JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES (*).

PAR M. OSSIAN BONNET,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

§ I. — *Démonstrations simples de l'existence des lignes de courbure, des théorèmes d'Euler, Meunier, Dupin, etc.*

1. Soit une surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Considérons un point A sur cette surface, et la normale AN en ce point (*fig.* 1); les cosinus des angles que la droite AN fait avec les parties positives OX, OY, OZ des axes des coordonnées auront respectivement pour valeurs

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

(*) Ce Mémoire étant d'abord destiné à former une Thèse, nous avions placé dans le § I, pour obtenir une exposition complète de la théorie des surfaces, quelques résultats connus et publiés récemment par M. Bertrand: nous n'avons pas cru devoir les supprimer ici, dans la crainte d'altérer l'ensemble de notre travail; du reste, ces résultats ne sont qu'en petit nombre. On trouvera aussi dans les §§ III, V, VII la substance du Mémoire sur la théorie des lignes tracées sur une même surface, qui a été présenté à l'Académie le 11 novembre 1844.

p et q représentant les dérivées partielles

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy},$$

déduites de l'équation de la surface, et le radical étant pris positivement, si nous supposons, comme il convient de le faire, pour fixer les idées, que la normale AN soit menée dans la région de l'espace que l'on considère comme extérieure à la surface, et qui est celle pour laquelle la coordonnée z reçoit un accroissement positif lorsque, laissant x et y constants, on passe du point A à un point infiniment voisin situé dans cette région extérieure (*).

Prenons sur la surface deux autres points B et C infiniment voisins de A, et de manière que les deux droites AB et AC soient perpendiculaires l'une à l'autre; de plus, et afin qu'il n'en résulte plus tard aucune difficulté dans l'emploi de ces droites, supposons que AB, AC et la normale extérieure AN soient respectivement situées, par rapport au point A, comme le sont ordinairement les parties positives de trois axes de coordonnées rectangulaires considérées dans l'ordre OX, OY, OZ, par rapport à leur origine O, c'est-à-dire de manière qu'en se plaçant suivant AN, les pieds en A et la tête en N, on ait AB à sa gauche et AC à sa droite. Si nous appelons λ, μ, ν les angles moindres que 180 degrés que la droite AB fait avec les parties positives des axes des coordonnées, et λ_1, μ_1, ν_1 ceux que la droite AC fait avec les parties positives des mêmes axes, nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AB}\left(\frac{d\,\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda + \frac{d\,\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu\right),$$

$$\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AB}\left(\frac{d\,\dfrac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda + \frac{d\,\dfrac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AB}\left(\frac{d\,\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda + \frac{d\,\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu\right)$$

(*) Une surface partage, en général, l'espace en deux régions, dont l'une, arbitrairement choisie d'ailleurs, est appelée la région extérieure, et l'autre la région intérieure. Pour tous les points d'une même région, le premier membre de l'équation de la surface a le même signe, et pour deux points de région différente, le signe est contraire; ordinairement on dispose du premier membre de l'équation de manière qu'il soit positif pour les points de la région extérieure.

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait avec les parties positives des axes; et

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AC}\left(\frac{d\,\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda_1 + \frac{d\,\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu_1\right),$$

$$\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AC}\left(\frac{d\,\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda_1 + \frac{d\,\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu_1\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{AC}\left(\frac{d\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}\cos\lambda_1 + \frac{d\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}\cos\mu_1\right)$$

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point C fait avec les mêmes parties positives des axes.

2. Supposons maintenant que la normale AN soit prise pour partie positive de l'axe des z, AB pour partie positive de l'axe des x, et AC pour partie positive de l'axe des y, auquel cas

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = \nu = \frac{\pi}{2},$$

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = \nu_1 = \frac{\pi}{2},$$

il viendra

$$-r\,.\,\mathrm{AB}, \quad -s\,.\,\mathrm{AB}, \quad 1$$

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait respectivement avec les droites AB, AC, AN, et

$$-s\,.\,\mathrm{AC}, \quad -t\,.\,\mathrm{AC}, \quad 1$$

pour les cosinus des angles que la normale au point C fait respectivement avec les mêmes droites AB, AC, AN, en posant, bien entendu, comme on le fait ordinairement,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy} = t.$$

Nous conclurons de là que si AB = AC, l'angle plus petit que 180 degrés que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait avec la droite AC, est égal à celui que la normale menée extérieurement à la surface au point C fait avec AB; ou, ce qui revient au même, que l'angle infiniment petit que la normale au point B fait avec le plan NAB, cet angle étant toutefois précédé du signe + quand la normale en B tombe du côté du plan NAB où se trouve AC, et du signe — dans le cas contraire, est égal et de signe contraire à l'angle que la normale au point C fait avec le plan NAC, ce second angle étant aussi positif ou négatif, selon que la normale en C tombe ou non du côté du plan NAC où se trouve la droite AB', qui est placée par rapport à AC comme AC l'est par rapport à AB. Dépouillant ce résultat, pour le rendre plus clair, des conventions faites sur le sens des normales et des droites AB et AC, et sur les signes des angles, on obtient le suivant :

3. *Si sur une surface on prend trois points* A, B, C *infiniment voisins et formant un triangle isocèle et rectangle en* A, *et que par ces points on mène des normales à la surface, toutes les trois du même côté de la surface, l'angle infiniment petit que la normale au point* B *fera avec le plan de* AB *et de la normale au point* A *sera égal à l'angle infiniment petit que la normale au point* C *fera avec le plan de* AC *de la normale au point* A; *de plus, les normales aux points* B *et* C *se trouveront, ou toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre droit formé par le plan de* AB *et de la normale au point* A, *et le plan de* AC *et de la normale au point* A, *ou bien toutes deux à l'extérieur de cet angle dièdre.*

4. De ce qui précède on peut facilement conclure, avec M. Bertrand, l'existence des lignes de courbure.

En effet, conservant la figure du n° 1, concevons que l'on fasse tourner le plan NAB autour de NA et de NAB vers NAC; en même temps imaginons que, par les différentes positions que viendra occuper le point B, on mène des normales à la surface, toujours extérieurement à cette surface; chacune des normales fera avec le plan NAB, pris dans la position correspondante, un angle qui variera, quand on passera d'une position à la suivante, d'une manière continue et de façon à changer de signe quand le plan NAB sera venu s'appliquer sur NAC. Cela nous montre évidemment qu'entre NAB et NAC, il existe au moins une position du plan NAB pour laquelle la normale à la surface au point B se trouve dans ce plan : ainsi se trouve démontrée l'existence des lignes de courbure. Reste à déterminer combien il passe de ces lignes par un même point A de la surface.

5. Prenons pour partie positive de l'axe des z la normale menée extérieurement à la surface au point A (*fig.* 2), pour axe des x la tangente à la ligne de courbure connue qui passe par ce point, enfin pour axe des y une perpendiculaire à l'axe des x et à celui des z, cet axe des y se trouvant dès lors, comme l'axe des x, situé dans le plan tangent de la surface au point A; de plus, supposons, comme plus haut, que les parties positives de l'axe des x et des y soient choisies de telle sorte, qu'en se plaçant les pieds en A, la tète en Z, on ait la partie positive de l'axe des x à gauche, et la partie positive de l'axe des y à droite. D'abord l'axe des y sera tangente à une seconde ligne de courbure passant en A, c'est ce qui résulte du théorème de M. Bertrand, énoncé au n° 3; et l'on aura non-seulement

$$p = 0, \quad q = 0,$$

mais encore

$$s = 0,$$

ainsi qu'on le voit en se reportant aux formules du n° 2.

Ainsi, nous pouvons déjà conclure qu'il existe deux lignes de courbure passant en A, et perpendiculaires l'une à l'autre en ce point; je dis, de plus, qu'il n'en existe pas d'autres. Prenons, en effet, une direction quelconque AX' dans le plan des xy; en appelant α l'angle positif (*) de cette direction avec AX, nous aurons, d'après les formules du n° 1, pour les cosinus des angles que fait avec les parties positives des axes des coordonnées la normale menée extérieurement à la surface en un point D, infiniment voisin de A et situé sur AX',

$$-\mathrm{AD}\,.\,r\cos\alpha, \quad -\mathrm{AD}\,.\,t\sin\alpha, \quad 1.$$

De là on déduit aisément le cosinus de l'angle que la normale au point D fait avec la droite AY', qui occupe dans le plan des xy, par rapport à AX', la même position que AY par rapport à AX, ou, ce qui revient au même, aux infiniment petits près du second ordre, l'angle infiniment petit que la

(*) Par angle positif d'une droite de direction déterminée, et situé dans le plan des xy avec la partie positive de l'axe des x, j'appelle, comme on le fait toujours en géométrie analytique, l'angle compte en allant de la partie positive de l'axe des x vers la partie positive de l'axe des y; on comprend de même ce que sera l'angle positif d'une droite située dans un autre plan coordonné avec la partie positive des axes situés dans ce plan.

normale extérieure en D fait avec le plan ZAD, cet angle étant toutefois précédé du signe + toutes les fois que la normale en D tombe du côté du plan NAD où se trouve AY′, et du signe — dans le cas contraire. On trouve ainsi

$$\mathrm{AD} \sin\alpha \cos\alpha \, (r - t).$$

Si AX′ était la direction d'une nouvelle ligne de courbure, l'expression précédente devrait être nulle. Or c'est ce qui ne peut arriver en général. En effet, $\sin\alpha \cos\alpha$ est différent de zéro, et $r - t$ ne peut pas non plus être nul, sans quoi toute direction autour du point A serait celle d'une ligne de courbure; et ce cas, pour lequel le point A est dit un ombilic de la surface, est purement exceptionnel.

6. Proposons-nous maintenant de trouver les rayons de courbure des différentes sections normales faites dans la surface au point A, et d'établir les relations qui existent entre eux. Conservant la figure du numéro précédent, nous pouvons, en premier lieu, trouver aisément les rayons de courbure correspondant aux sections normales ZAX, ZAY qui sont tangentes aux lignes de courbure passant en A, et que l'on nomme sections principales. Ces rayons sont en effet respectivement égaux, en négligeant des infiniment petits du second ordre, et en faisant d'abord abstraction des signes, au rapport de l'élément AB de la première section normale au cosinus de l'angle que la normale à la surface au point B fait avec AB, et au rapport de l'élément AC de la seconde section normale au cosinus de l'angle que la normale à la surface au point C fait avec AC; de telle sorte qu'en les appelant R, R′, et conservant les notations posées plus haut, on a

$$\mathrm{R} = -\frac{1}{r}, \quad \mathrm{R}' = -\frac{1}{t}.$$

Ajoutons seulement que la généralité des valeurs précédentes exige que les rayons de courbure R et R′ soient précédés du signe + quand le centre de courbure correspondant se trouve sur la normale intérieure, et du signe — quand le centre de courbure est sur la normale extérieure.

7. Soit en second lieu une section normale quelconque ZAD : le cosinus de l'angle que forme avec AD la normale menée extérieurement à la surface au point D peut être considéré, aux infiniment petits près du second ordre, et abstraction faite du signe, comme égal à l'angle que la projection de cette normale sur le plan ZAD forme avec l'axe des z. Donc ce cosinus, divisé par AD, donne la courbure de la section normale ZAD que nous appellerons $\frac{1}{\rho}$, ρ étant dès lors le rayon de courbure; seulement, il est important de le remarquer, ce rayon de courbure a ainsi un signe, qui d'ailleurs est déterminé de la même manière que pour les sections principales. Or α étant l'angle DAB, la normale extérieure à la surface normale au point D fait avec les axes, comme on l'a vu (n° 5), des angles dont les cosinus sont respectivement

$$-\mathrm{AD}.r\cos\alpha,\quad -\mathrm{AD}.t\sin\alpha,\quad 1:$$

le cosinus de l'angle de cette normale avec AD, ou, ce qui revient au même, l'angle positif ou négatif de la projection de cette normale sur le plan ZAD avec AZ est donc

$$-(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\,\mathrm{AD};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\rho} = -r\cos^2\alpha - t\sin^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos^2\alpha + \frac{1}{\mathrm{R}'}\sin^2\alpha.$$

C'est la relation que l'on doit à Euler. On peut, comme l on sait, en tirer plusieurs conséquences importantes. Nous nous bornerons à indiquer la suivante qui, du reste, les comprend toutes implicitement.

8. *Si l'on construit une ellipse ayant pour axes* $2\sqrt{\mathrm{R}}$ *et* $2\sqrt{\mathrm{R}'}$, *le diamètre de cette ellipse, qui fait avec l'axe* $2\sqrt{\mathrm{R}}$ *l'angle* α, *sera égal à* $2\sqrt{\rho}$, *c'est-à-dire au double de la racine carrée du rayon de courbure de la section normale que fait un angle* α *avec la section principale correspondante au rayon de courbure* R (*).

9. Les valeurs des rayons de courbure R et R′ obtenues dans le n° 6

(*) Dans cet énoncé, on suppose les rayons de courbure R et R′ positifs. Mais il est bien entendu que si R et R′ sont l'un et l'autre négatifs, auquel cas ρ est lui-même toujours négatif, on doit remplacer R, R′, ρ respectivement par $-\mathrm{R}$, $-\mathrm{R}'$, $-\rho$; et que si un seul des rayons de courbure R, R′ est négatif, R′ par exemple, auquel cas ρ peut être ou positif, ou négatif, au lieu d'une ellipse, on doit prendre une hyperbole ayant $2\sqrt{\mathrm{R}}$ pour axe transverse, et $2\sqrt{-\mathrm{R}'}$ pour axe non transverse, et qu'alors le module de $2\sqrt{\rho}$ est un axe transverse ou non transverse de cette hyperbole, selon que ρ est positif ou négatif.

permettent de mettre sous une autre forme la valeur

$$AD \sin\alpha \cos\alpha\,(r - t)$$

de l'angle i, positif ou négatif selon les cas indiqués au n° 5, que la normale extérieure à la surface au point D fait avec le plan ZAD; il est clair, en effet, qu'on peut écrire

$$i = -\tfrac{1}{2}\,AD \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Cette formule est due à M. Bertrand.

10. Nous pouvons aussi calculer facilement l'angle infiniment petit que forment deux normales à la surface menées par deux points consécutifs. Considérons sur la surface un rectangle infiniment petit ABCD (*fig.* 3), formé par des éléments de lignes de courbure, et proposons-nous de trouver l'angle que forment les deux normales aux deux sommets opposés A et C de ce rectangle, et menées d'un même côté de la surface. Par un point quelconque O, tirons des parallèles aux normales en A, B, C, prenons sur ces parallèles des longueurs OA′, OB′, OC′ respectivement égales à 1, et joignons A′B′, A′C′, B′C′; nous aurons un triangle A′B′C′ sensiblement plan et rectangle en B′, qui nous donnera

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2.$$

Or il est clair que A′C′ est l'angle θ que nous cherchons, et que A′B′ et A′C′ sont égaux respectivement aux valeurs absolues de $\frac{AB}{R}$ et $\frac{BC}{R'}$. Nous appelons R le rayon de courbure positif ou négatif au point B ou au point A de la section principale tangente à AB, et R′ le rayon de courbure positif ou négatif au point B de la section principale tangente à BC, ou, ce qui revient au même, en négligeant des infiniment petits du premier ordre, le rayon de courbure au point A de la section principale tangente à AD. On a donc

$$\theta^2 = \left(\frac{AB}{R}\right)^2 + \left(\frac{BC}{R'}\right)^2.$$

D'ailleurs, en posant BAC $= \alpha$,

$$AB = AC \cos\alpha, \quad BC = AC \sin\alpha;$$

donc

$$\left(\frac{\theta}{AC}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha}{R^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R'^2},$$

d'où

$$\theta = AC\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{R^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R'^2}}.$$

11. On peut déduire cette dernière formule de celle de M. Bertrand établie au n° **9**, en raisonnant comme il suit :

Soient A et D deux points infiniment voisins sur la surface, menons (*fig.* 4) par un point quelconque O les lignes OA', OD', OD″ respectivement parallèles à la normale à la surface au point A, à la normale au point D, et à la projection de cette dernière normale sur le plan de AD et de la normale en A. On aura, comme tout à l'heure, en prenant sur ces parallèles des longueurs égales à 1, et joignant les extrémités, un triangle infiniment petit, sensiblement rectangle en D″, et qui donnera

$$\overline{A'D'}^2 = \overline{A'D''}^2 + \overline{D'D''}^2.$$

Or D′D″ peut être considéré comme égal à la valeur absolue de l'angle i que la normale au point D fait avec le plan conduit par la normale au point A et l'élément AD, angle qui est égal, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° **9**), à

$$-\frac{AD}{2}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

en représentant par R et R′ les deux rayons de courbure principaux de la surface relatifs au point A, et par α l'angle positif que fait AD avec le plan de la section principale correspondante au rayon de courbure R; A′D″ est égal à la valeur absolue du rapport de AD au rayon de courbure ρ au point A de la section normale à la surface dirigée suivant AD; enfin, A′D′ est évidemment l'angle θ que nous cherchons. Nous avons donc

$$\theta^2 = \overline{AD}^2\left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2\frac{\sin^2 2\alpha}{4} + \frac{1}{\rho^2}\right],$$

ou en remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur déduite de la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'},$$

il vient, comme on l'a déjà trouvé,

$$\theta = \mathrm{AD}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{R}^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{R}'^2}}.$$

12. Cette valeur peut être mise sous une forme beaucoup plus simple. Considérons la section conique qui a pour axes les modules de $2\sqrt{\mathrm{R}}$ et de $2\sqrt{\mathrm{R}'}$, et dont il a été déjà question au n° **8**; appelons $2d$ le diamètre réel ou imaginaire de cette courbe qui fait l'angle α avec l'axe $2\sqrt{\mathrm{R}}$, et $2d'$ le diamètre conjugué de $2d$: on aura, d'après des formules de géométrie analytique connues,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{R}} + \frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{R}'},$$

$$\frac{1}{d'^2} = \frac{\mathrm{RR}'}{d^2(\mathrm{R}^2\sin^2\alpha + \mathrm{R}'^2\cos^2\alpha)}.$$

Donc

$$\left(\frac{\theta}{\mathrm{AD}}\right)^2 = \frac{d'^2}{d^2\mathrm{RR}'}.$$

Mais φ étant l'angle des deux diamètres conjugués $2d$ et $2d'$, on a

$$d^2 d'^2 \sin^2\varphi = \mathrm{RR}'.$$

Donc

$$\left(\frac{\theta}{\mathrm{AD}}\right) = \frac{1}{d^4\sin^2\varphi};$$

d'où

$$\theta = \pm\frac{\mathrm{AD}}{d^2\sin\varphi},$$

ou, enfin,

$$\theta = \pm\frac{\mathrm{AD}}{\rho\sin\varphi};$$

ρ représentant, comme plus haut, le rayon de courbure positif ou négatif de la section normale qui fait l'angle positif α avec la section principale correspondante au rayon de courbure R.

13. La formule que l'on vient d'obtenir présente, à cause du signe $\pm$ de son second membre, une ambiguïté qu'il est possible de faire disparaître en donnant un signe à θ et une autre définition à l'angle φ: c'est ce que nous allons expliquer. Je dis d'abord, avec M. Dupin, que φ *est l'angle que forme la tangente* AD (fig. 3) *de la section normale correspondante au rayon de* *courbure* ρ *avec la plus courte distance des normales à la surface menées par les deux points infiniment voisins* A *et* D, *ou, ce qui revient au même, avec l'intersection des deux plans tangents en* A *et* D. En effet, le plan tangent en un point quelconque a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes, et x, y, z les coordonnées du point de contact. Prenons sa trace sur le plan des xy, on aura

$$-z = p(X - x) + q(Y - y);$$

et si nous supposons que le point (x, y, z) soit le point D, auquel cas

$$x = \mathrm{AD}\cos\alpha, \quad y = \mathrm{AD}\sin\alpha, \quad z = 0,$$
$$p = \mathrm{AD}(r\cos\alpha + s\sin\alpha), \quad q = \mathrm{AD}(s\cos\alpha + t\sin\alpha),$$

il viendra, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$0 = X(r\cos\alpha + s\sin\alpha) + Y(s\cos\alpha + t\sin\alpha),$$

et en remarquant que AX est la direction d'une ligne de courbure,

$$Xr\cos\alpha + Yt\sin\alpha = 0.$$

Or le coefficient angulaire de cette droite est $\frac{Y}{X} = -\frac{r}{t}\cot\alpha$, celui de AD est $\tang\alpha$; donc le produit de ces deux coefficients angulaires $= -\frac{r}{t}$. Cela prouve que AD et l'intersection du plan tangent en D avec le plan des xy, ou le plan tangent en A, représentent en direction deux diamètres conjugués de l'ellipse qui a pour axes les modules de $\frac{2}{\sqrt{-r}}$ et de $\frac{2}{\sqrt{-t}}$, ou de $2\sqrt{R}$ et de $2\sqrt{R'}$, d'après le n° 6. Ainsi, l'angle φ est bien l'angle que fait AD avec l'intersection des deux plans tangents en A et D, ou mieux avec la perpendiculaire commune aux normales correspondantes. Ceci posé, si l'on suppose que les deux normales en A et D dont on veut avoir l'angle soient extérieures à la surface; que cet angle θ soit considéré comme positif ou négatif, selon que la normale en D tombe ou non du côté du plan de la normale en A et de AD où se trouve la direction AY′ définie au n° 5; que φ soit l'angle positif (c'est-à-dire compté de AX′ vers AY′) que forme avec AX′ la perpendiculaire commune aux deux normales en A et D, prolongée de la première à la seconde de ces lignes, et enfin que ρ ait le signe que lui donnent les conventions faites au n° **7**, on reconnaît que le signe — est celui qu'il faut toujours adopter dans le second membre de la formule du numéro précédent; de telle sorte que l'on a simplement

$$\theta = -\frac{AD}{\rho \sin \varphi}.$$

Pour se convaincre de ce que nous avançons, il suffit de remarquer que le point où la perpendiculaire commune aux deux normales en A et D rencontre la première de ces normales, est toujours compris entre le point A et le centre de courbure de la section normale à la surface dirigée suivant AD, comme on le voit aisément en construisant l'épure qui sert à déterminer cette plus courte distance, dans l'hypothèse où le plan de la normale en A et de AD est l'un des plans de projection.

14. Nous allons encore chercher l'angle de deux normales infiniment voisines à une surface par une méthode qui nous conduira à quelques conséquences dignes de remarque.

Posons-nous la question de la manière suivante : Étant donnée une courbe quelconque AmB (*fig*. 5), on lui mène par ses différents points des normales, et il s'agit de déterminer l'angle que forment deux de ces lignes infiniment voisines.

Soient $m_1 m$, mm', $m'm''$ trois éléments consécutifs de la courbe AmB; par le point m menons : 1° celle des normales considérées qui se rapporte à l'élément mm', et que nous appellerons mN; 2° une parallèle à celle des normales considérées qui se rapporte à l'élément $m'm''$, que nous appellerons mN′; 3° une perpendiculaire à mm' située dans le plan $N'mm''_1$, de mN′ et de la parallèle mm''_1 à $m'm''$, que nous appellerons mP. Ces trois droites formeront un trièdre dont les angles plans seront tous trois infiniment petits, et dans lequel les deux faces NmP et N′mP seront sensiblement perpendiculaires l'une à l'autre; on aura donc

$$\overline{\mathrm{N}m\mathrm{N}'}^2 = \overline{\mathrm{N}m\mathrm{P}}^2 + \overline{\mathrm{N}'m\mathrm{P}}^2;$$

en même temps le trièdre $mPm'm''_1$ donnera

$$0 = \cos Pmm''_1 \cos m'mm''_1 + \sin Pmm''_1 \sin m'mm''_1 \cos \widehat{Pmm''_1, m'mm''_1},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$0 = \pm PmN' + m'mm''_1 \cos \widehat{Pmm''_1, m'mm''_1},$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, selon que l'angle Pmm''_1 est aigu ou obtus.

Par le point m menons encore la normale principale mC de la courbe au point m, une parallèle mC' à la normale principale au point m', et enfin une perpendiculaire mD à mm' dans le plan osculateur $mm'm''$ au point m'. Si nous appelons θ l'angle infiniment petit NmN', précédé du signe $+$ ou du signe $-$, selon que la normale mN' tombe ou non du côté du plan $m'mN$, où se trouve la droite mE qui occupe, par rapport à mm' et à mN, la position ordinaire de l'axe des y par rapport à celui des x et à celui des z; que, de plus, $d\tau$ soit l'angle de contingence $m'mm''_1$ au point m' ou au point m, $d\omega$ l'angle CmD des plans osculateurs en m et m', ou plutôt la différence positive ou négative des angles positifs (c'est-à-dire comptés de mN vers mE) que forment avec mN les deux droites mD et mC; et enfin α l'angle positif que fait avec mN la normale principale mC, de manière que $\alpha + d\alpha$ soit l'angle analogue que forme avec mN' la normale principale en m': d'abord la première de nos égalités reviendra à

$$\theta^2 = \overline{\mathrm{N}m\mathrm{P}}^2 + \overline{\mathrm{N}'m\mathrm{P}}^2,$$

et la seconde à

$$\pm PmN' = \cos\alpha\, d\tau,$$

le signe supérieur ou inférieur devant être choisi comme il a été dit plus haut. Puis, en remarquant que les droites mN, mP, mC, mD sont dans un même plan, et que PmD est égal à l'angle que la normale principale de la courbe en m' fait avec la normale mN′ relative au même point, ainsi qu'on le voit aisément en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, on trouve

$$\pm \text{N}m\text{P} = d\omega - d\alpha,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être adoptés selon que la normale mN′ tombe ou non du côté du plan Nmm' où se trouve mE. De là on déduit

$$\theta^2 = \cos^2\alpha\, d\tau^2 + (d\omega - d\alpha)^2.$$

15. Nous pouvons obtenir une autre valeur de θ : appelons φ l'angle que le plan NmN′ fait avec le plan NmP, ou mieux l'angle positif (c'est-à-dire compté de mm' vers mE) que la perpendiculaire commune aux deux droites mN et mN′, menée du côté du plan NmN′ où se trouve le point m', fait avec mm'; le trièdre mNN′P donne sans ambiguïté

$$\sin\varphi = \frac{\cos\alpha\, d\tau}{\theta},$$

d'où

$$\theta = \frac{\cos\alpha\, d\tau}{\sin\varphi}.$$

16. Le résultat précédent ne diffère pas de celui que nous avons obtenu au n° **12**. Supposons en effet que la courbe AmB soit tracée sur une surface, et que les normales mN, m'N′,... à la courbe soient de plus normales extérieures à cette surface; φ sera bien l'angle positif que forme mm' avec la plus courte distance des normales à la surface menées par les deux points infiniment voisins m et m', et $\frac{mm'}{\cos\alpha\, d\tau}$ le rayon de courbure changé de signe, de la section normale dirigée suivant mm', d'après le théorème de Meunier qui va être démontré un peu plus bas. Quant à la valeur $\theta = \pm\sqrt{\cos^2\alpha\, d\tau^2 + (d\omega - d\alpha)^2}$ du n° **14**, si nous la comparons à celle qui a été d'abord obtenue au n° **11**, et qui est $\theta = \text{AD}\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\text{R}'} - \frac{1}{\text{R}}\right)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{4}}$, on voit que

$$\text{AD}\left(\frac{1}{\text{R}} - \frac{1}{\text{R}'}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} = \pm (d\omega - d\alpha),$$

puisque $\frac{AD}{\rho} = - \cos\alpha\, d\tau$; donc

$$i = \pm (d\omega - d\alpha).$$

16 *bis*. La valeur de i que l'on vient d'obtenir devant nous servir dans la suite, nous allons la déterminer par une autre méthode, en tâchant de fixer le signe qui l'accompagne. Je remarquerai d'abord que cette valeur de i pourrait être immédiatement déduite de l'une des formules du n° **14**. Il est clair, en effet, en négligeant des infiniment petits du second ordre, que i est égal à l'angle que l'on a appelé NmP dans ce numéro; on a donc $i = \pm (d\omega - d\alpha)$, ou simplement $i = d\omega - d\alpha$, si l'on veut regarder i comme positif ou négatif, selon que la normale mN' tombe ou non du côté du plan Nmm' où se trouve mE. Mais on peut encore obtenir la valeur de i d'une manière plus nette et plus directe, comme il suit: Conservons la figure et toutes les notations du n° **14**, en supposant seulement que AmB soit une certaine courbe tracée sur une surface, et que les normales mN, mN' à la courbe soient, de plus, normales à la surface; menons en outre une perpendiculaire mG à mC qui occupe, par rapport à cette ligne, la même position que mN par rapport à mE, et une perpendiculaire mG' à mC' qui occupe, par rapport à cette autre ligne, la même position que mN' par rapport à mE'. On voit aisément que les cosinus des angles que fait mN' avec les trois droites mm''_1, mC', mG' sont respectivement, et dans tous les cas,

$$0, \quad \cos(\alpha + d\alpha), \quad \sin(\alpha + d\alpha).$$

On peut aussi avoir les cosinus des angles que forme mE avec les mêmes droites mm''_1, mC', mG'. En effet, le trièdre formé par mE, mm' et mm''_1 donne d'abord, pour le cosinus de l'angle de mE et de mm''_1,

$$\cos \widehat{mE, mm''_1} = \sin\alpha\, d\tau,$$

$d\tau$ étant l'angle de contingence $m'mm''_1$ de la courbe proposée. Puis, en remarquant que mG' est, comme mG, perpendiculaire à mm', puisque mG et m'G' sont des normales aux deux plans osculateurs en m et m' de la courbe proposée, on trouve sans peine, pour le cosinus de l'angle de mE avec mG',

$$\cos \widehat{mE, mG'} = -\cos(\alpha + d\omega),$$

en appelant, comme plus haut, $d\omega$ la différence infiniment petite des angles positifs (c'est-à-dire comptés de mN vers mE) que forment mD et mC avec mN; enfin, le cosinus de l'angle de mE et de mC′ sera $\pm \sin(\alpha + d\omega)$, pour que la somme des carrés des cosinus des angles de la droite mE avec les trois droites rectangulaires mm''_1, mC′, mG′ soit égale à l'unité; et, de plus, on voit aisément par la figure, que le signe placé devant le cosinus doit toujours être le signe $+$. Ainsi,

$$\cos \widehat{mE, mC'} = \sin(\alpha + d\omega).$$

Ayant maintenant les cosinus des angles que les deux droites mN′ et mE forment avec les trois droites rectangulaires mm''_1, mC′, mG′, nous pouvons aisément calculer le cosinus de l'angle de ces deux droites, ou, ce qui revient au même, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'angle i que forme mN′ avec le plan Nmm'; et il vient

$$i = \cos(\alpha + d\alpha)\sin(\alpha + d\omega) - \sin(\alpha + d\alpha)\cos(\alpha + d\omega) = \sin(d\omega - d\alpha),$$

ou simplement

$$i = d\omega - d\alpha.$$

Telle est la valeur de l'angle cherchée. On voit qu'elle coïncide avec celle que nous avions obtenue plus haut, et que sa généralité exige que l'angle i soit précédé du signe $+$ quand la normale mN′ tombe dans l'angle dièdre positif formé par Nmm' et NmE, et du signe $-$ dans le cas contraire. Pour abréger, nous appellerons désormais seconde courbure géodésique d'une courbe le rapport que l'on obtient en divisant par l'élément de l'arc de la courbe la différence $d\omega - d\alpha$ des angles infiniment petits $d\omega$ et $d\alpha$ nettement définis plus haut: nous basons cette dénomination sur ce que, lorsque la courbe est une ligne géodésique de la surface, le rapport dont il s'agit se réduit à la seconde courbure de la ligne. Ceci posé, le résultat que nous venons d'obtenir s'énonce ainsi: *Étant donnés une courbe* AmB *tracée sur une surface, et deux points m et m′ infiniment voisins sur cette courbe, l'angle i que fait la normale extérieure à la surface au point m′ avec le plan de la normale extérieure au point m, et de mm′, est égal à la seconde courbure géodésique de la courbe au point m, multipliée par mm′*. Ajoutons, pour compléter cet énoncé, *que l'angle i est positif ou négatif, selon que* *la normale extérieure à la surface en m' tombe ou non du côté du plan de la normale en m et de l'élément mm', où l'on doit mener la perpendiculaire à ce plan pour que cette perpendiculaire, que nous appellerons* mE, *l'élément mm' et la normale extérieure à la surface en m soient respectivement placées, par rapport au point m, comme le sont, par rapport à l'origine, la partie positive de l'axe des y et celles des x et des z; et que par seconde courbure de la courbe $mm'm''\ldots$ au point m, on appelle le rapport à mm' de la différence de deux angles infiniment petits $d\omega$ et $d\alpha$, dont le premier est l'accroissement que reçoit l'angle positif (c'est-à-dire compté de* mN *vers* mE) *que forme avec la normale* mN *à la surface la normale principale* mC *à la courbe au point m, quand on passe de m en m', et dont le second est la différence qui existe entre les deux angles positifs que forment avec* mN *les deux perpendiculaires* mD *et* mC *à mm', menées respectivement dans les plans osculateurs de la courbe en m' et en m.*

17. Quand la ligne $mm'm''\ldots$ est une ligne de courbure de la surface, l'angle que la normale à la surface au point m' fait avec le plan de la normale au point m et de mm' est égal à zéro; la propriété précédente nous montre donc que, *pour toute ligne de courbure d'une surface, la seconde courbure géodésique est nulle, ou, en d'autres termes, l'angle positif infiniment petit que forment les plans osculateurs correspondants à deux points infiniment voisins m et m' est toujours égal à la différence positive des angles que ces plans osculateurs font avec les plans tangents correspondants*. La réciproque est aussi vraie.

Ce curieux théorème, qui a été énoncé, pour la première fois, par Lancret, dans son premier Mémoire sur les lignes à double courbure, et dont M. Liouville a donné plus tard une démonstration géométrique très-simple (*Journal de Mathématiques,* tome XI), est très-fécond en conséquences utiles: on en déduit, par exemple, que si deux surfaces se coupent partout sous un angle constant, et que la courbe d'intersection soit une ligne de courbure de l'une des surfaces, elle sera aussi une ligne de courbure de la seconde surface.

18. La formule

$$\theta = -\frac{\mathrm{AD}}{\rho \sin \varphi},$$

du n° **13**, peut fournir plusieurs résultats importants ; nous nous bornerons à indiquer le suivant. Supposons que AD fasse, avec la tangente à la section principale correspondante au rayon de courbure R, l'angle que le diamètre qui a même valeur que son conjugué dans la section conique dont les axes sont les modules de $2\sqrt{R}$ et $2\sqrt{R'}$ fait avec l'axe $2\sqrt{R}$. On aura évidemment

$$\pm \rho \sin \varphi = \sqrt{RR'},$$

le signe du premier membre étant celui qui le rend positif, et le second membre étant réduit à son module; par conséquent,

$$\frac{\theta}{AD} = \frac{1}{\sqrt{RR'}},$$

θ étant réduit à sa valeur absolue.

Ainsi, le module de $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$, ou ce que M. Gauss appelle *la courbure de la surface au point* A, *est égale à l'angle des plans tangents aux points* A *et* D *divisé par* AD, AD *étant le premier élément de la section normale qui fait avec la tangente à la section principale correspondante au rayon de courbure* R *un angle dont la tangente est égale au module de* $\sqrt{\frac{R'}{R}}$.

