}_2^{(m_1)}$  von der Art, daß

1)  $F_2', \dots, \bar{F}_2^{(m_1)}$  zusammen ein Elementarflächenstück  $Z_2'$  bilden, und daß

2)  $G', G'', \dots, G_2^{(n_1)}$  Elementarflächenstücke sind, von denen jedes vollständig berandet wird von zwei Streckenzügen, die es mit  $b^0$  gemeinsam hat und zwei Streckenzügen, die es mit  $Z_2'$  gemeinsam hat.

Wir nehmen jetzt ein Polygon  $F_2^{(m_1+1)}$ , das mit  $Z_2'$  eine Strecke gemeinsam hat, dann ein Polygon, das mit  $F_2^{(m_1+1)}$  zusammenhängt usw. Wir gelangen wieder zu einer Fläche  $F_2^{(m_2)}$ , die außer mit  $F_2^{(m_2-1)}$  auch noch mit anderen der vorangehenden Polygone (inkl. der Polygone von  $Z'$ ), etwa  $F_2^{(l_{n_1+1})}, \dots, F_2^{(l_{n_2})}$  zusammenhängt. Wir teilen sie dem Obigen entsprechend in  $n_2 + 1$  Teile:

$$G_2^{(n_1+1)}, G_2^{(n_1+2)}, \dots, G_2^{(n_1+n_2)} \text{ und } F_2^{m_2}.$$

So fahren wir fort, bis an keiner Fläche eine Fläche angrenzt, die nicht schon im Konstruktionsmodus vorkommt. Alle Kanten dieser Flächen (jede Fläche hat mindestens zwei solche Kanten), an denen keine andere Fläche angrenzt, gehören folglich zu  $b^0$ . Da aber jede Fläche von geschlossenen Kurven berandet wird, und  $b^0$  selbst eine geschlossene Kurve ist, so ist die Gesamtheit dieser Kanten mit  $b^0$

identisch. Da aber jedes zu  $R_2^0$  gehörende Polygon mit  $b^0$  Kanten gemeinsam hat und jede dieser Kanten nur zu einer Fläche gehört, so kommen in unserem Konstruktionsmodus alle  $R_2^0$  bedeckenden Flächen vor. Unsere Restfläche  $R_2^0$  ist dann in folgende Teile zerlegt:

1) das Elementarflächenstück („Zentralpolygon“)  $Z_2$ , das aus den Flächen  $F_2', F_2'', \dots, \bar{F}_2^{m_1}, F_2^{(m_1+1)}, \dots, \bar{F}_2^{m_2}, \dots$  besteht;

2) die  $k$  Elementarflächenstücke („Bänder“)  $G_2', G_2'', \dots, G_2^{(n_2)}, G_2^{(n_1+1)}, \dots, G_2^{(k)}$ , von denen jedes vollständig berandet wird von zwei Streckenzügen, die es mit  $b^0$  gemeinsam hat, und zwei Streckenzügen, die es mit  $Z_2$  gemeinsam hat. Für die Anzahl der Bänder und ihre gegenseitige Lage gilt folgendes:

$\alpha$ ) *Zweiseitige Flächen* (siehe über Definition von Ein- resp. Zweiseitigkeit, Grundlagen Nr. 2). Sei  $q_i r_i s_i t_i$  ein Band,  $G_2^i$ , das mit  $Z_2$  die Streckenzüge  $q_i t_i$  und  $r_i s_i$ , mit  $b^0$  die Streckenzüge  $q_i r_i$  und  $s_i t_i$  gemeinsam hat. Aus der Voraussetzung der Zweiseitigkeit folgt, daß  $q$  und  $r$  durch  $t$  und  $s$  auf der Berandung von  $Z_2$  nicht getrennt werden, d. i. daß  $G_2^i$  ein „ungedrehtes“ Band ist. Da aber  $b^0$  eine geschlossene Kurve ist, so schließen wir, daß es mindestens ein Band  $\bar{q}_i r_i \bar{s}_i \bar{t}_i (G_2^{\bar{i}})$

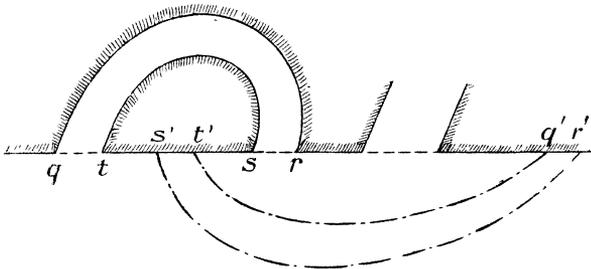


Fig. 7.

geben muß, dessen mit  $Z_2$  gemeinsamen Streckenzüge  $\bar{q}_i \bar{t}_i$  und  $\bar{s}_i \bar{r}_i$  durch  $qt$  und  $sr$  auf der Berandung von  $Z_2$  getrennt werden. Durch eine einfache Abänderung („Überschiebung“, siehe beispielsweise Fig. 7) der Überdeckung von  $R_2^0$  können wir es erreichen, daß jedes weitere Band  $G_2^h$  mit  $Z_2$  zwei Streckenzüge gemeinsam hat, die alle innerhalb eines der vier Teile liegen, in die die Berandung von  $Z_2$  durch die Strecken  $q_i t_i, \bar{q}_i \bar{t}_i, s_i r_i, \bar{s}_i \bar{r}_i$  geteilt wird. Wir können dann wieder das obige Verfahren anwenden, um ein zweites Paar von Bändern zu bestimmen, bei denen die Paare der mit  $Z_2$  gemeinsamen Strecken sich gegenseitig trennen. Fahren wir so fort, so erhalten wir das Resultat:

*Jede geschlossene zweiseitige Fläche  $M_2^0$  kann überdeckt werden mit:*

1) *einem Elementarflächenstück („Punktierungsfläche“)  $P_2^0$ ;*

- 2) einer „Restfläche“  $R_2^0$ , die besteht
- a) aus einem Elementarflächenstück („Zentralfläche“)  $Z_2$ ,
  - b) aus  $p$  Paaren von Elementarflächenstücken („Bändern“).

Jedes Band ist ungedreht und hat mit der Berandung von  $Z_2$  zwei „Anheftungsstrecken“ gemeinsam, die voneinander getrennt sind durch die zwei Anheftungsstrecken desjenigen Bandes, das mit dem ersten zusammen ein Paar bildet. Die Anheftungsstrecken eines Paares von Bändern werden durch diejenigen anderer Paare nicht getrennt. — Andererseits ist auch jede solche Fläche zweiseitig.

β) *Einseitige Flächen.* Außer Paaren von ungedrehten Bändern, deren Anheftungslinien sich trennen, gibt es nur noch einzelne „gedrehte“ Bänder und zwar mindestens ein solches. Durch eine Reihe von passenden „Überschiebungen“ erhält man statt jedes Doppelbandes zwei gedrehte Bänder. Wir erhalten so das Resultat:

*Jede geschlossene einseitige Fläche  $M_2^0$  kann überdeckt werden mit*

- 1) einer Punktierungsfläche  $P_2^0$ ;
- 2) einer Restfläche  $R_2^0$ , die besteht
  - a) aus einer Elementarfläche  $Z_2$ ,
  - b) aus  $k$  an  $Z_2$  mit zwei Strecken angehefteten Elementarflächenstücken („gedrehten Bändern“).

Die zwei Anheftungsstrecken eines Bandes werden von denen anderer Bänder nicht getrennt; jedes Band bildet mit  $Z_2$  zusammen eine einseitige Fläche. — Von den  $k$  gedrehten Bändern können wir eine gerade Anzahl  $2n < k$  in  $n$  Doppelbänder verwandeln.

Aus unseren zugrunde gelegten Definitionen ergibt sich ohne Schwierigkeiten der Satz: *Zwei Flächen, die aus einer geschlossenen Fläche dadurch entstehen, daß man zweimal die gleiche Anzahl von Elementarflächenstücken, die keine Punkte miteinander gemein haben, wegläßt, sind miteinander homöomorph.*

Unter Beachtung dieses Satzes gehen wir von  $M_2^0$  wieder zu  $M_2$  zurück und erhalten den Satz:

*Eine zweiseitige Fläche mit  $r$  Randkurven ( $r > 0$ ) kann bedeckt werden mit*

- a) einem Elementarflächenstück  $Z_2$ ,
- b)  $p$  an  $Z_2$  angehefteten „Doppelbändern“,  $D_2', \dots, D_2^{(p)}$ ,
- c)  $r - 1$  einfachen Bändern,  $B_2', \dots, B_2^{(r-1)}$ .

Die Anheftungsstrecken eines dieser Bänder werden von den Anheftungsstrecken der anderen Bänder nicht getrennt.

*Eine einseitige Fläche mit  $r$  Randkurven ( $r > 0$ ) kann überdeckt werden mit*

- a) einem Elementarflächenstück  $Z_2$ ,  
 b)  $k$  an  $Z_2$  angehefteten, gedrehten Bändern,  $H_2', \dots, H_2^{(k)}$ ,  
 c)  $r - 1$  einfachen Bändern,  $B_2', B_2'', \dots, B_2^{(r-1)}$ .

(Entsprechende Bemerkung über die Trennung der Anheftungsstrecken und Verwandlung der gedrehten Bänder in Doppelbänder wie oben.)

Eine solche Überdeckung, wie sie in dem obigen Satze angegeben ist, soll eine *Normalüberdeckung* heißen, oder auch: die Fläche  $M_2$ , in dieser Form dargestellt, soll *Normalform* von  $M_2$  genannt werden. Bei einseitigen Flächen wollen wir von *Normalüberdeckung erster Art* resp. *Normalform erster Art* reden, wenn keine Doppelbänder vorhanden sind, und von *Normalüberdeckung* resp. *Normalform zweiter Art*, wenn höchstens zwei gedrehte Bänder vorhanden sind.

**3. Lösung des Hauptproblems.** Die Zahl  $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$  bezeichnen wir als Charakteristik  $K(M_2)$ <sup>97)</sup> der Fläche  $M_2$ . Sie ist leicht zu bestimmen, wenn  $M_2$  selbst, resp. wenn sie geschlossen ist, ihre Restfläche  $R_2$  in der Normalform vorliegt:

*α) Zweiseitige Flächen:*

$$K(M_2) = -[8p + 4(r - 1)] + [8p + 4(r - 1) - 4p + 2(r - 1)] \\ - [1 + 2p + r - 1]$$

resp.:

$$K(R_2) = -[8p] + [8p + 4p] - [1 + 2p]$$

und daraus allgemein:

$$(2) \quad K(M_2) = 2p + r - 2,$$

wenn  $r = 0$  gesetzt wird für den Fall, daß  $M_2$  geschlossen ist.