19. Si la surface considérée est une surface réglée, la génératrice rectiligne fait évidemment avec la section principale correspondante au rayon R un angle qui a pour tangente le module de $\sqrt{\frac{R'}{R}}$. On peut donc dire que la courbure, dans une surface gauche, est égale à l'angle des plans tangents au point considéré et au point infiniment voisin appartenant à la même génératrice rectiligne, divisé par la distance de ces deux points.

20. Dans les n^{os} **6**, **7**, **8**, il n'a été question que des rayons de courbure des sections normales faites dans la surface. Or il existe une relation très-simple entre le rayon de courbure d'une section oblique quelconque et celui de la section normale qui a un élément commun sur la surface avec cette section oblique. Cette relation, qui est connue sous le nom de *théorème de Meunier,* peut être simplement établie comme il suit:

Soient OZ (*fig.* 6) la normale extérieure à la surface en un point quelconque O, ZOX le plan d'une section normale en ce point, Z'OX le plan d'une section oblique ayant un élément commun sur la surface avec la section normale ZOX, et faisant avec elle un angle ZOZ', que nous appellerons θ. Par le point A situé sur OX et infiniment voisin de O, menons extérieurement à la surface, AU normale à cette surface, et AU' normale à la section oblique Z'OX; l'angle UAU' sera égal à θ en négligeant un infiniment petit du premier ordre. Mais le trièdre formé par AU, AX, AU', qui est évidemment rectangle en AU', donne

$$\cos \mathrm{UAX} = \cos \mathrm{U'AX} \cos \mathrm{UAU'};$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et appelant ρ et ρ' les rayons de courbure respectifs des deux sections ZOX, Z'OX,

$$\rho' = \rho \cos \theta;$$

ce qui n'est autre chose que la relation annoncée. Ajoutons seulement qu'en prenant toujours pour θ l'angle des normales à la section normale et à la section oblique menées par le point de contact O extérieurement à la surface, il faut, pour la généralité de la formule précédente, que le rayon de courbure de la section oblique soit, comme celui de la section normale, regardé comme positif ou négatif, selon que le centre de courbure de cette section oblique est ou non situé sur la normale à cette section menée intérieurement à la surface; et que, si l'on veut considérer le rayon de courbure ρ comme toujours positif, θ doit être l'angle que forme, avec la normale intérieure à la surface, la normale principale de la section oblique dirigée de la courbe vers le centre de courbure.

On peut déduire, du théorème de Meunier, une conséquence remarquable due à Hachette, et reproduite plus tard par M. Binet (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XIX), qui nous sera utile plus loin.

21. *Considérons deux surfaces* S *et* S_1, *qui, par leur intersection, donnent une courbe* AmB. *Par un point m de cette courbe menons un plan tangent à chacune des surfaces; le plan tangent à la surface* S *coupera la surface* S_1 *suivant une courbe* s_1, *et le plan tangent à la surface* S_1, *la surface* S *suivant une courbe s. Supposons que* mP *et* mQ *soient, en grandeur et en direc-*

tion, les courbures respectives $\frac{1}{r}$ *et* $\frac{1}{r_1}$ *des courbes* s *et* s_1 *au point* m (*); *si l'on construit sur* mP *et* mQ *un parallélogramme, la diagonale* mR *de ce parallélogramme représentera, en grandeur et en direction, la courbure* $\frac{1}{\rho}$ *de la courbe* AmB *au point* m.

Appelons, en effet, α, a, a_1 les angles que font, respectivement avec la normale intérieure à la surface S au point m, les normales principales au même point des courbes AmB, s et s_1, chacune de ces normales étant d'ailleurs dirigée de la courbe à laquelle elle se rapporte vers le centre de courbure correspondant; soient aussi β, b, b_1 les angles respectifs que font avec la normale intérieure à la surface S_1 au point m, les mêmes normales principales des courbes AmB, s, s_1: il est évident que l'on aura $a_1 = 90°$, $b = 90°$; et, d'après le théorème de Meunier,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\cos\alpha, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r}\cos a,$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho}\cos\beta, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1}\cos b_1,$$

en appelant R et R_1 les rayons de courbure, positifs ou négatifs suivant la loi indiquée au n° **7**, des sections normales faites dans les surfaces S et S_1 tangentiellement à AmB au point m. De là on déduit sans peine

$$\frac{1}{\rho}\cos\alpha = \frac{1}{r}\cos a + \frac{1}{r_1}\cos a_1,$$
$$\frac{1}{\rho}\cos\beta = \frac{1}{r}\cos b + \frac{1}{r_1}\cos b_1;$$

ce qui prouve que la projection de la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe AmB est égale à la somme des projections des courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$ des courbes s et s_1, pour deux axes de projection situés dans le plan des directions de ces trois courbures. Or cela ne peut évidemment avoir lieu que si $\frac{1}{\rho}$ est, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$. Comme il fallait le démontrer.

(*) J'appelle direction de la courbure d'une courbe en un point celle de la droite qui joint ce point au centre de courbure correspondant.

§ II. — *Démonstrations simples des théorèmes de* MM. Dupin *et* Lamé *sur les surfaces orthogonales.*

22. Le théorème de M. Dupin consiste, comme l'on sait, en ce que, *si trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, leurs intersections ne seront autre chose que leurs lignes de courbure.*

Ce théorème peut être très-simplement établi comme il suit:

Considérons trois séries de surfaces orthogonales, et soient en un point A (*fig.* 7), AX, AY, AZ les tangentes aux courbes d'intersections des trois surfaces qui y passent; ces tangentes, que l'on peut aussi considérer comme les normales aux surfaces au point A, étant d'ailleurs menées de manière à se trouver en même temps dans la position ordinaire des axes des coordonnées et dans la région extérieure aux surfaces auxquelles elles se rapportent, ce qui est toujours possible, puisque l'on peut choisir arbitrairement la région extérieure à chaque surface. Cela posé, prenons sur ces tangentes des longueurs AM, AN, AP infiniment petites et égales entre elles; enfin, imaginons en chacun des points M, N, P les normales aux deux des surfaces considérées qui passent par ces points.

Si nous appelons i_x et i'_x les angles infiniment petits que les normales NX″ et PX‴ font respectivement avec les plans XAY et XAZ, i_y et i'_y les angles infiniment petits que les normales PY‴ et MY′ font respectivement avec les plans YAZ et YAX; enfin i_z et i'_z les angles infiniment petits que les normales MZ′ et NZ″ font respectivement avec les plans ZAX et ZAY : tous ces angles étant susceptibles d'un double signe qui se déterminera sans difficulté, comme on l'a vu au n° 5, nous aurons les trois relations suivantes:

$$i_x + i_z = 0,$$
$$i_y + i_x = 0,$$
$$i_z + i_y = 0.$$

En effet, i_x par exemple, qui est la seconde courbure géodésique multipliée par AN, de celle des intersections des surfaces proposées qui a pour tangente AY, en tant du moins que l'on considère cette courbe comme tracée sur la surface qui a AX pour normale, est d'abord égal à i'_z, qui est la seconde courbure géodésique multipliée aussi par AN, de la même courbe considérée comme tracée sur la surface qui a AZ pour normale; c'est ce que l'on voit aisément en se reportant à la définition de la seconde courbure géodésique donnée au n° **16** *bis*, et en remarquant que les surfaces se coupent à angle droit. En second lieu, i''_z, qui est l'angle que fait la normale NZ″ avec le plan ZAM, est égal et de signe contraire à i_z, qui est l'angle de la normale MZ′ avec le plan ZAM; donc i_x et i_z sont aussi de signes contraires. Ajoutant les deux premières égalités et retranchant la troisième, il vient

$$i_x = 0,$$

d'où

$$i_x = i''_x = i_y = i'_y = i_z = i'_z = 0.$$

Ce qui prouve bien que AX, AY, AZ sont les directions des lignes de courbure des surfaces passant par le point A.

23. Quand trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, il existe des relations remarquables entre les rayons de courbure principaux des trois surfaces qui passent par un même point. Nous allons nous proposer d'établir ces formules, que l'on doit à M. Lamé.

Soient trois surfaces faisant partie d'un système triple de surfaces orthogonales, et passant par un point déterminé A de l'espace (*fig.* 8). Ces surfaces, en se coupant, donneront trois courbes. Considérons ces trois courbes comme des axes de coordonnées, et appelons-les, en adoptant pour plus de commodité les notations de M. Lamé, axes des s, s_1, s_2 relatifs au point A; les surfaces auxquelles ces axes sont perpendiculaires étant, dès lors, les surfaces des $s_1 s_2$, des $s_2 s$ et des $s s_1$. Enfin, représentons par (γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1) les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces des $s_1 s_2$, $s_2 s$ et $s s_1$; l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe de ces rayons de courbure étant déterminé comme au n° **7**, au moyen des normales extérieures aux surfaces, normales qui seront ici les tangentes AT, AT_1, AT_2 aux courbes coordonnées menées d'ailleurs dans le sens suivant lequel on est convenu de compter les arcs positifs de ces courbes.

Ceci posé, les formules que l'on doit à M. Lamé sont les neuf suivantes:

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right), \quad && \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}\right),\\
&\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma}\right), \quad && \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2}\right),\\
&\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right), \quad && \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$
(b)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{\gamma_1^2} + \dfrac{1}{\gamma c_1},\\[2ex]
\dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{c_1^2} + \dfrac{1}{\gamma_2^2} + \dfrac{1}{\gamma_1 c_2},\\[2ex]
\dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \dfrac{1}{c_2^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} + \dfrac{1}{\gamma_2 c},
\end{cases}
$$

dont six seulement sont distinctes. Pour les démontrer par l'origine A des axes courbes des s, s_1, s_2, menons une droite quelconque AX, et appelons α, α_1, α_2 les angles que font avec cette droite les tangentes AT, AT_1, AT_2 au point A des courbes AS, AS_1, AS_2. Prenons, à partir du point A, sur les axes des s, s_1, s_2, des longueurs infiniment petites AM, AM_1, AM_2, et imaginons les axes des s, s_1, s_2 relatifs aux points M, M_1, M_2, c'est-à-dire les intersections des trois surfaces faisant partie du triple système de surfaces orthogonales proposé qui passent respectivement en ces points. Nous allons nous proposer d'abord de calculer les angles que les tangentes à ces nouveaux axes font avec la droite AX.

Considérons les axes relatifs au point M, et d'abord l'axe des s_1. Soit $\cos\alpha_1 + d_s\cos\alpha_1$ le cosinus de l'angle que sa tangente au point M fait avec AX. Si par le point A nous menons une parallèle AT'_1 à cette tangente, les trois droites AT'_1, AT_1 et AX formeront un trièdre qui donnera

$$\cos\alpha_1 + d_s\cos\alpha_1 = \cos\alpha_1 \cos T_1AT'_1 + \sin\alpha_1 \sin T_1AT'_1 \cos \widehat{T_1AX, T_1AT'_1},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$d_s\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1\, \widehat{T_1AT'_1} \cos \widehat{T_1AX, T_1AT'_1}.$$

D'un autre côté, le trièdre formé par AT_1, AX, AT donne

$$\cos\alpha = \sin\alpha_1 \cos \widehat{TAT_1, T_1AX} = \pm \sin\alpha_1 \cos \widehat{T_1AX, T_1AT'_1}.$$

Le signe supérieur convenant si l'angle que forme AT'_1 avec AT est plus petit que celui que forme AT_1, et le signe inférieur dans le cas contraire, on a donc

$$d_s \cos \alpha_1 = \pm T_1 AT'_1 \cos \alpha;$$

d'où

$$d_s \cos \alpha_1 = AM \frac{\cos \alpha}{c},$$

formule qui est générale en vertu du signe de c. On trouverait évidemment, par un raisonnement analogue,

$$d_s \cos \alpha_2 = AM \frac{\cos \alpha}{\gamma},$$

et aussi

$$d_{s_1} \cos \alpha_2 = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{c_1},$$

$$d_{s_1} \cos \alpha = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1},$$

$$d_{s_2} \cos \alpha = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2},$$

$$d_{s_2} \cos \alpha_1 = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2}.$$

On appelle, comme on le devine aisément, $\cos \alpha + d_s \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_s \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_s \cos \alpha_2$, les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point; $\cos \alpha + ds_1 \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2$ les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M_1 des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point; enfin, $\cos \alpha + d_{s_2} \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_{s_2} \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2$ les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M_2 des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point.

Calculons maintenant l'angle que la tangente à l'axe des s' au point M fait avec AX. Menons par le point A, en la dirigeant de la courbe vers le centre de courbure, la normale principale AN de la courbe AS, et la parallèle AT' à la tangente au point M de cette courbe; le trièdre que forment AT', AN et AX nous donnera

$$\cos \alpha + d_s \cos \alpha = \cos NAX \cos NAT' + \sin NAX \sin NAT' \cos \widehat{NAX, NAT'},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos \alpha + d_s \cos \alpha = \cos NAX . TAT' + \sin NAX \cos \widehat{NAX, NAT'}.$$

Mais le trièdre formé par AT, AN et AX donne

$$\cos\alpha = \sin \mathrm{NAX} \cos \widehat{\mathrm{NAX}, \mathrm{NAT}'} = \sin \mathrm{NAX} \cos \widehat{\mathrm{NAX}, \mathrm{NAT}'};$$

donc

$$d_s \cos\alpha = \mathrm{TAT}' \cos \mathrm{NAX},$$

ou, en appelant ρ le rayon de courbure de la ligne AS au point A,

$$d_s \cos\alpha = \mathrm{AM} \cdot \frac{\cos \mathrm{NAX}}{\rho}.$$

D'un autre côté, AS étant l'intersection des deux surfaces ss_1 et ss_2 qui font entre elles un angle droit au point A, $\frac{1}{\rho}$ doit être, en grandeur et en direction, d'après le théorème de Hachette démontré au n° **21**, la diagonale du rectangle construit sur les courbures $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{\gamma}$, considérées indépendamment de leurs signes. Donc $\frac{\cos \mathrm{NAX}}{\rho}$, ou la projection de $\frac{1}{\rho}$ sur AX, doit égaler la somme des projections de ces courbures sur AX, c'est-à-dire

$$-\frac{\cos\alpha_1}{c} - \frac{\cos\alpha_2}{\gamma},$$

en remarquant que les rayons de courbure c et γ sont positifs quand leur direction est opposée à celle des normales extérieures, et négatifs dans le cas contraire.

Ainsi,

$$d_s \cos\alpha = -\mathrm{AM}\left(\frac{\cos\alpha_1}{c} + \frac{\cos\alpha_2}{\gamma}\right).$$

On trouverait de la même manière

$$d_{s_1} \cos\alpha_1 = -\mathrm{AM}_1\left(\frac{\cos\alpha_2}{c_1} + \frac{\cos\alpha}{\gamma_1}\right),$$

$$d_{s_2} \cos\alpha_2 = -\mathrm{AM}_2\left(\frac{\cos\alpha}{c_2} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_2}\right).$$

Ces formules, jointes à celles qui ont été établies plus haut, font connaître les cosinus des angles que forment avec AX les tangentes aux points M, M_1, M_2 des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ces points; en rétablissant les infiniment petits du second ordre qui ont été laissés de côté dans les démonstrations précédentes, elles peuvent être écrites comme il suit :

$$(c)\quad\left\{\begin{array}{l}
\cos\alpha\ +d_s\cos\alpha\ =\cos\alpha\ -\mathrm{AM}\left(\dfrac{\cos\alpha_1}{c}+\dfrac{\cos\alpha_2}{\gamma}\right)+\varepsilon,\\
\cos\alpha_1+d_s\cos\alpha_1=\cos\alpha_1+\mathrm{AM}\,\dfrac{\cos\alpha}{c}+\varepsilon',\\
\cos\alpha_2+d_s\cos\alpha_2=\cos\alpha_2+\mathrm{AM}\,\dfrac{\cos\alpha}{\gamma}+\varepsilon'',\\
\cos\alpha_1+d_{s_1}\cos\alpha_1=\cos\alpha_1-\mathrm{AM}_1\left(\dfrac{\cos\alpha_2}{c_1}+\dfrac{\cos\alpha}{\gamma_1}\right)+\varepsilon_1,\\
\cos\alpha_2+d_{s_1}\cos\alpha_2=\cos\alpha_2+\mathrm{AM}_1\dfrac{\cos\alpha_1}{c_1}+\varepsilon'_1,\\
\cos\alpha\ +d_{s_1}\cos\alpha\ =\cos\alpha\ +\mathrm{AM}_1\dfrac{\cos\alpha_1}{\gamma_1}+\varepsilon''_1,\\
\cos\alpha_2+d_{s_2}\cos\alpha_2=\cos\alpha_2-\mathrm{AM}_2\left(\dfrac{\cos\alpha}{c_2}+\dfrac{\cos\alpha_1}{\gamma_2}\right)+\varepsilon_2,\\
\cos\alpha\ +d_{s_2}\cos\alpha\ =\cos\alpha\ +\mathrm{AM}_2\dfrac{\cos\alpha_2}{c_2}+\varepsilon'_2,\\
\cos\alpha_1+d_{s_2}\cos\alpha_1=\cos\alpha_1+\mathrm{AM}_2\dfrac{\cos\alpha_2}{\gamma_2}+\varepsilon''_2.
\end{array}\right.$$

Déterminons maintenant les cosinus des angles que font avec AX les tangentes aux axes des s, s_1, s_2 relatifs aux points P, P_1, P_2, intersections respectives de l'axe des s_1 relatif au point M_2 avec l'axe des s_2 relatif au point M_1, de l'axe des s_2 relatif au point M avec l'axe des s relatif au point M_2, et de l'axe des s relatif au point M_1 avec l'axe des s_1 relatif au point M; comme chacun de ces cosinus peut être calculé de deux manières différentes, nous obtiendrons ainsi des relations que nous fourniront les formules de M. Lamé.

Considérons en premier lieu le cosinus de l'angle que forme avec AX la tangente au point P de l'axe des s relatif à ce point. Nous pouvons l'obtenir, soit au moyen de la valeur de $\cos\alpha+d_{s_1}\cos\alpha$ déduite des formules (c), en supposant que $\cos\alpha$, AM_1, $\cos\alpha_1$, $\frac{1}{\gamma_1}$, ε''_1, au lieu de se rapporter au point A, se rapportent au point M_2, et deviennent, par conséquent,

$$\cos\alpha+d_{s_2}\cos\alpha,\quad \mathrm{AM}_1+d_{s_2}\mathrm{AM}_1,\quad \cos\alpha_1+d_{s_2}\cos\alpha_1,\quad \frac{1}{\gamma_1}+d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1},\quad \varepsilon''_1+d_{s_2}\varepsilon''_1,$$

soit au moyen de la valeur de $\cos\alpha+d_{s_2}\cos\alpha$ déduite des mêmes formules, en supposant que $\cos\alpha$, AM_2, $\cos\alpha_2$, $\frac{1}{c_2}$, ε'_2, au lieu de se rapporter au point A, se rapportent au point M_1, et deviennent, par conséquent,

$$\cos\alpha + d_{s_1}\cos\alpha,\quad AM_2 + d_{s_1}AM_2,\quad \cos\alpha_2 + d_{s_1}\cos\alpha_2,\quad \frac{1}{c_2} + d_{s_1}\frac{1}{c_2},\quad \varepsilon'_2 + d_{s_1}\varepsilon'_2.$$

De la première manière nous trouvons

$$\cos\alpha + d_{s_2}\cos\alpha + (AM_1 + d_{s} AM_1)(\cos\alpha_1 + d_{s_2}\cos\alpha_1)\left(\frac{1}{\gamma_1} + d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1}\right) + \varepsilon''_1 + d_{s_2}\varepsilon''_1;$$

mais

$$d_{s_2}\cos\alpha = AM_2\frac{\cos\alpha_2}{c_2} + \varepsilon'_2,$$

$$d_{s_2}\cos\alpha_1 = AM_2\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2} + \varepsilon''_2,$$

et enfin, ainsi qu'on le voit aisément,

$$d_{s_2}AM_1 = AM_1 AM_2\frac{1}{c_1} + \zeta,$$

ζ étant un infiniment petit du troisième ordre.

Donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, le cosinus considéré a pour valeur

$$\cos\alpha + AM_1\frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1} + AM_2\frac{\cos\alpha_2}{c_2} + AM_1 AM_2\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2}\frac{1}{\gamma_1} + AM_1\cos\alpha_1 d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1}$$
$$+ AM_1 AM_2\frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1}\frac{1}{c_1} + \varepsilon'_2 + \varepsilon''_1.$$

Si nous le calculons de la seconde manière, il vient

$$\cos\alpha + d_{s_1}\cos\alpha + (AM_2 + d_{s_1}AM_2)(\cos\alpha_2 + d_{s_1}\cos\alpha_2)\left(\frac{1}{c_2} + d_{s_1}\frac{1}{c_2}\right) + \varepsilon'_2 + d_{s_1}\varepsilon'_2;$$

mais

$$d_{s_1}\cos\alpha = AM_1\frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1} + \varepsilon''_1,$$

$$d_{s_1}\cos\alpha_2 = AM_1\frac{\cos\alpha_1}{c_1} + \varepsilon'_1,$$

et enfin

$$d_{s_1}AM_2 = AM_1 AM_2\frac{1}{\gamma_2} + \zeta',$$

ζ' étant un infiniment petit du troisième ordre.

Donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on a

$$\cos\alpha + \mathrm{AM}_1 \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1} + \mathrm{AM}_2 \frac{\cos\alpha_2}{c_2} + \mathrm{AM}_1 \mathrm{AM}_2 \frac{\cos\alpha_1}{c_1}\frac{1}{c_2} + \mathrm{AM}_2 \cos\alpha_2 d_{s_1}\frac{1}{c_2}$$
$$+ \mathrm{AM}_1 \mathrm{AM}_2 \frac{\cos\alpha_2}{c_2}\frac{1}{\gamma_2} + \varepsilon'_2 + \varepsilon''_1.$$

Égalant cette valeur à la précédente, faisant $\mathrm{AM}_1 = \mathrm{AM}_2$, et remarquant que

$$\frac{d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1}}{\mathrm{AM}_2} = \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2},$$
$$\frac{d_{s_1}\frac{1}{c_2}}{\mathrm{AM}_1} = \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1},$$

on trouve

$$\cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} + \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1 c_1} = \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} + \frac{\cos\alpha_1}{c_1 c_2} + \frac{\cos\alpha_2}{c_2\gamma_2}.$$

On verrait de même, en calculant les cosinus des angles que font avec AX la tangente au point P_1 de l'axe des s_1 relatif à ce point, et la tangente au P_2 de l'axe des s_2 relatif à ce point,

$$\cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} + \frac{\cos\alpha}{\gamma_2\gamma} + \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2 c_2} = \cos\alpha \frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} + \frac{\cos\alpha_2}{c_2 c} + \frac{\cos\alpha}{c\gamma},$$
$$\cos\alpha \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma\gamma_1} + \frac{\cos\alpha}{\gamma c} = \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} + \frac{\cos\alpha}{c c_1} + \frac{\cos\alpha_1}{c_1\gamma_1}.$$

Supposant maintenant que AX, qui jusqu'ici a été laissé quelconque, devienne successivement la tangente au point A à la courbe AS, à la courbe AS_1 et à la courbe AS_2, on trouve trois identités et les six relations

$$\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right), \quad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2}\right),$$
$$\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right), \quad \frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c}\right),$$
$$\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}\right),$$

qui sont, comme l'on voit, les six premières de M. Lamé.

Pour obtenir les trois dernières, continuons la détermination des cosinus des angles que font avec AX les tangentes aux points P, P_1, P_2 des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ces points. Ainsi, cherchons le cosinus de l'angle que la tangente à l'axe des s_1 relatif au point P fait avec AX. Ce cosinus peut se déduire, ou bien de la valeur de $\cos\alpha_1 + d_{s_1}\cos\alpha_1$ donnée par les formules (c), en supposant que $\cos\alpha_1$, AM_1, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha$, $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, ε_1, au lieu de se rapporter au point A, se rapportent à M_2, et deviennent, par conséquent,

$$\cos\alpha_1 + d_{s_2}\cos\alpha_1,\quad AM_1 + d_{s_2}AM_1,\quad \cos\alpha_2 + d_{s_2}\cos\alpha_2,\quad \cos\alpha + d_{s_2}\cos\alpha,$$
$$\frac{1}{c_1} + d_{s_2}\frac{1}{c_1},\quad \frac{1}{\gamma_1} + d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1},\quad \varepsilon_1 + d_{s_2}\varepsilon_1,$$

ou bien encore de la valeur de $\cos\alpha_1 + d_{s_1}\cos\alpha_1$, donnée par les mêmes formules (c), en supposant que $\cos\alpha_1$, AM_2, $\cos\alpha_2$, $\frac{1}{\gamma_2}$, ε''_2, au lieu de se rapporter au point A, se rapportent au point M_1, et deviennent, par conséquent,

$$\cos\alpha_1 + d_{s_1}\cos\alpha_1,\quad AM_2 + d_{s_1}AM_2,\quad \cos\alpha_2 + d_{s_1}\cos\alpha_2,\quad \frac{1}{\gamma_2} + d_{s_1}\frac{1}{\gamma_2},\quad \varepsilon''_2 + d_{s_1}\varepsilon''_2.$$

De la première manière nous trouvons, pour le cosinus en question,

$$\cos\alpha_1 + d_{s_2}\cos\alpha_1 - (AM_1 + d_{s_2}AM_1)\left\{\begin{aligned}&(\cos\alpha_2 + d_{s_2}\cos\alpha_2)\left(\frac{1}{c_1} + d_{s_2}\frac{1}{c_1}\right)\\ &\quad + (\cos\alpha + d_{s_2}\cos\alpha)\left(\frac{1}{\gamma_1} + d_{s_2}\frac{1}{\gamma_1}\right)\end{aligned}\right\} + \varepsilon_1 + d_{s_2}\varepsilon_1;$$

mais

$$d_{s_2}\cos\alpha_1 = AM_2\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2} + \varepsilon''_2,$$
$$d_{s_2}\cos\alpha_2 = -AM_2\left(\frac{\cos\alpha}{c_2} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_2}\right) + \varepsilon_2,$$
$$d_{s_2}\cos\alpha = AM_2\frac{\cos\alpha_2}{c_2} + \varepsilon'_2,$$

et

$$d_{s_2}AM_1 = AM_1 AM_2\frac{1}{c_1} + \zeta.$$

Substituant et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, il vient

$$\cos\alpha_1 + AM_2\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2} - AM_1\frac{\cos\alpha_2}{c_1} - AM_1\frac{\cos\alpha}{\gamma_1} + AM_1 AM_2 \frac{1}{c_1}\left(\frac{\cos\alpha}{c_2} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_2}\right)$$

$$- AM_1 \cos\alpha_2 d_s \frac{1}{c_1} - AM_1 AM_2 \frac{\cos\alpha_2}{c_1}\frac{1}{c_1} - AM_1 AM_2 \frac{1}{\gamma_1}\frac{\cos\alpha_2}{c_2}$$

$$- AM_1 \cos\alpha d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1} - AM_1 AM_2 \frac{\cos\alpha}{\gamma_1}\frac{1}{c_1} + \varepsilon''_2 + \varepsilon_1.$$

Si nous le calculons de la seconde manière, nous trouvons d'abord

$$\cos\alpha_1 + d_{s_1}\cos\alpha_1 + (AM_2 + d_{s_1} AM_2)(\cos\alpha_2 + d_{s_1}\cos\alpha_2)\left(\frac{1}{\gamma_2} + d_{s_1}\frac{1}{\gamma_2}\right) + \varepsilon''_2 + d_{s_1}\varepsilon''_2;$$

mais

$$d_{s_1}\cos\alpha_1 = - AM_1\left(\frac{\cos\alpha_2}{c_1} + \frac{\cos\alpha}{\gamma_1}\right) + \varepsilon_1,$$

$$d_{s_1}\cos\alpha_2 = AM_1\frac{\cos\alpha_1}{c_1} + \varepsilon'_1,$$

$$d_{s_1} AM_2 = AM_1 AM_3 \frac{1}{\gamma_2} + \zeta'.$$

Substituant et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, il vient

$$\cos\alpha_1 - AM_1\frac{\cos\alpha_2}{c_1} - AM_1\frac{\cos\alpha}{\gamma_1} + AM_2\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2} + AM_1 AM_2\frac{\cos\alpha_1}{c_1}\frac{1}{\gamma_2}$$

$$+ AM_2 \cos\alpha_2 d_{s_1}\frac{1}{\gamma_2} + AM_1 AM_2 \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2}\frac{1}{\gamma_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon''_2;$$

égalant cette valeur à celle que nous avions obtenue précédemment, faisant $AM_1 = AM_2$, et remarquant que

$$\frac{ds_2 \frac{1}{c_1}}{AM_2} = \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2},$$

$$\frac{ds_2 \frac{1}{\gamma_1}}{AM_2} = \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2},$$

$$\frac{ds_1 \frac{1}{\gamma_2}}{AM_1} = \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1},$$

il vient

$$\frac{\cos\alpha}{c_1 c_2} - \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} - \frac{\cos\alpha_2}{c_1^2} - \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_1 c_2} - \cos\alpha \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} - \frac{\cos\alpha}{c_1\gamma_1} = \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2^2}.$$

On trouverait aussi, en cherchant l'angle que fait avec AX la tangente au point P, l'axe des s_2 relatif à ce point,

$$\frac{\cos\alpha}{\gamma_1\gamma_2} - \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} - \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_2^2} - \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1 c_2} - \cos\alpha \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} - \frac{\cos\alpha}{c_2\gamma_2} = \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{\cos\alpha_1}{c_1^2};$$

et de même, en cherchant les angles que font avec AX les tangentes au point P_1 des axes des s_2 et des s relatifs à ce point, et les tangentes au point P_2 des axes des s et des s_1 relatifs à ce point,

$$\frac{\cos\alpha_1}{c_2 c} - \cos\alpha \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} - \frac{\cos\alpha}{c_2^2} - \frac{\cos\alpha}{\gamma_2 c} - \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} - \frac{\cos\alpha_1}{c_2\gamma_2} = \cos\alpha \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} + \frac{\cos\alpha}{\gamma^2},$$

$$\frac{\cos\alpha_1}{\gamma\gamma_2} - \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} - \frac{\cos\alpha_2}{\gamma^2} - \frac{\cos\alpha_2}{\gamma_2 c} - \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} - \frac{\cos\alpha_1}{c\gamma} = \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{\cos\alpha_2}{c_2^2},$$

$$\frac{\cos\alpha_2}{c c_1} - \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} - \frac{\cos\alpha_1}{c^2} - \frac{\cos\alpha_1}{\gamma c_1} - \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} - \frac{\cos\alpha_2}{c\gamma} = \cos\alpha_1 \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} + \frac{\cos\alpha_1}{\gamma_1^2},$$

$$\frac{\cos\alpha_2}{\gamma_1\gamma} - \cos\alpha \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{\cos\alpha}{\gamma_1^2} - \frac{\cos\alpha}{\gamma c_1} - \cos\alpha_2 \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} - \frac{\cos\alpha_2}{c_1\gamma_1} = \cos\alpha \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{\cos\alpha}{c^2}.$$

Supposant maintenant que AX, qui jusqu'ici a été laissé quelconque, devienne successivement la tangente au point A à l'axe des s, des s_1 et des s_2 relatifs à ce point, on trouvera d'abord six identités, et puis les neuf formules

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c}\right), \quad \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}\right), \quad \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right),$$

$$\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2}\right), \quad \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1}+\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds}=-\frac{1}{c_2}-\frac{1}{\gamma_1^2}-\frac{1}{\gamma c_1},$$

$$\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2}+\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1}=-\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\gamma_2^2}-\frac{1}{\gamma_1 c_2},$$

$$\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}+\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2}=-\frac{1}{c_2^2}-\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\gamma_2 c},$$

qui ne sont autres que celles de M. Lamé. On peut remarquer pourtant qu'il y a une différence quant aux signes des termes du second membre. Cela tient à ce que, dans les formules de M. Lamé, les rayons de courbure sont regardés comme positifs quand leur direction est celle des normales extérieures, c'est-à-dire celle des accroissements indiqués par d_s, d_{s_1}, d_{s_2}, tandis que nous avons fait ici l'hypothèse contraire.

§ III. — *Propriétés générales des lignes tracées sur les surfaces.*

24. Considérons sur une surface une ligne quelconque MAN (*fig.* 9); menons-lui par un de ses points A une normale dont le premier élément $AA_1 = \delta\sigma$ soit situé sur la surface. Si x, y, z représentent les coordonnées du point A, x_1, y_1, z_1 celles du point A_1, et dx, dy, dz les accroissements infiniment petits que reçoivent les coordonnées x, y, z quand on passe du point A à un point B infiniment voisin et situé sur MAN, nous aurons

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\delta\sigma^2, \tag{1}$$

$$(x-x_1)\,dx+(y-y_1)\,dy+(z-z_1)\,dz=0. \tag{2}$$

Nous employons, comme on peut le voir déjà, et nous avertissons que cette notation sera conservée dans tout ce paragraphe, la caractéristique d pour représenter les différentielles qui se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la courbe MAN, dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe, et la caractéristique δ pour représenter les différentielles qui se rapportent à un déplacement perpendiculaire à MAN, dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs des trajectoires orthogonales de cette courbe; le sens de ces deux déplacements étant tel d'ailleurs, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, qu'en adjoignant à leur direction celle de la normale extérieure à la surface au point A, on ait trois droites rectangulaires situées par rapport à ce point, comme le sont respectivement, par rapport à leur origine, les axes des x, des y et des z: ce qui, du reste, laisse les deux premières directions complétement indéterminées, puisqu'on peut choisir arbitrairement la région extérieure à la surface.

Différentions, suivant la caractéristique $d_,$ les deux membres de l'égalité (1); il viendra, à cause de l'équation (2),

$$(x - x_{,})\,dx_{,} + (y - y_{,})\,dy_{,} + (z - z_{,})\,dz_{,} = -\,\delta\sigma d\delta\sigma. \tag{3}$$

25. Si $\delta\sigma$ est supposé constant pour tous les points de MAN, on aura

$$d\delta s = 0,$$

et l'égalité précédente se réduira à

$$(x - x_{,})\,dx_{,} + (y - y_{,})\,dy_{,} + (z - z_{,})\,dz_{,} = 0; \tag{4}$$

ce qui montre que *la courbe* $M_{,}A_{,}N_{,}$ *qui passe par les extrémités des droites infiniment petites* $MM_{,}$, $AA_{,}$, $NN_{,}$,.., *menées sur la surface normalement à* MAN *et prises égales entre elles, est normale à ces droites* $MM_{,}$, $AA_{,}$, $NN_{,}$,....

De là nous pouvons conclure un théorème remarquable dû à M. Gauss.

26. *Concevons que d'un point* A (fig. 10) *pris sur une surface on mène sur cette surface une série de lignes* AM, AM′, AM″,... *dont tous les plans osculateurs soient normaux à la surface, de manière qu'en prenant deux points quelconques* N *et* $N_{,}$ *suffisamment rapprochés sur une de ces lignes, la portion de cette ligne comprise entre* N *et* $N_{,}$ *soit le plus court chemin de* N *à* $N_{,}$ *sur la surface; si l'on mesure à partir du point* A, *sur toutes les lignes* AM, AM′, AM″,..., *des longueurs finies égales, la courbe qui passera par les extrémités* M, M′, M″,... *de ces longueurs sera normale aux lignes* AM, AM′, AM″,... *en ces points*.

En effet, prenons à partir du point A, sur toutes les lignes AM, AM′, AM″,..., des longueurs infiniment petites égales, Am, Am', Am'',... puis à partir des points m, m', m'',..., d'autres longueurs infiniment petites et égales mm_1, $m'm'_1$, $m''m''_1$,..., et, ainsi de suite, jusqu'à ce que nous soyons arrivés en M, M', M'',.... La courbe qui passera par les points m, m', m'',... sera une circonférence de cercle; par conséquent, sera normale aux éléments Am, Am', Am'',...; mais ces éléments et les éléments correspondants qui suivent, savoir, mm_1, $m'm'_1$, $m''m''_1$,..., déterminent respectivement des plans osculateurs des courbes AM, AM', AM'',.... D'ailleurs tous les plans osculateurs de ces courbes sont normaux à la surface; cela exige évidemment que la circonférence qui passe par les points m, m', m'',... soit normale aux éléments mm_1, $m'm'_1$, $m''m''_1$,.... Il résulte de là, et de ce que nous avons démontré (n° **25**), que la courbe qui passe par les points m_1, m'_1, m''_1,... est aussi normale aux éléments mm_1, $m'm'_1$, $m''m''_1$,...; par conséquent, en vertu de la propriété des plans osculateurs des courbes AM, AM', AM'',..., qu'elle est normale aux éléments suivants m_1m_2, $m'_1m'_2$, $m''_1m''_2$,...: d'où nous conclurons de même que ces derniers éléments sont normaux à la courbe qui passe par les points m_2, m'_2, m''_2,..., et ainsi de suite. Il est clair qu'en continuant ce raisonnement, on finira par démontrer que la courbe qui passe par les points M, M', M'',... est normale aux derniers éléments des courbes AM, AM', AM'',....

27. La démonstration précédente pourrait évidemment servir à établir un théorème plus général, dû aussi à M. Gauss, et qui s'énonce ainsi: *Si, sur une surface, on conçoit une courbe quelconque, et que des différents points de cette courbe l'on mène à angle droit une série de lignes géodésiques ou* minima, *de même longueur*, *la courbe qui joindra les extrémités de ces lignes coupera chacune d'elles à angle droit.*

Ces deux théorèmes nous seront plus tard d'une grande utilité.

28. Divisons l'équation (2) du n° **24** par la différentielle ds de l'arc de la courbe MAN, et différentions le résultat suivant la caractéristique d; il viendra

$$ds - \frac{dx}{ds}dx_1 - \frac{dy}{ds}dy_1 - \frac{dz}{ds}dz_1 + (x-x_1)\,d\frac{dx}{ds} + (y-y_1)\,d\frac{dy}{ds} + (z-z_1)\,d\frac{dz}{ds} = 0,$$

que l'on peut, en posant

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = ds_1^2,$$

mettre sous la forme

$$(5)\quad 1-\frac{ds_1}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1}+\frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds_1}+\frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds_1}\right)+(x-x_1)\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+(y-y_1)\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}+(z-z_1)\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}=0.$$

Or, ρ étant le rayon de courbure de la courbe MAN au point A, et α, β, γ les angles que ce rayon de courbure prolongé de la courbe vers le centre de courbure fait avec les parties positives des axes, on sait que

$$\cos\alpha=\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos\beta=\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos\gamma=\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

De même λ, μ, ν étant les angles que la normale AA_1 prolongée de la courbe MAN vers la courbe $M_1A_1N_1$, fait avec les parties positives des axes, on a

$$\cos\lambda=-\frac{x-x_1}{\delta\sigma},\quad \cos\mu=-\frac{y-y_1}{\delta\sigma},\quad \cos\nu=-\frac{z-z_1}{\delta\sigma};$$

l'équation (5) revient donc à

$$1-\frac{\delta\sigma}{\rho}(\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu)=\frac{ds_1}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1}+\frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds_1}+\frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

ou simplement à

$$(6)\qquad 1-\delta\sigma\frac{\cos\theta}{\rho}=\frac{ds_1}{ds}\cos\varphi,$$

en représentant par θ l'angle que la normale principale de MAN au point A, prolongée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale AA_1, prolongée de A en A_1, et par φ l'angle que la tangente en A à la courbe MAN, prolongée dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette courbe, fait avec la tangente en A_1 à la courbe $M_1A_1N_1$, prolongée aussi dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette nouvelle courbe.

29. On peut remarquer que, dans la démonstration que nous venons de donner, nous n'avons aucunement supposé $\delta\sigma$ infiniment petit. Ainsi, la formule précédente subsiste dans le cas même où $\delta\sigma$ est une longueur finie tout à fait quelconque; quand $\delta\sigma$ est infiniment petit comme dans la *fig.* 9, la formule se simplifie : on peut, en effet, substituer l'unité à $\cos\varphi$, car φ

est alors infiniment petit, et l'on a

$$(7) \qquad 1 - \delta\sigma \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{ds_1}{ds}.$$

Du reste, si l'on ne se propose que d'obtenir cette dernière formule qui joue un grand rôle dans la théorie des lignes tracées sur une même surface, on peut procéder plus simplement comme il suit.

29 *bis*. On a, d'après nos notations,

$$\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z = 0,$$

et

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Différentiant la première équation suivant la caractéristique d, et la seconde suivant δ, il vient

$$\delta x d\frac{dx}{ds} + \delta y d\frac{dy}{ds} + \delta z d\frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z = 0,$$

$$dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz = ds\delta ds;$$

d'où, en remarquant que

$$d\delta x = \delta dx, \quad d\delta y = \delta dy, \quad d\delta z = \delta dz,$$

on tire

$$\delta ds = -\delta x d\frac{dx}{ds} - \delta y d\frac{dy}{ds} - \delta z d\frac{dz}{ds}.$$

Mais λ, μ, ν représentant, comme plus haut, les angles que la normale à MAN tracée sur la surface, et prolongée du côté de la courbe $M_1A_1N_1$, fait avec les parties positives des axes des coordonnées, α, β, γ ceux que la normale principale fait avec les mêmes parties des axes, et ρ le rayon de courbure de la courbe MAN, on a

$$\cos\lambda = \frac{\delta x}{\delta\sigma}, \quad \cos\mu = \frac{\delta y}{\delta\sigma}, \quad \cos\gamma = \frac{\delta z}{\delta\sigma},$$

$$\cos\alpha = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\beta = \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\gamma = \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Donc, substituant dans la valeur de δds les valeurs de δx, δy, δz, $d\frac{dx}{ds}$,

$d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ tirées de ces dernières équations, il vient

$$\delta ds = -\frac{\partial \sigma ds}{\rho}(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu),$$

ou bien

$$(7\ bis)\qquad \delta ds = -\,\delta\sigma ds\,\frac{\cos\theta}{\rho},$$

θ étant l'angle que le plan osculateur de la courbe au point A fait avec le plan tangent de la surface au même point, ou mieux, pour faire disparaître toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la courbe dirigée de la courbe vers le centre de courbure fait avec la normale à cette courbe, tracée sur la surface et dirigée dans le sens suivant lequel se comptent les accroissements indiqués par la caractéristique δ. Cette formule coïncide au fond avec celle que l'on a déjà obtenue.

30. On peut déduire de la formule (7) un grand nombre de résultats importants. Elle va nous servir, en premier lieu, à établir une équation remarquable des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque.

Imaginons que la surface considérée soit découpée en rectangles infiniment petits par deux systèmes de lignes orthogonales, et regardons ces lignes comme destinées à fixer la position des points situés sur la surface par les longueurs de leurs arcs x et y comptés à partir de deux de ces courbes prises pour axes, et dans un certain sens que l'on supposera déterminé, comme au n° **24**, au moyen de la normale extérieure. Soient maintenant AA′ (*fig.* 11) une courbe quelconque tracée sur la surface, et mn un de ses éléments; si nous appelons dx et dy les éléments mp et np des lignes coordonnées, on aura

$$mn = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

et, par suite, la longueur totale AA′ de la courbe sera

$$(a)\qquad \int\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

l'intégrale s'étendant de la première extrémité A à la seconde A′.

Prenons la variation en supposant que les points correspondants dans les deux états soient situés sur les lignes coordonnées du même système que tm; il viendra, en indiquant par δ ce genre d'accroissement dont le sens positif sera d'ailleurs celui suivant lequel croissent les arcs y,

$$\int \frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy.$$

Or

$$\delta dx = m'p' - mp = -\,mp\,.\,mm'\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x = -\,dx\,.\,\omega\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x,$$

en posant $mm' = \omega$, et appelant $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$ le rapport que l'on obtient en divisant par le rayon de courbure de la ligne coordonnée rmp au point m le cosinus de l'angle que la normale principale de cette courbe, dirigée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la tangente à la courbe coordonnée tmm' menée dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe; tangente qui est ici placée par rapport à la tangente analogue à la courbe rmp et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y l'est par rapport à celui des x et à celui des z. Quant à δdy, il est égal à

$$n'p' - np = \omega + \frac{d\omega}{ds}\,ds - pp'.$$

Or

$$\omega - pp' = mm' - p'p = -\,\omega dx\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y;$$

donc

$$\delta dy = -\,\omega dx\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \frac{d\omega}{ds}\,ds.$$

On appelle $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y$ le rapport que l'on obtient en divisant par le rayon de courbure de la ligne coordonnée tmm' le cosinus de l'angle que la normale principale de cette courbe, dirigée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale tracée sur la surface et située par rapport à mm' et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y l'est par rapport à celui des x et à celui des z, c'est-à-dire ici avec la tangente à la ligne coordonnée rmp menée dans un sens contraire à celui suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe. Substituant dans la variation de l'intégrale (a), il vient

$$\int\left[-\frac{dx}{ds}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x dx - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y dx\right]\omega + \frac{dy}{ds}\frac{d\omega}{ds}\,ds.$$

Intégrant par parties le terme qui contient $\frac{d\omega}{ds}$, et négligeant ce qui se rapporte aux limites, parce qu'on suppose fixes les extrémités de la courbe, on a

$$\int \omega \left[-\frac{dy}{ds}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y dx - \frac{dx}{ds}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x dx - d\frac{dy}{ds} \right],$$

ou bien encore

$$\int \omega ds \left[-\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y \sin i - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x \cos i - \frac{di}{ds} \right] \cos i,$$

en appelant i l'angle positif (c'est-à-dire compté en allant de mp vers mm') que forme la tangente à la courbe rmp au point m, et dirigée suivant mp, avec la tangente à la courbe rmp menée dans le sens, arbitraire d'ailleurs, suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe; ce qui donne

$$\frac{dx}{ds} = \cos i, \quad \frac{dy}{ds} = \sin i, \quad d\frac{dy}{ds} = \cos i\, di.$$

De là on tire, pour l'équation de la ligne géodésique, en égalant à zéro l'élément de l'intégrale,

$$\frac{di}{ds} = -\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x \cos i - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y \sin i. \tag{8}$$

31. Pour montrer immédiatement l'utilité que l'on peut retirer de cette formule, nous allons en déduire l'équation remarquable que M. Liouville a donnée des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Prenons pour lignes coordonnées tracées sur l'ellipsoïde les lignes de courbure qui, comme l'on sait, sont les intersections de l'ellipsoïde avec les différents hyperboloïdes à une et à deux nappes qui ont mêmes foyers que lui; dans ce cas, il est facile d'évaluer $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y$: il suffit de se rappeler notre formule (7), et quelques formules de la théorie, maintenant bien connue, des coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde.

Nous obtiendrons ainsi facilement, en adoptant les notations de M. Liouville, et supposant que la ligne de courbure représentée par l'équation $\mu =$ const. corresponde à la ligne coordonnée dont les arcs ont été appelés x,

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x = \frac{-\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,(\mu^2 - \nu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y = \frac{-\nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\,(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Snbstituant dans l'équation (8), il vient

$$\frac{di}{ds} = \frac{\mu \cos i \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu \sin i \sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où chassant ds, et observant que

$$dx = \cos i\, ds = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}\, d\nu,$$

$$dy = \sin i\, ds = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}\, d\mu,$$

il vient

$$di = \frac{\mu \cos i\, d\mu}{\sin i\,(\mu^2 - \nu^2)} + \frac{\nu \sin i\, d\nu}{\cos i\,(\mu^2 - \nu^2)},$$

ou

$$(\nu^2 - \mu^2) \sin i \cos i\, di + \mu \cos^2 i\, d\mu + \nu \sin^2 i\, d\nu = 0,$$

ou intégrant,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.};$$

ce qui est la formule de M. Liouville.

MM. Chasles et Liouville ont donné des démonstrations géométriques très-simples de cette formule; je pense néanmoins que la démonstration précédente, qui est basée sur le calcul des variations, ne sera pas sans quelque intérêt.

32. On connaît les conséquences élégantes que M. Michael Roberts a déduites de la formule de M. Liouville, et desquelles résulte qu'il existe une grande analogie entre les lignes de courbure de l'ellipsoïde et les ellipses planes; je joindrai aux résultats connus une propriété d'un autre genre qui fournira une nouvelle preuve de l'analogie en question.

Reprenons la valeur générale

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x = \frac{\mu \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

du rapport du cosinus de l'angle que le plan osculateur de la ligne de courbure de l'ellipsoïde qui a pour équation $\mu = \text{const.}$, fait avec le plan tangent à cette surface, au rayon de courbure de cette ligne. Si nous considérons en même temps une ligne géodésique issue d'un ombilic, et dont l'équation sera, d'après MM. Liouville et Roberts,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2,$$

nous pourrons aisément calculer le sinus de l'angle que cette ligne minimun fait avec la courbe $\mu =$ const., ou, ce qui revient au même, le cosinus de l'angle α que la ligne minimum fait avec la normale menée sur la surface, à la courbe $\mu =$ const., et l'on trouvera

$$\cos^2 \alpha = \frac{\mu^2 - b^2}{\mu^2 - \nu^2},$$

d'où

$$\cos^3 \alpha = \frac{(\mu^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette valeur, combinée avec celle de $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$, donne

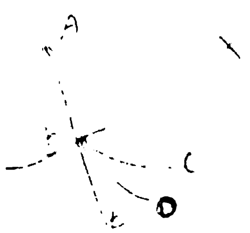
$$\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{\cos^3 \alpha} = \frac{-\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,(\mu^2 - b^2)};$$

ce qui nous prouve, le second membre ne contenant que μ, et étant, par conséquent, le même pour tous les points de la courbe $\mu =$ const., que le rapport $\frac{\cos\theta}{\rho}$, relatif à une ligne de courbure quelconque de l'ellipsoïde, est proportionnel au cube du cosinus de l'angle, que la normale menée sur la surface à cette ligne, fait avec la ligne géodésique issue d'un ombilic; propriété analogue à celle qui apprend que dans l'ellipse le produit du rayon de courbure par le cube du cosinus de l'angle que le rayon vecteur issu du foyer fait avec la normale, a la même valeur quel que soit le point de l'ellipse que l'on considère.

33. De la formule (8) établie dans le numéro précédent, et qui fait connaître la variation de l'inclinaison des lignes géodésiques sur ce que nous avons appelé plus haut les lignes coordonnées, on peut facilement déduire une formule plus générale, et faisant connaître la variation de l'inclinaison d'une ligne tout à fait quelconque sur les lignes coordonnées.

Soient AB, BC deux éléments consécutifs de la ligne considérée (*fig.* 12), et BD le second élément de la ligne géodésique dirigée suivant AB; prolon-

Fig 12



geons AB jusqu'à E : le trièdre formé par BC, BD, BE, dans lequel les deux faces EBD et DBC sont évidemment perpendiculaires l'une à l'autre, nous donnera

$$\text{CBD} = \text{CBE} \sin \widehat{\text{CBE}, \text{DBE}}.$$

Or représentons par α l'angle des deux plans ABC et ABD, ou mieux, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, l'angle plus petit que 180 degrés, des normales principales des deux courbes ABC, ABD, prolongées l'une et l'autre de la courbe à laquelle elles se rapportent vers le centre de courbure correspondant; appelons en outre ds l'élément AB de la courbe considérée, et enfin ρ le rayon de courbure de cette courbe au point A ou au point B : on aura

$$\text{CBE} = \frac{ds}{\rho};$$

donc

$$(a) \qquad \text{CBD} = ds\,\frac{\sin\alpha}{\rho} = \pm\, ds\,\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Nous appelons θ l'angle que le plan osculateur de la courbe ABC au point B fait avec le plan tangent de la surface au même point, ou mieux, pour faire disparaître toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la courbe ABC, prolongée de cette courbe vers le centre de courbure, fait avec une normale à ABC tracée sur la surface et située par rapport à la normale extérieure à la surface et à la tangente à ABC prolongée dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe, comme l'axe des y, par rapport à celui des z et à celui des x. Quant au signe placé devant le second membre de l'égalité (a), on reconnaît aisément qu'il doit être $+$ quand l'angle positif que forment les tangentes considérées plus haut à la courbe ABC et à la courbe coordonnée (x) est plus grand que l'angle positif que forment les tangentes à la ligne géodésique ABD et à la courbe coordonnée (x), et qu'il est — dans le cas contraire.

Pour avoir maintenant la variation de l'inclinaison de la ligne ABC sur une des lignes coordonnées, il est clair qu'il suffit d'ajouter à l'angle CBD, ou plutôt à $ds\,\frac{\cos\theta}{\rho}$, la variation de l'inclinaison de la ligne minimum dirigée suivant AB que nous avons obtenue dans le numéro précédent; il vient ainsi

$$(9) \qquad di = -\,dx\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x - dy\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + ds\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s,$$

en remplaçant par $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ le rapport $\frac{\cos\theta}{\rho}$ défini plus haut, afin d'exprimer qu'il se rapporte à la courbe proposée qui est supposée tout à fait quelconque.

Cette dernière formule représente une généralisation remarquable de celle qui, dans la théorie des lignes planes, donne la valeur de l'angle de contingence en fonction du rayon de courbure; nous pouvons la vérifier dans un cas particulier bien simple.

Supposons la ligne ABC tracée sur un plan, et admettons que les lignes des coordonnées deviennent, d'une part, des droites issues d'un même point, et d'une autre, des circonférences décrites du même point comme centre, ce qui nous fournira le système de coordonnées polaires ordinaires. Représentons comme à l'ordinaire par r et θ ces coordonnées polaires; si, de plus, ρ est le rayon de courbure de la courbe, la formule (9) deviendra

$$d.\,\text{arc tang}\,\frac{r}{r'} = -\,d\omega + \frac{1}{\rho}\,ds,$$

r' étant la dérivée de r par rapport à ω, ou

$$\frac{1}{\rho}\,ds = d\omega\left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right) = d\omega\left(\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right),$$

r'' étant la seconde dérivée de r par rapport à ω; d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui est le résultat connu.

34. La formule (9), et plusieurs autres établies plus haut, tout en nous montrant l'importance de la considération du rapport que l'on a appelé $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ et qui a été nettement défini dans le numéro précédent, nous font voir que c'est là l'élément qui doit représenter la courbure des lignes, lorsque du moins on considère ces lignes comme tracées sur une surface déterminée. Pour abréger, nous donnerons, dans ce qui va suivre, à ce rapport le nom de courbure géodésique; cette dénomination est motivée sur une propriété exprimée par la formule (a) du numéro précédent, et d'après laquelle la courbure géodésique d'une courbe quelconque est égale en valeur absolue à l'angle infiniment petit que forment deux lignes géodésiques menées tangentiellement à la courbe considérée par deux points infiniment voisins A et B, divisé par l'arc AB.

35. La formule (7), qui nous a déjà servi à établir une équation remarquable des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque, peut encore être employée d'une autre manière dans les questions dépendant du calcul des variations, et relatives aux lignes tracées sur les surfaces. Montrons-le par un exemple simple.

Proposons-nous de trouver la ligne de longueur donnée qui comprend une aire maximum sur une surface.

Supposons que la courbe cherchée passe par les points fixes A et B (*fig.* 13), et que ce soit l'aire comprise entre cette courbe, que nous nommerons AMB, et la courbe fixe ACB, qui soit un maximum. Considérons une seconde courbe AM_1B passant par A et B, infiniment voisine de AMB et ayant même longueur que cette dernière courbe; non-seulement la différence de longueur de AMB et AM_1B sera nulle, mais encore l'aire comprise entre ces deux courbes. Or, par un point quelconque M de AMB, menons une normale à cette courbe dont le premier élément MM_1 soit sur la surface. Soit ω la longueur de l'élément MM_1 pris avec le signe $+$, s'il est d'un côté de AMB, et avec le signe $-$, s'il est de l'autre côté, ω étant par conséquent variable avec le point M, ou fonction de l'arc AM que j'appelle s; l'aire comprise entre les deux courbes AMB et AM_1B sera

$$\int_0^{s_1} \omega ds,$$

s_1 étant la longueur de la courbe AMB : on aura donc

$$(a) \qquad \int_0^{s_1} \omega ds = 0.$$

D'un autre côté, si nous représentons par $MN = ds$ un élément de la courbe AMB, et par $M_1N_1 = ds_1$ l'élément de la courbe AM_1B déterminé en menant des normales sur la surface à la courbe AMB par les points M et N, on pourra appliquer la formule (7) aux deux courbes AMB et AM_1B, et l'on aura

$$ds_1 - ds = \pm \frac{\omega \cos\theta}{\rho} ds,$$

$\frac{\cos\theta}{\rho}$ se rapportant à la courbe AMB, et le signe du second membre dépendant de celui de ω.

Par conséquent, on aura

$$(b) \qquad \int_0^{s_1} \omega \frac{\cos\theta}{\rho} ds = 0,$$

Il est très-facile maintenant, en appliquant le raisonnement connu, de déterminer l'équation de la courbe cherchée. En effet, posons avec M. Cauchy,

$$\int_0^s \omega ds = \varphi(s),$$

$\varphi(s)$ s'annulant pour $s = 0$ et $s = s_1$; on aura

$$\omega = \varphi'(s),$$

et l'équation (b) deviendra

$$\int_0^{s_1} \varphi'(s) \frac{\cos\theta}{\rho} ds = 0.$$

Intégrant par parties, et appelant $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)'$ la dérivée par rapport à s de $\frac{\cos\theta}{\rho}$, il vient

$$\int_0^{s_1} \varphi(s) \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)' ds = 0,$$

d'où l'on tire, $\varphi(s)$ étant tout à fait quelconque entre 0 et s_1,

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)' = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right) = \text{const.}$$

Ainsi, *la courbe de longueur donnée qui comprend une aire maximum sur une surface a son rayon de courbure en chaque point proportionnel au* *cosinus de l'angle que son plan osculateur fait avec le plan tangent de la surface au même point; en d'autres termes, son rayon de courbure géodésique est constant.*

Ce théorème remarquable, qui est le correspondant de celui qui apprend que dans le cercle le rayon de courbure est constant, n'est pas nouveau. Il a été donné depuis bien longtemps dans les premiers volumes du Journal de M. Crelle; M. Delaunay y est aussi parvenu dans ces derniers temps, dans une Note insérée dans le journal de M. Liouville.

36. Nous allons terminer les applications de la formule (7), en cherchant la condition pour que deux systèmes de lignes orthogonales tracées sur une même surface puissent découper cette surface en carrés.

Considérons sur la surface une suite de lignes infiniment rapprochées de l'un et de l'autre système; ces lignes détermineront, en se coupant, des rectangles infiniment petits (*fig.* 14). Supposons que les rectangles a, b, c soient des carrés, et exprimons qu'il en est de même de d. Si nous appelons $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$ la courbure géodésique de la ligne $AA'A''\ldots$, et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y$ la courbure géodésique de $AA_1A_2\ldots$, en supposant d'ailleurs, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, le sens dans lequel croissent les arcs positifs de ces courbes, déterminé comme au n° **30**, nous aurons d'abord

$$A_1A'_1 = AA' - AA'.AA_1\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x + \varepsilon\right] = AA' - \overline{AA'}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x + \varepsilon\right],$$

ε étant infiniment petit du même ordre que AA'; et de même

$$A'A'_1 = AA_1 + AA_1AA'\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \zeta\right] = AA' + \overline{AA'}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \zeta\right],$$

ζ étant aussi infiniment petit du même ordre que AA'.

Puis on trouvera semblablement

$$A'_1A''_1 = A'A'' - \overline{A'A''}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x + \frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{dx}AA' + \varepsilon + \varepsilon_1\right],$$

$$A'_1A'_2 = A_1A_2 + \overline{A_1A_2}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y}{dy}AA_1 + \zeta + \zeta_1\right],$$

$\dfrac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{dx}$ et $\dfrac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_y}{dy}$ représentant respectivement la dérivée de $\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$ relative à un déplacement effectué suivant $AA'A''$, et la dérivée de $\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_y$ relative à un déplacement effectué suivant $AA_1A_2\ldots$, et ε_1 et ζ_1 étant des infiniment petits du second ordre, en prenant AA' pour unité d'infiniment petits. Si nous voulons maintenant que le rectangle d soit un carré, il faudra que

$$A'A'' - \overline{A'A''}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x + \frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{dx}AA' + \varepsilon + \varepsilon_1\right]$$
$$= A_1A_2 + \overline{A_1A_2}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_y}{dy}AA_1 + \zeta + \zeta_1\right],$$

d'où, substituant à $A'A''$ et A_1A_2, qui sont respectivement égaux à $A'A'_1$, $A_1A'_1$, leurs valeurs écrites plus haut, et négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième,

$$AA' + \overline{AA'}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \zeta\right] - \left[\overline{AA'}^2 + 2\overline{AA'}^3\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y\right]\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x$$
$$- \overline{AA'}^2\left[\frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{dx}AA' + \varepsilon\right] = AA' - \overline{AA'}^2\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x + \varepsilon\right]$$
$$+ \left[\overline{AA'}^2 - 2\overline{AA'}^3\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x\right]\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y + \overline{AA'}^2\left[\frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_y}{dy}AA' + \zeta\right],$$

ou, réduisant,

$$\frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_x}{dx} + \frac{d\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)_y}{dy} = 0.$$

Ainsi, la condition cherchée est que les *variations que reçoivent les courbures géodésiques des deux courbes* $AA'A''\ldots$, $AA_1A_2\ldots$, *pour des déplacements infiniment petits et égaux effectués sur ces courbes dans le sens suivant lequel se comptent leurs arcs positifs, soient égales et de signes contraires.*

37. Si les courbes considérées sont tracées sur un plan, la condition devient

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)_x}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)_y}{dy} = 0.$$

Or on sait que la condition pour que deux systèmes de lignes orthogonales planes puissent partager leur plan commun en carrés infiniment petits est, d'après un théorème de M. Bertrand, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes de lignes soient isothermes. Donc on peut dire aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de lignes orthogonales planes soient isothermes est que les variations des courbures de ces courbes, pour des déplacements égaux effectués sur ces courbes, soient égaux, abstraction faite de leurs signes, pour chacun de leurs points de rencontre.

On déduit de là cette propriété assez curieuse, que si les courbes de l'un des systèmes sont des cercles ou des droites, celles du système orthogonal devront nécessairement être aussi des cercles ou des droites, pour que ces deux systèmes soient isothermes.

38. Reprenons l'équation (3) du n° **24** : divisons ses deux membres par ds_1, et différentions le résultat suivant la caractéristique d ; il viendra

$$\begin{aligned} dx\frac{dx_1}{ds_1} + dy\frac{dy_1}{ds_1} + dz\frac{dz_1}{ds_1} - \frac{dx_1^2}{ds_1} - \frac{dy_1^2}{ds_1} - \frac{dz_1^2}{ds_1} + (x-x_1)\,d\frac{dx_1}{ds_1} \\ + (y-y_1)\,d\frac{dy_1}{ds_1} + (z-z_1)\,d\frac{dz_1}{ds_1} = -\,\delta\sigma d\frac{d\delta\sigma}{ds_1} - \frac{d\delta\sigma}{ds_1}\,d\delta\sigma, \end{aligned}$$

ou, en divisant par ds_1,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{ds_1}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds_1}\right) - 1 + (x-x_1)\frac{d\frac{dx_1}{ds_1}}{ds_1} + (y-y_1)\frac{d\frac{dz_1}{ds_1}}{ds_1} \\ + (z-z_1)\frac{d\frac{dz_1}{ds_1}}{ds_1} = -\,\delta\sigma\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} - \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2, \end{aligned}$$

et, en transformant comme au n° **28**,

$$1 + \frac{\cos\theta'_1}{\rho_1}\delta\sigma - \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2 - \delta\sigma\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1}\cos\varphi,$$

φ étant toujours l'angle infiniment petit que la tangente en A à la courbe

MAN, prolongée dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette courbe, fait avec la tangente en A_1 à la courbe $M_1A_1N_1$, prolongée aussi dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette nouvelle courbe, ρ_1 le rayon de courbure de $M_1A_1N_1$ au point A_1, et θ'_1 l'angle que ce rayon de courbure prolongé de la courbe vers le centre de courbure fait avec AA_1.

Multiplions membre à membre l'égalité précédente et l'égalité (6) du n° **28**; il viendra, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$1+\delta\sigma\frac{\cos\theta'_1}{\rho_1}-\delta\sigma\frac{\cos\theta}{\rho}-\left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2-\delta\sigma\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}-\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\cos\theta'_1}{\rho_1}\delta\sigma^2=\cos^2\varphi,$$

ou bien

$$(10)\qquad \delta\sigma\frac{\cos\theta'_1}{\rho_1}-\delta\sigma\frac{\cos\theta}{\rho}=\left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2+\delta\sigma\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}+\delta\sigma^2\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2-\varphi^2,$$

en remplaçant $1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$ par φ^2, et $\delta\sigma^2\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}$ par $\delta\sigma^2\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2$.

Évaluons maintenant φ et θ'_1.

Considérons (*fig.* 15) en même temps que la normale AA_1 à la courbe MAN au point A, la normale infiniment voisine $A'A'_1$; prenons $A'D=AA_1$ de manière que A_1D soit, comme AA', perpendiculaire à AA_1, d'après ce qui a été démontré dans le n° **1**; enfin, par le point A_1, menons A_1E parallèle à AA'. Les trois droites A_1D, A_1E, $A_1A'_1$ formeront un trièdre sensiblement rectangle suivant A_1D, et dans lequel: 1° l'angle plan A'_1A_1E sera égal à l'angle φ que nous voulons calculer; 2° l'angle plan $DA_1A'_1$ égal, aux infiniment petits près du second ordre, à $\pm\frac{d\delta\sigma}{ds_1}$, et enfin 3° l'angle plan DA_1E égal à l'angle τ que forment les plans osculateurs aux points A et A_1 de la ligne géodésique dirigée suivant AA_1, comme on le voit simplement, en remarquant que le premier de ces plans est perpendiculaire à A_1E et l'autre à A_1D. Nous pourrons déduire de ce trièdre la relation

$$\varphi^2=\tau^2+\left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2.$$

Portant cette valeur de φ^2 dans l'égalité (10), on a

$$(11) \qquad \delta\sigma\,\frac{\cos\theta'_1}{\rho_1} - \delta\sigma\,\frac{\cos\theta}{\rho} = \delta\sigma\,\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} + \delta\sigma^2\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 - \tau^2.$$

Passons à la détermination de θ'_1. Menons (*fig.* 15), en la dirigeant de la courbe vers le centre de courbure, la normale principale A_1O de $M_1A_1N_1$ au point A_1, et une normale A_1A_2 à la même courbe, qui soit située sur la surface et du même côté, par rapport à $M_1A_1N_1$, que AA_1 par rapport à MAN; puis prolongeons AA_1 de manière à avoir A_1F : les trois droites A_1O, A_1A_2, A_1F formeront un trièdre dans lequel la face FA_1O sera égale à l'angle θ'_1 que nous cherchons, la face A_2A_1F égale à l'angle de contingence ε de la courbe AA_1A_2 au point A_1, la face OA_1A_2 égale à l'angle θ_1, dont le cosinus divisé par le rayon de courbure ρ_1 de la ligne $M_1A_1N_1$ donne la courbure géodésique de cette ligne, et enfin l'angle dièdre dont l'arête est A_1F égal à l'angle α que forme le plan osculateur de la courbe AA_1A_2 au point A_1 avec le plan normal conduit suivant A_1A_2, ou plutôt, sans ambiguïté, l'angle moindre que 180 degrés que la normale principale prolongée de la courbe vers le centre de courbure de la courbe AA_1A_2 au point A_1 fait avec la normale à la surface, menée du côté où se trouve la ligne A_1O. Cela étant, nous avons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta'_1 + \sin\theta'_1\,\varepsilon\cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\theta'_1 = \cos\theta_1 - \sin\theta'_1\,\varepsilon\cos\alpha,$$

ou mieux, en négligeant des infiniment petits du second ordre,

$$\cos\theta'_1 = \cos\theta_1 - \sin\theta_1\,\varepsilon\cos\alpha.$$

Portant dans l'égalité (11) et divisant par $\delta\sigma$, on trouve

$$\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos\theta}{\rho} = \delta\sigma\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{\sin\theta_1}{\rho_1}\,\frac{\varepsilon\cos\alpha}{\delta\sigma} - \frac{\tau^2}{\delta\sigma^2}\right] + \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}.$$

Cette relation peut être mise sous une forme plus simple. En effet, d'après le théorème de Meunier, $\frac{\sin\theta_1}{\rho_1}$ n'est autre chose que la courbure au point A_1 de la section normale faite dans la surface suivant A_1A_1, ou, ce qui revient au même, à un infiniment petit près, que la courbure $\frac{1}{r}$ au point A de la section normale faite suivant AB; on doit seulement remarquer que si l'on veut que $\frac{1}{r}$ ait le signe que lui donnent les conventions faites dans le § I, il faut que $\frac{\sin\theta_1}{\rho_1}$, qui est essentiellement positif, soit aussi accompagné d'un signe qui d'ailleurs sera + ou — selon que la normale principale A_1O de $M_1A_1N_1$ est dans l'intérieur ou à l'extérieur de la surface. De même $\frac{\varepsilon\cos\alpha}{\delta s}$, précédé du signe + ou du signe — selon que la ligne A_1O est intérieure ou extérieure à la surface, est la courbure positive ou négative au point A_1 de la section normale faite suivant A_1A_2, ou, ce qui revient au même, à un infiniment petit près, à la courbure $\frac{1}{r_1}$ au point A de la section normale faite suivant AA_1; d'où résulte d'abord, soit dit en passant, que $\frac{\sin\theta_1}{\rho_1}\,\frac{\varepsilon\cos\alpha}{\delta\sigma}$ est dans tous les cas égal au produit des deux courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$. Enfin, $\frac{\tau}{\delta s}$ est évidemment la mesure de la flexion au point A de ligne minimum dirigée suivant AA_1, ou bien la seconde courbure géodésique $\frac{1}{p}$ de la ligne AA_1A_2 au point A_1, abstraction faite du signe. On peut donc écrire l'égalité précédente comme il suit:

$$\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}-\frac{\cos\theta}{\rho}=\delta\sigma\left[\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2+\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{p^2}\right]+\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}.$$

D'un autre côté, R et R′ étant les rayons de courbure principaux positifs ou négatifs de la surface au point A et α, l'angle que la ligne MAN fait au point A avec la section principale correspondante au rayon de courbure R, on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}\cos^2\alpha+\frac{1}{R'}\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{R}\sin^2\alpha+\frac{1}{R'}\cos^2\alpha.$$

De plus, d'après le résultat obtenu à la fin du n° **16** *bis*, la seconde courbure géodésique $\frac{1}{p}$ de la courbe AA_1A_2 au point A_1 est égale à l'angle pris positivement que la normale à la surface au point A_1 fait avec le plan de la normale au point A et de AA_1. On a donc, d'après le n° **9**,

$$\frac{1}{p^2} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)^2.$$

De là on tire aisément

$$\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{RR'}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = \frac{1}{RR'},$$

d'où

$$\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos\theta}{\rho} = \delta\sigma\left(\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right) + \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1},$$

ou, en remplaçant $\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos\theta}{\rho}$ par $\delta\frac{\cos\theta}{\rho}$, et $\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}$ par $\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds}$, ce qui n'altère le résultat que d'un infiniment petit du second ordre ; il vient

$$\delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \delta\sigma\left(\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right) + \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds}. \tag{12}$$

Si $\delta\sigma$ avait la même valeur pour tous les points de MAN, on aurait $\frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds} = 0$; et la formule deviendrait

$$\delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \delta s\left(\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right).$$

Cette formule et la précédente sont très-importantes dans la théorie des lignes tracées sur une même surface.