*β) Einseitige Flächen:*

$$K(M_2) = -[4k + 4(r - 1)] + [4k + 4(r - 1) + 2k + 2(r - 1)] \\ - [1 + k + r - 1]$$

resp.:

$$K(R_2) = [-4k] + [4k + 2k] - [1 + k]$$

97) Dyck, Math. Ann. 32 (1888), p. 457, wo  $-K$  mit  $K''$  bezeichnet wird. Statt dieser Charakteristik führt Riemann (Diss. Nr. 6 = Werke, 2. Aufl., p. 11) für ungeschlossene, zweiseitige Flächen die „Zusammenhangszahl“  $Z = 2p + r = 2 + K$  ein, die gleich der um 1 vermehrten Anzahl von Querschnitten ist, die notwendig sind, um die Fläche in ein  $E_2$  zu verwandeln (s. p. 5); für eine geschlossene  $M_2$  setzt Riemann  $Z(M_2) = Z(R_2)$ , also  $= 2p + 1 = 3 + K$ ; Schläfli [J. f. Math. 76 (1873), p. 152 Anm.; siehe auch F. Klein, Math. Ann. 6 (1873), p. 579 und 7 (1874), p. 550 Anm.; aut. Vorles. über Riem. Fl., Gött. [p. 11] setzt dagegen für geschlossene Flächen die „ungewöhnliche“ Zusammenhangszahl  $= Z(R_2) - 1$ , die so definierte Zusammenhangszahl ist also für geschlossene sowie ungeschlossene Flächen  $= 2 + K$ .

und daraus allgemein:

$$(2) \quad K(M_2) = k + r - 2.$$

Hat also für zwei Flächen  $K$  denselben Wert, sind ferner beide einseitig oder zweiseitig und haben sie dieselbe Anzahl von Randkurven, so sind sie selbst in der Normalform resp., ihre Restflächen in der Normalform identisch. Denn, wie wir aus den obigen Formeln sehen, muß dann die Anzahl der Doppelbänder resp. die Anzahl der gedrehten Bänder die gleiche sein. Damit haben wir nachgewiesen daß die Bedingungen A (S. 190) auch hinreichend sind.

#### 4. Anwendungen der Normalform.

a) *Beweis des Neumannschen Axioms*<sup>94</sup>): Jede Fläche mit mindestens einer Randkurve läßt sich durch eine Anzahl von Querschnitten in ein Elementarflächenstück verwandeln. Der Beweis geschieht so, daß man alle Bänder in der Normalform in zwei Polygone mit je einer Anheftungsstrecke an  $Z_2$  zerlegt, und die Verbindung dieser zwei Polygone miteinander aufhebt.

b) *Möbiussche Grundform für eine  $M_2$* . Nehmen wir wieder an, daß  $M_2$  keine geschlossene Fläche ist, dann zerschneiden wir ebenso wie in a), wenn die Fläche zweiseitig ist, je eines von den ein Doppelband bildenden Bändern, wenn die Fläche einseitig ist, jedes der gedrehten Bänder. Die Fläche wird dann homöomorph mit einem  $(p + r - 1)$ fach bzw.  $(r - 1)$ fach punktierten Elementarflächenstück, der „Grundform“ von  $M_2$ .<sup>95</sup> Ist  $M_2$  einseitig, so können wir von den  $k$  gedrehten Bändern  $2h$  ( $< k$ ) Bänder zu Doppelbändern machen und dann durch Zerschneidung der  $k - 2h$  gedrehten Bänder und je eines von den zu Paaren angeordneten  $2h$  Bändern ein  $(h + r - 1)$ -fach punktiertes Elementarflächenstück erhalten.

c) *Minimalzahl von bedeckenden Elementarflächenstücken*. Mit Hilfe der Normalüberdeckung folgt leicht der Satz (s. Fig. 8):

94) C. Neumann, Vorlesungen über die Riemannsche Theorie, 2. Aufl., Leipzig (1884), p. 151; J. Petersen gibt (a. a. O. p. 72) einen auf die Anschauung basierten Beweis mit Hilfe der Punktierungsflächen. Jedoch ist das Axiom naturgemäß unbeweisbar, wenn man nicht irgend welche Eigenschaften der  $M_2$  axiomatisch festlegt, die unserer Voraussetzung der Überdeckbarkeit mit einer endlichen Anzahl von Elementarflächen entspricht.

95\*) Da man jede zweiseitige Fläche in zwei Grundformen zerlegen kann, aber jede Grundform, wie leicht zu sehen, aus 2 Flächenstücken zusammensetzbar ist, so findet man sofort (Möbius, Werke, Bd. 1, Nachl. I, § 1 a), daß jede geschlossene einseitige Fläche aus vier Elementarflächenstücken zusammensetzbar ist.

Jede geschlossene Fläche kann stets mit drei Elementarflächenstücken bedeckt werden. Jede nicht geschlossene Fläche und jede Kugel-  
fläche kann mit zwei Elementarflächen bedeckt werden<sup>95a)</sup>.

d) Normalformen für geschlossene Flächen<sup>96)</sup>.

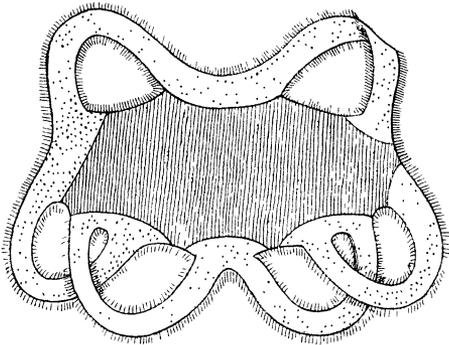


Fig. 8.

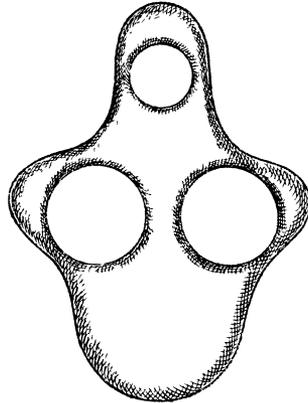


Fig. 9.

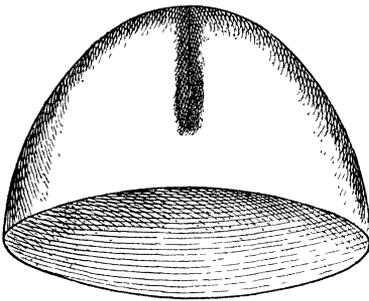


Fig. 10.

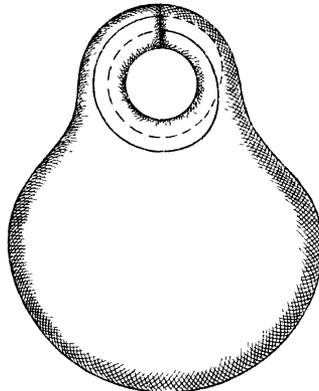


Fig. 11.

$\alpha$ ) *Zweiseitige Flächen*. Eine Fläche, deren Restfläche  $p$  Doppelbänder hat, ist homöomorph mit einer Kugel mit  $p$  „Henkeln“ (Fig. 9);

95) Möbius, Leipzig Ber. 15 (1863) = Werke 2, p. 450.

96) Diese Formen für geschlossene Flächen sind, soweit zweiseitige Flächen in Betracht kommen, als betrachtet worden von Riemann (cf. Klein, Über Riemanns Theorie . . . (1882), p. IV), Möbius, a. a. O. § 16, Tonelli (Rom Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 594, vgl. Rom Linc. Rend. (5) 4<sup>1</sup> (1895), p. 300; W. K. Clifford London Proc. Math. Soc. 8 (1877), p. 292). Normalformen für einseitige Flächen sind von Dyck a. a. O. aufgestellt.

denn ein Elementarflächenstück mit einem angehefteten Doppelband ist homöomorph mit einer punktierten Ringfläche.

β) *Einseitige Flächen.* Jede einseitige Fläche, deren Restfläche  $k$  (gedrehte) Bänder hat, ist homöomorph mit einer Kugel mit  $k$  „Kreuzhauben“ (Fig. 10). Ersetzen wir  $2h$  ( $< k$ ) Bänder durch Doppelbänder, so erhalten wir eine Kugel mit  $k - 2h$  Kreuzhauben und  $h$  Henkeln.  $2l$  ( $\leq k$ ) Kreuzhauben können auch ersetzt werden durch  $l$  „sich durchsetzende“ Henkel (Fig. 11).

**5. Fortsetzung. Rückkehrsnitte und Querschnitte und die eigentliche Eulersche Formel.** Man kann die Anzahl  $p$  der Doppelbänder resp. die Anzahl  $k$  der gedrehten Bänder der Normalform einer Fläche in Verbindung bringen mit anderen Anzahlen, die für die Fläche an und für sich charakteristisch sind und uns die Aufstellung der (anschaulichen) eigentlichen Eulerschen Formel ermöglichen.

a) *Zweiseitige Flächen.* Verbinden wir in der Normalform einen Punkt einer Anheftungsstrecke eines Doppelbandes mit einem Punkt der zugehörigen Anheftungsstrecke durch zwei Streckenzüge, einen in dem Band, den anderen in  $Z_2$  verlaufend, so haben wir in der Gesamtheit dieser Strecken einen die Fläche nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt. Es lassen sich auf diese Weise im ganzen  $p$  solcher einander nicht schneidender Rückkehrsnitte legen. Durch die Rückkehrsnitte wird die Charakteristik nicht geändert, denn  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  vermehren sich um dieselbe Zahl. Geht also  $M_2$  durch  $q$  zusammen nicht zerstückelnde, einander nicht schneidende Rückkehrsnitte in die Fläche  $M_2'$  über, so muß, weil  $K(M_2) = K(M_2')$  ist und  $M_2'$   $2q$  Randkurven mehr hat als  $M_2$ , die Zahl  $p'$  für  $M' = p - 2q$  sein. Wir haben damit, da  $p'$  nicht negativ sein kann, den Satz:

*Ist für eine zweiseitige Fläche die Maximalzahl der einander nicht schneidenden, zusammen nicht zerstückelnden Rückkehrsnitte gleich  $p$ , so ist:*

$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 2p + 2r - 2,$$

wo  $r$  die Anzahl der Randkurven bedeutet.

Das ist die eigentliche<sup>98)</sup> Eulersche Polyederformel<sup>99)</sup>.

98) Aus folgendem Grunde haben wir hier den Namen „eigentliche“ Eul. F. vorgeschlagen: In der im *Complexus* abgeleiteten entsprechenden Formel hängt  $K$  ab von  $P_1 - 1$ , d. i. der Maximalzahl der zusammen nicht begrenzenden Kreise auf der  $M_2$ .  $P_1 - 1$  hat aber, wenn es  $> 0$  ist, eine der Anschauung durchaus nicht so unmittelbar zugängliche Bedeutung wie  $p$  als Maximalzahl der zusammen nicht zerstückelnden, sich nicht schneidenden, doppelpunktlosen Kreise. Es läßt sich zwar unschwer für eine Mannigfaltigkeit im engeren Sinne nachweisen 1) daß eine einzelne nicht begrenzende Kurve auch eine nicht zer-

Und ferner:

Wenn irgend  $p - m$  ( $m \leq p$ ) zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte, die sich nicht schneiden, vorliegen, kann man stets (mit

stückelnde ist, 2) daß  $P_1 - 1$  eine gerade Zahl ist. Aber für eine Mannigfaltigkeit im engeren Sinne ist im allgemeinen  $p$  in der obigen Bedeutung nicht gleich  $2 + \frac{K - r}{2} = \frac{P_1 - 1}{2}$ . Sondern das gilt nur für Mannigfaltigkeiten im weiteren

Sinne, kann also nur im Nexus und zwar mit Hilfe der Normalform abgeleitet werden. Die eigentliche E. F. ist nicht nur anschaulicher, sondern auch viel tiefliegender als die komplektische, die wir im *complexus* im Anschluß an *Poincaré* abgeleitet haben. Dementsprechend kann die letztere Formel unschwer für  $M_n$  verallgemeinert werden, während das für die „nektische“ Formel noch nicht gelungen ist, weil es eben eine Normalformdarstellung der  $M_n$  für  $n > 2$  bis jetzt nicht gibt.