39. Appelons $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ la courbure géodésique de la courbe AA_1A_2 au point A, et supposons, comme plus haut, afin que ce rapport soit nettement défini, que les arcs positifs de $AA_1A_2\ldots$ soient comptés de A vers A_1, c'est-à-dire dans le sens indiqué par la caractéristique δ; la formule (7) du n° **29** nous donnera

$$\frac{\delta\sigma\cos\theta'}{\rho'} = \frac{d\delta\sigma}{ds_1}.$$

Différentiant les deux membres de cette égalité suivant la caractéristique d, il vient

$$d\delta\sigma \frac{\cos\theta'}{\rho'} + \delta\sigma d \frac{\cos\theta'}{\rho'} = d \frac{d\delta\sigma}{ds_1},$$

d'où, en substituant à $d\delta\sigma$, dans le premier membre, sa valeur $\dfrac{ds_1\,\delta\sigma\cos\theta'}{\rho'}$, on trouve, après quelques réductions,

$$d\frac{\cos\theta'}{\rho'} = -\,ds\left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{d\dfrac{d\delta\sigma}{ds}}{\delta\sigma}.$$

Divisons l'égalité (12) du numéro précédent par $\delta\sigma$, l'égalité précédente par ds, et retranchons les deux résultats l'un de l'autre; il viendra

$$(13)\qquad \frac{\delta\dfrac{\cos\theta}{\rho}}{\delta\sigma} - \frac{d\dfrac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds} = \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{1}{RR'}.$$

Cette relation peut être considérée comme exprimant la condition pour que deux systèmes de lignes tracées sur une même surface soient orthogonaux. Pour n'éprouver aucune difficulté dans son interprétation, il faut, d'une part, se rappeler la définition de la courbure géodésique donnée au n° **33**, qui ne suppose que la fixation préalable du sens dans lequel croissent les arcs positifs de la courbe et de celui dans lequel on mène les normales extérieures à la surface; puis remarquer que R et R′ sont susceptibles d'un double signe déterminé d'ailleurs par la règle du n° **7** au moyen de la normale extérieure à la surface; enfin ne pas perdre de vue que les caractéristiques d et δ représentent des accroissements effectués sur les courbes des deux systèmes considérés et dans le sens suivant lequel croissent les arcs positifs de ces courbes, de telle sorte que l'on peut dire encore que l'une de ces caractéristiques, la caractéristique δ, dans le cas actuel, indique un déplacement sur la surface normalement aux courbes de l'un des systèmes, et dans le sens qui sert à fixer la courbure géodésique de ces courbes, tandis que l'autre indique un déplacement normal aux courbes du second système, et dans le sens opposé à celui que fixe la courbure géodésique de ces nouvelles courbes. On pourrait changer la signification des caractéristiques δ et d, et les considérer l'une et l'autre comme représentant respectivement des accroissements infiniment petits effectués sur la surface normalement aux courbes des deux systèmes considérés, et dans le sens qui sert à fixer les courbures géodésiques de ces courbes; on aurait alors la formule suivante, qui est plus symétrique que la formule (13),

$$(13\ bis)\qquad \frac{\delta \frac{\cos\theta}{\rho}}{\delta s} + \frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds} = \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{1}{RR'}.$$

40. Reprenons la formule

$$d\frac{\cos\theta'}{\rho'} = -\,ds\left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds}}{\delta\sigma},$$

obtenue dans le numéro précédent, et écrivons en même temps la formule analogue relative à la courbe $AA'A''$, ce qui donne

$$\delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \delta\sigma\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 - \frac{\delta\frac{\delta ds}{\delta\sigma}}{ds};$$

puis multiplions la première de ces formules par $-\delta\sigma$, la seconde par ds, et ajoutons les produits membre à membre; il viendra, d'après l'égalité (13),

$$d\frac{d\delta\sigma}{ds} + \delta\frac{\delta ds}{\delta\sigma} = -\frac{ds\,\delta\sigma}{RR'},$$

ou, plus simplement,

$$(14)\qquad \delta\sigma\, d^2\delta\sigma + ds\,\delta^2 ds = -\frac{ds^2\delta\sigma^2}{RR'},$$

si l'on suppose que la différentielle seconde $d^2\delta s$ se rapporte à un double déplacement constant et égal à ds, effectué sur la courbe MAN, et la différentielle seconde $\delta^2 ds$ à un double déplacement constant et égal à δs effectué sur la courbe AA_1A_2.

La formule précédente avait été donnée par M. Bertrand dans le *Journal de l'École Polytechnique* (xxx^e^ cahier), mais pour le cas seulement des lignes de courbure. On voit par ce qui précède qu'elle est vraie généralement pour deux systèmes de lignes orthogonales quelconques.

41. L'égalité (13) exprime, comme nous l'avons dit, la condition pour que des courbes tracées sur une même surface soient orthogonales, et on peut remarquer qu'elle est de même forme que celles que l'on doit à M. Lamé et qui représentent la condition pour que deux systèmes des lignes planes et trois systèmes de surfaces soient orthogonales. Il est d'ailleurs bien facile de déduire les deux formules de M. Lamé de la nôtre.

En effet, supposons d'abord que les courbes considérées soient planes, c'est-à-dire admettons que la surface sur laquelle elles sont tracées devienne un plan; on aura

$$\frac{1}{RR'} = 0, \quad \frac{\cos\theta}{\rho} = \pm\frac{1}{\rho}, \quad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = \pm\frac{1}{\rho'},$$

et l'égalité (13), ou plutôt l'égalité (13 *bis*), donnera

$$\frac{\delta\frac{1}{\rho}}{\delta s} + \frac{d\frac{1}{\rho'}}{ds} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2},$$

formule qui est générale comme on l'aperçoit aisément, pourvu que les caractéristiques δ et d se rapportent respectivement à des déplacements infiniment petits effectués normalement aux courbes des deux systèmes considérés, et du côté de ces courbes où se trouvent leurs centres de courbure. C'est la première formule de M. Lamé.

Considérons en second lieu trois systèmes de surfaces orthogonales. D'après le théorème de M. Dupin, deux quelconques de ces systèmes détermineront, par leurs intersections avec une surface quelconque de l'autre système, les lignes de courbure de cette surface, que, pour fixer les idées, je désignerai par surface S. Cela posé, appliquons la formule (13) aux lignes de courbure de cette surface S. Si nous appelons, comme on l'a déjà fait au n° **23**, (γ_1, c_2) (γ_2, c) (γ, c_1) les rayons de courbure principaux des trois surfaces conjuguées passant par un même point de la surface S, (γ_1, c_2) se rapportant à cette dernière surface, nous aurons d'abord

$$\frac{\delta\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)}{\delta s} - \frac{d\left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)}{ds} = \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma_1 c_2};$$

mais, en supposant que la ligne de courbure à laquelle se rapportent les rayons principaux c_1, γ_1 soit celle que remplace la courbure MAN des numéros précédents, et, par conséquent, que la ligne de courbure à laquelle se rapportent les rayons c_2, γ_2 soit celle que l'on substitue à $AA_1A_2\ldots$, nous avons, comme il résulte du théorème de Hachette, établi au n° **20**, ou mieux, comme on peut le faire voir directement en se servant de la formule (7) du paragraphe actuel,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{1}{c_1}, \quad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = \frac{1}{\gamma_2}.$$

Notre formule (13) devient donc

$$\frac{\partial\frac{1}{c_1}}{\partial\sigma} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{c_2\gamma_1},$$

les caractéristiques δ et d se rapportant respectivement à des déplacements effectués normalement aux deux surfaces conjuguées de S, et dans les régions extérieures à ces surfaces, ou bien, en adoptant les notations du n° **23**,

$$\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_1} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{c_2\gamma_1};$$

ce qui est bien l'une des formules de M. Lamé.

En appliquant la formule (13) aux deux surfaces conjuguées de la surface S, on trouverait évidemment de la même manière les deux formules qui, avec la précédente, forment les formules (6) du n° **23**.

Nous allons vérifier la formule (13) dans un cas particulier, qui nous fournira l'occasion d'établir quelques propriétés nouvelles des surfaces gauches.

§ IV. — *Propriétés des lignes tracées sur les surfaces gauches.*

42. Considérons sur une surface gauche quelconque, les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales. Soit MAN (*fig.* 16) l'une de ces dernières lignes. Appelons, pour le point quelconque A, $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ les première et seconde courbures géodésiques de la ligne MAN; et afin que ces courbures soient nettement déterminées, conformément d'ailleurs aux définitions des nos **16** et **33**, fixons le sens dans lequel croissent les arcs positifs de MAN: ainsi, supposons par exemple que ces arcs soient comptés de M vers N. Soit maintenant AG la normale à MAN tracée d'un certain côté de cette courbe et sur la surface, normale qui est ici la génératrice rectiligne passant en A, et supposons que la tangente menée à MAN par le point A et dans le sens des arcs positifs de la courbe, AG et la normale extérieure à la surface gauche, soient respectivement placées relativement au point A, comme le sont, dans la position ordinaire, les parties positives des axes des x, des y et des z, par rapport à leur origine.

Si nous appelons $d\theta$ l'angle infiniment petit que forment les deux génératrices rectilignes AG et BG′, cet angle, afin qu'il n'en résulte plus tard aucune ambiguïté, étant considéré comme positif ou négatif selon que la génératrice BG′ tombe ou non du côté du plan BAG où se trouve la normale extérieure à la surface au point A, nous aurons d'abord par la formule obtenu au n° **14**, et en faisant attention que la seconde courbure de la ligne MAN doit être la même, soit que l'on considère cette courbe comme tracée sur la surface gauche proposée, soit qu'on la considère comme tracée sur la surface gauche formée par les normales extérieures à la première surface:

$$d\theta^2 = ds^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right),$$

en posant $AB = ds$. On peut joindre à ce premier résultat quelques autres plus ou moins importants.

43. Cherchons, en premier lieu, la distance du point A au point où la perpendiculaire commune à AG et à BG′ rencontre AG, c'est-à-dire la distance du point A au point où la ligne de striction de la surface gauche rencontre AG. Soient O le point cherché, et OO′ la perpendiculaire commune à AG et à BG′; par le point O′ tirons O′C parallèle à OA jusqu'à la rencontre en C du plan mené par le point A perpendiculairement à OA; enfin joignons AC et BC: le triangle rectangle BAC nous donnera

$$BC = AB \sin BAC,$$

ou bien en appelant α l'angle positif (c'est-à-dire compté de AB vers la normale extérieure à la surface au point A) que forme avec AB la droite qui joint le point A au point C, et n_0 la longueur AO précédée du signe + ou du signe —, selon que le point O se trouve sur AG ou sur son prolongement au-dessus de MAN,

$$n_0 d\theta = ds \sin \alpha,$$

comme on le voit aisément en se rappelant la convention faite sur le signe de $d\theta$; d'un autre côté, d'après la formule du n° **15**, on a

$$d\theta \sin \alpha = \frac{ds}{r};$$

donc

$$n_0 = r \sin^2 \alpha,$$

d'où

$$n_0 = \frac{rr'^2}{r^2 + r'^2},$$

car

$$\sin^2 \alpha = \frac{r'^2}{r^2 + r'^2},$$

comme on le déduit aisément des deux relations

$$d\theta \sin \alpha = \frac{ds}{r}, \quad d\theta^2 = ds^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right).$$

44. Le même triangle rectangle nous donne la longueur AC $= dp$ de la perpendiculaire commune à AG et à BG′, et l'on trouve

$$dp^2 = ds^2 - \frac{r'^2 ds^2}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 ds^2}{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$dp = \pm \frac{r ds}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

le signe du second membre étant celui qui le rend positif.

45. Considérons maintenant une seconde trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes située à une distance finie de MAN et que nous pourrons regarder, d'après le théorème de M. Gauss démontré au n° **27**, comme le lieu des extrémités d'une suite de longueurs égales prises sur les génératrices rectilignes à partir de la courbe MAN.

Soit $M_1A_1N_1$ (*fig.* 17) cette nouvelle courbe. Il va d'abord nous être facile de calculer l'angle positif (c'est-à-dire compté en allant de AB vers la normale extérieure à la surface) que l'élément A_1B_1 fait avec l'élément AB et que nous appellerons φ. En effet, tirons par le point B_1 la ligne B_1C parallèle à A_1A jusqu'à la rencontre en C du plan perpendiculaire à AA_1 mené par le point A; le triangle ABC nous donnera

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB\,.\,AC\cos\varphi,$$

ou, en appelant n la longueur AA_1, précédée du signe + ou du signe —, selon que le point A_1 est sur AG ou sur son prolongement au-dessus de MAN,

$$n^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}\right) = 1 + \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 - 2\,\frac{A_1B_1}{AB}\cos\varphi.$$

Mais, d'après la formule (6) démontrée au n° **28**,

$$(a)\qquad \cos\varphi\,\frac{A_1B_1}{AB} = 1 - \frac{n}{r};$$

on a donc

$$n^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}\right) = 1 + (1+\operatorname{tang}^2\varphi)\left(1-\frac{n}{r}\right)^2 - 2\left(1-\frac{n}{r}\right),$$

ou

$$\frac{n^2}{r'^2} = \operatorname{tang}^2\varphi\left(1-\frac{n}{r}\right)^2,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{\dfrac{n}{r'}}{1-\dfrac{n}{r}},$$

d'où, par conséquent,

$$\sin\varphi = \pm\frac{\dfrac{n}{r'}}{\sqrt{\left(\dfrac{n}{r'}\right)^2+\left(\dfrac{n}{r}-1\right)^2}},\qquad \cos\varphi = \pm\frac{1-\dfrac{n}{r}}{\sqrt{\left(\dfrac{n}{r'}\right)^2+\left(\dfrac{n}{r}-1\right)^2}}.$$

Quant aux signes, ils se déterminent simplement: par la formule (a), on voit que celui qui convient au cosinus est +, à l'inspection de la figure et en se rappelant la propriété de $\frac{1}{r'}$ du n° **16** *bis*, que celui qui convient au sinus est —, d'où résulte que celui qui convient à la tangente est aussi —; ainsi on a

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\dfrac{n}{r'}}{1-\dfrac{n}{r}},\qquad \sin\varphi = -\frac{\dfrac{n}{r'}}{\sqrt{\left(\dfrac{n}{r'}\right)^2+\left(\dfrac{n}{r}-1\right)^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1-\dfrac{n}{r}}{\sqrt{\left(\dfrac{n}{r'}\right)^2+\left(\dfrac{n}{r}-1\right)^2}}.$$

46. On peut aussi, au moyen de la formule (a), avoir aisément l'élément $A_1 B_1$ que nous appellerons ds_1; et il vient

$$ds_1 = ds \frac{r-n}{r\cos\varphi} = ds\sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}.$$

Enfin on peut calculer les première et seconde courbures géodésiques de $M_1 A_1 N_1$ au point A_1 que nous appellerons $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_1'}$.

En effet, on a d'abord, d'après la formule (7), n° **29** *bis,*

$$\frac{ds_1}{r_1} = -\frac{d.ds_1}{dn},$$

d'où, en substituant à ds_1 sa valeur,

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}}{r_1} = -\frac{\frac{n}{r'^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{n}{r} - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{n(r^2 + r'^2) - r'^2 r}{r'^2(r-n)^2 + n^2 r^2};$$

puis on a aussi

$$\frac{ds_1^2}{r_1^2} + \frac{ds_1^2}{r_1'^2} = \frac{ds^2}{r^2} + \frac{ds^2}{r'^2},$$

puisque les deux membres représentent le carré de l'angle infiniment petit des deux génératrices AG et BG'; de là on tire

$$\frac{ds_1^2}{r_1'^2} = ds^2\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{[nr^2 - r'^2(r-n)]^2}{r^2 r'^2[r'^2(r-n)^2 + n^2 r^2]}\right\}$$

$$= \frac{r^2 ds^2}{r'^2(r-n)^2 + n^2 r^2} = \frac{r^2 ds^4}{r^2 r'^2 ds_1^2} = \frac{ds^4}{r'^2 ds_1^2}$$

d'où

$$\frac{ds_1^2}{r_1'} = \pm\frac{ds^2}{r'},$$

ou simplement

$$\frac{ds_1^2}{r_1'} = \frac{ds^2}{r'};$$

car évidemment r_1' et r' sont de même signe.

On déduit de là que *le rayon de seconde courbure géodésique des tra-*

jectoires orthogonales des génératrices rectilignes varie pour les différents points d'une même génératrice proportionnellement au carré de la distance de ces points à la génératrice rectiligne infiniment voisine de celle qui les contient.

47. La valeur de $\frac{1}{r_1}$ nous donne un résultat analogue. En effet, elle montre que

$$\frac{ds_1^2}{r_1} = \left[\frac{1}{r} - n\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)\right] ds^2,$$

d'où

$$\frac{d\frac{ds_1^2}{r_1}}{dn} = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right) ds^2 = -d\theta^2.$$

Ainsi *la variation pour un déplacement constant effectué sur une génératrice rectiligne du rapport du carré de ds_1 au rayon de première courbure géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes est constante pour tous les points de la génératrice rectiligne considérée, et égale au carré pris en signe contraire de l'angle de cette génératrice avec la génératrice infiniment voisine multipliée par le déplacement.*

48. On peut obtenir une expression très-simple de la courbure de la surface, en un point quelconque A_1; en effet, nous avons déjà vu (n° **19**) que cette courbure avait pour valeur, abstraction faite du signe, la dérivée par rapport à n de l'angle φ que forme le plan tangent en A_1 avec un plan tangent fixe, le plan tangent en A par exemple: mais, d'après une formule obtenue plus haut,

$$\tang\varphi = \frac{nr}{r'(n-r)};$$

donc

$$d\varphi\left(1 + \frac{n^2r^2}{r'^2(n-r)^2}\right) = \frac{r'r(n-r) - rr'n}{r'^2(n-r)^2}\, dn;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{-r'r^2}{r'^2(n-r)^2 + n^2r^2} = \frac{-r'r^2ds^2}{r'^2r^2ds_1^2} = -\frac{1}{r'_1}.$$

Rapprochant ce résultat, que, du reste, nous aurions pu poser immédiatement, car ce n'est autre chose que celui qui a été démontré au n° **3**, de celui que nous avons obtenu au n° **46**, nous voyons que *la courbure de la surface varie le long d'une génératrice rectiligne, dans le rapport inverse* *du carré de la perpendiculaire menée à cette génératrice et terminée à la génératrice infiniment voisine.*

49. On peut mettre toutes les formules qui précèdent sous une forme beaucoup plus simple. Pour cela, substituons à la distance n de la courbe $M_1A_1N_1$ à la courbe MAN, la portion des génératrices rectilignes comprise entre la courbe $M_1A_1N_1$ et la ligne de striction, distance qui, au lieu d'être constante comme n pour tous les points de $M_1A_1N_1$, sera généralement variable, et qui d'ailleurs devra être précédée comme n d'un signe convenable : à cet effet, nous changerons n en

$$n + n_0 = n + \frac{rr'^2}{r^2 + r'^2};$$

en même temps nous exprimerons ds en fonction de dp, longueur de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines, que nous avons trouvée égale à

$$\pm \frac{ds \frac{1}{r'}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}}} = \pm \frac{rds}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

le signe du premier membre étant celui de r', et le signe du second celui de r. Il viendra d'abord, par la première substitution,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{nr(r^2 + r'^2) + r^2 r'^2}{r'[n(r^2 + r'^2) - r^3]}.$$

Enfin nous introduirons à la place de φ, qui représente l'angle positif (c'est-à-dire compté de AB vers la normale extérieure à la surface gauche au point A) que fait le plan tangent en A_1 avec le plan tangent en A, l'angle analogue que le plan tangent en A_1 fait avec le plan tangent en O, où la génératrice AG est rencontrée par la ligne de striction. Pour obtenir la formule de transformation, déterminons d'abord l'angle φ_0 que fait le plan tangent en O avec le plan tangent en A ; pour cela posons $n = 0$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = -\frac{r'}{r}.$$

Maintenant il est clair qu'il suffira de changer φ en $\varphi + \varphi_0$; il viendra ainsi, après un calcul dont nous n'indiquons pas le détail parce que nous allons obtenir plus simplement le résultat qu'il fournit,

$$\tang\varphi = -\frac{n(r^2+r'^2)}{r^2 r'};$$

semblablement, on trouve, au moyen de formules établies plus haut,

$$ds_1 = \pm\frac{dp}{r^2 r'}\sqrt{(r^2+r'^2)^2 n^2 + r^4 r'^2},$$

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{n(r^2+r'^2)^2}{(r^2+r'^2)^2 n^2 + r^4 r'^2},$$

$$\frac{1}{r'_{1}} = \frac{(r^2+r'^2)r^2 r'}{(r'^2+r^2)^2 n^2 + r^4 r'^2}.$$

50. Appelons $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{r'_0}$ les valeurs des première et seconde courbures géodésiques des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes pour le point O ; nous aurons

$$\frac{1}{r_0} = 0, \quad \frac{1}{r'_0} = \frac{r^2+r'^2}{r^2 r'},$$

et, par conséquent,

$$\tang\varphi = -\frac{n}{r'_0},$$

$$ds_1 = dp\sqrt{\left(\frac{n}{r'_0}\right)^2 + 1},$$

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{n}{n^2+(r'_0)^2},$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{r'_0}{n^2+(r'_0)^2}.$$

51. Ces formules qui sont, comme l'on voit, d'une extrême simplicité, peuvent se démontrer directement.

Soient (*fig.* 18) OG et O'G' deux génératrices rectilignes infiniment voisines, et menées de telle sorte que OO', OG et la normale extérieure à la surface gauche au point O soient respectivement placées, par rapport à ce point, comme les parties positives des axes des x, des y et des z par rapport à l'origine; supposons en même temps que OO' soit la perpendiculaire commune de OG et de O'G'. Par le point O' tirons O'H parallèle à OG, et ayant pris un point quelconque A sur OG, menons AB et AC perpendiculairement à OG, de manière que la première ligne rencontre O'G' en B, et la seconde O'H en C. AC parallèle à OO' sera perpendiculaire au plan BO'C, et, par conséquent, à CB; donc le triangle BAC nous donnera

$$\operatorname{tang} \mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}},$$

ou bien, en appelant φ l'angle positif (c'est-à-dire compté de OO' vers la normale extérieure à la surface au point O) que forme avec OO' la droite qui joint le point A au point B, n la distance OA précédée du signe + ou du signe —, selon que le point A est sur OG ou sur son prolongement au-dessus de OO', $d\theta$ l'angle de O'G' et de OG précédé du signe + ou du signe —, selon que O'G' tombe ou non du côté du plan GOO' où se trouve la normale extérieure à la surface au point O, et enfin dp la longueur OO',

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{n d\theta}{dp} = \frac{n}{\frac{dp}{d\theta}};$$

on a aussi, au moyen du même triangle rectangle ABC,

$$\mathrm{AB} = ds = \mathrm{AC}\,\frac{1}{\cos \varphi} = dp\sqrt{1 + \left(\frac{n}{\frac{dp}{d\theta}}\right)^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{dds}{dn} \cdot \frac{1}{\mathrm{AB}} = -\frac{n}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{r'_1}\right)^2 = \frac{d\theta^2}{ds^2} - \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)} - \frac{n^2}{\left[n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2\right]^2} = \frac{\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2}{\left[n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2\right]^2},$$

d'où

$$\frac{1}{r'_1} = -\frac{\frac{dp}{d\theta}}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2},$$

en remarquant que r'_1 et $d\theta$ ont des signes contraires, ce qui s'aperçoit aisément. Reste seulement à montrer, pour que ces formules coïncident tout à fait avec celles que nous avons déjà obtenues, que $\frac{1}{r'_0}$, ou la seconde courbure géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes pour le point O, est égale et de signe contraire à $\frac{d\theta}{dp}\cdot$ Or, si nous prenons OD = OO′, et que nous menions DE et DF perpendiculaires à OG et rencontrant O′G′ et O′H en E et F, les deux triangles DFE et O′FE seront évidemment égaux; donc on aura

$$\mathrm{EDF} = \pm\, d\theta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathrm{EDF}}{\mathrm{OD}} = \pm \frac{d\theta}{dp},$$

ou

$$\frac{1}{r'_0} = \pm \frac{d\theta}{dp};$$

de plus, on voit facilement que le signe qu'il faut prendre dans le second membre est toujours le signe inférieur.

52. Je ferai remarquer que de la formule

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{n}{r'_0},$$

qui fait connaître la loi suivant laquelle varie le plan tangent tout le long d'une même génératrice, on peut facilement déduire une propriété démontrée par M. Chasles, dans le Journal de M. Liouville, et d'après laquelle le produit des distances du point O aux points de contact situés sur une même génératrice OG, et relatifs à deux plans tangents perpendiculaires entre eux, a toujours la même valeur. On voit en effet, d'après la formule précédente, que ce produit est $(r'_0)^2$, c'est-à-dire le carré de l'inverse de la courbure au point O.

53. Il nous est bien facile maintenant de vérifier la formule (13) du paragraphe précédent, dans le cas où l'on considère les génératrices rectilignes de la surface gauche et leurs trajectoires orthogonales. En effet, on a alors

$$\frac{\cos\theta'}{\rho'} = 0, \quad \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{r_1} = -\frac{n}{n^2 + (r'_0)^2}, \quad \frac{\partial \frac{\cos\theta}{\rho}}{\partial\sigma} = \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} = -\frac{(r'_0)^2 - n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2},$$

puis

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = -\frac{1}{(r'_1)^2} = -\frac{(r'_0)^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2},$$

en remarquant que les deux rayons de courbure principaux sont de sens contraires, et la formule dont il s'agit devient

$$-\frac{(r'_0)^2 - n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2} = \frac{n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2} - \frac{(r'_0)^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2};$$

ce qui cst bien une identité.

54. Pour que les résultats précédents aient une véritable utilité et puissent servir dans la solution des problèmes relatifs aux surfaces gauches, il faut que l'on sache calculer les éléments qui y entrent comme $d\theta$, dp, r, r', etc., en fonction des données ordinaires par lesquelles on détermine ces surfaces.

Supposons donc que l'on connaisse une directrice quelconque mAm' de la surface (*fig.* 19), et soient

$$(a) \qquad x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u)$$

les coordonnées de l'un quelconque de ses points en fonction du paramètre u; donnons-nous encore les angles α, β, γ, que les génératrices rectilignes forment avec les parties positives des axes des coordonnées, α, β, γ étant aussi des fonctions de u. En appelant n la longueur AM, les coordonnées du point quelconque M de la surface seront

$$X = x + n\cos\alpha, \quad Y = y + n\cos\beta, \quad Z = z + n\cos\gamma,$$

et l'élimination de n et de u entre ces trois équations fournira l'équation en X, Y, Z de la surface qui se trouve ainsi parfaitement déterminée.

Proposons-nous de calculer en fonction de ces données, d'abord pour le point quelconque A de la directrice, les valeurs des éléments $d\theta$, ds, r, r' définis plus haut.

Posons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [f'(u)^2 + \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2]\, du^2 = U du^2,$$

$$\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz = [\cos\alpha f'(u) + \cos\beta\varphi'(u) + \cos\gamma\psi'(u)]du = U_1 du;$$

U et U_1 seront des fonctions de u faciles à calculer au moyen des données, et qui feront connaître, l'une l'élément AB de la courbe mAm', et l'autre l'angle i que les génératrices rectilignes font avec cette courbe. Il est clair, en effet, que l'on a

$$AB = du\sqrt{U}, \quad \cos i = \frac{U_1}{\sqrt{U}}.$$

De là nous déduirons immédiatement

$$ds = AB \sin i = du\sqrt{U - U_1^2},$$

ds étant l'élément de la trajectoire orthogonale passant par A des génératrices rectilignes.

Avant d'aller plus loin, il est bon de dire que, pour fixer les idées, nous supposons : 1° que les arcs positifs de mAm' sont comptés de telle sorte que ces arcs et u croissent en même temps ; et 2° que les génératrices rectilignes, qui d'ailleurs occupent, par rapport à la direction des arcs positifs de leurs trajectoires orthogonales et à celle des normales extérieures à la surface gauche, la position définie au n° 42, sont placées du côté de mAm', où il faut mener les normales à ces courbes sur la surface pour déterminer leur courbure géodésique. De cette manière les radicaux dans les formules précédentes doivent tous être affectés du signe $+$, et l'angle i que nous regardons comme l'angle positif (c'est-à-dire compté des génératrices rectilignes vers la direction des arcs positifs des trajectoires orthogonales de ces génératrices) que forment les génératrices rectilignes dans le sens où on les suppose prolongées avec les arcs positifs de la directrice AmB, est toujours moindre que 180 degrés.

Considérons maintenant la première courbure géodésique $\frac{1}{r}$ de la trajectoire passant par A des génératrices rectilignes ; appelons ρ le rayon de courbure de la courbe mAm' au point A, et θ l'angle que le plan osculateur de cette courbe fait en ce point avec le plan tangent de la surface, ou plutôt, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, l'angle que la normale principale prolongée de la courbe vers le centre de courbure fait avec la normale à la courbe tracée sur la surface dans un sens qui la place, par rapport à la tangente AT de mAm' et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y est placé par rapport à celui des x et à celui des z, de manière que $\frac{\cos\theta}{\rho}$ soit la première courbure géodésique de la courbe mAm' au point A ; nous aurons d'abord, au moyen de la formule (9) du § III, et en supposant que les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales soient les lignes coordonnées,

$$\frac{di}{\mathrm{AB}} = \frac{\sin i}{r} - \frac{\cos\theta}{\rho},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{di}{\mathrm{AB}}\right)\frac{1}{\sin i}.$$

Pour bien se rendre compte du signe que nous donnons ici à di, il faut remarquer qu'en vertu de l'hypothèse faite sur le sens suivant lequel on prolonge les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales, i n'a pas la même signification que dans la formule (9) du § III, et qu'il est le complément ou le complément augmenté de 360 degrés de l'angle qui entre dans cette formule.

L'équation précédente peut être mise sous une autre forme. Menons par le point A la normale principale AN, et la tangente AT de la courbe $m\mathrm{A}m'$; soit d'ailleurs φ l'angle NAM: le trièdre formé par AT, AN, AM nous donnera

$$\cos\varphi = \sin i \cos\theta.$$

On a donc

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sin^2 i}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho} + \frac{\sin i\, di}{\mathrm{AB}}\right) = \frac{1}{\sin^2 i}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho} - \frac{d\cos i}{\mathrm{AB}}\right).$$

Or

$$\cos i = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma,$$

en appelant, pour abréger, a, b, c les cosinus des angles que la tangente à la courbe $m\mathrm{A}m'$ fait avec les parties positives des axes; donc

$$\begin{aligned}\frac{d\cos i}{\mathrm{AB}} &= \cos\alpha\frac{da}{\mathrm{AB}} + \cos\beta\frac{db}{\mathrm{AB}} + \cos\gamma\frac{dc}{\mathrm{NB}} + a\frac{d\cos\alpha}{\mathrm{AB}} + b\frac{d\cos\beta}{\mathrm{AB}} + c\frac{d\cos\gamma}{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{\cos\varphi}{\rho} + a\frac{d\cos\alpha}{\mathrm{AB}} + b\frac{d\cos\beta}{\mathrm{AB}} + c\frac{d\cos\gamma}{\mathrm{AB}},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d\cos i}{\mathrm{AB}} - \frac{\cos\varphi}{\rho} = a\frac{d\cos\alpha}{\mathrm{AB}} + b\frac{d\cos\beta}{\mathrm{AB}} + c\frac{d\cos\gamma}{\mathrm{AB}}.$$

Ainsi, posant

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{du^2}\left(a\frac{d\cos\alpha}{\mathrm{AB}} + b\frac{d\cos\beta}{\mathrm{AB}} + c\frac{d\cos\gamma}{\mathrm{AB}}\right) \\ &= f'(u)\,.\frac{d\cos\alpha}{du} + \varphi'(u)\frac{d\cos\beta}{du} + \psi'(u)\frac{d\cos\gamma}{du} = \mathrm{U}_2,\end{aligned}$$

U_2 étant dès lors une fonction facile à obtenir, nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{-U_2}{U\sin^2 i} = \frac{U_2}{U_1^2 - U}.$$

On peut aussi obtenir facilement $\frac{1}{r'}$. En effet, on a d'abord

$$d\theta^2 = U_3 du^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{du}\right)^2 = U_3,$$

et puis

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \frac{U_2^2}{(U - U_1^2)^2} = \frac{U_3}{U - U_1^2},$$

d'où

$$\pm \frac{1}{r'} = \frac{\sqrt{U_3(U - U_1^2) - U_2^2}}{U - U_1^2},$$

formule dans laquelle, on le reconnaît aisément, on doit adopter le signe qui rend le premier membre positif; enfin, connaissant ds, $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$, il sera facile d'avoir dp au moyen de la relation $dp = \pm \dfrac{ds\frac{1}{r'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2}}$, et l'on obtiendra

$$dp = du\sqrt{U - U_1^2 - \frac{U_2^2}{U_3}}.$$

Ces différentes formules nous seront utiles par la suite.

55. Nous n'avons calculé les valeurs de ds, $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ que pour les points de mAm'; mais il est évident qu'une fois que ces éléments seront connus pour les points de la courbe directrice, il nous sera facile de les obtenir pour un point quelconque au moyen des formules du n° **46**, et alors on pourra appliquer les résultats établis plus haut.

56. Nous terminerons par quelques remarques relatives à la ligne de striction de la surface gauche et aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. D'abord nous pouvons facilement obtenir l'équation de ces lignes. En effet, considérons d'abord la ligne de striction, appelons n la distance positive ou négative du point de cette ligne situé sur AG au point A;

on a, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° **43**),

$$n = \frac{\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2},$$

d'où, en substituant à $\frac{1}{r}$ et à $\frac{1}{r'}$ leurs valeurs, il vient la relation

$$n = -\frac{U_2}{U_3},$$

que l'on peut considérer comme l'équation en n et u de la ligne de striction. Quant aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, on remarquera que, ces lignes étant équidistantes d'après le théorème de M. Gauss, démontré au n° **26**, on doit avoir pour une quelconque d'entre elles,

$$dn + \mathrm{AB}\cos i = 0,$$

ou bien

$$dn + U_1 du = 0,$$

ce qui donne

$$n + \int U_1 du = \text{const.}$$

pour l'équation générale de ces lignes.