99) Über die Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes gibt *M. Brückner*, *Vielecke und Vielfache*, Leipzig 1900, eine ausführliche Übersicht, die wir im folgenden für die Literaturangaben benutzen. Der Satz selbst ist zunächst in zwei Abteilungen zu gliedern: 1) Gleichheit der alternierenden Summe  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$  für zwei homöomorphe Polyeder ( $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n$  für  $M_n$ , s. S. 185), woraus unmittelbar die gewöhnliche Eulersche Formel  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$  für die der Kugel homöomorphen (also z. B. für die konvexen) Polyeder folgt. 2) Abhängigkeit der alternierenden Summe vom Geschlecht  $p$ , (verallgemeinerte eigentliche Eulersche Formel).

*Gewöhnliche Eulersche Formel. Rein topologische Beweise:* Euler, s. Anm. 7; *S. L'Huilier*, *Gergonne Annales* 3 (1812—13), p. 169; *C. Seidelin*, *Tychsen Tidskr.* (2) 6 (1870), p. 22; *E. de Jonquières*, *Paris C. R.* 60 (1890), p. 110; *Kirkman*, *Manchester Memoirs* (2) 12 (1835), p. 47; *A. Cauchy*, *Rech. sur les polyèdres*, *J. éc. pol. cah.* 16 (1813), p. 76; *J. A. Grunert*, *J. f. Math.* 2, 1827, p. 367; *H. Lüthme*, *Baltzer El.* 2 (1883), Leipzig, p. 213; *Ch. v. Staudt*, *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847, § 4. Die Beweise in den Lehrbüchern sind oft unstreng, weil von dem notwendig vorauszusetzenden Homöomorphismus mit der Kugel (Konvexität) nicht der nötige Gebrauch gemacht ist. *Benutzung metrischer Hilfsmittel:* *Descartes* s. Anm. 6. *L'Huilier* a. a. O.; *J. Steiner*, *J. f. Math.* 1, 1826, p. 364 = *Ges. Werke* 1, p. 97; *A. M. Legendre*, *Él. d. géom.* 7. éd. Paris, (1808), p. 228; *Meier Hirsch*, *Sammlung geom. Aufg.* 2 (Berlin 1807), p. 93; *Dehn* (für 3, 4 und 5 Dim.), *Math. Ann.* 61, 1906, p. 561, wo man auch etwas über die topologische Bedeutung der benutzten Beweismittel findet.

*Verallgemeinerte eigentliche Eulersche Formel:* *L'Huilier*, a. a. O., nur für besondere Formen der Flächen (Höhlungen, Durchbohrungen); ebenso *R. Hoppe*, *Arch. Math. Phys.* 63 (1879), p. 100; *Listig*, *Zensus der räuml. Kompl.*; vgl. ferner *Cauchy*, a. a. O.; *K. Becker*, *Zeitschr. Math. Phys.* 14 (1869), p. 65, 337, 18 (1873), p. 328, 19 (1874), p. 459. Der Satz in der im Text vorliegenden Form ist für zweiseitige Flächen von *Möbius* 1863, *Ges. Werke* 2, p. 433 ff. abgeleitet worden, indem er die Fläche durch parallele Schnitte in Grundformen zerlegt; vgl. auch *Jordan*, *J. f. Math.* 66 (1866), p. 86; *C. Crone*, *Tidsskr. Math.* (5) 3, (1885), p. 44—47; *F. Röllner*, *Zeitschr. f. Realschulw.* 5<sup>3</sup> (1880), p. 133; im übrigen vgl. Anm. 92.

Hilfe der Normalformdarstellung) noch  $m$  weitere nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte angeben, die einander und die ersteren nicht schneiden.

$p$  wird als Geschlecht von  $M_2$  bezeichnet<sup>99a)</sup>:

Wir verstehen unter einem Querschnitt einen Streckenzug, der zwei Randpunkte auf  $M_2$  verbindet. Da die Anzahl der inneren Eckpunkte eines ungeschlossenen Streckenzuges um 1 kleiner ist als die Anzahl seiner Kanten, so wird durch einen Querschnitt  $K(M_2)$  um 1 größer. Querschnitte erster Art verbinden zwei Punkte derselben Randkurve,  $r$  wird um 1 größer, es muß also, damit  $K$  um 1 größer wird,  $p$  um 1 kleiner werden, wenn der Querschnitt nicht zerstückelt; d. i. eines der Doppelbänder verschwindet.  $p$  ist demnach gleich der Maximalzahl der zusammen nicht zerstückelnden Querschnitte erster Art. Querschnitte zweiter Art verbinden zwei Punkte von zwei verschiedenen Randkurven.  $r$  wird um 1 kleiner, es bleibt also  $p$  unverändert, wenn der Querschnitt nicht zerstückelt. Durch  $p$  Querschnitte erster Art und  $p + r - 1$  Querschnitte zweiter Art wird  $M_2$  resp.  $R_2$  in ein Elementarflächenstück verwandelt. Sind irgendwie  $p - m$  ( $m \leq p$ ) Querschnitte erster Art und  $p + r - 1 - n$  ( $m \leq n \leq p + r - 1$ ) Querschnitte zweiter Art vorgelegt, so kann man stets (mit Hilfe der Normalform)  $m$  und nicht mehr weitere Querschnitte erster Art und  $n$  und nicht mehr weitere Querschnitte zweiter Art angeben, die zusammen die Fläche nicht zerstückeln.

b) *Einseitige Flächen.*

α) Die erste Normalform hat  $k = 2x + 1$  gedrehte Bänder. Es gibt drei verschiedene Arten von Rückkehrschnitten.

1) Man kann  $2x$  einander nicht schneidende, und zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte mit je einem Rande finden, die die Fläche einseitig lassen. Wir erhalten solche Kurven, wenn wir in der gewöhnlichen Normalform, in der neben „einfachen“ Randbändern nur gedrehte Bänder auftreten, je einen Punkt einer Anheftungsstrecke eines gedrehten Bandes mit einem Punkt der zugehörigen Anheftungsstrecke durch zwei Streckenzüge verbinden, einen in dem Band den anderen in  $Z_2$  verlaufend. Durch einen Rückkehrschnitt dieser Art wird die Charakteristik  $K$  nicht geändert. Daraus folgt wieder: Ziehen wir irgend wie  $2x - m$  sich nicht schneidender, zusammen nicht zerstückelnder, einseitig lassender, einrandiger Rückkehrschnitte auf der Fläche  $M_2$ , so ist die entstehende Fläche homöomorph

99a) Der Begriff des Geschlechts als der Maximalzahl der nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte ist von Riemann eingeführt und als Grundlage der Theorie des Zusammenhangs von zweiseitigen Flächen benutzt (J. f. Math. 54 (1857), p. 105 = Werke (2. Aufl.), p. 92).

mit jeder Fläche, die aus  $M_2$  durch Ziehen irgend welcher anderer  $2\alpha - m$  solcher Rückkehrsnitte entsteht, und wir können noch weitere  $m - 1$  (und nicht mehr) solche Rückkehrsnitte finden.  $2\alpha$  ist aber die Maximalzahl dieser Rückkehrsnitte erster Art, weil ein weiterer die  $M_2$  in eine (nach Voraussetzung einseitige) Fläche mit  $k'$  gedrehten Bändern verwandeln würde, aus der Invarianz der Charakteristik und daraus, daß wir jetzt notwendig  $k$  Randkurven haben würden, aber  $k' = 0$  folgen würde.

2) Man kann einen *einrandigen, nicht zerstückelnden Rückkehrsnitt* finden, der die Fläche zu einer *zweiseitigen* macht. Man erhält einen solchen, wenn man die Fläche (resp. die Restfläche) in der zweiten Normalform annimmt, und das einzige gedrehte Band ebenso wie in 1) zerschneidet. Die Charakteristik wird wiederum nicht verändert: Zwei Flächen, die aus  $M_2$  durch zwei verschiedene Rückkehrsnitte dieser Art entstehen, sind homöomorph, denn alle Bedingungen A sind erfüllt.

3) Es gibt  $\alpha$  und nicht mehr einander nicht schneidende, *zwei-randige, zusammen nicht zerstückelnde Rückkehrsnitte, die  $M_2$  einseitig lassen*. Wir finden sie am einfachsten wieder in der Normalform mit  $\alpha$  Doppelbändern. Es folgt ebenso wie oben: 2 Flächen, die aus  $M_2$  durch je  $\alpha - m$  Rückkehrsnitte dritter Art entstehen, sind homöomorph und  $\alpha$  ist die Maximalzahl solcher Kurven.

Weiter gibt es keine nicht zerstückelnde Rückkehrsnitte. Denn der einzig übrige Fall wäre ein *zwei-randiger, zweiseitig machender Rückkehrsnitt*. Ein solcher verändert die Charakteristik  $K$  nicht. Es ist aber vor dem Ausführen des Schnittes

$$K - r = k - 2$$

und nachher

$$K - r = 2p + 2.$$

Da aber die Zahl auf der rechten Seite das erste Mal ungerade, das zweite Mal gerade ist, so ist dieser Fall unmöglich.

$\beta$ ) Die Normalform hat  $k = 2\alpha$  gedrehte Bänder.

Es gibt wieder drei und nur drei verschiedene Arten von Rückkehrsnitten, von denen ganz analoges gilt, wie bei  $\alpha$ ):

1)  $2\alpha - 1$  einrandige, einseitig lassende Rückkehrsnitte;

2) einen zwei-randigen, zweiseitig machenden Rückkehrsnitt.

(Wir finden ihn durch gleichzeitige Zerschneidung zweier gedrehter Bänder, wenn die übrigen Bänder alle zu Doppelbändern zusammengeordnet sind.)

Wir können jetzt die *eigentliche Eulersche Formel für einseitige Flächen* in folgender Form aufstellen:

Ist für eine einseitige Fläche die Maximalzahl der einander nicht schneidenden zusammen nicht zerstückelnden Rückkehrsnitte gleich  $k$ , so ist:

$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = k + r - 2.$$

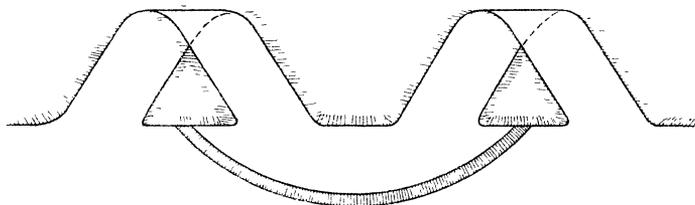


Fig. 12.

3)  $2k - 2$  zweirandige, einseitig lassende Rückkehrsnitte.

Auf einseitigen Flächen kann es vier verschiedene Arten von Querschnitten geben (s. die Figuren. In den Fig. 12—14 ist die erste

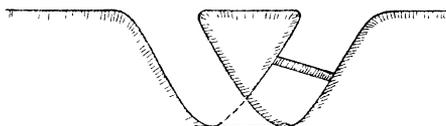


Fig. 13.

Normalform als vorliegend vorausgesetzt, in den Fig. 15 und 16 die zweite Normalform.)

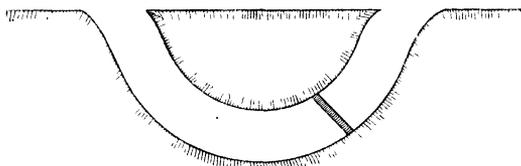


Fig. 14.

1)  $r$  (die Anzahl von Randkurven) wird durch den Querschnitt um 1 größer,  $k$  um 2 kleiner.

2)  $r$  unverändert,  $k$  wird um 1 kleiner.

3)  $r$  wird um 1 kleiner,  $k$  bleibt unverändert.

In den Fällen 1), 2), 3) bleibt die Fläche einseitig.

4a) Flächen, bei denen  $k$  ungerade ist.  $r$  bleibt unverändert. Die Fläche wird eine zweiseitige Fläche mit dem Geschlecht  $p = \frac{1}{2}(k - 1)$ .

4 $\beta$ ) Flächen, bei denen  $k$  gerade ist:  $r$  wird um 1 größer. Die Fläche wird eine zweiseitige Fläche vom Geschlecht  $p = \frac{1}{2}(k - 2)$ .

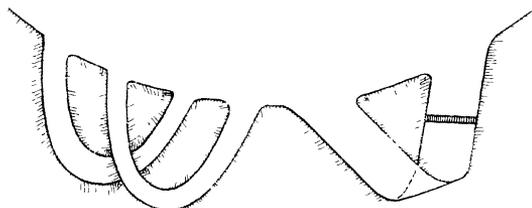


Fig. 15.

**6. Zusammensetzung von Flächen.** Vereinigen wir zwei Flächen  $M_2'$  und  $M_2''$  zu einer Fläche  $M_2$ , indem wir eine Randkurve von

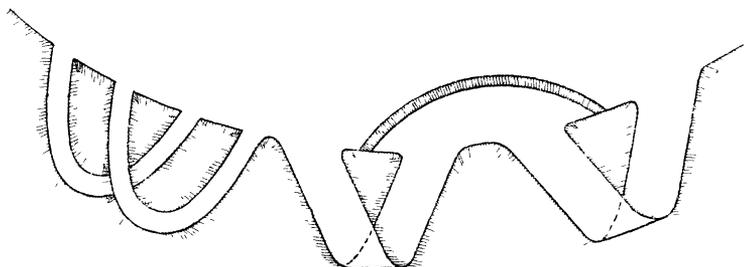


Fig. 16.

$M_2'$  zusammenfallen lassen mit einer Randkurve von  $M_2''$ , so ist, weil ein Rückkehrschnitt den Ausdruck  $K$  nicht ändert:

$$K(M_2) = K(M_2') + K(M_2'').$$

Hieraus folgt der Satz:

*Zwei Flächen, die entweder beide einseitig oder beide zweiseitig sind, und aus je zwei resp. homöomorphen Flächen durch Verschmelzung von je einer Randkurve der Teile entstanden sind, sind einander homöomorph.*

**7. Äquivalenz von Kurven auf Flächen.** Zwei beliebige Systeme von  $m$  Randkurven auf einer  $M_2$  sind stets einander äquivalent (Grundlagen Nr. 3). Das folgt daraus, daß man in der Normalüberdeckung von  $M_2$  die Reihenfolge der Randbänder auf der Berandung der Zentralfläche beliebig vertauschen und eine beliebige Randkurve als Berandung der Punktierungsfläche wählen kann. Zwei Rückkehrschnitte,  $M_{2,1}'$  und  $M_{2,1}''$ , auf  $M_2$  sind äquivalent, wenn die durch Zerschneiden von  $M_2$  längs  $M_{2,1}'$  und  $M_{2,1}''$  entstehenden Flächen resp. Flächenpaare einander homöomorph sind. Denn seien z. B. die Rückkehrschnitte nicht zer-

stückelnd und zweirandig, so mögen durch die Schnitte längs  $M_{2,1}'$  und  $M_{2,1}''$  aus  $M_2$  die homöomorphen Flächen  $M_2'$  und  $M_2''$  mit den neuen Randkurven  $r'$  und  $\bar{r}'$  bzw.  $r''$  und  $\bar{r}''$  entstehen. Nach dem Obigen kann man dann  $M_2'$  und  $M_2''$  homöomorph so aufeinander beziehen, daß sich  $r'$  und  $r''$  sowie  $\bar{r}'$  und  $\bar{r}''$  entsprechen. Von  $M_2'$  geht man zurück zu einer mit  $M_2$  homöomorphen Fläche, indem wieder die Randkanten von  $r'$  und  $\bar{r}'$  paarweise als identisch erklärt werden; erklärt man nun die entsprechenden Randkantenpaare von  $r''$  und  $\bar{r}''$  als identisch, so geht auch  $M_2''$  wieder in eine zu  $M_2$  homöomorphe Fläche über, und die homöomorphe Beziehung zwischen  $M_2'$  und  $M_2''$ , bei der sich die Kurvenpaare  $r', \bar{r}'$  und  $r'', \bar{r}''$  entsprechen, wird, wenn sie geeignet gewählt ist, übergehen in eine homöomorphe Beziehung von  $M_2$  auf sich selbst, bei der sich  $M_{2,1}'$  und  $M_{2,1}''$  entsprechen. Sind  $M_2'$  und  $M_2''$  einseitig, so hat man hierbei zu berücksichtigen, daß man zwei homöomorphe einseitige Flächen mit je zwei Randkurven so aufeinander homöomorph beziehen kann, daß dabei den beliebig gewählten Indikatricen der Randkurven von  $M_2'$  beliebig gewählte Indikatricen der Randkurven von  $M_2''$  entsprechen. Ganz analoge Betrachtungen gelten, wenn  $M_{2,1}'$  und  $M_{2,1}''$  zerstückelnde Kurven sind.

Auf Grund dieses Satzes folgt aus Nr. 5 der Satz:

*Auf einer zweiseitigen Fläche vom Geschlecht  $p$  sind irgend zwei Systeme von je  $p - m$  zusammen nicht zerstückelnden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitten miteinander äquivalent. Entsprechende Sätze gelten auf einer einseitigen Fläche für Systeme von Rückkehrschnitten der verschiedenen Arten.*

Ferner: Zwei geschlossene Kurven auf einer zweiseitigen  $M_2$ , die einen Punkt gemeinsam haben, sind äquivalent, denn sie sind beide nicht zerstückelnd.

Auf einer geschlossenen zweiseitigen Fläche vom Geschlecht  $p > 0$  gibt es  $2 + \left[ \frac{p}{2} \right]$  und nicht mehr geschlossene Kurven, von denen keine einer anderen äquivalent ist.

**8. Analytisch-geometrische Entwicklungen.** Seine Untersuchungen von Kurvensystemen (s. Nexus I) hat Dyck auf zwei- und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten ausgedehnt<sup>99a)</sup> und zwar unter Anwendung der gleichen (oben angedeuteten) Methoden. Es ergibt sich so unter anderen das wichtige Resultat: Die Charakteristik  $K$  der Fläche  $\varphi(x, y, z) = 0$  ist gleich der Kroneckerschen Charakteristik

<sup>99a)</sup> Math. Ann. 32 (1888), p. 457 und 37 (1890), p. 273; siehe für mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten Complexus Nr. 4.

des Funktionssystems

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

multipliziert mit dem Faktor  $-2$ , wenn  $\varphi = 0$  zweiseitig ist und keine Doppellinien hat. Da nun nach *Kronecker*<sup>99b)</sup> die *Kroneckersche Charakteristik* multipliziert mit  $4\pi$  gleich der *Gaußschen Curvatura integra*  $C$  der Fläche  $\varphi = 0$  ist, so ergibt sich, unter den obigen Voraussetzungen,

$$C = -2K\pi.$$

Für einseitige Flächen sind die Resultate von nicht so einfacher Form. Die *Curvatura integra* im Zusammenhang mit  $K$  ist von *W. Boy*<sup>99c)</sup> untersucht worden. Er erweitert ihre Definition auch auf polyedrische Ecken und andere Singularitäten und findet unter der Voraussetzung stückweise stetiger Tangentialebene ohne Benutzung der *Kronecker-schen Charakteristikentheorie* mittels einfacher anschaulicher Überlegungen

$$C = -2K\pi + n4\pi,$$

wo  $n$  die Anzahl der ungeschlossenen Doppellinien der betrachteten Fläche ist, die sowohl ein- als zweiseitig sein kann<sup>99d)</sup>.

### C. Connexus.

#### I. Homotopie.

1) Der Begriff der Homotopie ist bis jetzt von besonderer Bedeutung geworden für die Theorie der Kurven auf Flächen. Das hier sich bietende *Hauptproblem*: Aufstellung der *notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Homotopie zweier Kurven* ist für *zweiseitige* Flächen von *Jordan*<sup>100)</sup> vollständig gelöst worden: Jede Kurve ist homotop mit einer durch einen festen Punkt  $O$  hindurchgehenden. Hat man zwei solche Kurven  $\Pi_1^1$  und  $\Pi_1^2$  mit bestimmtem Umlaufssinn, dann ist eine Kurve  $\Pi_1$  (mit singulärem Punkte in  $O$ ) eindeutig gegeben durch die Bestimmung, daß sie zusammengesetzt ist aus den Kurven  $\Pi_1^1$  und  $\Pi_1^2$ , die in dieser Reihenfolge und in gegebenem Sinne durchlaufen werden sollen: wir schreiben  $\Pi_1 = \Pi_1^1 \cdot \Pi_1^2$ . Wir können nun beliebig viele Kurven  $\Pi_1^1, \dots, \Pi_1^n$ , die auch teilweise identisch sein

99b) Berlin Monatsber. 1869, p. 689.

99c) Diss. Göttingen 1901; Math. Ann. 57 (1903), p. 151.

99d) Vgl. *Möbius* a. a. O. § 20; *F. Reech*, J. éc. polyt., cah. 21, (1858); ferner Anwendungen in der physischen Geographie: *Cayley* (Phil. Mag. (4) 18 (1859)), *Cl. Maxwell* (Phil. Mag. 1870).

100) J. d. math. (2) 11 (1866), p. 100 ff.

können, so zusammensetzen und es gilt für diese Komposition das assoziative Gesetz; dagegen sind nur solche Änderungen in der Reihenfolge erlaubt, die aus zyklischen Vertauschungen zusammengesetzt sind. Jordan konstruiert nun ein *kanonisches Fundamentalsystem* von Kurven durch  $O$ , aus dem sich alle anderen zusammensetzen lassen, auf folgende Weise: es sei  $C, C_1, \dots, C_{p-1}$  ein System von nicht zerstückelnden, sich nicht schneidenden, mit Umlaufssinn versehenen Kurven (s. Nexus Nr. 5). Sei ferner  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}$  ein zweites solches System von der Art, daß die Kurven  $C_i$  und  $\Gamma_k$ , wenn  $i \neq k$  ist, keinen, wenn  $i = k$  ist, *einen* Punkt gemeinsam haben (Wir erhalten solche  $2p$  Kurven leicht in der Normalform als „Längsschnitte“ in den  $p$  Paaren zusammengehöriger Bänder.) Seien endlich  $A_1, A_2, \dots, A_r$  die mit Umlaufssinn versehenen Randkurven der betrachteten  $M_n$ . Dann sei mit  $[C], [C_1], \dots, [C_{p-1}]; [\Gamma], [\Gamma_1], \dots, [\Gamma_{p-1}]; [A_1], \dots, [A_r]$  ein System von zu jenen  $2p + r$  Kurven homotopen Kurven bezeichnet, die alle durch den Punkt  $O$  hindurchgehen. Bezeichnen wir mit  $[C]^{-1}, \dots$  die Kurven  $[C], \dots$ , im dem gegebenen entgegengesetzten Sinne durchlaufen, und fügen wir diese Kurven zu den obigen  $2p + r$  hinzu, so erhalten wir in dieser Gesamtheit von  $4p + 2r$  Kurven das gesuchte Fundamentalsystem.