57. On peut obtenir une seconde équation de la ligne de striction; nous savons, d'après le n° **50**, que pour tous les points de cette ligne, et pour ces points seulement,

$$\frac{1}{r} = 0.$$

D'ailleurs, pour toute courbe tracée sur la surface gauche, on a, comme on l'a vu au n° **54** pour la courbe $m\mathrm{A}m'$,

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}\right)\frac{1}{\sin i},$$

i étant l'angle variable et déterminé, comme il a été dit plus haut, que la courbe fait avec les génératrices rectilignes, $\frac{\cos\theta}{\rho}$ sa première courbure géodésique, ds l'élément de la courbe, et enfin di l'accroissement de l'angle i pour un déplacement infiniment petit effectué sur la courbe et dans le sens des arcs positifs; on a donc pour la ligne de striction, et seulement pour cette ligne,

$$\text{(a)} \qquad \frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho} = 0.$$

On peut conclure de là que *si la ligne de striction coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface gauche, auquel cas* $\frac{di}{ds}$ *sera nul, on aura* $\frac{\cos\theta}{\rho} = 0$, et, *par conséquent, la ligne de striction sera une ligne géodésique;* de même que si *la ligne de striction est une ligne géodésique, auquel cas* $\frac{\cos\theta}{\rho} = 0$, *on aura* $\frac{di}{ds} = 0$, *et cette ligne coupera sous le même angle toutes les génératrices rectilignes*. Enfin on peut dire aussi *qu'une ligne tracée sur une surface gauche qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface, et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction.*

57 *bis*. La formule (*a*) du numéro précédent, qui caractérise la ligne de striction d'une surface gauche et qui peut être utile dans un grand nombre de circonstances, peut s'établir directement comme il suit :

Soient (*fig*. 20) mm', $m'm''$ deux éléments consécutifs d'une ligne tracée sur une surface gauche, et mG et m'G$'$ les deux génératrices rectilignes de cette surface qui passent par les points m et m', menées respectivement du côté de mm' et $m'm''$, où se trouvent les perpendiculaires à ces éléments qui servent à déterminer la première courbure géodésique de la courbe en m et m'; prolongeons mm' suivant $m't$: le trièdre formé par m'G$'$, $m'm''$ et $m't$ nous donnera

$$\cos G'm'm'' = \cos G'm't \cos m''m't + \sin G'm't \sin m''m't \cos \widehat{G'm't,\ m''m't},$$

ou bien, en posant

$$mm' = ds, \quad Gmm' = i, \quad G'm'm'' = i + di, \quad G'm't = i + \varepsilon,$$

et représentant par $\frac{\cos\theta}{\rho}$ la courbure géodésique de la courbe considérée au point m ou au point m',

$$\cos i - \sin i\, di = \cos i - \sin i\, \varepsilon + \sin i\, ds \frac{\cos\theta}{\rho},$$

d'où

$$\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\varepsilon}{ds}.$$

Actuellement, si m est un point de la ligne de striction, le plan parallèle aux deux lignes mG et m'G$'$ sera perpendiculaire au plan Gmt; par conséquent, les angles que mG et m'G' feront avec une droite mm' située dans le plan Gmt seront égaux entre eux, et ε sera nul: comme aussi réciproquement si ε est nul, c'est-à-dire si les angles que forment avec mt les deux droites mG et m'G' sont égaux entre eux, le plan parallèle à mG et à m'G' sera perpendiculaire à Gmt, et, par suite, le point m sera un point de la ligne de striction. Nous voyons par là que l'équation

$$\frac{di}{ds}+\frac{\cos\theta}{\rho}=0$$

convient à tous les points de la ligne de striction et ne convient qu'à eux; comme il fallait le démontrer.

58. Nous allons faire une application de la formule précédente, en démontrant une propriété mécanique assez curieuse de la ligne de striction de toute surface gauche.

On sait que dans le mouvement d'un point libre, la composante de la force suivant toute direction fixe est égale à la dérivée par rapport au temps de la composante de la vitesse suivant cette même direction. Cette propriété a lieu aussi quand on substitue à la direction fixe, celle de la tangente à la trajectoire qui est variable. Or on peut se proposer de trouver toutes les directions variables pour lesquelles la propriété en question a lieu: on trouve ainsi, ce qui me paraît assez curieux, que ce sont les directions des droites qui forment une surface gauche ayant pour ligne de striction la trajectoire du mobile. Pour le démontrer, soit (*fig.* 21) AmB la trajectoire que décrit le mobile considéré sous l'action d'une force R; nous pourrons d'abord regarder cette force comme la résultante de deux autres: l'une tangente à la trajectoire et dirigée dans le sens du mouvement; l'autre normale à cette courbe, située dans son plan osculateur et dirigée de la courbe vers le centre de courbure, les intensités de ces forces étant d'ailleurs $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, où v représente la vitesse du mobile, ρ le rayon de courbure de la trajectoire et t le temps. Ceci posé, soit mX la direction cherchée pour le point quelconque m; la composante de la force R suivant mX sera égale à la somme des composantes suivant la même direction des forces $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, c'est-à-dire à

$$\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\frac{v^2}{\rho}\cos\beta.$$

Nous appelons α l'angle moindre que 180 degrés que mX fait avec la tangente mT à AmB au point m, prolongée dans le sens du mouvement, et β l'angle de mX avec la normale principale mC au même point, dirigée de la courbe vers le centre de courbure; exprimant que cette composante est égale à la dérivée par rapport au temps de la composante suivant mX de la vitesse, il vient

$$\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\beta = \frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha - v\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt},$$

d'où l'on tire aisément, en observant que $v = \frac{ds}{dt}$,

$$\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos\beta}{\rho} = 0.$$

Mais le trièdre formé par mX, la tangente mT à la trajectoire, et la normale principale mC de la même courbe donne

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\theta,$$

θ étant l'angle du plan XmT avec TmC, ou mieux, l'angle de la normale principale mC prolongée de la courbe vers le centre de courbure avec la normale menée dans le plan TmX et du côté de la tangente où se trouve mX; donc

$$\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho} = 0.$$

Cette équation coïncidant avec l'équation (a) du n° **57**, on peut conclure, comme on l'avait énoncé, que le lieu géométrique des droites telles que mX est une surface gauche ayant AmB pour ligne de striction.

§ V. — *Remarques relatives à deux systèmes particuliers de lignes orthogonales tracées sur une surface quelconque.*

59. Les formules que nous avons établies aux n^{os} **39** et **40** conviennent à deux systèmes quelconques de lignes orthogonales tracées sur une surface; elles s'appliquent donc en particulier aux deux systèmes que l'on obtient en prenant, d'une part, les lignes géodésiques issues d'un même point A de la surface, et, d'une autre part, les lignes passant par les extrémités de longueurs égales comptées à partir du point A (*fig.* 22) sur les premières lignes. En effet, ces deux systèmes sont orthogonaux comme on l'a démontré au n° **26**. On peut même remarquer que dans ce cas les formules dont il s'agit se simplifient; car la première courbure géodésique des lignes du premier système est alors égale à zéro.

Nous appellerons r la longueur variable que l'on prend à partir du point A sur les lignes géodésiques issues de ce point pour obtenir les différentes lignes telles que MH, qui coupent à angle droit ces lignes géodésiques, ω l'angle variable que forme au point A la tangente à la ligne géodésique quelconque AM avec la tangente à la ligne géodésique AH que l'on suppose fixe et déterminée, x l'arc HM compté à partir de AH, des trajectoires orthogonales de lignes géodésiques. Enfin nous désignerons, comme dans ce qui précède, par R et R' les rayons de courbure principaux de la surface, ces rayons ayant un signe déterminé comme au n° **7**, et nous supposerons que les caractéristiques d et δ se rapportent respectivement à des déplacements infiniment petits effectués sur les lignes géodésiques coordonnées, et sur leurs trajectoires orthogonales, dans le sens des arcs positifs de ces lignes, que l'on suppose d'ailleurs fixé comme au n° **24**.

60. Ceci posé, la formule (14) du n° **40** devient

$$\frac{d^2\delta x}{dr^2} = -\frac{\delta x}{\mathrm{RR'}}.$$

Or supposons $\frac{1}{\mathrm{RR'}}$ calculé en fonction de r et ω. Si l'on peut intégrer l'équation précédente, qui est linéaire du second ordre et à coefficients variables, on en tirera δx en fonction de r et ω.

Les deux constantes qu'introduira l'intégration se détermineront sans difficulté; il suffira de remarquer que pour $r = 0$, on a $\delta x = 0$, et $\frac{d\delta x}{dr} = d\omega$, ce qui prouve, soit dit en passant, en vertu de ce que l'on sait sur l'intégrale générale des équations linéaires, que δx aura la forme $\mathrm{K}d\omega$, K étant généralement une fonction de r et de ω. δx étant connu, on pourra avoir immédiatement la première courbure géodésique des courbes telles que HM: en effet, cette courbure est égale, comme au n° **39**, à $\frac{d\delta x}{dr\delta x}$; et puis on résoudra, comme sur un plan, la plupart des problèmes relatifs aux lignes tracées sur la surface.

61. Ainsi, considérons une courbe tracée sur la surface et dont l'équation en r et ω soit

$$r = f(\omega).$$

Il sera facile d'avoir l'arc et l'aire de cette courbe terminés aux lignes géodésiques correspondantes à deux valeurs quelconques ω_0 et ω_1 de ω. En effet, posant

$$\delta x = \varphi(r, \omega)\, d\omega,$$

et appelant s et A l'arc et l'aire cherchés, il est clair qu'on aura

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \sqrt{f'(\omega)^2 + \varphi(f(\omega), \omega)^2},$$

$$\mathrm{A} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_0^{f(\omega)} \varphi(r, \omega)\, dr.$$

$f'(\omega)$ représentant la dérivée de $f(\omega)$ relative à ω.

S'il s'agit de trouver l'équation d'une ligne coupant sous un angle positif (c'est-à-dire compté de la direction des arcs positifs des lignes géodésiques coordonnées vers celle des arcs positifs des trajectoires orthogonales de ces lignes) représenté par α, les lignes géodésiques coordonnées, on trouvera immédiatement pour son équation différentielle,

$$\tang \alpha\, dr = \varphi(r, \omega)\, d\omega.$$

Pour obtenir l'équation des lignes géodésiques quelconques, on emploiera d'abord la formule (8) du § III, qui donnera, on le voit aisément,

$$\frac{di}{ds} = -\frac{\cos\theta}{\rho} \sin i = -\frac{\varphi'_r(r, \omega)}{\varphi(r, \omega)} \sin i,$$

i représentant l'angle positif que fait la ligne cherchée avec les lignes géodésiques issues du point A, $\frac{\cos\theta}{\rho}$ la première courbure géodésique des lignes coordonnées telles que MH, $\frac{di}{ds}$ la dérivée de l'angle i par rapport à l'arc s de la courbe, et enfin $\varphi'_r(r, \omega)$ la dérivée relative à r de $\varphi(r, \omega)$; puis on remarquera que

$$\tang i = \frac{\varphi(r, \omega)}{\frac{dr}{d\omega}}$$

d'où

$$\frac{di}{ds}\left[1+\frac{\varphi(r,\omega)^2}{\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\right]=\left[\varphi'_r(r,\omega)+\frac{\varphi'_\omega(r,\omega)}{\frac{dr}{d\omega}}-\varphi(r,\omega)\frac{\frac{d^2r}{d\omega^2}}{\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\right]\frac{d\omega}{ds},$$

$\varphi'_\omega(r,\omega)$ représentant la dérivée de $\varphi(r,\omega)$ relative à ω. D'ailleurs

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{\sin i}{\varphi(r,\omega)}.$$

Substituant et multipliant par $\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2$, nous aurons

$$\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\varphi'_r(r,\omega)+\frac{dr}{d\omega}\varphi'_\omega(r,\omega)-\varphi(r,\omega)\frac{d^2r}{d\omega^2}$$
$$=-\varphi'_r(r,\omega)\left[\varphi(r,\omega)^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right],$$

ou bien

$$\varphi(r,\omega)\frac{d^2r}{d\omega^2}-2\varphi'_r(r,\omega)\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2-\varphi'_\omega(r,\omega)\frac{dr}{d\omega}-\varphi'_r(r,\omega)\,\varphi(r,\omega)^2=0.$$

62. On pourra aussi appliquer quelquefois avec avantage les formules qui précèdent à la solution des problèmes de dynamique. En effet, les équations de la mécanique analytique ou celles de M. Jacobi prennent une forme assez simple dans le cas de notre système de coordonnées. Je me bornerai à faire voir qu'on peut arriver, par l'emploi de ces coordonnées, à une généralisation assez curieuse d'un théorème de M. Jacobi, relatif au mouvement d'un point sur une surface de révolution.

Considérons le mouvement sur la surface proposée, d'un point sollicité par une force constamment située dans le plan osculateur des lignes géodésiques issues du point A ; décomposons cette force en deux : l'une normale à la surface, et l'autre située dans son plan tangent; soit R cette dernière composante, qui est évidemment, d'après notre hypothèse, constamment tangente à une ligne géodésique issue du point A : les formules de la mécanique analytique nous donneront, pour déterminer le mouvement, les deux équations suivantes :

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\mathrm{K}\frac{d\mathrm{K}}{dr}\frac{d\omega^2}{dt^2}+\mathrm{R},$$

$$\frac{d\left(\mathrm{K}^2\frac{d\omega}{dt}\right)}{dt}=\mathrm{K}\frac{d\mathrm{K}}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Nous conservons les mêmes notations qu'aux nos **59** et **60**, et t comme toujours représente le temps.

Interprétons la première équation qui représente en quelque sorte le mouvement sur les lignes géodésiques issues du point A; elle nous montre que le point considéré descend sur ces lignes comme un second point qui ne quitterait pas l'une d'elles et qui serait soumis aux deux forces R et $K\frac{dK}{dr}\frac{d\omega^2}{dt^2}$. La première de ces forces est la composante suivant la tangente à la courbe géodésique coordonnée de la force donnée; occupons-nous de l'autre. On a

$$\delta x = K d\omega,$$

d'où

$$\frac{d\delta x}{dr} = \frac{d(K d\omega)}{dr} = \delta x \frac{\cos\theta}{\rho},$$

$\frac{\cos\theta}{\rho}$ étant, comme plus haut, la première courbure géodésique des lignes coordonnées telles que MH; par conséquent,

$$K\frac{dK}{dr}\frac{d\omega^2}{dt^2} = \frac{\delta x^2}{dt^2}\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Or $\frac{\delta x^2}{dt^2}$ est le carré de la vitesse avec laquelle le mobile s'éloigne à chaque instant de la ligne géodésique issue du point A sur laquelle il se trouve; $\frac{\delta x^2}{dt^2}\frac{\cos\theta}{\rho}$ est donc la force dirigée suivant la ligne géodésique qui produirait ce mouvement perpendiculaire à la ligne géodésique. D'après cela, on voit que *le mobile s'éloigne du point* A *suivant la même loi qu'un second mobile qui se mouvrait sur une ligne géodésique issue de ce point et qui serait sollicité par la composante suivant la surface de la force agissante sur le premier mobile, augmenté de la force tangente aux lignes géodésiques issues du point* A *qui produirait à chaque instant le mouvement effectif du point perpendiculaire à ces lignes géodésiques.*

Ce théorème, quand la surface considérée est de révolution, rentre dans celui que l'on doit à M. Jacobi et dont nous avons parlé plus haut. (*Voyez* le Journal de M. Crelle, tome XXI.)

63. Les formules établies dans le n° **61** sont surtout simples et commodes quand la surface considérée est de révolution, et que l'on prend pour le point A le sommet de cette surface. Dans ce cas, en effet, les lignes géodésiques issues de l'origine A sont les méridiens de la surface de révolution, et alors K est égal à l'ordonnée du méridien et ne dépend que de r; la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des méridiens est dès lors aussi indépendante de ω, etc. Du reste, on a souvent employé, comme l'on sait, dans les recherches relatives aux lignes tracées sur les surfaces de révolution, la considération des méridiens et de leurs trajectoires orthogonales ou des parallèles. Sans entrer à ce sujet dans de grands développements, montrons comment on peut s'en servir pour trouver l'équation connue des lignes géodésiques. Dans le cas que nous considérons, on a, comme on le voit aisément,

$$\cos\theta = \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{ds\cos i};$$

l'équation générale

$$\frac{di}{ds} = -\frac{\cos\theta}{\rho}\sin i$$

des lignes géodésiques devient donc

$$di = -\frac{\sin i\, d\rho}{\rho\cos i},$$

d'où, en intégrant,

$$\rho\sin i = \text{const.},$$

ou bien

$$\frac{\rho^2 d\omega}{ds} = \text{const.};$$

ce qui est l'équation connue, que l'on peut encore intégrer une fois bien simplement.

64. Au lieu de prendre, comme nous l'avons fait plus haut, des lignes géodésiques issues d'un même point, nous aurions pu mener ces lignes par les différents points d'une courbe quelconque tracée sur la surface, et perpendiculairement à cette courbe : les lignes géodésiques ainsi obtenues et leurs trajectoires orthogonales nous auraient conduit, à peu de chose près, aux mêmes résultats que les deux systèmes précédents de lignes orthogonales. Ainsi, pour avoir l'élément δx des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques, nous aurions eu encore à intégrer l'équation différentielle du second ordre,

$$\frac{d^2\delta x}{dr^2} = -\frac{\delta x}{RR'};$$

seulement les constantes, au lieu de se déterminer par les conditions $\delta x = 0$ et $\frac{d.\delta x}{dr} = d\omega$ pour $r = 0$, auraient été connues en remarquant que, pour cette hypothèse, δx et $\frac{d\delta x}{dr}$ sont respectivement l'élément de la courbe origine des lignes géodésiques, et le produit de l'élément par la première courbure géodésique de cette courbe. De même on aurait eu pour la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des courbes géodésiques,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{d\delta x}{dr\delta x},$$

etc.

65. Cette simple remarque fait comprendre qu'il peut exister des surfaces autres que les surfaces de révolution et présentant les mêmes facilités que ces dernières dans l'étude des propriétés des lignes qu'on peut tracer sur elles; il suffit, en effet, qu'en prenant pour l'un des systèmes de lignes orthogonales coordonnées, les lignes géodésiques menées des différents points d'une certaine courbe tracée sur la surface, et perpendiculairement à cette courbe, on obtienne pour l'élément δx des trajectoires orthogonales de ces lignes géodésiques une fonction de r seulement. C'est ce qui arrive pour l'héliçoïde gauche par exemple. Si l'on prend pour origine des lignes géodésiques la directrice rectiligne, ces lignes géodésiques seront précisément les génératrices rectilignes de la surface. Or, appelant 2π le pas de l'hélice qui sert de seconde directrice à la surface, π étant comme à l'ordinaire le rapport d'une circonférence à son diamètre; l'angle des deux génératrices infiniment voisines AM, A'M' (*fig.* 23) répondant aux deux points quelconques A et A' situés respectivement à des distances s et $s + ds$ du point fixe O, et par conséquent le produit par ds de la courbure de la surface au point A, abstraction faite du signe, sera, d'après le n° **51**, égale à ds : donc, puisque OAA' est la ligne de striction, on aura pour le point quelconque M, tel que AM $= r$,

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{(n^2+1)^2},$$

d'après le n° **50**, et en remarquant que les deux rayons de courbure R et R' sont de signes contraires.

De là on déduit, pour déterminer l'élément MM′ perpendiculaire à AM, l'équation

$$\frac{d^2\,\delta x}{dr^2} = \frac{\delta x}{(r^2+1)^2},$$

ou mieux, en employant la troisième formule du n° 50, qui n'est autre chose qu'une intégrale première de l'équation précédente,

$$\frac{d\delta x}{dr} = \frac{r\delta x}{r^2+1},$$

d'où, en intégrant,

$$\delta x = c\sqrt{r^2+1},$$

et comme pour $r=0$, $dr = ds$,

$$\delta x = ds\sqrt{r^2+1}.$$

On voit que cet élément ne dépend que de r; il en est, par conséquent, de même de la première courbure géodésique des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques coordonnées, qui est égale à $\frac{d\delta x}{\delta x\,dr}$, etc. Ceci explique la simplicité des résultats que l'on obtient dans les problèmes géométriques et mécaniques relatifs à l'héliçoïde gauche, simplicité qui a été mise en évidence par M. Catalan, dans un Mémoire sur les surfaces gauches, inséré dans le XXIX^e cahier de ce *Journal*, et plus récemment par M. Liouville, dans son Mémoire sur quelques cas particuliers du mouvement d'un point qui se ramènent aux quadratures.

66. On peut remarquer que la surface de révolution pour laquelle la courbure varierait suivant un méridien, comme elle varie pour l'héliçoïde gauche suivant les génératrices rectilignes, a pour méridien une chaînette. C'est ce que l'on trouvera aisément.

§ VI. — *Conditions pour que deux portions de surfaces puissent s'appliquer l'une sur l'autre sans qu'il en résulte de déchirure ni de duplicature.*

67. Considérons une portion de surface terminée au contour NPS (*fig.* 24). Prenons un point A sur cette surface, et par ce point menons des lignes géodésiques dans toutes les directions; soient r la distance variable du point A au point quelconque M de la ligne géodésique AQ, et ω l'angle que fait la tangente au point A à cette ligne AQ, avec la tangente à la ligne géodésique fixe AB. Considérons en second lieu une autre portion de surface terminée au contour N′P′S′. Prenons le point A′ sur cette surface, et par ce point menons aussi des lignes géodésiques dans toutes les directions; soient r' la distance au point A′ d'un point quelconque M′ de la ligne géodésique A′Q′, et ω' l'angle que font les tangentes au point A′ des deux lignes géodésiques A′Q′ et A′B′, dont la seconde est supposée fixe et déterminée. Il est clair que si les surfaces considérées sont telles que pour les points renfermés dans les contours NPS et N′P′S′, et pour lesquels $r = r'$, $\omega = \omega'$, les courbures de ces surfaces soient les mêmes, une courbe fermée quelconque tracée sur la première portion de surface, et ayant pour équation

$$r = f(\omega),$$

aura la même longueur et comprendra la même aire que la courbe représentée par l'équation

$$r' = f(\omega'),$$

qui sera tracée sur la seconde portion de surface: cela résulte des formules établies aux n^{os} **60** et **61**. D'après cela, il est évident que *de cette condition de l'égalité des courbures aux points pour lesquels* $r = r'$, $\omega = \omega'$, *on peut toujours conclure que les deux portions de surface considérées peuvent s'appliquer l'une sur l'autre sans qu'il en résulte ni déchirure ni duplicature.*

La réciproque est vraie aussi : *Si deux portions de surfaces peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, il arrivera toujours qu'après avoir pris un point* A *sur la première surface, il sera possible d'en trouver un autre* A′ *sur la seconde surface, de façon qu'en déterminant au moyen de ces points, et comme dans le numéro précédent, les coordonnées* r, ω, r', ω', *les courbures des surfaces soient les mêmes aux points pour lesquels on aura*

$$r = r', \quad \omega = \omega',$$

et qui seront compris d'ailleurs dans les portions de surfaces que l'on considère.

68. Pour le faire voir, nous démontrerons d'abord les deux propriétés suivantes :

1°. *Quand deux portions de surfaces peuvent être développées l'une sur l'autre, les courbures des surfaces pour deux points correspondants sont égales.*

En effet, traçons sur la première portion de surface deux systèmes de lignes orthogonales quelconques ; les transformées de ces lignes sur l'autre portion de surface seront aussi deux systèmes de lignes orthogonales. Appliquons maintenant à chacun de ces couples de systèmes de lignes orthogonales la formule (14) démontrée au n° **40** ; on obtiendra deux égalités dont les premiers membres auront la même valeur quand on considérera des points correspondants : il en sera donc de même des seconds membres de ces égalités ; donc les courbures sont bien les mêmes pour des points correspondants.

2°. *Étant données deux portions de surfaces développables l'une sur l'autre, si l'on trace une ligne quelconque sur la première, et la transformée de cette ligne sur la seconde, la valeur de la première courbure géodésique* $\frac{\cos\theta}{\rho}$ *sera la même pour les deux courbes aux points correspondants.*

Il suffit, comme dans la démonstration précédente, de prendre deux systèmes de lignes orthogonales sur la première surface et les développées de ces lignes sur la seconde surface, ce qui fournit deux nouveaux systèmes de lignes orthogonales ; et puis d'appliquer la formule (7) du n° **29**.

69. De ces deux propriétés résulte évidemment la réciproque que nous voulons établir. En effet, prenons pour A′ le point correspondant de A ; les transformées des lignes géodésiques tracées sur la première surface et issues de A, seront évidemment, d'après la seconde propriété, les lignes géodésiques issues de A′ et tracées sur la seconde portion de surface : de plus, si on choisit pour A′B′ la développée de AB, les points pour lesquels on aura

$$r = r', \quad \omega = \omega',$$

seront des points correspondants ; donc, d'après la première propriété, les deux surfaces auront la même courbure en ces points. Ce qui prouve la proposition que nous avions en vue.

70. La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces puissent se développer l'une sur l'autre, que nous venons d'obtenir, est très-simple et très-nette; mais elle ne pourrait pas aisément servir à reconnaître si deux surfaces données par leurs équations sont développables l'une sur l'autre. Nous allons indiquer une autre condition plus apte à remplir ce but.

Traçons sur la première portion de surface la série des lignes pour lesquelles la courbure de la surface $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$ a la même valeur, et que nous appellerons, pour simplifier, les *lignes d'égale courbure*. Supposons, en outre, ces lignes espacées de telle sorte que la courbure de la surface varie toujours de la même quantité quand on passe de l'une quelconque d'entre elles à la suivante. Traçons les lignes analogues sur la seconde portion de surface, en ayant soin qu'elles correspondent à des valeurs de la courbure égales respectivement à celles qui ont déterminé les lignes tracées sur la première portion de surface. Enfin imaginons sur chaque portion de surface les trajectoires orthogonales de ses lignes d'égale courbure. Ceci posé, soit (*fig.* 25), sur une des lignes AM d'égale courbure tracées sur la première surface, un point quelconque A; *les deux surfaces seront développables l'une sur l'autre lorsqu'il sera possible de trouver sur celle des lignes d'égale courbure tracée sur la seconde surface qui correspond à la même valeur de la courbure que* AM, *un point* A' *tel, qu'après avoir pris les points* M, M' *de façon que les arcs* AM *et* AM' *soient égaux, mais quelconques d'ailleurs :* 1° *les courbures géodésiques des deux courbes* AM *et* AM' *soient en* M *et* M' *égales entre elles;* 2° *les distances* MM_1, M_1M_2, *etc., qui existent entre les différentes lignes d'égale courbure de la première surface et qui sont déterminées par la trajectoire orthogonale de ces lignes qui passe par le point* M, *soient égales respectivement aux distances* $M'M'_1$, $M'_1M'_2$ *des lignes d'égale courbure de la seconde surface qui sont déterminées par la trajectoire orthogonale passant par* M. Comme aussi réciproquement, *quand il sera possible de satisfaire à ces conditions, les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre.* Cela est presque évident; en effet, prenons sur AM, et à la suite les uns des autres, les arcs infiniment petits Aa, ab, bc, etc., puis sur la ligne A'M' les arcs A'a', $a'b'$, etc., respectivement égaux à Aa, ab, etc., et enfin menons AA_1, aa_1, bb_1, etc., normalement à AM, et $A'A'_1$, $a'a'_1$, $b'b'_1$, etc., normalement à A'M'. Si les normales $A'A'_1$, $a'a'_1$, $b'b'_1$, etc., sont respectivement égales à AA_1, aa_1, bb_1, et que les valeurs des courbures géodésiques des lignes AM et A′M′ soient respectivement les mêmes au point A et au point A′, au point a et au point a', au point b et au point b', etc., $A'_1 a'_1$, $a'_1 b'_1$, $b'_1 c'_1$, etc., seront respectivement égaux à $A_1 a_1$, $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, etc., d'après la formule (7) du n° **29**, et les valeurs des courbures géodésiques des lignes $A_1 M_1$, $A'_1 M'_1$ seront respectivement les mêmes aux points A'_1 et A_1, a'_1 et a_1, b'_1 et b_1, etc., d'après la formule (12) du n° **38**; donc, en menant $A_1 A_2$, $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, etc., normalement à $A_1 M_1$ et $A'_1 A'_2$, $a'_1 a'_2$, $b'_1 b'_2$, etc., normalement à $A'_1 M'_1$, les éléments $A'_2 a'_2$, $a'_2 b'_2$, $b'_2 c'_2$, etc., seront de même respectivement égaux à $A_2 a_2$, $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, etc., et les valeurs des courbures géodésiques des lignes $A_2 M_2$ et $A'_2 M'_2$ seront aussi respectivement les mêmes pour les points A'_2 et A_2, a'_2 et a_2, b'_2 et b_2, etc. D'après cela, il est bien évident que les deux surfaces peuvent s'appliquer l'une sur l'autre et que les points correspondants sont généralement ceux qui, par les notations précédentes, sont désignés par h_n, h_n^1.

La réciprope s'aperçoit aussi aisément d'après les deux propriétés démontrées plus haut, et il n'est pas nécessaire de s'y arrêter.

71. Voyons maintenant comment on pourra s'assurer si deux surfaces données par leurs équations peuvent ou non se développer l'une sur l'autre. Nous considérons toujours, dans ce qui va suivre, les coordonnés des différents points de chaque surface comme déterminées au moyen de deux variables indépendantes u et v, de telle sorte que chaque surface sera définie par trois équations de la forme

$$x = f(u, v), \quad y = f_1(u, v), \quad z = f_2(u, v),$$

d'où l'on pourra ensuite exprimer en u et v, telle fonction de x, y, z que l'on voudra.

Dans cette hypothèse, quand on supposera à u une valeur déterminée, et qu'on fera varier v, les équations de la surface détermineront une courbe tracée sur cette surface, dont les questions en x, y, z s'obtiendraient en éliminant v entre les trois équations précédentes. De même l'hypothèse de $v =$ const. donnera une autre ligne tracée sur la surface; d'après cela, on voit que les deux équations

$$u = c \quad \text{et} \quad v = c',$$

où c et c' sont des constantes quelconques, représentent, considérées isolément, deux systèmes de courbes tracées sur la surface et qui peuvent servir par leurs intersections à déterminer les différents points de cette surface; nous appellerons pour cette raison les lignes dont il s'agit, les *lignes coordonnées*.

72. Si l'on différentie les trois équations de la surface, il vient

$$dx = adu + bdv,$$
$$dy = a_1 du + b_1 dv,$$
$$dz = a_2 du + b_2 dv,$$

en posant, pour simplifier,

$$a = \frac{df}{du},\quad b = \frac{df}{dv},\quad a_1 = \frac{df_1}{du},\quad b_1 = \frac{df_1}{dv},\quad a_2 = \frac{df_2}{du},\quad b_2 = \frac{df_2}{dv}.$$

De là on tire, pour la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface,

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{(a^2+a_1^2+a_2^2)du^2+2(ab+a_1b_1+a_2b_2)du\,dv+(b^2+b_1^2+b_2^2)dv^2}$$

ou

$$ds = \sqrt{A^2du^2 + 2B^2du\,dv + C^2dv^2},$$

en posant, pour simplifier

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = A^2,$$
$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 = B^2,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = C^2.$$

A, B, C sont susceptibles d'une interprétation géométrique très-simple. En effet, dans l'expression générale de ds, que nous venons d'obtenir, faisons $dv = 0$; il viendra

$$ds = A du,$$

en supposant que A soit la valeur positive de $\sqrt{A^2}$. Or, poser $dv = 0$, c'est admettre que la courbe dont on calcule l'élément est une ligne coordonnée représentée par une équation de la forme $v =$ const.; nous voyons donc que Adu est l'expression générale de l'arc infiniment petit de la ligne coordonnée représentée par l'équation $v =$ const., déterminé d'ailleurs par deux courbes coordonnées de l'autre système, et répondant à deux valeurs de u ayant entre elles une différence égale à du. On verrait de même que Cdv est l'expression générale de l'arc infiniment petit de la ligne coordonnée $u=$ const., que déterminent deux courbes coordonnées de l'autre système répondant à deux valeurs de v dont la différence est dv. D'un autre côté. si dx et dy représentent ces deux arcs infiniment et que θ soit l'angle qu'ils forment, on doit avoir pour l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface,

$$\sqrt{dx^2+dy^2+2\,dx\,dy\cos\theta};$$

comparant à la valeur de ds écrite plus haut, on voit que

$$\frac{B^2}{AC}=\cos\theta,$$

d'où

$$B^2=AC\cos\theta.$$

Ces résultats nous seront utiles plus tard.

73. Soient maintenant deux surfaces, la première représentée par les trois équations

$$x=f(u,v),\quad y=f_1(u,v),\quad z=f_2(u,v),$$

la seconde par

$$x'=\varphi(u',v'),\quad y'=\varphi_1(u',v'),\quad z'=\varphi_2(u',v').$$

Je commencerai par calculer, pour chacune d'elles, le carré de la courbure $\frac{1}{RR'}$ en fonction des variables u, v ou u', v' qui servent à déterminer leurs différents points. Or on a, comme l'on sait,

$$\frac{1}{RR'}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

ou

$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{d^2z}{dx^2},\quad s=\frac{d^2z}{dx\,dy},\quad t=\frac{d^2z}{dy^2},$$

s'il s'agit de la première surface, et

$$p=\frac{dz'}{dx'},\quad q=\frac{dz'}{dy'},\quad r=\frac{d^2z'}{dx'^2},\quad s=\frac{d^2z'}{dx'dy'},\quad t=\frac{d^2z'}{dy'^2},$$

s'il s'agit de la seconde. D'un autre côté, z, x, y sont connus en fonction de u et de v, et z', x', y' en fonction de u', v'; on peut donc avoir par les règles connues p, q, r, s, t, et, par suite, le carré de la courbure $\frac{1}{RR'}$ en fonction de u et de v quand il s'agit de la première surface, et en fonction de u' et v' quand il s'agit de la seconde. Nous allons effectuer ce calcul qui n'offre d'autres difficultés que sa longueur, pour la première surface; et l'on verra, ce qui est fort remarquable, que le résultat ne dépend que des quantités A, B, C dont il a été parlé plus haut, et de leurs dérivées premières et secondes relatives à u et à v.