Die Kurve:

$$[C][\Gamma][C^{-1}][\Gamma^{-1}] \dots [C_{p-1}]^{-1}[\Gamma_{p-1}]^{-1}[A_1] \dots [A_r] = G$$

wird, falls der Umlaufssinn von  $[A_1]$  usw. passend gewählt ist, mit der Begrenzung eines Elementarflächenstückes homotop sein, oder, wie man sagt, auf einen Punkt reduzierbar sein. Wir haben dann die Sätze:

1) Jede Kurve ist homotop mit einer Komposition aus den Kurven des Fundamentalsystems. 2) Zwei Kurven sind dann und nur dann homotop, wenn je zwei zu ihnen homotope Kompositionen des Fundamentalsystems ineinander übergehen: a) durch zyklische Änderung der Reihenfolge, b) durch Einschaltung der Komposition  $G$ , c) durch Ausschaltung von Kompositionen von der Form  $[C][C]^{-1}$ . Hieraus ergibt sich z. B. der Satz, daß alle Kurven auf dem geschlossenen Kreisring in der Form  $C^n \Gamma^m$  enthalten sind. — Die sodann sich darbietende Frage nach den Invarianten von Kurven bei externen Transformationen auf Flächen, also die Frage nach der Anzahl der nicht „auflösbaren“ Doppelpunkte, wird von Poincaré<sup>101)</sup> behandelt, ebenso die Frage nach der Minimalanzahl von Punkten, die

101) Palermo Rend. 18 (1904), § 4.

zwei Kurven, die mit einem gegebenen Paare von Kurven homotop sind, gemeinsam haben.

Auch für höhere Dimensionen sind die von *Jordan* begonnenen Betrachtungen von großer Bedeutung: In der Gesamtheit von geschlossenen mit Umlaufssinn versehenen Kurven, die durch einen festen Punkt  $O$  laufen, betrachte man nur die nicht homotopen als voneinander verschieden. Die Gesamtheit von zwei solchen Kurven liefert nach obigem wieder eine bestimmte, mit Umlaufssinn versehene, durch  $O$  gehende Kurve. Die durch einen Punkt einer  $M_n$  laufenden Kurven liefern so *durch ihre Kompositionseigenschaften eine diskontinuierliche Gruppe*, deren Bau für die Fläche charakteristisch ist. Denn es ist (wegen Grundlagen Nr. 3) für jeden Punkt der  $M_n$ , und wie man auch leicht sehen kann, für jeden Punkt einer mit der  $M_n$  homöomorphen Mannigfaltigkeit diese Gruppe die gleiche. Diese Gruppe ist von *Poincaré* zuerst betrachtet und hat von ihm den Namen *Fundamentalgruppe* der  $M_n$  erhalten<sup>102</sup>).

## II. Isotopie.

A. *Kurven.* 1) *Eine Kurve* (Verknotung). Man hat bisher der Isotopie angehörige Betrachtungen nur für Elementarmannigfaltigkeiten, hauptsächlich natürlich für den gewöhnlichen Raum, angestellt. Eine direkte Bestimmung der Lage einer Kurve im Raume ist auf Grund unserer Auseinandersetzungen in den „Grundlagen“ leicht zu erreichen. Am einfachsten denkt man sich den Raum in Hexaeder (Würfel) zerlegt, deren Ecken man in der üblichen Weise (cartesische) Koordinaten gibt. Dann ist jede Kurve des Raumes isotop mit einem Zug von Strecken, die sämtlich Kanten von Würfeln einer geeigneten Einteilung sind, und dieser Streckenzug ist durch ein Schema von der Art gegeben:

$$x_1 x_2 \dots x_n x_1$$

$$y_1 y_2 \dots y_n y_1$$

$$z_1 z_2 \dots z_n z_1.$$

Jede Kolonne stellt einen Punkt der Kurve dar. Zwei aufeinanderfolgende Kolonnen unterscheiden sich stets nur in einer einzigen Zahl. Da wir hier die Kurven stets ohne Doppelpunkt annehmen, so werden keine zwei Kolonnen mit Ausnahme der ersten und letzten identisch sein. Zwei isotope derartige Kurven gehen durch folgende Transformationen auseinander hervor: 1) Multiplikation

102) J. éc. polyt. (2) 1 (1895), § 12.

aller Zahlen des Schemas mit einer von Null verschiedenen positiven Zahl. 2) Ersatz von aufeinander folgenden Kolonnen von der Art:

$$\begin{array}{c} x \quad x + 1 \\ y \quad y \\ z \quad z \end{array}$$

durch vier Kolonnen von der Art:

$$\begin{array}{cccc} x & x & x + 1 & x + 1 \\ y & y + 1 & y + 1 & y \\ z & z & z & z \end{array}$$

3) Umkehrung der Transformation von der Art 2), 4) Ersatz der drei aufeinanderfolgenden Kolonnen von der Art:

$$\begin{array}{ccc} x & x & x + 1 \\ y + 1 & y & y \\ z & z & z \end{array}$$

durch die Reihen

$$\begin{array}{ccc} x & x + 1 & x + 1 \\ y + 1 & y + 1 & y \\ z & z & z. \end{array}$$

Damit sind alle Probleme der Isotopie von Kurven eines  $E_3$  auf arithmetische Probleme zurückgeführt. Eine Kurve, die nicht mit der Berandung eines (Elementar-)Flächenstücks isotop ist, heißt ein *Knoten*.

Der erste, der sich mit Knoten beschäftigte, war wohl *Listing*<sup>103</sup>). Er projiziert die Kurve auf eine Ebene oder eine Kugel; das erstere können wir auch bequem mit Hilfe des Schemas machen, indem wir eine Reihe, etwa die  $z$ -Reihe weglassen und dadurch entstehende identische Kolonnen, die unmittelbar aufeinander folgen, als eine einzige ansehen. Eine solche Kurve, die Projektion der gegebenen auf die  $xy$ -Ebene, hat im allgemeinen singuläre Punkte und Strecken, doch können letztere durch die obigen Transformationen leicht weggeschafft werden. Sie teilt die Projektionsfläche in *Parzellen*, zu denen (bei Projektion auf die Ebene) das umschließende Gebiet als selbständige Parzelle (*Amplexum*)<sup>104</sup>) mitgerechnet wird. Durch isotope Transformationen können wir es leicht erreichen, daß an jedem singulären Punkte (*Überkreuzungsstelle*) bloß zwei Zweige der Kurve sich schneiden. Dann liefert uns die Lage der Raumkurve eine Teilung der Winkelräume an einer Überkreuzungsstelle in zwei

103) Vorstudien, Göttingen 1848, p. 51.

104) *Listing* a. a. O. p. 55.

Gruppen. Nämlich besitzt etwa der Zweig  $Z_1$  an dieser Stelle eine größere  $z$ -Koordinate, so geben wir den beiden von der Überkreuzungsstelle ausgehenden Teilen von  $Z_1$  einen Durchlaufungssinn von diesem Punkte aus, bewegen uns auf der positiven Seite der  $xy$ -Ebene und bezeichnen die links von diesem Zweige gelegenen Winkelräume mit  $\lambda$ , die rechts gelegenen mit  $\delta$ . Insbesondere betrachtet *Listing monotype Formen*, bei welchen in jeder Parzelle alle Winkelräume dasselbe Symbol haben. Jede Parzelle eines solchen Knotens wird symbolisch dargestellt durch ihr Typuszeichen ( $\lambda$  oder  $\delta$ ) mit einem Exponenten, welcher die Eckenzahl der Parzelle angibt.

Die Koeffizienten des „Komplexionssymboles“ (*Listing*)

$$\left\{ \begin{array}{l} a\delta^n + b\delta^{n-1} + \dots \\ a_1\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots \end{array} \right\}$$

bezeichnen die Anzahl der verschiedenen Parzellentypen.

Es ist

$$a + b + \dots + a_1 + b_1 + \dots$$

gleich der Anzahl der Kreuzungen  $+ 2$ , und

$$an + b(n - 1) + \dots = a_1n + b_1(n - 1) + \dots$$

ist gleich der doppelten Zahl der Überkreuzungen. — Die zwei Knoten in Fig. 17 und 18 werden von ihm als Beispiel für die Möglichkeit

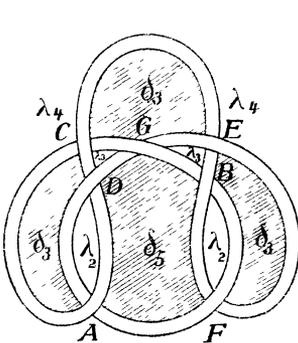


Fig. 17.

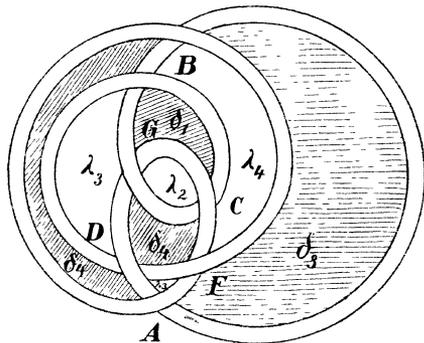


Fig. 18.

zitiert<sup>105)</sup>, daß zwei verschiedene Komplexionssymbole zu isotopen Knoten gehören können. *Tait*<sup>106)</sup> gibt ein Beispiel dafür, daß zwei nicht isotope, monotype Knoten dasselbe Komplexionssymbol haben können. Ob man, wie *H. Weith*<sup>107)</sup> behauptet, immer *Wendepunkte* in der Pro-

105) p. 58.

106) *Edinb. Proc.* 9 (1877), p. 325; vgl. auch p. 310.