74. Reprenons les égalités

$$(a)\qquad \begin{cases} dx = adu + bdv, \\ dy = a_1 du + b_1 dv, \\ dz = a_2 du + b_2 dv, \end{cases}$$

et différentions-les par rapport aux variables u et v, que l'on considérera comme variables indépendantes; il viendra

$$(b)\qquad \begin{cases} d^2 x = \frac{da}{du} du^2 + 2 \frac{da}{dv} du dv + \frac{db}{dv} dv^2, \\ d^2 y = \frac{da_1}{du_1} du^2 + 2 \frac{da_1}{dv} du dv + \frac{db_1}{dv} dv^2, \\ d^2 z = \frac{da_2}{du} du^2 + 2 \frac{da_2}{dv} du dv + \frac{db_2}{dv} dv^2, \end{cases}$$

en remarquant que

$$\frac{da}{dv} = \frac{db}{du} = \frac{d^2 x}{du dv},$$

$$\frac{da_1}{dv} = \frac{db_1}{du} = \frac{d^2 y}{du dv},$$

$$\frac{da_2}{dv} = \frac{db_2}{du} = \frac{d^2 z}{du dv}.$$

Maintenant on a

$$dz = pdx + qdy,$$

$$d^2 z = pd^2 x + qd^2 y + rdx^2 + 2 sdxdy + tdy^2.$$

Donc, en substituant à dx, dy, dz, $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ leurs valeurs déduites des égalités (a) et (b), et égalant séparément les coefficients de du, dv, du^2, $dudv$ et dv^2, ce qui est permis, puisque les différentielles du et dv sont indépendantes l'une de l'autre, il vient

$$a_2 = pa + qa_1,$$
$$b_2 = pb + qb_1,$$
$$\frac{da_2}{du} = p\frac{da}{du} + q\frac{da_1}{du} + ra^2 + 2saa_1 + ta_1^2,$$
$$\frac{da_2}{dv} = \frac{db_2}{du} = p\frac{da}{dv} + q\frac{da_1}{dv} + rab + s(ab_1 + ba_1) + ta_1b_1,$$
$$\frac{db_2}{dv} = p\frac{db}{dv} + q\frac{db_1}{dv} + rb^2 + 2sbb_1 + tb_1^2.$$

Des deux premières de ces égalités on tire aisément

$$p = \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1},$$
$$q = \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1};$$

d'où, en substituant dans les trois autres et transposant quelques termes d'un membre dans un autre, on a

$$ra^2 + 2saa_1 + ta_1^2 = \frac{da_2}{du} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1}\frac{da}{du} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1}\frac{da_1}{du},$$
$$rab + s(ab_1 + ba_1) + ta_1b_1 = \frac{da_2}{dv} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1}\frac{da}{dv} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1}\frac{da_1}{dv},$$
$$rb^2 + 2sbb_1 + tb_1^2 = \frac{db_2}{dv} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1}\frac{db}{dv} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1}\frac{db_1}{dv}.$$

Chassant les dénominateurs, multipliant membre à membre les équations extrêmes, et du produit retranchant le carré de la seconde, il viendra, comme on le voit, sans difficulté

$$(ab_1 - ba_1)^4(rt - s^2) = \mathrm{GK} - \mathrm{H}^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{G} = (a_1b_2 - b_1a_2)\frac{da}{du} + (a_2b - b_2a)\frac{da_1}{du} + (ab_1 - ba_1)\frac{da_2}{du},$$
$$\mathrm{H} = (a_1b_2 - b_1a_2)\frac{da}{dv} + (a_2b - b_2a)\frac{da_1}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{da_2}{dv},$$
$$\mathrm{K} = (a_1b_2 - b_1a_2)\frac{db}{dv} + (a_2b - b_2a)\frac{db_1}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{db_2}{dv}.$$

Reste maintenant à déterminer $GK - H^2$ en fonction de u et de v, ou plutôt en fonction de A^2, B^2, C^2 et des dérivées de ces quantités par rapport à u et à v. Reprenons les égalités

$$\begin{aligned} a^2 + a_1^2 + a_2^2 &= A^2, \\ ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 &= B^2, \\ b^2 + b_1^2 + b_2^2 &= C^2; \end{aligned}$$

en les différentiant successivement par rapport à u et à v, et remarquant, comme on l'a dit plus haut, que

$$\frac{da}{dv} = \frac{db}{du}, \quad \frac{da_1}{dv} = \frac{db_1}{du}, \quad \frac{da_2}{dv} = \frac{db_2}{du},$$

on obtiendra facilement les six équations

$$\begin{aligned} a\frac{da}{du} + a_1\frac{da_1}{du} + a_2\frac{da_2}{du} &= \phantom{2B\frac{dB}{dv} -{}} A\frac{dA}{du} = D, \\ a\frac{da}{dv} + a_1\frac{da_1}{dv} + a_2\frac{da_2}{dv} &= \phantom{2B\frac{dB}{dv} -{}} A\frac{dA}{dv} = E, \\ a\frac{db}{dv} + a_1\frac{db_1}{dv} + a_2\frac{db_2}{dv} &= 2B\frac{dB}{dv} - C\frac{dC}{du} = F, \\ b\frac{da}{du} + b_1\frac{da_1}{du} + b_2\frac{da_2}{du} &= 2B\frac{dB}{du} - A\frac{dA}{dv} = D_1, \\ b\frac{da}{dv} + b_1\frac{da_1}{dv} + b_2\frac{da_2}{dv} &= \phantom{2B\frac{dB}{dv} -{}} C\frac{dC}{du} = E_1, \\ b\frac{db}{dv} + b_1\frac{db_1}{dv} + b_2\frac{db_2}{dv} &= \phantom{2B\frac{dB}{dv} -{}} C\frac{dC}{dv} = F_1. \end{aligned}$$

De là on tire aisément, en éliminant successivement $\frac{da}{du}$, $\frac{da_1}{du}$ et $\frac{da_2}{du}$ entre la première et la quatrième de ces équations,

$$\begin{aligned} (a_1 b - b_1 a)\frac{da_1}{du} + (a_2 b - b_2 a)\frac{da_2}{du} &= Db - D_1 a, \\ (a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{da_2}{du} + (ab_1 - ba_1)\frac{da}{du} &= Db_1 - D_1 a_1, \\ (ab_2 - ba_2)\frac{da}{du} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{da_1}{du} &= Db_2 - D_1 a_2. \end{aligned}$$

De même, en éliminant successivement $\frac{da}{dv}$, $\frac{da_1}{dv}$, $\frac{da_2}{dv}$ entre la deuxième et la cinquième, et $\frac{db}{dv}, \frac{db_1}{dv}, \frac{db_2}{dv}$ entre la troisième et la sixième des mêmes équations, il vient

$$(a_1 b - b_1 a)\frac{da_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a)\frac{da_2}{dv} = \mathrm{E}b - \mathrm{E}_1 a,$$

$$(a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{da_2}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{da}{dv} = \mathrm{E}b_1 - \mathrm{E}_1 a_1,$$

$$(ab_2 - ba_2)\frac{da}{dv} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{da_1}{dv} = \mathrm{E}b_2 - \mathrm{E}_1 a_2,$$

$$(a_1 b - b_1 a)\frac{db_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a)\frac{db_2}{dv} = \mathrm{F}b - \mathrm{F}_1 a,$$

$$(a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{db_2}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{db}{dv} = \mathrm{F}b_1 - \mathrm{F}_1 a_1,$$

$$(ab_2 - ba_2)\frac{db}{dv} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{db_1}{dv} = \mathrm{F}b_2 - \mathrm{F}_1 b_2;$$

mais $\mathrm{GK} - \mathrm{H}^2$, par un artifice bien connu et fort simple, peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}
&[(ab_1 - ba_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 + (a_2 b - b_2 a)^2]\left[\frac{da}{du}\frac{db}{dv} - \left(\frac{da}{dv}\right)^2 + \frac{da_1}{du}\frac{db_1}{dv} - \left(\frac{da_1}{dv}\right)^2 + \frac{da_2}{du}\frac{db_2}{dv} - \left(\frac{da_2}{dv}\right)^2\right] \\
&- \left[(ab_2 - ba_2)\frac{da}{du} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{da_1}{du}\right]\left[(ab_2 - ba_2)\frac{db}{dv} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{db_1}{dv}\right] \\
&+ \left[(ab_2 - ba_2)\frac{da}{dv} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\frac{da_1}{dv}\right]^2 \\
&- \left[(a_1 b - b_1 a)\frac{da_1}{du} + (a_2 b - b_2 a)\frac{da_2}{du}\right]\left[(a_1 b - b_1 a)\frac{db_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a)\frac{db_2}{dv}\right] \\
&+ \left[(a_1 b - b_1 a)\frac{da_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a)\frac{da_2}{dv}\right]^2 \\
&- \left[(a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{da_2}{du} + (ab_1 - ba_1)\frac{da}{du}\right]\left[(a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{db_2}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{db}{dv}\right] \\
&+ \left[(a_2 b_1 - b_2 a_1)\frac{da_2}{dv} + (ab_1 - ba_1)\frac{da}{dv}\right]^2.
\end{aligned}$$

Donc, en remarquant que

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{du}\frac{db}{dv} - \left(\frac{da}{dv}\right)^2 + \frac{da_1}{du}\frac{db_1}{dv} - \left(\frac{da_1}{dv}\right)^2 + \frac{da_2}{du}\frac{db_2}{dv} - \left(\frac{da_2}{dv}\right)^2 \\
&= \frac{d\left(a\frac{db}{dv} + a_1\frac{db_1}{dv} + a_2\frac{db_2}{dv}\right)}{du} - \frac{d\left(a\frac{da}{dv} + a_1\frac{da_1}{dv} + a_2\frac{da_2}{dv}\right)}{dv} = \frac{d\mathrm{F}}{du} - \frac{d\mathrm{E}}{dv},
\end{aligned}$$

et en se servant des formules précédentes, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{GK}-\mathrm{H}^2 &= [(ab_1-ba_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_2b-b_2a)^2]\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}-\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)\\
&\quad-(\mathrm{D}b_2-\mathrm{D}_1a_2)(\mathrm{F}b_2-\mathrm{F}_1a_2)+(\mathrm{E}b_2-\mathrm{E}_1a_2)^2\\
&\quad-(\mathrm{D}b-\mathrm{D}_1a)(\mathrm{F}b-\mathrm{F}_1a)+(\mathrm{E}b-\mathrm{E}_1a)^2\\
&\quad-(\mathrm{D}b_1-\mathrm{D}_1a_1)(\mathrm{F}b_1-\mathrm{F}_1a_1)+(\mathrm{E}b_1-\mathrm{E}_1a_1)^2\\
&= [(ab_1-ba_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_2b-b_2a)^2]\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}-\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)\\
&\quad+(\mathrm{E}^2-\mathrm{DF})\mathrm{C}^2+(\mathrm{E}_1^2-\mathrm{D}_1\mathrm{F}_1)\mathrm{A}^2-(2\mathrm{EE}_1-\mathrm{DF}_1-\mathrm{D}_1\mathrm{F})\mathrm{B}^2.
\end{aligned}$$

Or

$$(ab_1-ba_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_2b-b_2a)^2=\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4;$$

on a donc encore

$$\begin{aligned}
\mathrm{GK}-\mathrm{H}^2 &= (\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}-\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)+(\mathrm{E}^2-\mathrm{DF})\mathrm{C}^2\\
&\quad+(\mathrm{E}_1^2-\mathrm{D}_1\mathrm{F}_1)\mathrm{A}^2-(2\mathrm{EE}_1-\mathrm{DF}_1-\mathrm{D}_1\mathrm{F})\mathrm{B}^2.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, puisque, ainsi qu'on l'a trouvé plus haut,

$$p=\frac{a_2b_1-b_2a_1}{ab_1-ba_1},\qquad q=\frac{ab_2-ba_2}{ab_1-ba_1},$$

on a

$$(1+p^2+q^2)^2=\frac{[(ab_1-ba_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_2b-b_2a)^2]^2}{(ab_1-ba_1)^4}=\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2}{(ab_1-ba_1)^4};$$

donc le carré de la courbure

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=\frac{\mathrm{GK}-\mathrm{H}^2}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2},$$

sera égal à

$$\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}-\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)+(\mathrm{E}^2-\mathrm{DF})\mathrm{C}^2+(\mathrm{E}_1^2-\mathrm{D}_1\mathrm{F}_1)\mathrm{A}^2-(2\mathrm{EE}_1-\mathrm{DF}_1-\mathrm{D}_1\mathrm{F})\mathrm{B}^2}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2},$$

ou bien, en substituant à D, E, F, D_1, E_1, F_1, leurs valeurs, à

$$\begin{aligned}
&\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)\left(\frac{d^2\mathrm{B}^2}{du\,dv}-\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{C}^2}{du^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{A}^2}{dv^2}\right)+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\right)^2-2\frac{d\mathrm{A}^2}{du}\frac{d\mathrm{B}^2}{dv}+\frac{d\mathrm{A}^2}{du}\frac{d\mathrm{C}^2}{du}\right]\mathrm{C}^2}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2}\\
&+\frac{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{d\mathrm{C}^2}{du}\right)^2-2\frac{d\mathrm{B}^2}{du}\frac{d\mathrm{C}^2}{dv}+\frac{d\mathrm{C}^2}{dv}\frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\right]\mathrm{A}^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\frac{d\mathrm{C}^2}{du}-\frac{d\mathrm{A}^2}{du}\frac{d\mathrm{C}^2}{dv}\right)\mathrm{B}^2}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2}\\
&+\frac{\frac{1}{2}\left(2\frac{d\mathrm{B}^2}{du}\frac{d\mathrm{B}^2}{dv}-\frac{d\mathrm{B}^2}{du}\frac{d\mathrm{C}^2}{du}-\frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\frac{d\mathrm{B}^2}{dv}\right)\mathrm{B}^2}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^4)^2}.
\end{aligned}$$

Telle est l'expression du carré de la courbure. On voit qu'elle ne dépend que des fonctions A^2, B^2, C^2 et des dérivées premières et secondes relatives à u et à v de ces fonctions. Cette importante proposition est due à M. Gauss, et le calcul qui précède est, à quelques simplifications près, celui que l'on trouve dans le célèbre Mémoire intitulé: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

Nous appellerons M cette expression du carré de la courbure de la première surface, et M' l'expression correspondante pour la seconde surface; de manière que

$$M = \text{const.} \quad \text{et} \quad M' = \text{const.}$$

représenteront respectivement les lignes d'égale courbure de la première et de la seconde surface.

75. Proposons-nous actuellement de calculer la distance de deux lignes d'égale courbure infiniment voisines et tracées sur la première surface par exemple. Soient AB et A'B' ces deux lignes (*fig*. 26) et m un point pris sur la première; menons mm' normalement à AmB que nous terminons à A'B': il s'agit de calculer mm'. Appelons u et v les coordonnées curvilignes du point m; $u + \delta u$, $v + \delta v$ celles de m', et enfin $u + du$, $v + dv$ celles du point n infiniment voisin de m et situé sur la ligne AB; nous aurons d'abord la distance

$$mm' = \delta s = \sqrt{A^2 \delta u^2 + 2B^2 \delta u \delta v + C^2 \delta v^2}.$$

Reste à obtenir δu et δv. Appelons δM l'accroissement que reçoit la courbure de la surface quand on passe de la courbe AB à la courbe A'B'; nous aurons

$$\delta M = \frac{dM}{du}\delta u + \frac{dM}{dv}\delta v,$$

puis, en exprimant que mm' est normale à AmB,

$$1 + \frac{A^2}{C^2}\frac{du\,\delta u}{dv\,\delta v} + \frac{A}{C}\left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{dv}\right)\cos\theta = 0,$$

θ représentant, comme plus haut, l'angle des deux lignes coordonnées; ou bien, en observant que

$$\frac{dM}{du}du + \frac{dM}{dv}dv = 0,$$

d'où
$$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}},$$

on a
$$1 - \frac{A^2}{C^2}\frac{\delta u}{\delta v}\frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}} + \frac{A}{C}\left(\frac{\delta u}{\delta v} - \frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}}\right)\cos\theta = 0,$$

ou en remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur,
$$\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) - \left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\frac{\delta u}{\delta v} = 0.$$

De cette équation et de celle qui a été écrite plus haut, on tire aisément, par un artifice souvent employé par M. Cauchy,
$$\frac{\delta u}{C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}} = \frac{\delta v}{A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}} = \frac{\delta M}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

et par conséquent
$$\delta u = \frac{\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)\delta M}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$
$$\delta v = \frac{\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\delta M}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2};$$

d'où, substituant dans la valeur de δs, il vient
$$\begin{aligned}\delta s &= \pm\frac{\delta M\sqrt{A^2\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)^2 + 2B^2\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right) + C^2\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)^2}}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}\\
&= \pm\frac{\delta M\sqrt{(A^2C^2 - B^4)\left[C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2\right]}}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}\\
&= \pm\,\delta M\sqrt{\frac{A^2C^2 - B^4}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}},\end{aligned}$$

le signe du second membre étant évidemment celui de δM, puisque δs est positif. On trouverait évidemment de la même manière la distance $\delta s'$ de deux courbes d'égale courbure infiniment voisines appartenant à la seconde surface, et l'on aurait

$$\delta s' = \pm \delta M' \sqrt{\frac{A'^2 C'^2 - B'^4}{A'^2 \left(\frac{dM'}{dv'}\right)^2 - 2B'^2 \frac{dM'}{du'}\frac{dM'}{dv'} + C'^2 \left(\frac{dM'}{du'}\right)^2}},$$

$\delta M'$ étant l'accroissement positif ou négatif de la courbure de la surface, obtenu en passant de la première à la seconde des lignes considérées, et le signe du second membre étant celui de cet accroissement.

76. Calculons encore la courbure géodésique d'une ligne d'égale courbure de la première surface ; d'abord, en appelant ds l'élément de la ligne, et représentant par δ les déplacements normaux à cette ligne, cette courbure est égale, abstraction faite du signe, à

$$\frac{\delta ds}{ds\,\delta s}.$$

Or

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2B^2 du\,dv + C^2 dv^2;$$

donc

$$\begin{aligned} ds\,\delta ds &= A^2 du\,\delta du + B^2 du\,\delta dv + B^2 dv\,\delta du + C^2 dv\,\delta dv \\ &+ A\,du^2\left(\frac{dA}{du}\delta u + \frac{dA}{dv}\delta v\right) + 2B\,du\,dv\left(\frac{dB}{du}\delta u + \frac{dB}{dv}\delta v\right) + C\,dv^2\left(\frac{dC}{du}\delta u + \frac{dC}{dv}\delta v\right), \end{aligned}$$

du, dv, ds, δu, δv, δs vérifiant les conditions

$$\frac{dM}{du}du + \frac{dM}{dv}dv = 0,$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{A^2 du^2 + 2B^2 du\,dv + C^2 dv^2} \\ &= \pm \frac{du}{\frac{dM}{dv}} \sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\delta u = \frac{\left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv}\right)\partial M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta v = \frac{\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du}\right)\partial M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta s = \pm \frac{\partial M \sqrt{A^2 C^2 - B^4}}{\sqrt{\left(A^2 \frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}.$$

Posons maintenant, pour simplifier,

$$\frac{du}{\frac{dM}{dv}} = h, \qquad \frac{\delta M}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2} = k,$$

d'où

$$du = h\frac{dM}{dv}, \qquad dv = -h\frac{dM}{du},$$

$$ds = \pm h\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta u = k\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right), \qquad \delta v = k\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right),$$

$$\delta s = \pm k\sqrt{A^2C^2 - B^4}\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2};$$

il viendra, en substituant,

$$\begin{aligned}
ds\,\delta ds = {} & \left[\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\delta du + \left(B^2\frac{dM}{dv} - C^2\frac{dM}{du}\right)\delta dv\right]h \\
& + A\left(\frac{dM}{dv}\right)^2\left[\frac{dA}{du}\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) + \frac{dA}{dv}\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\right]h^2k \\
& - 2B\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv}\left[\frac{dB}{du}\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) + \frac{dB}{dv}\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\right]h^2k \\
& + C\left(\frac{dM}{du}\right)^2\left[\frac{dC}{du}\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) + \frac{dC}{dv}\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\right]h^2k,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
ds\,\delta ds = {} & h\left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\left\{\delta du + hk\left[A\frac{dA}{dv}\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B\frac{dB}{dv}\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C\frac{dC}{dv}\left(\frac{dM}{du}\right)^2\right]\right\} \\
& + h\left(B^2\frac{dM}{dv} - C^2\frac{dM}{du}\right)\left\{\delta dv - hk\left[A\frac{dA}{du}\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B\frac{dB}{du}\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C\frac{dC}{du}\left(\frac{dM}{du}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\delta du = d\delta u = {} & \frac{\delta M\, d.\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2} \\
& - \frac{\delta M\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)d.\left[A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2\right]}{\left[A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2\right]^2} \\
= {} & kd.\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) - \frac{k\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right)d.\left[A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2\right]}{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2},
\end{aligned}$$

et aussi

$$\delta dv = kd\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right) - \frac{k\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)d.\left[\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]}{\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2}.$$

Donc, en substituant et simplifiant,

$$\begin{aligned} ds\,\delta ds = {} & hk\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left\{d.\left(\mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right) + h\left[\mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{dv}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]\right\} \\ & + hk\left(\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left\{d.\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right) - h\left[\mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

ou, en développant les différentielles et substituant à du et à dv leurs valeurs écrites plus haut,

$$\begin{aligned} ds\,\delta ds = {} & h^2k\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[\begin{array}{l} 2\mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 + \mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 \\ \quad + \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du^2} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} + \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} \end{array}\right] \\ & + h^2k\left(\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[\begin{array}{l} \mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{dv}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 \\ \quad + \mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} - \mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du^2} + \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} \end{array}\right]; \end{aligned}$$

d'où enfin, en divisant les deux membres par ds^2 et δs dont les valeurs en fonction de h et de k ont été écrites plus haut, il vient, pour la courbure géodésique demandée,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \pm\frac{\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[2\mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 + \mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 + \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du^2} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} + \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}\right]}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^4)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\pm\frac{\left(\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[\mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{A}\frac{d\mathrm{A}}{dv}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + 2\mathrm{B}\frac{d\mathrm{B}}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - \mathrm{C}\frac{d\mathrm{C}}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 + \mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} - \mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du^2} + \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv}\right]}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^4)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien encore

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \pm\frac{\left(\mathrm{A}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[\frac{d\mathrm{C}^2}{du}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{C}^2}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - \frac{d\mathrm{B}^2}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2\right] + \left(\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{dv} - \mathrm{C}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}^2}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - \frac{d\mathrm{A}^2}{dv}\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \frac{d\mathrm{B}^2}{dv}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{C}^2}{du}\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]}{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^4)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\pm\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^4)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2\frac{d^2\mathrm{M}}{du^2} - 2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv}\frac{d^2\mathrm{M}}{du\,dv} + \left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}\right]}{\left[\mathrm{A}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{B}^2\frac{d\mathrm{M}}{du}\frac{d\mathrm{M}}{dv} + \mathrm{C}^2\left(\frac{d\mathrm{M}}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

Quant aux signes placés devant les deux termes du second membre, on voit que si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que M croisse du côté des lignes d'égale courbure où sont situées les normales à ces lignes, qui occupent, par rapport aux tangentes des mêmes lignes prolongées dans le sens des arcs positifs, et aux normales extérieures de la surface, la position ordinaire de la partie positive de l'axe de y par rapport aux parties positives des axes des x et des z, le signe qu'il faudra adopter sera le signe $-$.

On obtiendrait de la même manière la valeur de la courbure géodésique de la ligne d'égale courbure tracée sur la seconde surface et que nous appellerons $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$. Cette valeur ne différerait de la précédente, d'après nos notations, qu'en ce que toutes les lettres seraient accentuées.

77. La formule précédente est assez compliquée ; je remarquerai qu'on la simplifie beaucoup quand on prend pour lignes coordonnées de l'un des systèmes, pour celles par exemple qui sont renfermées dans l'équation

$$v = \text{const.},$$

les lignes d'égale courbure. En effet, M peut alors être considéré comme égal à v, et l'on a

$$\frac{dM}{dv} = 1$$

et

$$\frac{dM}{du} = \frac{d^2M}{du^2} = \frac{d^2M}{du\,dv} = \frac{d^2M}{dv^2} = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{A^2\frac{dA}{dv} - 2AB\frac{dB}{du} + B^2\frac{dA}{du}}{A^2(A^2C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sous ce rapport, il conviendra de considérer x, y, z comme fonction des deux variables indépendantes u et M, en éliminant v au moyen de la relation qui lie M, u et v.

78. Ayant calculé M, $\frac{\partial s}{\partial M}$, $\frac{\cos\theta}{\rho}$ en fonction de u et de v ; M', $\frac{\partial s'}{\partial M'}$, $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ en fonction de u' et de v', nous exigerons, pour que les deux surfaces soient développables l'une sur l'autre, que l'on puisse déterminer u' et v' en fonction de u et de v, de manière que l'on ait en même temps les trois relations

$$(1)\qquad M = M',\quad \frac{\partial s}{\partial M} = \frac{\partial s'}{\partial M'},\quad \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\cos\theta'}{\rho'}.$$

Cela étant, si, de plus, l'accroissement de $\frac{\cos\theta}{\rho}$ pour un déplacement infiniment petit effectué sur une courbe d'égale courbure de la première surface dans le sens des arcs positifs de cette courbe, est égal à l'accroissement de $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ relatif à un déplacement égal effectué sur la courbe d'égale courbure correspondante de l'autre surface, les deux surfaces seront développables l'une sur l'autre. L'expression de l'accroissement de $\frac{\cos\theta}{\rho}$, de même que celle de l'accroissement de $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$, s'obtiennent d'ailleurs facilement comme il suit: du et dv étant les accroissements que reçoivent les coordonnées u et v, on a d'abord

$$d\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{du}du + \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{dv}dv.$$

Mais

$$\frac{dM}{du}du + \frac{dM}{dv}dv = 0$$

et

$$A^2 du^2 + 2B^2 du dv + C^2 dv^2 = ds^2,$$

en appelant ds la valeur du déplacement effectué sur la courbe d'égale courbure : de là nous tirons

$$du = \pm\frac{\frac{dM}{dv}ds}{\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}},$$

$$dv = \pm\frac{-\frac{dM}{du}ds}{\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}};$$

donc

$$d\frac{\cos\theta}{\rho} = \left(\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{dv}\frac{dM}{du}\right)\frac{\pm ds}{\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}}.$$

On aurait de même

$$d\frac{\cos\theta'}{\rho'}=\left(\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{du'}\frac{dM'}{dv'}-\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{dv'}\frac{dM'}{du'}\right)\frac{\pm\, ds}{\sqrt{A'^2\left(\frac{dM'}{dv'}\right)^2-2B'^2\frac{dM'}{du'}\frac{dM'}{dv'}+C'^2\left(\frac{dM'}{du'}\right)^2}};$$

l'égalité que nous exigerons, indépendamment des équations (1), est donc

$$\frac{\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{du}\frac{dM}{dv}-\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{dv}\frac{dM}{du}}{\sqrt{A^2\left(\frac{dM}{dv}\right)^2-2B^2\frac{dM}{du}\frac{dM}{dv}+C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}}=\pm\frac{\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{du'}\frac{dM'}{dv'}-\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{dv'}\frac{dM'}{du'}}{\sqrt{A'^2\left(\frac{dM'}{dv'}\right)^2-2B'^2\frac{dM'}{du'}\frac{dM'}{dv'}+C'^2\left(\frac{dM'}{du'}\right)^2}},$$

que l'on peut encore mettre sous la forme plus simple

$$\frac{\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)}{du}\frac{dM}{dv}-\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{dv}\frac{dM}{du}}{\sqrt{A^2C^2-B^4}}=\pm\frac{\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{du'}\frac{dM'}{dv'}-\frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{dv'}\frac{dM'}{du'}}{\sqrt{A'^2C'^2-B'^4}},\tag{2}$$

en vertu de l'égalité

$$\frac{\partial M}{\partial s}=\frac{\partial M'}{\partial s'},$$

et où le signe devra être convenablement fixé dans chaque cas.

79. Pour démontrer que lorsque les conditions (1) et (2) sont satisfaites, les surfaces sont développables l'une sur l'autre : observons que si, après avoir pris le point quelconque A sur la première surface, nous choisissons pour le point correspondant A′, sur la seconde, le point qui a pour coordonnées les valeurs de u' et v' déduites des équations (1), dans lesquelles on a mis en place de u et de v les coordonnées du point A, le rapport $\frac{\cos\theta}{\rho}$ pour le point a (*fig.* 25) sera égal au rapport $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ pour le point a' d'après la relation (2); et comme la valeur de M pour le premier point est égale à celle de M′ pour le second, les coordonnées de ces deux points vérifieront deux des équations (1), et, par suite, toutes les trois : alors on pourra conclure aussi que b et b' sont deux points dont les coordonnées vérifient les trois équations (1); qu'il en est de même des points c et c', etc.; enfin des points M et M'. En second lieu, il résultera de la formule (7) du n° **29**, que les longueurs $A_1 a_1$, $a_1 b_1$ etc., sont respectivement égales à $A'_1 a'_1$, $a'_1 b'_1$, etc.; et aussi de la formule (12) du n° **38**, que le rapport $\frac{\cos\theta}{\rho}$ pour les points A_1, a_1, b_1, etc., est respectivement égal au rapport $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ pour les points A'_1, a'_1, b'_1, etc.; d'où l'on conclura, deux de ces équations l'étant, que les trois équations (1) sont satisfaites pour les points A_1 et A'_1, a_1 et a'_1, b_1 et b'_1, etc. On verrait de même que les mêmes équations sont satisfaites pour les points A_2 et A'_2, a_2 et a'_2, b_2 et b'_2, etc., et ainsi de suite. La condition que nous avons exigée ci-dessus (n° **70**) pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre est donc satisfaite.

On remarquera aisément que la démonstration précédente ne suppose pas la relation (2) satisfaite pour tous les points conjugués des deux surfaces, mais seulement pour tous ceux de ces points qui sont situés sur deux lignes d'égale courbure correspondantes; d'où résulte que, dans bien des cas, elle sera inutile. En effet, il arrivera souvent que l'une des lignes d'égale courbure sur la première surface se réduira à un point; or, si alors la ligne d'égale courbure correspondante sur l'autre surface se réduit aussi à un point, la condition (2) sera satisfaite d'elle-même pour ces deux lignes d'égale courbure.

Enfin il est évident que l'égalité (2) peut être remplacée par plusieurs autres : ainsi, par exemple, on peut lui substituer celle qui exprime que l'accroissement de $\frac{\partial s}{\partial M}$, pour un déplacement infiniment petit effectué sur une courbe d'égale courbure de la première surface, dans le sens positif de cette courbe, est égal à l'accroissement de $\frac{\partial s'}{\partial M'}$ relatif à un déplacement égal effectué sur la courbe d'égale courbure correspondante de l'autre surface. De même on peut remplacer l'égalité (2) par celle qui exprime que les éléments de deux lignes d'égale courbure correspondantes et appartenant aux deux surfaces, terminés à des points dont les coordonnées représentent deux systèmes de valeurs de u, v, u', v' vérifiant les trois équations (1), sont égaux entre eux; cette dernière égalité est d'ailleurs, comme on le voit aisément,

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{A'^2C'^2 - B'^4}}{\sqrt{A^2C^2 - B^4}} = \pm \frac{\frac{d\chi}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{d\chi}{dv}\frac{dM}{du}}{\frac{dM'}{dv'}}, \quad \text{ou} \quad = \pm \frac{\frac{d\theta}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{d\theta}{dv}\frac{dM}{du}}{\frac{dM'}{du'}},$$

en appelant $\chi(u, v)$ et $\theta(u, v)$ les valeurs de u' et de v' en fonction de u et de v que l'on déduit des équations (1).

80. Il peut se faire que le système des équations (1) se réduise à la première, en d'autres termes, que la seconde et la troisième de ces équations rentrent dans la première: dans ce cas, on aura évidemment

$$\frac{\delta s}{\delta M} = \varphi(M), \qquad \frac{\delta s'}{\delta M'} = \varphi(M'),$$

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \varphi_1(M), \qquad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = \varphi_1(M);$$

et pour tous les points de AM (*fig.* 25), δs et $\frac{\cos\theta}{\rho}$ seront constants, ces quantités étant d'ailleurs toujours égales à $\delta s'$ et $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$. D'après cela, on voit que les surfaces seront alors développables l'une sur l'autre d'une infinité de manières: en effet, après avoir choisi le point A sur AM, on pourra prendre pour son conjugué A' tel point qu'on voudra de A'M'. Dans ce cas, si l'on veut obtenir un système de points conjugués, il faudra chercher les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure des deux surfaces, trajectoires qui sont ici évidemment des lignes géodésiques; on assujettira ensuite A et A', et, par suite, A_1 et A'_1, A_2 et A'_2, etc., à se trouver sur deux trajectoires orthogonales tout à fait quelconques d'ailleurs des lignes d'égale courbure de l'une et de l'autre surface; et puis a et a', a_1 et a'_1, a_2 et a'_2, etc., b et b', b_1 et b'_1, b_2 et b'_2, etc., à se trouver sur des trajectoires respectivement équidistantes des premières aux points situés sur les lignes AM et A'M'.

81. L'équation en u et v des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure est pour la première surface, comme on l'a vu plus haut,

$$\left(C^2\frac{dM}{du} - B^2\frac{dM}{dv}\right) - \left(A^2\frac{dM}{dv} - B^2\frac{dM}{du}\right)\frac{du}{dv} = 0;$$

comme aussi celle des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure de la seconde surface est

$$\left(C'^2 \frac{dM'}{du'} - B'^2 \frac{dM'}{dv'}\right) - \left(A'^2 \frac{dM'}{dv'} - B'^2 \frac{dM'}{du'}\right) \frac{du'}{dv'} = 0.$$

On intégrera donc ces deux équations, ce qui donnera

$$F(u, v) = c, \quad F'(u', v') = c;$$

puis on substituera aux constantes c et c' des fonctions $\psi(c)$ et $\psi'(c')$ de ces constantes, que l'on déterminera par la condition, que la série des courbes renfermées dans les équations précédentes et obtenues en faisant varier c et c' par degrés égaux, aient entre elles la même distance pour tous les points appartenant à une même ligne d'égale courbure quelconque; condition qu'il est évidemment possible de remplir d'après les hypothèses. Ainsi posant, par exemple,

$$F(u, v) = \psi(c),$$

on en déduira

$$\frac{dF}{du}\delta u + \frac{dF}{dv}\delta v = \frac{d\psi}{dc}\delta c,$$

δu et δv se rapportant à un déplacement normal à la trajectoire et étant, par conséquent, tels, que l'on ait

$$\frac{dM}{du}\delta u + \frac{dM}{dv}\delta v = 0.$$

De là on tire

$$\frac{\delta u}{\frac{dM}{dv}} = -\frac{\delta v}{\frac{dM}{du}} = \frac{\frac{d\psi}{dc}\delta c}{\frac{dF}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv}\frac{dM}{du}},$$

d'où

$$\delta u = \frac{\frac{dM}{dv}\frac{d\psi}{dc}\delta c}{\frac{dF}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv}\frac{dM}{du}},$$

$$\delta v = \frac{-\frac{dM}{du}\frac{d\psi}{dc}\delta c}{\frac{dF}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv}\frac{dM}{du}},$$

et, par conséquent, pour la distance des deux trajectoires orthogonales correspondantes aux valeurs c et $c + \delta c$ de la constante,

$$\delta s = \pm \frac{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{dv}\frac{dM}{du} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}{\frac{dF}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv}\frac{dM}{du}} \frac{d\psi}{dc} \delta c.$$

Cette expression peut être mise sous une autre forme. En appelant K le facteur qui a rendu intégrable le premier membre de l'équation des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure, on a

$$\frac{dF}{du} = K\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du}\right),$$

$$\frac{dF}{dv} = K\left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{dF}{du}\frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv}\frac{dM}{du} = K\left[A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2\right];$$

donc

$$\frac{\partial s}{\partial c} = \pm \frac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}.$$

Si l'on veut maintenant que $\frac{\partial s}{\partial c}$ soit constant pour tous les points d'une même ligne d'égale courbure, comme pour tous ces points le radical

$$\sqrt{\frac{A^2C^2 - B^4}{A\left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du}\frac{dM}{dv} + C^2\left(\frac{dM}{du}\right)^2}}$$

a déjà la même valeur, il faudra qu'il en soit de même de $\frac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2C^2 - B^4}}$; or $K\sqrt{A^2C^2 - B^4}$ contenant u et v peut être exprimé en fonction de M et de $\psi(c)$ au moyen des deux équations

$$M = M, \quad F(u, v) = \psi(c).$$

On voit même que le résultat devra être simplement fonction de ψ, et alors, posant l'équation

$$\frac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2C^2 - B^4}} = \text{const.},$$

on en déduira par une quadrature la valeur de $\psi(c)$.