107) *Weith*, *Dissert.* Zürich 1876, p. 7 und 27.

jektion vermeiden kann, ist zweifelhaft. Ein Wendepunkt hat bei unserem Darstellungsverfahren den Typus:

$$\begin{array}{cccc} x & x + 1 & x + 1 & x + 2 \\ y & y & y + 1 & y + 1. \end{array}$$

In einer Reihe von Arbeiten führt *Tait*<sup>108)</sup> die Untersuchungen weiter. Er wurde dazu durch *W. Thomsons* Theorie der Wirbelatome angeregt<sup>109)</sup>. Wie *Listing* betrachtet er die Projektion des Knotens und stellt sie *schematisch* durch eine Reihe von Buchstaben dar. Die *Verknötungsordnung* (*degree of knottiness*) „Verschlingung“ (*Fr. Meyer*<sup>109a)</sup>) ist gleich der Minimalzahl von Überkreuzungen nach jeder möglichen Reduktion<sup>110)</sup>. Eine andere für den Verknötungszustand charakteristische Zahl ist die „*Beknottedness*“<sup>111)</sup>, d. h. die Minimalzahl von Vorzeichenänderungen bei Überkreuzungen, welche den ganzen Verknötungszustand aufhebt. Die Buchstaben bezeichnen die Überkreuzungen und werden in der Ordnung geschrieben, in welcher man diese trifft, wenn man die Kurve durchläuft. Ein + oder — über jedem Buchstaben gibt an, ob man bei der Überkreuzung über oder unter den anderen Zweig hinwegläuft. Der Knoten in Fig. 17 z. B. ist gegeben durch

$$\bar{A} \overset{+}{F} \bar{B} \overset{+}{G} \bar{C} \overset{+}{A} \bar{D} \overset{+}{C} \bar{E} \overset{+}{B} \bar{F} \overset{+}{E} \bar{G} \overset{+}{D} \bar{A}.$$

Einfacher gestaltet sich das Schema, wenn der Zeichenwechsel wie in diesem Beispiele immer ein *alternierender* ist<sup>112)</sup>. (Für eine gegebene *Projektion* können die Überkreuzungen immer so gewählt werden, daß sie einen alternierenden Knoten darstellt, weil immer eine gerade Anzahl von Kanten sich auf jeder Schlinge von einem Kreuzungspunkt zu demselben zurück befindet)<sup>113)</sup>. Da wir die Buchstaben so wählen können, daß sie an den ungeraden Stellen in der alphabetischen Ordnung vorkommen, so ist es hinreichend, die Buchstaben der geraden Stellen anzugeben; im obigen Beispiele durch

$$FGACBED.$$

108) Edinb. Proc. 9 (1877), p. 59, 237, 289, 306, 321, 363, 391, 403, 405 und in gedrängter Form Edinb. Trans. 28 (1879), p. 145; Edinb. Proc. 10 (1879), p. 48; Educ. Times 33 (1880), p. 33; Edinb. Trans. 32 (1885), p. 327; *ibid.* p. 493.

109) Edinb. Proc. 9 (1876), p. 59.

109\*) Diss. München 1878.

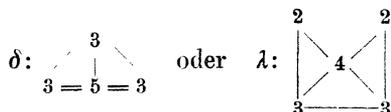
110) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 148.

111) l. c. p. 177; vgl. auch Edinb. Proc. 10 (1879), p. 48.

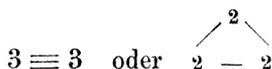
112) l. c. p. 149.

113) l. c. p. 147; vgl. auch *Jul. Petersen*, Acta math. 15 (1891), p. 198.

Tait untersucht die verschiedenen Schemata für eine gegebene Verknütnungsordnung und gibt ferner verschiedene Reduktionsmethoden an<sup>114)</sup>. Für *alternierende* Knoten gibt er eine andere schematische Darstellung<sup>115)</sup> an, welche als eine Erweiterung des *Listingschen* Complexionssymbols betrachtet werden kann. Die Parzellen können schachbrettartig in schraffierte und nichtschraffierte eingeteilt werden<sup>116)</sup>. Wir bilden ein Schema, indem wir entweder die schraffierten Parzellen oder auch die nicht-schraffierten durch Zahlen repräsentieren, welche ihre Anzahl von Ecken angeben. Die Zahlen werden zu einem Linienkomplex mit Strecken verbunden, welche angeben, in welcher Weise die Parzellen durch die Überkreuzungen miteinander in Verbindung stehen. Jeder Linienkomplex kann einem Knoten zugeordnet werden. Der Knoten in Fig. 17 wird z. B. folgende Schemata haben:



Tait gibt eine Aufzählung aller alternierenden Knoten mit drei bis zehn Überkreuzungspunkten<sup>117)</sup>. Der einfachste (*the trefoil knot, Kleeblattschlinge*) ist



Diese Aufzählungen sind von *T. P. Kirkman*<sup>118)</sup> und *C. N. Little*<sup>119)</sup> fortgesetzt (bis elf Überkreuzungen). Letztgenannter hat auch die Knoten mit acht und neun Überkreuzungen, welche *nicht-alternierend sind*, aufgezählt<sup>120)</sup>.

Wenn wir in einem alternierenden Knoten die Art der Überkreuzungen überall ändern, wodurch die Bezeichnungen  $\lambda$  und  $\delta$  in den Parzellen vertauscht werden, entsteht ein Knoten, welcher die *Perversion*<sup>121)</sup> des gegebenen ist; wenn dieser mit dem gegebenen

114) Vgl. auch *Weith* a. a. O.

115) *Tait* l. c. p. 65.

116) *Tait*, Brit. Assoc. Rep. 1876; *Messenger* (2) 6 (1877), p. 132. Ist schon in *Listings* Einteilung in  $\lambda$ - und  $\delta$ -Parzellen enthalten.

117) *Edinb. Trans.* 28 (1879), p. 153 ff.; *ibid.* 32 (1887), p. 327 und p. 501.

118) *Edinb. Proc.* 13 (1885), p. 359; *ibid.* p. 363; *ibid.* p. 514; *ibid.* p. 693; *Edinb. Trans.* 32 (1887), p. 281; *ibid.* p. 483.

119) *Connecticut Trans.* 7 (1885), p. 27; *Edinb. Trans.* 36 (1892), p. 253.

120) *Edinb. Trans.* 35 (1890), p. 663; *Edinb. Trans.* 39 (1900), p. 771.

121) *Listings* Vorstudien, p. 22.

isotop ist, wird er *amphicheiral* genannt<sup>122)</sup>. Es gibt amphicheirale Knoten für jede gerade Verknötungsordnung<sup>123)</sup>. Dagegen ist z. B. der einzige Knoten mit der Verknötungsordnung 3, die Kleeblattschlinge, nicht amphicheiral. Auf einer  $H_3$  dagegen sind alle Knoten amphicheiral.

Wir können in verschiedener Weise Flächen konstruieren, welche von der verknöteten Raumkurve begrenzt sind. Solche Flächen mit singulären Linien betrachten Weith<sup>124)</sup> und O. Böddicker<sup>125)</sup>. Tait, O. Simony u. a.<sup>126)</sup> betrachten Flächen ohne Selbstdurchkreuzungen. Man kann solche Flächen konstruieren, indem man in der Projektion die schraffierten Parzellen mit Flächen erfüllt, die bei den Überkreuzungspunkten zwischen den Kurvenzweigen „als um  $\pi$  tordierte Flächenstreifen“ verlaufen. Die schraffierte Fläche in Fig. 19 ist nach Tait<sup>127)</sup> linksgewunden (*dextrotrop* nach Listing<sup>128)</sup>). Umgekehrt kann man fragen, welche Verknötungseigenschaften Kurven auf gegebener Fläche haben können. Nur auf nicht einfach zusammenhängenden Flächen können verknötete (oder verkettete) Kurven liegen.

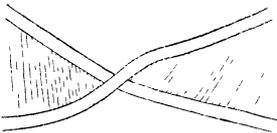


Fig. 19.

Wenn wir die Kurve mit einer Umlaufsrichtung versehen, können wir eine Überkreuzung als *positiv* rechnen, wenn wir in der gegebenen Richtung des einen Zweiges „liegend“ die positive Richtung der anderen Zweige als von rechts kommend sehen, sonst *negativ*<sup>129)</sup>. Die algebraische Zahl der Überkreuzungen ist für die reduzierte Form jedes Knotens bestimmt; für amphicheirale Formen ist sie gleich 0<sup>130)</sup>. A. B. Kempe<sup>131)</sup> nennt zwei Überkreuzungen miteinander

122) Tait, l. c. p. 147; ibid. p. 187. Ein Beispiel schon in Listings Nachlaß, Edinb. Trans. 39 (1900), p. 771.

123) Tait, l. c. p. 189.

124) Diss. Zürich 1876, p. 24.

125) Erweiterung der Gaußschen Theorie der Verschlingungen, Stuttgart, 1876, p. 62 ff.; vgl. auch Tait, l. c. p. 180.

126) Vgl. Anm. 129.

127) l. c. p. 147.

128) Vorstudien, p. 53; vgl. teils die Literaturübersicht l. c. p. 35 ff., teils Edinb. Proc. 9 (1877), p. 316.

129) Verwandte oder identische Festsetzungen z. B. bei Listing, Vorstudien, p. 52; Böddicker, Erweiterungen der Gaußschen Theorie der Verschlingungen, Stuttgart 1876, p. 49; Tait, Edinb. Trans. 28 (1879), p. 147 und Edinb. Proc. 10 (1879), p. 42; Simony, Gemeinfaßliche Lösung... 1881, p. 3; H. Brunn, Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 106; Little, Edinb. Trans. 39 (1900), p. 774.

130) Little, l. c.

131) Edinb. Proc. 14 (1886), p. 36.

verkettet, wenn ihre zwei Paare von Buchstaben in dem *Taitschen* Schema (in Kreisordnung geschrieben) einander trennen.

*Brunn*<sup>132)</sup> hat folgenden Satz aufgestellt: Die algebraische Summe der (geeignet mit Vorzeichen versehenen) scheinbaren Doppelpunkte, die von einem beliebigen Punkt  $a$  aus erscheinen, plus der algebraischen Summe der (in passender Weise mit Vorzeichen gerechneten) Schnittpunkte einer Linie, welche  $a$  und einen festen Punkt  $a'$  verbindet, mit der developpablen Fläche der Raumkurve, ist eine konstante Zahl (eine Invariante für isotope Transformationen).

Eine von dem *Taitschen* Schema und dem *Listing-Taitschen* Symbol verschiedene Darstellung eines Knotens gibt *Brunn*<sup>133)</sup>, wo die Beschreibung des Knotens in Form einer Substitution hervortritt. Eine Andeutung eines anderen Symboles befindet sich bei *Brunel*<sup>134)</sup>.

Die topologischen Verknüpfungsbegriffe sind mit dem reellen Gebilde der analytischen Geometrie in Verbindung gesetzt worden, indem *A. Brill*<sup>135)</sup> gezeigt hat, daß die Kleeblattschlinge von einer endlichen, rationalen Raumkurve 6. Ordnung gebildet wird, und *Fr. Meyer*<sup>136)</sup> vermittelt des *Taitschen* Schemas die Typen der algebraischen ebenen, rationalen Kurven 4. und 5. Ordnung mit reellen, nicht isolierten Doppelpunkten aufgestellt hat. Es mußte hierbei die *Taitsche* Darstellung einige Modifikationen erfahren, z. B. wegen der eventuellen „projektivisch unzerstörbaren“ Asymptoten, welche bei den algebraischen Kurven vorkommen können. Die von *Tait* aufgestellten Knotenprojektionen mit nicht mehr als 7 Überkreuzungen können sämtlich durch ebene, rationale endliche Kurven 6. Ordnung dargestellt werden (event. mit isolierten oder imaginären Doppelpunkten).

2) *Zwei und mehr Kurven (Verkettung)*. Auch hier handelt es sich bloß um Untersuchungen im  $E_3$ . Gelingt es (nach etwaiger interner Transformation des  $E_3$ ), zwei Kurven in Kugeln einzuschließen, die keinen Punkt miteinander gemeinsam haben, so sind sie *unverkettet*, andernfalls *verkettet*. Analoges gilt für drei und mehrere Kurven. Nach *Tait*<sup>137)</sup> (vgl. auch *Brunn*<sup>138)</sup>) können drei unverknotete Kurven-

132) Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 3 (1893), p. 84. Es ist eine wichtige Aufgabe, den rein topologischen Kern des Satzes herauszuschälen.

133) Verh. d. int. Math.-Kongr. in Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 256.

134) Bordeaux Extr. Proc. verb. 1891/92, p. IV; [Bord. Mém. (4) 3 (1893)].