On procédera de même pour avoir $\psi'(c')$, en ayant soin, bien entendu, de prendre $\dfrac{\frac{d\psi'}{dc'}}{K'\sqrt{A'^2C'^2 - B'^4}}$ égal à la même constante que $\dfrac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2C^2 - B^4}}$.

82. Une fois $\psi(c)$ et $\psi'(c')$ déterminés par les conditions précédentes, on obtiendra les points conjugués des deux surfaces, en tirant des deux équations

$$M = M',$$
$$F(u, v) = \psi(c), \quad F'(u', v') = \psi'(a + c),$$

les valeurs de u', v' et c en fonction de u et de v. Dans ces équations, a représente une constante quelconque.

83. Faisons une application des formules précédentes.

Considérons l'héliçoïde gauche dont les équations sont, comme l'on sait,

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = mu,$$

m étant une constante, et la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice, et dont les équations peuvent être considérées comme étant

$$x = v'\cos u', \quad y = v'\sin u', \quad z = n\sqrt{-1}\,\text{arc}\left(\cos = \frac{v'}{n}\right),$$

n étant une seconde constante. Nous aurons d'abord

$$A^2 = m^2 + v^2, \quad B^2 = 0, \quad C^2 = 1,$$
$$A'^2 = v'^2, \quad B'^2 = 0, \quad C'^2 = \frac{v'^2}{v'^2 - n^2}.$$

Calculons maintenant les carrés des courbures de ces deux surfaces; nous trouvons aisément, au moyen de la formule du n° **74**, pour la première surface,

$$-\frac{m^2}{(m^2 + v^2)^2},$$

et pour la seconde,

$$-\frac{n^2}{v'^4}.$$

Nous poserons donc

$$\frac{m}{m^2+v^2}=\frac{n}{v'^2},$$

ou bien

$$m+\frac{v^2}{m}=\frac{v'^2}{n},$$

et en même temps nous voyons que

$$\frac{dM}{du}=0,\quad \frac{dM}{dv}=\frac{4m^2v}{(m^2+v^2)^3},$$

$$\frac{dM'}{du'}=0,\quad \frac{dM'}{dv'}=\frac{4n^2}{v'^5};$$

d'où nous tirons

$$\frac{\partial s}{\partial M}=\frac{(m^2+v^2)^3}{4m^2v},\quad \frac{\partial s'}{\partial M'}=\frac{v'^6}{4n^2\sqrt{v'^2-n^2}},$$

ce qui donne pour seconde équation,

$$\frac{(m^2+v^2)^3}{m^2v}=\frac{v'^6}{n^2\sqrt{v'^2-n^2}}.$$

Enfin la troisième se calcule aussi sans difficulté, et donne

$$\frac{v}{m^2+v^2}=\frac{\sqrt{v'^2-n^2}}{v'^2};$$

u et u' manquant dans nos trois équations, il faut que nous puissions en tirer v' en fonction de v. Or la première et la dernière donnent les deux valeurs de v' suivantes:

$$v'^2=\frac{nv^2}{m}+mn,$$

$$v'^2=\frac{n^2v^2}{m^2}+n^2,$$

qui ne peuvent être compatibles entre elles qu'autant que $m=n$; alors on a

$$v'^2=v^2+m^2,$$

et il est facile de voir que cette valeur vérifie aussi la seconde équation.

Quant à la quatrième équation, qui exprime que la variation du rapport $\frac{\cos\theta}{\rho}$ relatif à une ligne d'égale courbure, pour un déplacement constant effectué sur cette ligne, a la même valeur quelle que soit la surface considérée, elle se réduit à une identité $0 = 0$. Les deux surfaces proposées sont donc développables l'une sur l'autre quand $m = n$. De plus, comme les trois équations qui, en général, servent à déterminer u' et v' en fonction de u et de v, se réduisent, dans le cas actuel, à une seule

$$v'^2 = v^2 + m^2,$$

nous voyons que cette superposition peut se faire d'une infinité de manières.

Si l'on veut connaître les coordonnées u' et v' du point conjugué de u, v, on y parviendra bien simplement dans le cas actuel. En effet, on voit facilement qu'ici les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure sont précisément les lignes coordonnées $u =$ const. pour la première surface et $u' =$ const. pour la seconde, et que, de plus, pour des accroissements égaux de u ou de u', on a des courbes sur la première surface ou sur la seconde, qui ont la même distance, aux points conjugués. D'après cela, les équations qui détermineront u' et v' en fonction de u et de v sont

$$u' = u + a, \quad v'^2 = v^2 + m^2,$$

a étant une constante tout à fait quelconque.

84. Il pourrait se faire que, pour tous les points de chacune des surfaces considérées, la courbure fût la même; alors il n'existerait plus de lignes d'égale courbure, et les considérations précédentes se trouveraient en défaut. Mais il est évident que si l'on a deux surfaces d'égale courbure et que la courbure pour les différents points de la première soit égale à la courbure pour les différents points de la seconde, ces deux surfaces seront toujours développables l'une sur l'autre, et même de façon qu'après avoir pris un point quelconque A sur la première surface, il sera possible de lui donner pour conjugué un point quelconque A′ de la seconde. Si, dans ce cas, on veut trouver un système de points conjugués, on cherchera pour la première surface les lignes minima issues du point A, et pour la seconde les lignes minima issues du point A′, et les points conjugués, en conservant les notations du n° 67, seront ceux pour lesquels on aura

$$r = r', \quad \omega = \omega'.$$

Il va sans dire que les lignes minima fixes, à partir desquelles on compte les angles ω et ω', sont supposées tout à fait quelconques l'une par rapport à l'autre.

85. La considération des surfaces d'égale courbure, qui jouissent, comme on le voit aisément, de la propriété de se développer sur des sphères, peut être utilement employée dans différentes circonstances. Ainsi, par exemple, étant donnée une surface quelconque, il est toujours possible de trouver une surface d'égale courbure, qui lui soit osculatrice en un point donné; par conséquent, on peut aussi faire jouer à ces surfaces d'égale courbure le même rôle qu'au cercle osculateur quand il s'agit des lignes: il est même facile de prévoir qu'à cause de la propriété qui lie les surfaces de courbure constante à la sphère, il sera permis, sous quelques rapports, d'en retirer les mêmes avantages que des cercles osculateurs. Pour le montrer par un exemple, je prendrai le beau théorème de Legendre sur les petits triangles sphériques, et d'après lequel ces triangles sont résolubles comme des triangles plans, pourvu qu'on diminue chaque angle du tiers de l'excès sphérique. Il est évident que ce théorème est vrai pour les surfaces à courbure constante, d'après la propriété fondamentale de ces surfaces; par suite, il est vrai pour une surface quelconque : on arrive ainsi très-simplement à un beau résultat que M. Gauss a déduit de calculs fort compliqués. A la vérité on ne voit pas encore avec quel degré d'approximation le théorème s'applique, mais cette seconde partie s'établit aisément, comme il suit: Considérons deux surfaces infiniment voisines S et S'; traçons sur la première un triangle ABC ou T dont les côtés soient des lignes géodésiques, et par les différents points des côtés de ce triangle menons des normales à la surface S que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre avec la surface S' : nous formerons ainsi sur la surface S' un second triangle que nous appellerons A'B'C' ou T'. Or il est évident d'abord que les côtés du triangle T' auront en tous leurs points leur courbure géodésique infiniment petite du même ordre que la distance des deux surfaces S et S', et que la différence des côtés du triangle T' et des côtés correspondants du triangle T, de même

que la différence des angles correspondants et des surfaces de ces deux triangles seront infiniment petites d'un ordre double de celui qui représente la distance des deux surfaces S et S'. En second lieu, si l'on compare la ligne géodésique tracée sur la surface S' et joignant les deux points A' et B' par exemple, au côté A'B' du triangle T', on verra aisément que la distance de ces courbes en leurs différents points, les angles qu'elles forment aux points A' et B' et la portion de la surface qu'elles comprennent, sont du même degré de grandeur que la courbure géodésique du côté A'B' du triangle T', et que la différence de leurs longueurs est du même degré de grandeur que le carré de cette courbure : il suffit de se rappeler la formule (12) établie au n° **38**, et la forme de la valeur qu'on en déduit pour $\delta\sigma$ par l'intégration. Tout ceci admis, il est facile de conclure que si le théorème de Legendre est vrai pour le triangle ABC, en négligeant les infiniment petits d'un ordre égal ou supérieur à celui de la distance des deux surfaces S et S', ce théorème sera aussi vrai pour le triangle T'' tracé sur la surface S' et formé en joignant deux à deux les points A', B', C' par des lignes géodésiques, en négligeant les infiniment petits de l'ordre de la distance des deux surfaces S et S'. Supposons maintenant que les deux surfaces S et S' soient osculatrices l'une de l'autre en un point O du triangle ABC et que l'une de ces surfaces, la surface S par exemple, soit une surface à courbure constante. Si nous supposons que les côtés du triangle T soient des infiniment petits que l'on considérera comme du premier ordre, le théorème de Legendre sera vrai pour le triangle T, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre; en même temps les normales à la surface S qui servent à déterminer le triangle T' seront infiniment petites du troisième ordre : donc le théorème de Legendre sera vrai pour le triangle T'', en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, ce qui est bien le degré d'approximation obtenu par M. Gauss. Le même raisonnement prouve que le théorème sera vrai aux infiniment petits près du quatrième ordre, quand on pourra trouver une surface à courbure constante ayant avec la surface proposée un contact du troisième ordre. Or c'est ce qui arrive dans certains cas ; car si l'on cherche, sous forme de série, la valeur de z qni vérifie l'équation des surfaces à courbure constante,

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm \frac{1}{a^2},$$

dans laquelle la constante a est tout à fait quelconque, on voit que l'on peut prendre arbitrairement pour un point de la surface, non-seulement p, q, r, s, t, mais encore deux des quatre dérivées du troisième ordre; de telle sorte que si, après les avoir prises égales à celles que l'on déduit de l'équation de la surface proposée, les deux autres dérivées du troisième ordre se trouvent aussi égales pour les deux surfaces, ces surfaces auront un contact du troisième ordre. Tout cela avait été remarqué par M. Gauss.

86. Je terminerai par quelques remarques relatives à ces surfaces d'égale courbure. Reprenons leur équation aux dérivées partielles, qui est

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm \frac{1}{a^2},$$

p, q, r, s, t conservant leur désignation habituelle.

L'intégration générale de cette équation paraît offrir de grandes difficultés. Mais si on se donne comme nouvelle condition que la surface soit de révolution, on l'effectue très-simplement; en effet, dans ce cas, on voit directement que l'équation se réduit à

$$\frac{(1 + p^2)^2 y}{q} = \pm a^2,$$

p, q et y se rapportant au méridien de la surface.

De là on tire

$$\frac{q}{(1 + p^2)^2} = \pm \frac{y}{a^2};$$

multipliant par $2dy$ et intégrant, il vient

$$\frac{1}{1 + p^2} = c \mp \frac{y^2}{a^2}.$$

Dans le cas où la surface ne doit présenter aucun point singulier, il faut que pour $y = 0$ on ait $p = \infty$; donc $c = 0$, et alors

$$\frac{1}{1 + p^2} = \mp \frac{y^2}{a^2},$$

ou simplement ici

$$\frac{1}{1 + p^2} = \frac{y^2}{a^2};$$

d'où l'on tire

$$y^2 + (x - b)^2 = a^2.$$

Ainsi la surface, dans ce cas, est nécessairement une sphère. Mais admettons que la méridienne fasse un angle quelconque α, avec l'axe de révolution : pour $y = 0$ on aura $p = \tang \alpha$; donc

$$c = \cos^2 \alpha,$$

et l'équation deviendra

$$1 + p^2 = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2};$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2)}{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2}},$$

d'où enfin

$$dx = \frac{dy \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2)(a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2)}}{a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2}.$$

L'intégration du second membre dépend des fonctions elliptiques, et, par conséquent, ne peut être faite sous forme finie; mais on obtient simplement, comme l'ont montré MM. Delaunay et Sturm pour quelques questions dépendant du calcul des variations (*voir* le Journal de M. Liouville, t. VI), l'équation de la courbe, qu'il faut faire rouler sur une ligne droite pour qu'un certain point appartenant à cette courbe décrive la méridienne cherchée. En effet, d'après les relations indiquées par M. Sturm, et que l'on retrouvera facilement, on doit avoir, entre les coordonnées polaires de la courbe cherchée et les coordonnées rectangles de la méridienne,

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \pm \frac{1}{r\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}},$$

et, par conséquent, dans le cas actuel où $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2}{a^2}$,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] \mp 1}{a^2},$$

ou

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \pm 1 = a^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \pm 1}} = \pm \frac{d\theta}{a \cos \alpha};$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{a \sin \alpha}{r} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} e^{\pm \operatorname{tang} \alpha . \theta} \mp \frac{1}{\mathrm{A}} e^{\mp \operatorname{tang} \alpha . \theta}\right).$$

Dans cette équation, le signe qui précède θ est indéterminé, mais celui qui est placé devant $\frac{1}{\mathrm{A}}$ dépend de celui de la courbure $\pm \frac{1}{a^2}$ de la surface.

§ VII. — *Recherche de toutes les surfaces gauches qui peuvent s'appliquer sur une surface gauche donnée.*

87. Dans ce qui précède, nous nous sommes bornés à indiquer le moyen de reconnaître si deux surfaces données par leurs équations étaient ou non développables l'une sur l'autre. On pourrait attaquer la question sous un autre point de vue, et se proposer de chercher toutes les surfaces qui sont développables sur une surface donnée; la question ainsi posée offre des difficultés plus sérieuses. Nous allons la traiter pour le cas des surfaces gauches, en nous aidant d'un travail qui a été publié sur ce sujet par M. Minding, dans le tome XVIII du Journal de M. Crelle, et en supposant, comme cet habile géomètre, que les génératrices rectilignes des deux surfaces soient des lignes conjuguées.

Supposons les surfaces déterminées de la même manière que dans le § IV. Ainsi, pour définir la première surface, donnons-nous une courbe directrice AmB, par trois équations de la forme

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u),$$

et les angles α, β, γ, en général fonction de u que les génératrices rectilignes forment avec les axes des coordonnées, de manière que les coordonnées d'un point quelconque de cette surface soient

$$X = x + n\cos\alpha,$$

$$Y = y + n\cos\beta,$$

$$Z = z + n\cos\gamma,$$

n étant la distance comptée sur la génératrice rectiligne de ce point à la directrice.

Soient ensuite, pour une seconde surface que nous voulons déterminer par la condition qu'elle puisse se développer sur la première,

$$x' = f'(u), \quad y' = \varphi'(u), \quad z' = \psi'(u)$$

les équations de la transformée de la directrice de la première surface, et α', β', γ' les angles que les génératrices rectilignes font avec les axes des coordonnées, de telle sorte que les coordonnées d'un point quelconque de cette seconde surface soient

$$X' = x' + n'\cos\alpha',$$

$$Y' = y' + n'\cos\beta',$$

$$Z' = z' + n'\cos\gamma'.$$

Commençons par calculer, pour chacune des deux surfaces, les fonctions que nous avons appelées U, U_1, U_2, U_3 dans le § IV, c'est-à-dire posons, pour la première surface,

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = U, \tag{1}$$

$$\cos\alpha\frac{dx}{du} + \cos\beta\frac{dy}{du} + \cos\gamma\left(\frac{dz}{du}\right) = U_1, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{du}\frac{d\cos\alpha}{du} + \frac{dy}{du}\frac{d\cos\beta}{du} + \frac{dz}{du}\frac{d\cos\gamma}{du} = U_2, \tag{3}$$

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{du}\right)^2 = U_3, \tag{4}$$

et pour la seconde,

$$(1') \qquad \left(\frac{dx'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du}\right)^2 = U',$$

$$(2') \qquad \cos\alpha'\frac{dx'}{du} + \cos\beta'\frac{dy'}{du} + \cos\gamma'\frac{dz'}{du} = U'_1,$$

$$(3') \qquad \frac{dx'}{du}\frac{d\cos\alpha'}{du} + \frac{dy'}{du}\frac{d\cos\beta'}{du} + \frac{dz'}{du}\frac{d\cos\gamma'}{du} = U'_2,$$

$$(4') \qquad \left(\frac{d\cos\alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma'}{du}\right)^2 = U'_3.$$

Il est clair que si l'on détermine x', y', z', α', β', γ' par la condition que

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{ll} U = U', & U_1 = U'_1, \\ U_2 = U'_2, & U_3 = U'_3, \end{array}\right.$$

les deux surfaces pourront se développer l'une sur l'autre, et, réciproquement, lorsque du moins on s'impose la condition que les génératrices rectilignes des deux surfaces soient des lignes conjuguées : il suffit, en effet, de se rappeler les formules du n° **54**. Joignant donc à ces quatre équations la suivante :

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

qui doit évidemment être satisfaite, on aura un système de cinq équations au moyen desquelles on pourra déterminer cinq des six inconnues x', y', z', $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ en fonction de la sixième, qui devra être considérée comme fonction complétement arbitraire de u.

88. Pour faire le calcul, remarquons d'abord, avec M. Minding, qu'on peut laisser de côté la dernière équation, en posant

$$\cos\alpha' = \cos\theta\cos\omega, \quad \cos\beta' = \cos\theta\sin\omega, \quad \cos\gamma' = \sin\theta,$$

et qu'alors l'équation

$$U'_3 = \left(\frac{d\cos\alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma'}{du}\right)^2 = U_3$$

devient

$$(5) \qquad d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\omega^2 = U_3\, du^2;$$

d'où l'on peut déduire, par une simple quadrature (θ étant l'inconnue que l'on considère comme fonction arbitraire de u), la valeur de l'inconnue auxiliaire ω. θ et ω étant ainsi connus, en fonction de u, on aura, par cela même, les valeurs des trois premières inconnues de la question $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, aussi en fonction de u.

89. Posons maintenant

$$\cos\beta' d\cos\gamma' - \cos\gamma' d\cos\beta' = \mathrm{A}du,$$
$$\cos\gamma' d\cos\alpha' - \cos\alpha' d\cos\gamma' = \mathrm{B}du,$$
$$\cos\alpha' d\cos\beta' - \cos\beta' d\cos\alpha' = \mathrm{C}du,$$

ce qui donne, en vertu des valeurs de $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$,

$$\mathrm{A} = \sin\omega\frac{d\theta}{du} - \sin\theta\cos\theta\cos\omega\frac{d\omega}{du},$$

$$\mathrm{B} = -\cos\omega\frac{d\theta}{du} - \sin\theta\cos\theta\sin\omega\frac{d\omega}{du},$$

$$\mathrm{C} = \cos^2\theta\frac{d\omega}{du};$$

il viendra, en éliminant successivement $\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$ des équations (2′) et (3′), dans lesquelles on aura remplacé préalablement U'_1 et U'_2 par leurs valeurs U_1 et U_2 déduites des équations (a),

$$\mathrm{B}\frac{dz'}{du} - \mathrm{C}\frac{dy'}{du} = \mathrm{U}_1\frac{d\cos\alpha'}{du} - \mathrm{U}_2\cos\alpha', \tag{6}$$

$$\mathrm{C}\frac{dx'}{du} - \mathrm{A}\frac{dz'}{du} = \mathrm{U}_1\frac{d\cos\beta'}{du} - \mathrm{U}_2\cos\beta', \tag{7}$$

$$\mathrm{A}\frac{dy'}{du} - \mathrm{B}\frac{dx'}{du} = \mathrm{U}_1\frac{d\cos\gamma'}{du} - \mathrm{U}_2\cos\gamma', \tag{8}$$

équations qui ne sont pas distinctes, et qui se réduisent seulement à deux, comme on le voit aisément en multipliant la première par A, la seconde par B, la troisième par C, et ajoutant. Faisant la somme membre à membre des carrés de ces équations, et remarquant que, d'après les équations (a),

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{U}_2,$$

$$\left(\frac{dx'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du}\right)^2 = \mathrm{U},$$

$$\left(\frac{d\cos\alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma'}{du}\right)^2 = \mathrm{U}_2,$$

il vient aisément

$$UU_3 - \left(A\frac{dx'}{du} + B\frac{dy'}{du} + C\frac{dz'}{du}\right)^2 = U_1^2 U_3 + U_2^2,$$

d'où

$$A\frac{dx'}{du} + B\frac{dy'}{du} + C\frac{dz'}{du} = \pm K, \tag{9}$$

en posant

$$U_3(U - U_1^2) - U_2^2 = K^2.$$

Des équations (6), (7), (8), (9), on tire maintenant

$$\frac{dx'}{du} = \frac{1}{U_3}\left(\pm AK + U_2\frac{d\cos\alpha'}{du} + U_1U_3\cos\alpha'\right),$$

$$\frac{dy'}{du} = \frac{1}{U_3}\left(\pm BK + U_2\frac{d\cos\beta'}{du} + U_1U_3\cos\beta'\right),$$

$$\frac{dz'}{du} = \frac{1}{U_3}\left(\pm CK + U_2\frac{d\cos\gamma'}{du} + U_1U_3\cos\gamma'\right);$$

d'où enfin

$$x' = \int\frac{du}{U_3}\left(\pm AK + U_2\frac{d\cos\alpha'}{du} + U_1U_3\cos\alpha'\right),$$

$$y' = \int\frac{du}{U_3}\left(\pm BK + U_2\frac{d\cos\beta'}{du} + U_1U_3\cos\beta'\right),$$

$$z' = \int\frac{du}{U_3}\left(\pm CK + U_2\frac{d\cos\gamma'}{du} + U_1U_3\cos\gamma'\right),$$

ce qui fait connaître les trois dernières inconnues x', y', z' en fonction de u. On connaît ainsi les six inconnues α', β', γ', x', y', z' en fonction de u, et la question est résolue.

90. On aurait pu arriver directement aux équations (6), (7), (8), (9) au moyen desquelles on détermine $\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$, par une méthode géométrique qui a l'avantage de donner l'interprétation de ces équations.

Appelons λ, μ, ν les angles que forme avec les parties positives des axes des coordonnées la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines de la seconde surface gauche, prolongée de celle qui fait les angles α', β', γ' avec les axes, et que nous supposons se rapporter au point m de la directrice (*fig.* 27), à celle qui fait les angles $\alpha' + \frac{d\alpha'}{du}du$, $\beta' + \frac{d\beta'}{du}du$, $\gamma' + \frac{d\gamma'}{du}du$, où du est positif, et qui se rapporte au point infiniment voisin m'; nous aurons

$$\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu = 0,$$

$$\frac{d\cos\alpha'}{du}\cos\lambda + \frac{d\cos\beta'}{du}\cos\mu + \frac{d\cos\gamma'}{du}\cos\nu = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\beta'\dfrac{d\cos\gamma'}{du} - \cos\gamma'\dfrac{d\cos\beta'}{du}} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma'\dfrac{d\cos\alpha'}{du} - \cos\alpha'\dfrac{d\cos\gamma'}{du}}$$

$$= \frac{\cos\nu}{\cos\alpha'\dfrac{d\cos\beta'}{du} - \cos\beta'\dfrac{d\cos\alpha'}{du}} = \frac{1}{\pm\sqrt{U_3}},$$

en se rappelant les formules du n° **87**, et le radical étant pris positivement ou négativement, selon que la génératrice en m' est ou non du côté du plan de mm' et de la génératrice en m, où se trouve la normale extérieure à la surface (*) ; d'où l'on tire, en raison des mêmes formules,

$$A = \pm\sqrt{U_3}\cos\lambda, \quad B = \pm\sqrt{U_3}\cos\mu, \quad C = \pm\sqrt{U_3}\cos\nu.$$

Soient maintenant (*fig.* 27) mG et m'G' les génératrices correspondantes aux deux points m et m', mn une parallèle à la plus courte distance de ces deux génératrices, menée par le point m; mp une perpendiculaire à mG, rencontrant m'G' en p : le trièdre formé par mm', mn et mp donnera

$$\cos m'mn = \cos nmp \cos m'mp.$$

Or on a

$$\cos m'mn = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{U}}\frac{dx'}{du} + \frac{\cos\mu}{\sqrt{U}}\frac{dy'}{du} + \frac{\cos\nu}{\sqrt{U}}\frac{dz'}{du} = \pm\frac{A\dfrac{dx'}{du} + B\dfrac{dy'}{du} + C\dfrac{dz'}{du}}{\sqrt{U_3 U}},$$

puis

$$\cos m'mp = \sin \widehat{mm', mG} = \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U}} = \frac{\sqrt{U - U_1^2}}{\sqrt{U}};$$

(*) Ceci n'est vrai que parce que nous supposons, pour simplifier, que la perpendiculaire commune aux deux génératrices rectilignes les rencontre sur leur partie positive, et que nous faisons les mêmes hypothèses sur le sens positif de la directrice, des génératrices rectilignes, des trajectoires orthogonales de ces génératrices, et de la normale extérieure à la surface, qu'au n° **84**.

et enfin l'angle *nmp*, qui est égal à celui que fait le plan tangent de la surface gauche au point m avec le plan tangent au point où la ligne de striction rencontre mG, peut être facilement calculé. En effet, conservant les notations du § IV, on a, sans tenir compte des signes,

$$\tang \varphi = \frac{n}{r'_0}, \quad \text{d'où} \quad \cos \varphi = \frac{r'_0}{\sqrt{n^2 + (r'_0)^2}};$$

puis

$$\frac{1}{r_1} = \frac{U_2}{U - U_1^2}, \quad n = \frac{U_2}{U_3}, \quad r_1 = \frac{n^2 + (r'_0)^2}{n}.$$

Or les trois dernières relations donnent aisément

$$n^2 + (r'_0)^2 = \frac{U - U_1^2}{U_3} \quad \text{et} \quad (r'_0)^2 = \frac{U_3(U - U_1^2) - U_2^2}{U_3^2};$$

donc

$$\cos \varphi = \cos nmp = \frac{\sqrt{U_3(U - U_1^2) - U_2^2}}{\sqrt{U - U_1^2}}.$$

Substituant maintenant à $\cos m'mn$, $\cos nmp$, $\cos m'mp$ leurs valeurs dans la relation

$$\cos m'mn = \cos nmp \cos m'mp,$$

il vient

$$A\frac{dx'}{du} + B\frac{dy'}{du} + C\frac{dz'}{du} = \pm\sqrt{U_3(U - U_1^2) - U_2^2};$$

ce qui est la relation (9).

91. Pour obtenir les formules (6), (7) et (8) par le point m, menons une parallèle mG$'_1$ à la génératrice rectiligne m'G$'$ (*fig.* 27), et soit mX l'intersection des deux plans GmG$'_1$ et pmm' qui sont évidemment perpendiculaires l'un à l'autre, menée du côté de mG où se trouve mG$'_1$. Les trièdres formés, d'une part, par mm', mX et mG, et, d'une autre, par mm', mX et mG$'_1$, donnent successivement

$$\cos m'm\mathrm{G} = \cos m'm\mathrm{X} \cos \mathrm{G}m\mathrm{X},$$

$$\cos m'm\mathrm{G}'_1 = \cos m'm\mathrm{X} \cos \mathrm{G}'_1 m\mathrm{X},$$

d'où

$$\frac{\cos m'm\mathrm{G}}{\cos m'm\mathrm{G}'_1} = \frac{\cos \mathrm{G}m\mathrm{X}}{\cos \mathrm{G}'_1 m\mathrm{X}};$$

de là on peut facilement conclure la valeur de $\cos \mathrm{G}m\mathrm{X}$ et celle de

$\cos G'_1 mX$: en effet, $\cos m'mG$ et $\cos m'mG'_1$ sont connus, et l'on a

$$\cos m'mG = \cos\alpha' \frac{dx'}{ds'} + \cos\beta' \frac{dy'}{ds'} + \cos\gamma' \frac{dz'}{ds'} = \frac{U_1}{\sqrt{U}},$$

$$\cos m'mG'_1 = (\cos\alpha' + d\cos\alpha') \frac{dx'}{ds'} + (\cos\beta' + d\cos\beta') \frac{dy'}{ds'}$$
$$+ (\cos\gamma' + d\cos\gamma') \frac{dz'}{ds'} = \frac{U_1 + U_2 du}{\sqrt{U}},$$

puis

$$G'_1 mX - GmX = -d\theta = -du\sqrt{U_3};$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos G'_1 mX = \cos GmX + \sin GmX \,.\, \sqrt{U_3}\, du.$$

Substituant, on tire

$$\sqrt{U_3} \operatorname{tang} GmX = \frac{U_2}{U_1},$$

d'où

$$\sin GmX = \frac{U_2}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_3}},$$

$$\cos GmX = \frac{U_1\sqrt{U_3}}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_3}},$$

et

$$\cos G'_1 mX = \frac{\sqrt{U_3}\,(U_1 + U_2 du)}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_3}}.$$

D'un autre côté, on voit que si on élève par le point m, dans le plan GmG'_1, une perpendiculaire mY à mX du côté où se trouvent mG et mG'_1, les angles YmG et YmG'_1 auront respectivement pour sinus, $\cos GmX$ et $\cos G'_1 mX$; ainsi

$$\sin YmG = \frac{U_1\sqrt{U_3}}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_3}},$$

$$\sin YmG'_1 = \frac{\sqrt{U_3}\,(U_1 + U_2 du)}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_3}}.$$

D'ailleurs il est facile de déterminer les angles que cette ligne mY, qui est évidemment perpendiculaire au plan $m'mn$, fait avec les axes; car, en les appelant ϖ, ρ, σ, on a

$$\cos\varpi \,.\, \frac{dx'}{du} + \cos\rho \,.\, \frac{dy'}{du} + \cos\sigma \,.\, \frac{dz'}{du} = 0,$$

$$\cos\rho \,.\, A + \cos\varpi \,.\, B + \cos\sigma \,.\, C = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos\varpi}{C\frac{dy'}{du}-B\frac{dz'}{du}}=\frac{\cos\rho}{A\frac{dz'}{du}-C\frac{dx'}{du}}=\frac{\cos\sigma}{B\frac{dx'}{du}-A\frac{dy'}{du}}=\frac{1}{\sqrt{U_3 U-K^2}}=\frac{1}{\sqrt{U_1^2 U_3+U_2^2}}.$$

Or on sait que lorsqu'on conduit dans un même plan trois droites issues d'un même point, om, om', om'', et un axe quelconque oX (*fig.* 28), l'on a

$$\sin mom''\cos m'o\mathrm{X}=\sin m'om''\cos mo\mathrm{X}+\sin mom'\cos m''o\mathrm{X};$$

appliquant cette propriété aux systèmes des trois droites $m\mathrm{G}'_1$, mG, mY, en prenant successivement pour axe oX, les trois axes des coordonnées, il vient, en remarquant que $\sin \mathrm{G}m\mathrm{G}'_1=d\theta=du\sqrt{\mathrm{U}_3}$,

$$\begin{aligned}
du\sqrt{\mathrm{U}_3}\cos\varpi &=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_1+\mathrm{U}_2\,du)\cos\alpha'-\sqrt{\mathrm{U}_3}\,\mathrm{U}_1(\cos\alpha'+d\cos\alpha')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_1^2\mathrm{U}_3}}\\
&=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_2\cos\alpha'\,du-\mathrm{U}_1\,d\cos\alpha')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_1^2\mathrm{U}_3}},\\
du\sqrt{\mathrm{U}_3}\cos\rho &=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_1+\mathrm{U}_2\,du)\cos\beta'-\sqrt{\mathrm{U}_3}\,\mathrm{U}_1(\cos\beta'+d\cos\beta')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_4^2\mathrm{U}_3}}\\
&=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_2\cos\beta'\,du-\mathrm{U}_1\,d\cos\beta')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_1^2\mathrm{U}_3}},\\
du\sqrt{\mathrm{U}_3}\cos\sigma &=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_1+\mathrm{U}_2\,du)\cos\gamma'-\sqrt{\mathrm{U}_3}\,\mathrm{U}_1(\cos\gamma'+d\cos\gamma')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_1^2\mathrm{U}_3}}\\
&=\frac{\sqrt{\mathrm{U}_3}\,(\mathrm{U}_2\cos\gamma'\,du-\mathrm{U}_1\,d\cos\gamma')}{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{U}_1^2\mathrm{P}_3}};
\end{aligned}$$

ou bien, en substituant à $\cos\varpi$, $\cos\rho$, $\cos\sigma$, leurs valeurs

$$\begin{aligned}
C\frac{dy'}{du}-B\frac{dz'}{du}&=\mathrm{U}_2\cos\alpha'-\mathrm{U}_1\frac{d\cos\alpha'}{du},\\
A\frac{dz'}{du}-C\frac{dx'}{du}&=\mathrm{U}_2\cos\beta'-\mathrm{U}_1\frac{d\cos\beta'}{du},\\
B\frac{dx'}{du}-A\frac{dy'}{du}&=\mathrm{U}_2\cos\gamma'-\mathrm{U}_1\frac{d\cos\gamma'}{du}.
\end{aligned}$$

Ce sont les formules (6), (7), (8).

92. Dans le cas où l'on connaîtra la ligne de striction de la surface gauche proposée, il conviendra de prendre cette ligne pour directrice de la surface; car alors U_2 sera nul et les formules précédentes se simplifieront.

93. Si l'on veut assujettir la surface cherchée à avoir un plan directeur, il conviendra de prendre ce plan pour plan des xy, et l'on aura $\cos\gamma' = 0$, par conséquent $\theta = 0$; d'où

$$\cos\alpha' = \cos\omega,\quad \cos\beta' = \sin\omega,$$

et

$$d\omega = \sqrt{U_3}\, du;$$

d'où

$$\omega = \int \sqrt{U_3}\, du.$$

Puis

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = \sqrt{U_3},$$

donc

$$dx' = \left(U_1 \cos\omega + \frac{U_2}{U_3}\frac{d\cos\omega}{du}\right) du = \left(U_1 \cos\omega - \frac{U_2}{\sqrt{U_3}}\sin\omega\right) du,$$

$$dy' = \left(U_1 \sin\omega + \frac{U_2}{U_3}\frac{d\sin\omega}{du}\right) du = \left(U_1 \sin\omega + \frac{U_2}{\sqrt{U_3}}\cos\omega\right) du,$$

$$dz' = \frac{K}{\sqrt{U_3}}\, du;$$

d'où enfin, pour les équations de la surface,

$$X' = n' \cos\omega + \int \left(U_1 \cos\omega - \frac{U_2}{\sqrt{U_3}}\sin\omega\right) du,$$

$$Y' = n' \sin\omega + \int \left(U_1 \sin\omega + \frac{U_2}{\sqrt{U_3}}\cos\omega\right) du,$$

$$Z' = \int \frac{K}{\sqrt{U_3}}\, du.$$

94. Faisons quelques applications des formules précédentes.

Cherchons en premier lieu la surface gauche à plan directeur qui peut être développée sur la surface gauche de révolution.