135) Math. Ann. 18 (1881), p. 95.

136) Diss. München, 1878; Edinb. Proc. 13 (1886), p. 931.

137) Edinb. Proc. 9 (1877), p. 66, 405; Edinb. Trans. 28 (1879), p. 183; vgl. auch *Crum Brown*, Edinb. Proc. 13 (1885), p. 383.

138) München Ber. 22 (1892), p. 77.

miteinander verkettet sein, ohne daß irgend zwei von ihnen verkettet sind (s. Fig. 20). *Brunn*<sup>138)</sup> führt ein *Schema des Verkettungszustandes*, und verschiedene die *Verkettung charakterisierende Zahlen* ein<sup>139)</sup>. Die ersten Betrachtungen dagegen über Verkettung oder *Verschlingung* von zwei Kurven verdanken wir *Gauß*<sup>140)</sup>, der (ohne Beweis) den Satz aufgestellt hat, daß, wenn die Koordinaten irgend eines Punktes der beiden Kurven  $(x, y, z)$  resp.  $(x', y', z')$  sind,

$$\iint \frac{(x'-x)(ydz'-dzdy') + (y'-y)(dzdx'-dxdz') + (z'-z)(dxdy' - dydx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

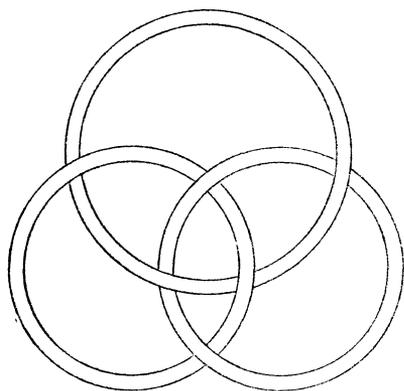


Fig. 20.

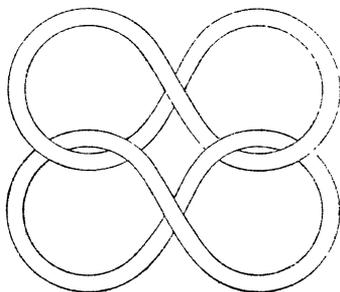


Fig. 21.

gleich einer ganzen Zahl  $m$  mal  $4\pi$  ist und bei irgend welchen isotopen Transformation unverändert bleibt. *Maxwell*<sup>141)</sup> beweist, daß, wenn die eine Kurve von einem elektrischen Strom, die andere von einem Magnetpol durchlaufen wird, die Arbeit, abgesehen von einer Konstanten, gleich  $V$  ist. —  $m$  ist ein Maß der Verkettung. Es kann jedoch bei ganz verschiedenen verketteten Kurven denselben Wert haben, z. B. kann es 0 sein für zwei verkettete Kurven (s. Fig. 21). Später haben *Boeddicker*<sup>142)</sup>, *J. Thomae*<sup>143)</sup>, *Tait*<sup>144)</sup> und *Brunn*<sup>145)</sup> das Verschlingungsintegral untersucht. Der erste zeigt, daß  $m$  abgesehen vom Vorzeichen gleich der Differenz der Anzahl der positiven und der negativen

139) Vgl. auch Katalog math. phys. Modelle, hersg. von *Dyck*, München 1893, Nachtrag 30 und 189 a.

140) Werke 5, p. 605.

141) A treatise on electricity and magnetism, Oxford, 2 (1873), p. 40.

142) s. Anm. 125.

143) Freiburg Ber. 7 (1876).

144) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 178.

145) Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 114.

Schnittpunkte der einen Kurve mit einer von der anderen begrenzten zweiseitigen Fläche ist. Dabei ist die eine Seite der Fläche positiv, die andere negativ und ein Schnittpunkt positiv gerechnet, wenn die Kurve von der positiven zur negativen Seite geht, negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist. *Brunn*<sup>145)</sup> zeigt, daß  $|2m| = |\delta - \lambda|$  ist, wo  $\delta$  die Anzahl der positiven Überkreuzungen (s. oben) der Raumkurven ist, und  $\lambda$  die der negativen.

*B. Flächen und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten.* Noch weniger als bei den Kurven ist hier die Theorie der Isotopie entwickelt. Wenn zwei berandete Flächen isotop sein sollen, so müssen sie selbst natürlich homöomorph und ihre Randkurvensysteme miteinander isotop sein. Aber das genügt nicht, wie man aus dem Beispiel des punktierten verschlungenen Schlauches erkennt. Die Schwierigkeit der hier sowie in der Knoten- und Kettentheorie zu lösenden Probleme hängt damit zusammen, daß das im wesentlichen Probleme des Nexus für dreidimensionale Gebilde sind: Entfernt man aus zwei Kugeln die von zwei isotopen geschlossenen Flächen begrenzten Räume, so müssen die Resträume homöomorph sein. Näher untersucht sind bisher bloß *Bänder*, d. i. von einer oder zwei Randkurven begrenzte, einseitige resp. zweiseitige Flächen, die durch einen Querschnitt einfach zusammenhängend werden. Wenn das Band einseitig ist, so kann seine Randkurve in mannigfacher Weise verknötet, aber doch nicht mit jedem beliebigen Knoten isotop sein, dasselbe gilt für den Verkettungs- und Verknötungszustand der zwei Randkurven eines zweiseitigen Bandes. Ist hier z. B. eine der Kurven unverknötet, so ist es auch die andere, und sie sind in diesem Falle nicht anders verkettet, als wie die Achsenlinie eines Ringes, und ein doppelunktloser nicht zerstückelnder Rückkehrschnitt: das Band ist isotop mit einem Teile einer Ringfläche. Zum Zwecke der Herstellung von Knoten und Ketten sind die Bänder zuerst von *Tait*<sup>146)</sup>, dann später eingehend von *Simony*<sup>147)</sup> studiert.

146) *Tait*, Edinb. Trans. 28 (1879), p. 169; vgl. auch *Listing*, Vorstudien (1848), p. 49 ff.

147) Wien Ber. 82<sup>2</sup> (1880), p. 691; *ibid.* 84<sup>2</sup> (1881), p. 237; *ibid.* 85<sup>2</sup> (1882), p. 907; *ibid.* 87<sup>2</sup> (1883), p. 556; *ibid.* 88<sup>2</sup> (1883), p. 939; *ibid.* 96<sup>2</sup> (1887), p. 191; vgl. auch *Simony*, Gemeinfaßliche leicht kontrollierbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandte merkwürdige Probleme, Wien (3. Aufl. 1881); *Math. Ann.* 19 (1882), p. 110; *Math. Ann.* 24 (1884), p. 253; *Math. Ann.* 31 (1888), p. 549; *Tageblatt des Vers. der Naturf. u. Ärzte* 59 in Berlin (1886), p. 336; *ibid.* 60 in Wiesbaden (1887), p. 229. *L. Koller*, Wien Ber. 89<sup>2</sup> (1884), p. 250; *L. Schuster*, Wien Ber. 97<sup>2a</sup> (1888), p. 217; *F. Dingeldey*, Wien Ber. 98<sup>2a</sup> (1889), p. 79; vgl. auch *Dingeldey*, *Topologische Studien*, Leipzig 1890, und die Rezension dieses Buches von *Brunn*,

Der einfachste Fall des einseitigen Bandes rührt von *Möbius*<sup>148)</sup> her. Dasselbe ist überhaupt das erste Beispiel einer einseitigen Fläche und hat den Namen *Möbiussches Band* bekommen. Hier ist die Randkurve verknotet.

*Möbius* hat auch die empirische Konstruktion der nächstliegenden Fälle gegeben, Torsion eines länglichen rechteckigen Streifens um  $\pi$ ,  $2\pi$ , . . . ,  $n\pi$  und Zusammenheftung der Enden ohne Verschlingung. Dies sind, wenn  $n$  gerade ist, die oben angeführten auf einer Ringfläche liegenden Bänder. Die für komplizierte verschlungene Bänder von *Simony* gegebene Definition des Torsionsmaßes hat *Brunn*<sup>149)</sup> als unzureichend nachgewiesen und folgende dafür aufgestellt: Wenn das Band zwei Randkurven hat, so ist die Torsion  $(\delta - \lambda)\pi$ , wo  $\delta$  die Zahl der positiven (s. p. 212),  $\lambda$  die der negativen Überkreuzungen ist. Eine ähnliche Anzahlbestimmung wird für Bänder mit nur einer Randkurve auf diese Definition zurückgeführt.

*Simony* stellt auch Untersuchungen an über die Verschlingung von Bändern, die eintritt, wenn man ein zweiseitiges Band längs der Mittellinie aufschneidet. Eine exakte Definition der zu betrachtenden Bänder und Flächen erhält man, wenn man wie bei der Kurvendefinition eine Einteilung des Raumes, etwa in Würfel, zugrunde legt.

*Dyck*<sup>150)</sup> hat das *Gaußsche* Verschlingungsintegral erweitert für den Fall der Verkettung einer  $M_k$  mit einer  $M_{n-k-1}$  in  $E_n$ . Indem er zeigt, daß dieses Integral in nahem Zusammenhang steht mit der Charakteristik zugehöriger Funktionssysteme, ergibt sich unmittelbar, daß diese Integrale gegenüber speziellen externen Transformationen sich invariant verhalten. Er findet ferner den Satz: Wie man auch die  $M_k$  und  $M_{n-k-1}$  darstellenden  $n + 1$  Gleichungen in zwei Gruppen teilt, das durch das Verschlingungsintegral gegebene Maß der Verkettung der durch diese beiden Gruppen dargestellten Mannigfaltigkeiten bleibt stets das gleiche. Es ist zu erwarten, daß dieser Satz auch eine rein geometrische Bedeutung hat.

#### D. Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten.

1. *Allgemeinere Probleme.* Wir haben hier das Problem: Gegeben eine  $M_n$ ; man soll alle Typen von miteinander nicht isotopen

Zeitschr. f. Math. 37 (1892), hist.-lit. Abt., p. 72, wo die Erklärung der Tatsache gegeben ist, daß eine von *Dingeldey* hergestellte Reihe von Gebilden identisch ist mit einer Reihe von *Simony* gebildeter Knoten.

148) s. Anm. 14).

149) Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 106.

150) München Ber. 25 (1895), p. 261, und besonders p. 447.

Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Singularitäten, die auf ihr liegen können, bestimmen. Es ist dies das umfassendste Problem der Isotopie, und es ist demgemäß auch für die einfachsten Fälle nur in sehr bescheidenem Umfang gelöst. Bei geschlossenen oder ungeschlossenen Kurven kann man füglich von singulären Strecken absehen und sich bei singulären Punkten auf Doppelpunkte beschränken. *Gauß*<sup>151)</sup> hat sich mit der Aufstellung von Typen ebener singulärer Kurven (Trakten) beschäftigt. Er bezeichnet die singulären Punkte mit Buchstaben  $a, b, c, \dots$  und stellt die Kurven etwa in der Form  $a b c a b c$  dar, wo die aufeinander folgenden Buchstaben aufeinander folgende Punkte der Kurve bezeichnen (vgl. p. 210). Für den  $E_3$  entspricht jeder solcher Ausdruck auch wirklich einer Kurve, nicht so für einen  $E_2$ . So z. B. gibt es keine Kurve, die den Ausdruck  $abacbc$  liefern würde. *Gauß*<sup>152)</sup> unterscheidet nun noch unter den repräsentationsfähigen Ausdrücken diejenigen, die es bei Vor- und Nachsetzung eines neuen Knotenpunktes bleiben, und solche, für die das nicht der Fall ist.  $aabbcc$  ist ein Beispiel für den ersten,  $ababcc$  eins für den zweiten Fall. Bis zu fünf Doppelpunkten hat *Gauß* alle möglichen Trakte aufgestellt. Eine allgemeine Regel für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Trakten aufzustellen, ist ihm jedoch nicht gelungen.

Allgemeine Untersuchungen über Singularitäten bei geschlossenen Flächen rühren von *Boy*<sup>153)</sup> her. Er beweist den Satz, daß es zu jeder geschlossenen Fläche homöomorphe Repräsentanten im  $E_3$  gibt, die als Singularitäten höchstens geschlossene Doppellinien mit einem dreifachen Punkt besitzen. Dazu war es bloß nötig, eine derartige einseitige Fläche mit der Charakteristik  $-1$  zu konstruieren<sup>154)</sup>. Der Satz hat insofern eine besondere Bedeutung, als aus ihm folgt, daß es zu jeder Fläche homöomorphe analytische Repräsentanten gibt, bei denen in der Umgebung jedes Punktes eine Koordinate sich in der Form von (höchstens drei) Potenzreihen darstellen läßt, die nach *ganzen* Potenzen der anderen Koordinaten fortschreiten.

2. *Riemannsche Flächen.* Von größter Bedeutung sind diejenigen singulären zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die man als *Riemannsche Flächen* bezeichnet. Vom rein topologischen Standpunkt

151) Werke 8 (Nachlaß), p. 271 ff.

152) a. a. O. p. 282.

153) Dissert. Göttingen (1901) u. Math. Ann. 57 (1903), p. 151 ff.

154) Vgl. auch Gött. Nachr. 1901, p. 20.

aus sind sie etwa folgendermaßen zu definieren<sup>155</sup>): Auf einer Kugelfläche verbinde man  $w$  Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_w$  mit einem weiteren Punkte  $O$  durch sich nicht schneidende Linien  $l_1, l_2, \dots, l_w$ , und schneide längs dieser Linien die Kugelfläche auf, d. h. man betrachte die Kugelfläche als ein Elementarflächenstück mit singularer Berandung, die aus den Linien  $l'_1 l''_1, l'_2 l''_2, \dots, l'_w l''_w$  in dieser Reihenfolge (wenn wir die Indizes  $1, 2, \dots, w$  passend gewählt haben) besteht, wobei aber je zwei Linien  $l'_i$  und  $l''_i$  zu einer Doppellinie zusammenfallen.  $O$  wird demnach für dieses Elementarflächenstück ein  $w$ -facher Punkt. Wir denken uns nun die Kugel mit  $n$  solchen Elementarflächenstücken (Blättern)  $B_1, \dots, B_n$  mit denselben Singularitäten bedeckt und erklären je eine Linie  $l'_k$  auf einem Blatt  $B_i$  mit einer Linie  $l''_k$  auf demselben oder einem anderen Blatt  $B_{\alpha_i}$  als identisch. Dadurch erhalten wir eine oder mehrere geschlossene zweiseitige Flächen, und es gibt gemäß der Zusammenheftungsbestimmung zu jeder Linie  $l_k$  eine Substitution der Zahlen 1 bis  $n$ :

$$S_k = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ist nun die durch  $S_1, \dots, S_n$  erzeugte Gruppe transitiv, dann hängen alle Blätter miteinander zusammen, und wir haben eine geschlossene Fläche; ist ferner  $S_1 S_2 \dots S_n = 1$ , so bedeutet das, daß der Punkt  $O$  als  $n$ -facher singularer Punkt zu zählen ist (wie jeder andere Punkt der Kugel mit Ausnahme der Verzweigungspunkte). Sind alle diese Bedingungen erfüllt, dann nennen wir die Fläche eine *Riemannsche Fläche* mit den  $w$  *Verzweigungspunkten*  $a_1, \dots, a_w$  und den  $w$  *Verzweigungslinien*  $l_1, \dots, l_w$ .<sup>156</sup> An jedem Verzweigungspunkte  $a_i$  werden sich die Blätter zu  $c_i$  Zyklen anordnen. Jedem Zyklus entspricht ein bestimmter Punkt  $A_{i,j}$  der singularitätenfreien Mannigfaltigkeit, deren Bild die Riemannsche Fläche ist, und die in diesem Zyklus vereinigten Blätter sind die Bilder der an den Punkten  $A_{i,j}$  hängenden Flächenstücke. Es ist also  $a_i$  ein  $c_i$ -facher Punkt. Jede der Linien  $l_i$  ist eine  $n$ -fache Linie, und es folgt so aus der *Eulerschen Formel* (s. Nexus II Nr. 5) die Beziehung:

$$\left(\sum c_i + n\right) + n = wn + 2 - 2p,$$

oder auch

$$\sum (n - c_i) - 2n = 2(p - 1),$$

wo dann  $n - c_i$  wieder eine Bedeutung hat. Es ist nämlich diese Zahl

155) s. *Ad. Hurwitz*, Math. Ann. 39 (1891), p. 3.

156) *Hurwitz* l. c.

gleich der Summe der um 1 verminderten Anzahlen der in den Zyklen zusammenhängenden Blätter, oder gleich der *Multiplizität* des Verzweigungspunktes  $a_i$ . *Riemann*<sup>157)</sup> beweist diese Relation mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln (*Dirichletsches* Prinzip, konforme Abbildung), *C. Neumann*<sup>158)</sup> später mit den Hilfsmitteln der Analysis situs. Aus der Formel folgt, daß die Summe der Multiplizitäten stets eine gerade Zahl ist, daß also beispw. eine Fläche mit nur einfachen Verzweigungspunkten davon eine gerade Zahl besitzen muß. Zwei *Riemannsche* Flächen sind als gleich zu erachten, wenn sie sich bloß durch die Numerierung der Blätter und Verzweigungspunkte unterscheiden. Die Anzahl aller möglichen Riemannschen Flächen mit bloß einfachen Verzweigungspunkten und gegebener Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten ist von *Hurwitz*<sup>159)</sup> bestimmt worden. *Transformationen* der Riemannschen Fläche sind zunächst von *J. Lüroth*<sup>160)</sup>

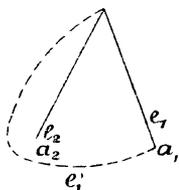


Fig. 22.

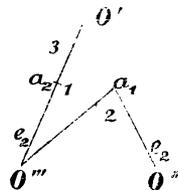
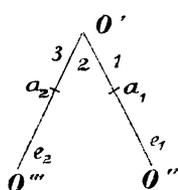


Fig. 23.

ebenfalls für den Fall von lauter einfachen Verzweigungspunkten untersucht worden. Als Transformationen kommen hier in Betracht die durch funktionentheoretische Begriffe unmittelbar gelieferten „Überschiebungen“ der Verzweigungslinien. Diese sind von folgender Art: seien  $l_1, l_2$ , zwei aufeinanderfolgende Verzweigungsschnitte und mögen an  $l_1$  die Blätter 1 und 2, an  $l_2$  die Blätter 2 und 3 zusammenhängen, dann transformiere man  $l_1$  in  $l_1'$  so, daß  $l_1'$  auf  $l_1$  folgt (s. Fig. 22) und lasse an  $l_2$  jetzt 1 und 2 in einander übergehen. Dieser Transformation der Riemannschen Fläche entspricht die in der Fig. 23 an-

157) Theorie der Abelschen Funkt. § 7; J. f. Math. 54 (1857), p. 127 = Werke (2. Aufl.), p. 113; vgl. auch *H. Durège*, Funktionenth., Leipzig, 1. Aufl. (1865), §§ 58, 59; *Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 361 u. *Durège*, Wien Sitzber. 69<sup>2</sup> (1874), p. 115.

158) Vorles. üb. Riemanns Theorie usw. Leipzig 1865, p. 312

159) l. c. u. Math. Ann. 55 (1901), p. 53 ff.

160) Math. Ann. 4 (1871), p. 181; *A. Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873), p. 216; vgl. auch *J. H. Graf*, Dissert. Bern 1880; *Picard*, Traité 2, Paris 1893, p. 369 ff.; *Jordan*, Cours 2, Paris (2. Aufl.) 1894, p. 558 ff.; *E. Bertini*, Rom Linc. Rend. (5) 3<sup>1</sup> (1894), p. 106; *H. Stahl*, Theorie d Abelschen F., Leipzig 1896, p. 31.

gedeutete Änderung der Überdeckung eines zu ihr gehörigen singularitätenfreien Originals.

*Lüroth* hat bewiesen, daß durch solche Überschiebungen eine Fläche (mit lauter einfachen Verzweigungspunkten) in eine solche von kanonischer Form übergeführt werden kann: Das erste Blatt hängt bloß mit dem zweiten und zwar in zwei Verzweigungslinien zusammen, allgemein: das  $k^{\text{te}}$  Blatt ( $k < n$ ) hängt bloß mit dem  $k + 1^{\text{ten}}$  und  $k - 1^{\text{ten}}$  und zwar in je zwei Verzweigungsschnitten zusammen, endlich das  $n^{\text{te}}$  bloß mit dem  $n - 1^{\text{ten}}$  und zwar in  $2p + 2$  Linien.

Allgemeinere Transformationen mit Bewegung der Verzweigungspunkte von beliebigen *Riemannschen* Flächen sind von *Hurwitz*<sup>161)</sup> untersucht. Gehen die Verzweigungspunkte aus einer bestimmten Lage durch eine Bewegung wieder in die ursprüngliche Lage über, so ist im allgemeinen durch diese Bewegung das Substitutionsschema  $S_1, \dots, S_n$  transformiert, und es liefern so diese Bewegungen wieder Substitutionsgruppen, die *Monodromiegruppen*<sup>162)</sup> heißen.

Die Begriffsbildung, die zu den *Riemannschen* Flächen führte, hat eine Verallgemeinerung erfahren: Man hat Flächen betrachtet, welche, analog wie die *Riemannschen* Flächen auf der Kugel, allgemein auf irgend einer zweiseitigen geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $q > 0$  ausgebreitet sind. Da jedes der  $n$  die Fläche zusammensetzenden Blätter eine punktierte  $q$ -geschlechtliche Fläche ist, so muß man, um die *Eulersche* Formel anwenden zu können, in jedem Blatt noch  $2q$  Querschnitte, also  $4q$  Ecken und  $2q$  Strecken hinzufügen. Wir erhalten so:

$$(n + \sum c_i + 4nq) + n = wn + 2nq + 2 - 2p$$

oder:

$$\frac{1}{2} \sum (n - c_i) + n(q - 1) = p - 1.$$

*Hurwitz*<sup>162)</sup> hat eine Reihe seiner für gewöhnliche *Riemannsche* Flächen angestellten Betrachtungen auch auf diesen Fall ausgedehnt<sup>163)</sup>.

161) Math. Ann. 39 (1891), p. 1; vgl. auch *Klein*, Riem. Th., Leipzig 1882, p. 64; *H. Kasten*, Theorie d. dreiblättr. *Riemannschen* Flächen, Göttingen 1876.

162) *Hurwitz*, l. c.

163) Über die Anwendung der *Riemannschen* Flächen in der Funktionentheorie, s. II B 2, *Wirtinger*.