Les équations de l'hyperboloïde gauche de révolution, en prenant le cercle de gorge pour directrice, sont

$$X = r\cos u + n\sin\alpha\sin u,$$
$$Y = r\sin u - n\sin\alpha\cos u,$$
$$Z = n\cos\alpha,$$

où r représente le rayon du cercle de gorge situé dans le plan des xy, et α l'angle constant que font avec l'axe de la surface pris pour axe des z, les génératrices rectilignes.

De ces équations nous tirerons, sans difficulté,

$$U = r^2,\quad U_1 = -r\sin\alpha,$$
$$U_2 = 0,\quad U_3 = \sin^2\alpha,$$

ou

$$K = r\sin\alpha\cos\alpha;$$

par conséquent, en employant la formule du numéro précédent, on aura

$$X' = n'\cos.u\sin\alpha - \int r\sin\alpha\cos.u\sin\alpha\,du = n'\cos.u\sin\alpha - r\sin.u\sin\alpha,$$
$$Y' = n'\sin.u\sin\alpha - \int r\sin\alpha\sin.u\sin\alpha\,du = n'\sin.u\sin\alpha + r\cos.u\sin\alpha,$$
$$Z' = r\cos\alpha u,$$

pour les équations de la surface cherchée.

On reconnaît sans peine que cette surface est engendrée par une droite constamment parallèle au plan des xy qui se meut en restant tangente au cylindre dont le rayon est r, et en s'appuyant sur une hélice tracée sur ce cylindre, ayant pour pas $2\pi r\cot\alpha$ et pour origine le point de la base du cylindre qui correspond à $u = \frac{\pi}{2}$.

95. Cherchons en second lieu toutes les surfaces gauches qui peuvent se développer sur l'héliçoïde gauche à plan directeur. Les équations de l'héliçoïde sont, comme l'on sait,

$$X = n\cos u,\quad Y = n\sin u,\quad Z = au,$$

a étant une constante; de là on tire aisément

$$U = a^2,\quad U_1 = 0,\quad U_2 = 0,\quad U_3 = 1,$$

et

$$K = a,$$

d'où

$$x' = a\int A\,du,$$

$$y' = a\int B\,du,$$

$$z' = a\int C\,du,$$

et, par conséquent,

$$X' = a\int A\,du + n'\cos\theta\cos\omega,$$

$$Y' = a\int B\,du + n'\cos\theta\sin\omega,$$

$$Z' = a\int C\,du + n'\sin\theta,$$

pour les équations de la surface.

Il ne faut pas perdre de vue que θ doit être considérée comme une fonction arbitraire de u, et que ω, A, B, C sont déterminés par les formules

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\theta^2 + \cos^2\theta\,d\omega^2 = du^2,\\ &A = \sin\omega\frac{d\theta}{du} - \sin\theta\cos\theta\cos\omega\frac{d\omega}{du},\\ &B = -\cos\omega\frac{d\theta}{du} - \sin\theta\cos\theta\sin\omega\frac{d\omega}{du},\\ &C = \cos^2\theta\frac{d\omega}{du}.\end{aligned}\right.$$

96. On reconnaît aisément, au moyen des formules que nous venons d'obtenir, que les surfaces gauches qui peuvent se développer sur l'héliçoïde gauche à plan directeur sont engendrées par des droites qui, se mouvant sur des courbes dont la seconde courbure est constante et égale précisément à la courbure de l'héliçoïde, restent d'ailleurs constamment perpendiculaires au plan osculateur de ces courbes. Ce résultat s'explique aussi en remarquant que, lorsque deux surfaces gauches sont développables l'une sur l'autre, leurs lignes de striction doivent être des lignes conjuguées. Or la ligne de striction de l'héliçoïde gauche est la directrice rectiligne qui est perpendiculaire aux génératrices : donc déjà, dans les surfaces gauches développables sur l'héliçoïde, les lignes de striction doivent être perpendiculaires aux génératrices rectilignes, et par conséquent doivent avoir leurs plans osculateurs perpendiculaires à ces génératrices; de plus, dans le cas où les génératrices rectilignes d'une surface gauche sont perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe de striction, l'angle de deux génératrices infiniment voisines, qui est la mesure de la seconde courbure de la ligne de striction, mesure aussi la courbure de la surface, d'après, par exemple, ce qui a été dit n° **47**; on voit donc que cet angle doit être constant quand on considère des surfaces pouvant s'appliquer sur l'héliçoïde.

97. Il résulte de la remarque précédente que les courbes qui ont leur seconde courbure constante et égale à a sont déterminées par les équations

$$x = a\int A\,du,$$
$$y = a\int B\,du,$$
$$z = a\int C\,du,$$

A, B, C étant des fonctions de u que l'on déduira des équations (b), après avoir donné à θ une valeur arbitraire fonction de u.

Si l'on suppose θ constant, on doit trouver une hélice; en effet, on a alors

$$d\theta = 0, \quad d\omega = \frac{du}{\cos\theta}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{u}{\cos\theta},$$
$$A = -\sin\theta\cos\frac{u}{\cos\theta},$$
$$B = -\cos\theta\sin\frac{u}{\cos\theta},$$
$$C = \cos\theta;$$

d'où

$$x = -a\sin\theta\int\cos\frac{u}{\cos\theta}\,du = -a\sin\theta\cos\theta\sin\frac{u}{\cos\theta},$$
$$y = -a\sin\theta\int\sin\frac{u}{\cos\theta}\,du = a\sin\theta\cos\theta\cos\frac{u}{\cos\theta},$$
$$z = a\cos\theta\,.\,u,$$

ce qui représente bien une hélice tracée sur le cylindre de rayon $a\sin\theta\cos\theta$ et ayant pour pas $2\pi a\cos^2\theta$.

On aurait encore trouvé une hélice en assujettissant la courbe à avoir sa première courbure constante, ce qui eût été facile à exprimer; car, x, y, z étant connus en fonction de u, on peut calculer dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, et puis égaler à une constante l'expression

$$\frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2}{ds^6}$$

du carré de la courbure, d'où l'on déduit θ.

On pourrait enfin, pour déterminer θ, assujettir la courbe à des conditions d'un autre genre; ainsi on pourrait exiger que la courbe fût située sur une sphère: dans ce cas, en se rappelant le rayon de la sphère osculatrice d'une courbe, il faudrait exprimer que, ρ et r étant les rayons de première et seconde courbure de la courbe, on a

$$\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2} = a^2, \quad \text{ou} \quad \rho = a\sin\frac{s}{r},$$

a^2 étant une constante. Portant, dans cette équation, la valeur de ρ en fonction de u, il sera possible de déterminer θ.

§ VIII. — *Propriétés des valeurs sphériques des lignes et des surfaces quelconques.*

98. Considérons sur une surface une ligne quelconque, et imaginons que par les différents points de cette ligne, on mène des normales à la surface dans la région de l'espace que l'on considère comme extérieure à cette surface. Prenons ensuite une sphère de rayon égal à 1, et par son centre tirons des parallèles aux normales à la surface, dans le même sens que ces normales. Nous déterminerons ainsi sur la sphère une courbe qui sera en quelque sorte une perspective de la courbe tracée sur la surface; l'aire comprise de cette courbe, si elle est formée, sera aussi une représentation de l'aire comprise dans la courbe tracée sur la surface. M. Gauss a eu le premier l'idée de cette reproduction des lignes et des surfaces quelconques sur une sphère, et on lui doit plusieurs résultats assez curieux sur cette matière. Nous allons nous proposer d'établir ces résultats, ainsi que quelques autres plus généraux, par des considérations analogues à celles qui ont été employées dans tout ce qui précède et qui sont beaucoup plus simples que celles dont a fait usage l'illustre géomètre.

99. Soit AmB une courbe quelconque tracée sur une surface (*fig.* 29).

Considérons deux points infiniment voisins m et m' de cette ligne, et en ces points menons des normales $m\mathrm{N}$, $m'\mathrm{N}'$ extérieures à la surface. Par un point quelconque O, tirons des parallèles $\mathrm{O}m_1$, $\mathrm{O}m'_1$ aux lignes $m\mathrm{N}$, $m'\mathrm{N}'$, et sur chacune d'elles prenons des longueurs $\mathrm{O}m_1$, $\mathrm{O}m'_1$ égales à 1 : la droite $m_1 m'_1$ sera la valeur de mm' rapportée sur la sphère de rayon 1, ou ce que j'appellerai la valeur sphérique de mm'. Il est clair maintenant que l'angle $m_1\mathrm{O}m'_1$ est égal à $m_1 m'_1$; d'ailleurs, en appelant α l'angle que l'élément mm' fait avec une des lignes de courbure de la surface considérée au point m, R le rayon de courbure de la surface principale tangente à cette ligne de courbure, et R′ le rayon de courbure de la seconde section principale relative au point m, nous avons, d'après la formule du n° **11**,

$$\left(\frac{m_1\mathrm{O}m'_1}{mm'}\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{R}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}'}\right)^2;$$

donc on a aussi

$$\left(\frac{m_1 m'_1}{mm'}\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{R}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}'}\right)^2,$$

ce qui fait connaître le rapport de l'élément mm' à sa valeur sphérique $m'_1 m'_1$. Si la direction de mm' est celle d'une ligne de courbure, $\alpha = 0$, et on a

$$\frac{m_1 m'_1}{mm'} = \pm\frac{1}{\mathrm{R}},$$

R étant le rayon de courbure de la section principale tangente à mm', et le signe étant celui de R, c'est-à-dire le signe + quand les deux normales en m et m' se rencontrent dans l'intérieur de la surface, et — quand cette rencontre a lieu à l'extérieur. Du reste, on peut aussi remarquer que le signe répond à une différence de position de l'élément $m_1 m'_1$; en effet, on reconnaît aisément qu'il faut prendre le signe + ou le signe —, selon que $m_1 m'_1$ a une direction identique ou contraire à celle mm'.

100. Supposons que la ligne AmB soit une ligne de courbure de la surface proposée, et considérons, en même temps que l'élément mm', l'élément suivant $m'm''$ (*fig.* 30) ; soient $m\mathrm{N}$ la normale extérieure à la surface au point m et $m'\mathrm{N}'$ la normale extérieure au point m', de telle sorte que $m\mathrm{N}$ soit perpendiculaire à mm' et $m'\mathrm{N}'$ à $m'm''$; prolongeons mm' suivant $m'g$, et menons $m'h$ perpendiculaire à $m'\mathrm{N}'$ dans le plan $m'm\mathrm{N}$: les trois droites

$m'g$, $m'h$, $m'm''$ formeront un trièdre évidemment rectangle suivant $m'g$, et qui nous donnera

$$hm'm'' = gm'm'' \cos\alpha.$$

Nous appelons α l'angle que le plan de $gm'm''$, ou le plan osculateur de la ligne de courbure au point m', fait avec le plan de $m''m'h$ ou le plan tangent à la surface au même point ; ou mieux, pour éviter toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la ligne de courbure, dirigée de cette courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale à la ligne de courbure, tracée sur la surface et du côté de la courbe, opposé à celui où se trouve $m'h$. Mais $\widehat{gm'm''}$ est l'angle de contingence de la ligne AmB en m ; $\widehat{gm'm''}\cos\alpha$ est donc, abstraction faite du signe, le produit par mm' de la première courbure géodésique de cette courbe au point m. Appelant donc $\frac{\cos\theta}{\rho}$ cette courbure géodésique, et posant $mm' = dx$, on a

$$hm'm'' = \pm\, dx\,\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Quant au signe à prendre, on reconnaît aisément que c'est le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que $m'h$ n'est pas ou est du côté de $m'm''$ où se trouve la normale à cet élément, qui a servi à déterminer la courbure géodésique, et qui occupe, par rapport à cet élément et à la normale extérieure à la surface, la position ordinaire de la partie positive de l'axe des y, par rapport aux parties positives des axes des x et des z.

On peut se débarrasser du signe qui se trouve dans le second membre de l'égalité précédente, en en donnant un à $hm'm''$, et c'est ce qu'il convient de faire. Appelant donc $d\gamma$ l'angle infiniment petit que forment les deux plans Nmm' et Nmm'', cet angle étant précédé du signe $+$ quand $m'm''$ est du côté du plan Nmm' où se trouve la perpendiculaire à ce plan, qui occupe par rapport à mm' et mN la position ordinaire de la partie positive de l'axe des y, par rapport aux parties positives des axes des x et des z, et du signe — dans le cas contraire ; il est clair que l'on aura

$$d\gamma = -\,dx\,\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

101. Rapportons maintenant la ligne AmB sur la sphère de rayon 1, et soient $A_1 m_1 B_1$ la représentation de AmB, et $m_1 m'_1$, $m'_1 m'_2$ la représentation des deux éléments mm', $m'm''$; nous trouverons de même, en appelant $d\gamma_1$, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_1$, dx_1, les valeurs que prennent respectivement $d\gamma$, $\frac{\cos\theta}{\rho}$, dx, quand on passe de AmB à $A_1 m_1 B_1$, les deux premiers de ces éléments ayant un signe déterminé d'ailleurs comme il a été dit,

$$d\gamma_1 = -\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_1 dx_1\,;$$

rapprochant cette formule de la précédente, et observant que, dans tous les cas, $d\gamma = d\gamma_1$, il viendra

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right) dx = \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_1 dx_1.$$

De ce premier résultat, assez remarquable, et qui est susceptible d'un énoncé fort simple, on peut déduire un grand nombre de conséquences.

102. Concevons que l'on ait tracé sur la surface proposée toutes les lignes de courbure, qui, comme l'on sait, forment deux systèmes de lignes orthogonales conjuguées; rapportons ces lignes sur la sphère de rayon 1 : nous obtiendrons, il est facile de le voir, deux nouveaux systèmes de lignes orthogonales conjuguées; faisons passer une ligne par les sommets d'une série de rectangles déterminés par les lignes de courbure de la surface : cette ligne pourra être considérée comme tout à fait quelconque, puisque la loi d'espacement des lignes de courbure peut être prise arbitrairement. Considérons en même temps la ligne qui passe par les sommets des rectangles correspondants sur la sphère, et qui est évidemment la première courbe rapportée sur la sphère. Si nous regardons les lignes de courbure de la surface comme des lignes coordonnées, et que nous appliquions à la courbe quelconque tracée sur la surface la formule (9) du n° **33**, il viendra

$$di - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds = -\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_x dx - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_y dy\,,$$

en gardant les notations du numéro cité, et faisant les mêmes hypothèses sur le sens suivant lequel on compte les arcs positifs des lignes coordonnées dont les arcs sont représentés par x, et sur celles dont les arcs sont représentés par y. Mais nous avons aussi, pour les lignes rapportées sur la sphère de rayon 1,

$$di_1 - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1 = -\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{x_1} dx_1 - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{y_1} dy_1,$$

i_1, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1}$, ds_1 étant les éléments qui remplacent respectivement les éléments i, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$, ds relatifs à la ligne considérée quand on passe de cette ligne à celle qui lui correspond sur la sphère, et supposant, hypothèse que du reste nous maintiendrons dans tout ce qui va suivre pour éviter toute espèce de difficulté, que la surface donnée soit convexe tout le long de la ligne considérée, c'est-à-dire qu'elle ait ses rayons de courbure principaux tous les deux positifs.

Les seconds membres de ces deux égalités sont les mêmes, d'après ce que l'on a vu plus haut; nous en conclurons donc que

$$di - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds = di_1 - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1,$$

d'où en intégrant pour une portion quelconque de la ligne considérée et de la transformée sur la sphère de rayon 1,

$$(1) \qquad i'' - i' - \int_{s'}^{s''} \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds = i''_1 - i'_1 - \int_{s'_1}^{s''_1} \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1,$$

et i'', s'', i''_1, s''_1, i', s', i'_1, s'_1 étant les valeurs de i, s, i_1 et s_1 aux extrémités de la ligne considérée et de sa transformée.

103. Si l'on considère une ligne fermée, et que l'on suppose les intégrales étendues à tout le contour, on aura

$$i'' = i', \quad i''_1 = i'_1,$$

et, par conséquent,

$$\int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds = \int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1;$$

ce qui montre que si sur une surface convexe on considère un contour fermé quelconque, puis que l'on prenne le contour sphérique correspondant, la somme des produits de la courbure géodésique par l'élément de l'arc aura la même valeur pour les deux contours.

Nous pouvons arriver à un résultat plus général. Considérons sur la surface proposée un polygone formé par des lignes tout à fait quelconques et dont nous représenterons les angles par A, B, C, etc.; rapportons ce polygone sur la sphère de rayon 1, et soient A_1, B_1, C_1 les angles du polygone ainsi obtenu: pour chacun des côtés du polygone nous aurons la relation (1); écrivant toutes ces relations, faisant la somme, il viendra aisément

$$A + B + C + \ldots - \int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds = A_1 + B_1 + C_1 + \ldots - \int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1,$$

les intégrales étant étendues à tout le contour des polygones.

104. Passons à la considération des valeurs sphériques des aires déterminées d'une manière quelconque sur une surface.

Prenons d'abord, sur cette surface, un rectangle infiniment petit, déterminé par quatre éléments de lignes de courbure; rapportons-le sur la sphère de rayon 1 : nous aurons un second rectangle infinitésimal, dont les côtés seront ceux du premier rapportés sur la sphère; or les surfaces de ces deux rectangles sont chacune représentées par les produits de deux de leurs côtés adjacents, nous pouvons conclure de là, et de ce que nous avons établi plus haut sur le rapport d'un élément de ligne de courbure à la valeur sphérique de cet élément, que le rapport des deux rectangles sera exprimé par le produit des rayons de courbure principaux de la surface en un des points du rectangle considéré sur cette surface. Plus généralement, nous pouvons dire encore que le rapport d'une portion infiniment petite de forme quelconque d'une surface, à la valeur sphérique de cette portion de surface, est le produit des rayons de courbure principaux de la surface en un point de l'élément considéré; car, quelque petit que soit cet élément, on peut toujours le concevoir décomposé en éléments infiniment petits par rapport à lui, et formés par des éléments de ligne de courbure. M. Gauss avait établi ce résultat par le calcul, mais d'une manière assez compliquée. On voit que les considérations géométriques mènent très-rapidement au but (*).

(*) Depuis que ce Mémoire est composé, j'ai vu dans le tome III de la *Correspondance de l'École Polytechnique*, que M. Binet, dans une Note annexée à un Mémoire de M. Olinde Rodrigues, démontrait de la même manière que moi le théorème de M. Gauss. Dans le même endroit, M. Olinde Rodrigues, qui ne connaissait pas ce théorème, y parvient par une méthode analytique fort ingé-

Considérons maintenant une portion finie de surface terminée à une ligne quelconque BC et à deux lignes géodésiques issues du point A (*fig.* 31). Décomposons la surface ABC en éléments, en menant par le point A une suite de lignes géodésiques, et considérons l'élément Amn déterminé par deux lignes géodésiques infiniment voisines quelconques Am et An. La valeur sphérique de ces éléments sera

$$\sigma = \int_0^r \frac{\partial x\, dr}{\mathrm{RR}'},$$

en conservant les notations du n° 59. Mais, ainsi qu'on l'a vu dans le même paragraphe,

$$\frac{\partial x}{\mathrm{RR}'} = -\frac{d^2 \partial x}{dr^2};$$

on a donc

$$\sigma = -\int_0^r \frac{d^2 \partial x}{dr^2}\, dr = -\left(\frac{d\partial x}{dr}\right)_r + \left(\frac{d\partial x}{dr}\right)_0 = -\frac{\cos\theta}{\rho}\,\delta x + d\omega,$$

---

nieuse et qui mérite d'être indiquée; il remarque que l'intégrale

$$\iint \frac{(rt - s^2)\, dx\, dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

qui représente la somme des quotients que l'on obtient en divisant les éléments d'une surface par le produit des rayons de courbure principaux correspondant à ces éléments, peut se mettre sous la forme

$$\iint \frac{dp\, dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en observant que

$$rt - s^2 = \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dpdq}{dydx};$$

puis en appelant X et Y les cosinus des angles que la normale extérieure à la surface fait avec les parties positives des axes des x et des y, sous celle-ci,

$$\iint \frac{\left(\frac{dp}{d\mathrm{X}}\frac{dq}{d\mathrm{Y}} - \frac{dp}{d\mathrm{Y}}\frac{dq}{d\mathrm{X}}\right) d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui revient à

$$\iint \frac{d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}}{\sqrt{1 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2}},$$

en remarquant que

$$p = \frac{-\mathrm{X}}{\sqrt{1 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2}}, \quad q = \frac{-\mathrm{Y}}{\sqrt{1 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2}}.$$

De là on conclut aisément le théorème.

ou bien, en appelant i l'angle positif que la ligne BC fait avec les lignes minima issues du point A, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ la courbure géodésique de cette même ligne, et ds la différentielle positive de son arc,

$$\sigma = di + d\omega - \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds,$$

les conventions sur le sens suivant lequel se comptent les arcs x et r établies au n° **59**, étant conservées. Intégrant de B à C, il vient

$$\Sigma = -2\pi + A + B + C - \int_0^s \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds,$$

s étant la longueur du côté BC.

105. Si l'on a maintenant une portion de surface tout à fait quelconque, et terminée à un contour polygonal BCDE, on pourra prendre un point dans l'intérieur, et en joignant ce point aux sommets du contour polygonal par des lignes géodésiques, on décomposera l'aire proposée en plusieurs autres analogues à celle que l'on vient de considérer. Appliquant à chacune d'elles la formule précédente et faisant la somme, on verra que *la valeur sphérique d'une portion de surface, terminée à un contour polygonal quelconque, est égale à l'excès de la somme de ses angles, sur autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés moins deux, moins l'intégrale* $\int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds$ *étendue à tout le contour*. Dans le cas où l'aire est terminée à un contour fermé et ne présentant aucun angle, l'excès de la somme des angles sur autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux doit évidemment être remplacé par quatre droits.

106. M. Gauss, dans le célèbre Mémoire intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* que nous avons eu occasion de citer tant de fois, ne s'était occupé que de la détermination des valeurs sphériques des aires terminées à des lignes géodésiques de la surface, et il arrivait alors, l'intégrale $\int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds$ étant évidemment nulle, à ce résultat : *La valeur sphérique d'une portion de surface courbe terminée à un contour polygonal quelconque, est égale à l'excès de la somme de ses angles sur autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.* On peut remarquer qu'il est très-facile de passer du cas particulier de M. Gauss au cas général que nous avons considéré : il suffit, en effet, de circonscrire au contour polygonal quelconque que l'on a à considérer, un polygone infinitésimal formé par des éléments de lignes géodésiques, puis de remarquer que, d'après ce qui a été dit n° 34, l'angle infiniment petit que forment deux lignes géodésiques menées tangentiellement à une courbe, par deux points infiniment voisins, est égal à la distance de ces points multipliée par la courbure géodésique de la courbe en l'un de ces points. see [illegible] p. 192.

107. Si la surface, jusqu'ici quelconque, sur laquelle est tracé le contour devient une sphère, la valeur sphérique de la portion de surface considérée sera évidemment la valeur même divisée par le carré des rayons de la sphère ; de là on peut conclure cette proposition :

Une portion de surface sphérique, terminée à un contour polygonal ou courbe tout à fait quelconque, est égale au carré du rayon multiplié par l'excès de la somme des angles du contour, sur autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux, et sur l'intégrale $\int \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s ds$ *étendue à tout le contour.*

Ce théorème comprend, comme cas particuliers, tous les théorèmes de géométrie élémentaire relatifs à la mesure des aires sphériques.

108. Je terminerai en démontrant un théorème fort curieux, qui n'est qu'une généralisation de la proposition de M. Gauss, relative à la valeur sphérique d'un contour terminé à des lignes géodésiques d'une surface quelconque. Ce théorème, dû à M. Jacobi, s'énonce ainsi : *Si l'on a une courbe fermée tout à fait quelconque, et que par le centre d'une sphère de rayon* 1 *on mène des rayons respectivement parallèles aux normales principales de la courbe en ses différents points, le lieu des extrémités de ces rayons, qui sera une courbe fermée tracée sur la sphère, divisera cette sphère en deux parties équivalentes.*

Soit AmB (*fig.* 32) la courbe proposée ; imaginons la surface gauche formée par les perpendiculaires aux plans osculateurs de cette courbe, surface qui aura évidemment AmB pour ligne de striction, et considérons la génératrice rectiligne mG de cette surface menée par le point m et prolongée d'un certain côté de la courbe AmB : si, par le centre de la sphère de rayon égal à 1, nous menons des rayons respectivement parallèles aux normales de la surface gauche et répondant aux différents points de mG, depuis le point m jusqu'à l'infini, nous obtiendrons évidemment un quart de grand cercle $m_1 L_1$. Cela résulte de ce que toutes les normales considérées sont perpendiculaires à une même droite mG, et de ce que le plan tangent en un point de mG tend à devenir perpendiculaire au plan tangent en m à mesure que le point de contact s'éloigne sur mG, d'après une formule du n° 50. Considérons une seconde génératrice rectiligne m'G' de la surface gauche; nous aurons de même un quart de grand cercle $m'_1 L'_1$ pour le lieu des extrémités des rayons de la sphère de rayon 1, menées respectivement parallèles aux normales de la surface gauche aux différents points de m'G', depuis m' jusqu'à l'infini. De plus, si les deux génératrices mG et m'G' sont infiniment voisines, il est facile de voir que le second quadrant $m'_1 L'_1$ ira rencontrer le premier en son extrémité L_1, comme on le voit aisément en remarquant que la normale à la surface gauche, qui a donné le point L_1, est parallèle à mm' qui est aussi perpendiculaire à m'G', puisque AmB est la ligne de striction de la surface gauche. De là résulte que les différents quadrants $L_1 m_1$, $L'_1 m'_1$, etc., sont tangents à une même courbe fermée tracée sur la sphère de rayon 1, en leurs extrémités L_1, L'_1, etc. D'après cela, le lieu des points m_1, m'_1, etc., c'est-à-dire le lieu des extrémités des rayons de la sphère de rayon 1, respectivement parallèles aux normales principales mc, $m'c'$, etc., de la courbe AmB, peut être considéré comme obtenu en menant dans toutes les directions des arcs de grand cercle tangents à un contour fermé GL_1H tracé sur la sphère, et prenant sur ces arcs de grand cercle des longueurs égales à un quadrant: donc ce lieu $A_1 m_1 B_1$ des points m_1 divise la sphère en deux parties équivalentes; car, si l'on prolongeait les arcs de grand cercle $L_1 m_1$, $L'_1 m'_1$, etc., jusqu'à leur seconde rencontre au-dessous de $A_1 m_1 B_1$, on obtiendrait de ce côté de la courbe des points diamétralement opposés à L_1, L'_1, etc., qui détermineraient un contour identique à GL_1H, de telle sorte que la portion de la sphère située au-dessous de $A_1 m_1 B_1$ est composée de parties identiques à celles qui sont au-dessus.

NOTE I.

Sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraires.

On sait que l'héliçoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui ait en chacun de ses points ses rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires; Meunier a le premier démontré cette proposition remarquable dans son Mémoire sur les surfaces, qui a été inséré au *Recueil des Savants étrangers*. Plus tard Legendre y a été aussi conduit (*voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1787). Enfin dans ces derniers temps, plusieurs géomètres ont donné, dans le Journal de M. Liouville, des démonstrations nouvelles et plus ou moins simples du même théorème. Toutes les démonstrations connues reposent sur l'intégration des équations aux différences partielles (*). Je me propose, dans cette Note, de faire voir que le théorème dont il s'agit peut être démontré d'une manière géométrique et sans le secours du calcul intégral.

Supposons le problème résolu, et imaginons que l'on trace sur la surface trouvée les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de cette surface; il est facile de voir 1° que ces courbes seront équidistantes entre elles : c'est là, en effet, une propriété générale des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes des surfaces gauches, que nous avons démontrée dans le Mémoire précédent; et 2° qu'elles auront en chaque point leur plan osculateur tangent à la surface : cette seconde propriété résulte de ce que la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre est pour toute surface égale à la somme des courbures principales, et par conséquent pour la surface considérée, égale à zéro; d'où il suit que les sections normales perpendiculaires aux génératrices ont leurs rayons de courbure infinis.

Soit maintenant AmB (*fig.* 33) une quelconque des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes; prenons trois points m, m', m'' infiniment voisins sur cette courbe, et menons les génératrices mG, $m'G'$, $m''G''$, dont la première sera perpendiculaire à mm', et la seconde à $m'm''$. Si nous faisons $mG = m'G' = m''G''$, les lignes GG', $G'G''$ seront deux éléments consécutifs d'une seconde trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes; de telle sorte que le plan $GG'G''$ sera perpendiculaire à la normale GL de la surface au point G, de même que le plan $mm'm''$ est perpendiculaire à la normale mT au point m. Appelons φ l'angle que GG' fait avec mm'; les cosinus des angles que GL perpendiculaire à mG et à GG' fait avec les trois lignes mm', mG, mT que nous considérons comme des axes

(*) Depuis que cette Note est composée, j'ai appris que M. Olivier avait donné, dans ses développements de géométrie descriptive, une démonstration géométrique du théorème de Meunier. Du reste, ma démonstration diffère entièrement de celle de M. Olivier.

des coordonnées, seront respectivement $-\sin\varphi$, o, $\cos\varphi$. Évaluons en second lieu les cosinus des angles que $G'G''$ fait avec les mêmes axes : d'abord le cosinus de l'angle que cette droite fait avec mm' est égal, aux infiniment petits près du second ordre, au cosinus de l'angle qu'elle fait avec $m'm''$, c'est-à-dire à $\cos\varphi + d\cos\varphi$ (la différentielle se rapportant à un déplacement effectué sur la courbe AmB) : cela résulte de ce que si par le point m' on mène $m'K$ parallèle à $G'G''$, le plan $Km'm''$ perpendiculaire à la droite $m'G'$ le sera aussi sensiblement au plan $mm'm''$. Puis le cosinus de l'angle que cet élément $G'G''$ fait avec mG est un infiniment petit qu'on peut appeler ε; par conséquent enfin, le cosinus de l'angle qu'il fait avec mT doit être $\pm(\sin\varphi + d\sin\varphi)$, pour que la somme des carrés des trois cosinus soit égale à l'unité, et même sans ambiguïté, $\sin\varphi + d\sin\varphi$, comme on le voit aisément par la figure. Nous conclurons de là que la condition pour que GL soit perpendiculaire au plan $GG'G''$ ou à $G'G''$ revient à

$$-\sin\varphi(\cos\varphi + d\cos\varphi) + \cos\varphi(\sin\varphi + d\sin\varphi) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$d\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = c.$$

Ainsi l'angle que GG' fait avec mm', celui que $G'G''$ fait avec $m'm''$, etc., sont tous égaux entre eux quel que soit mG, pourvu que l'on ait

$$mG = m'G' = m''G'' = \ldots.$$

Je dis maintenant que les rayons de première et de seconde courbure de AmB sont constants En effet, soient r et R ces deux rayons, de manière que l'angle que forment mG et $m'G'$ ait pour valeur

$$mm'\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}},$$

d'après une formule de Lancret, très-facile à démontrer par la géométrie. Si par le point G on mène $G'n$ parallèle à Gm jusqu'à la rencontre en n du plan Tmm', le triangle nmm' donnera, en faisant $mG = a$,

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{R^2} = 1 + \frac{\overline{GG'}^2}{\overline{mm'}^2} - 2\frac{GG'}{mm'}\cos\varphi.$$

Mais la projection $GG'\cos\varphi$ de GG' sur le plan osculateur $mm'm''$ est égale évidemment à $mm'\left(1 - \frac{a}{r}\right)$; donc

$$\frac{GG'}{mm'} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{R^2} = 1 + (1 + \tan^2\varphi)\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{a}{r}\right);$$

d'où

$$\tang \varphi = \pm \frac{ar}{R(r-a)},$$

une seule valeur, dont la séparation est d'ailleurs aisée, devant être prise. Or, a étant quelconque, φ ne pourra avoir la même valeur quel que soit le point de AmB que l'on considère qu'autant que r et R seront eux-mêmes constants; pour le voir clairement, on fait a égal à la valeur de r pour l'un des points de la courbe, ce qui montre que ce premier rayon de courbure est constant; puis on reconnaît sans peine que le second R doit aussi l'être.

Ainsi, comme nous l'avions annoncé, la courbe AmB a ses deux rayons de première et seconde courbure constants; nous pourrions en conclure immédiatement que AmB est une hélice, car on sait qu'il n'y a que l'hélice qui ait ses rayons de première et seconde courbure constants : mais cette propriété se démontre ordinairement par le calcul, et nous pouvons arriver au même résultat géométriquement comme il suit. Considérons la ligne de striction de la surface; dans le cas actuel, cette ligne sera une droite : en effet, elle doit d'abord couper à angle droit toutes les génératrices mG, m'G$'$, m''G$''$, etc., car les distances des points m, m', m'', etc., aux points de la ligne de striction situés sur mG, m'G$'$, m''G$''$, etc., ne dépendent, comme l'on sait, que des rayons de première et seconde courbure de AmB aux points m, m', m'', etc., et sont, par conséquent, constants : cela nous montre que le plan osculateur $pp'p''$ de cette courbe en un point quelconque p' doit être tangent à la surface gauche; or pp' et $p'p''$ ne peuvent être dans un même plan avec $m'p'$, tout en étant perpendiculaires à cette droite, qu'autant qu'ils sont sur le prolongement l'un de l'autre : ainsi les deux éléments pp', $p'p''$, et de même les éléments suivants sont sur une même droite. Ceci posé, si l'on projette sur un plan perpendiculaire à la ligne de striction $pp'p''\ldots$, les génératrices mp, $m'p'$, $m''p''$ et la courbe AmB, les génératrices se projetteront en vraie grandeur, et par conséquent suivant des droites égales partant toutes de la projection de $pp'p''\ldots$, qui est un point; la courbe AmB se projettera suivant une courbe coupant à angle droit les projections des génératrices, et conséquemment suivant une circonférence: cela montre déjà que la courbe AmB est tracée sur un cylindre droit à base circulaire; puis, si l'on remarque qu'en supposant les éléments pp', $p'p''$, etc., égaux entre eux, il en est de même de mm', $m'm''$, etc., et des angles que forment mp et $m'p'$, $m'p'$ et $m''p''$, etc., et, par conséquent, des projections de mm', $m'm''$, etc., sur le plan de la base du cylindre, on peut conclure que AmB est une hélice. Il est d'ailleurs déjà démontré que la surface gauche considérée est un conoïde : cette surface est donc un héliçoïde gauche à plan directeur.

NOTE II.

Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure des surfaces du second ordre.

M. Joachimstal, dans un Mémoire intéressant publié par le Journal de M. Crelle, tome XXX, et qui a servi de point de départ aux recherches importantes de MM. Liouville et Michaël Roberts, dont il a été dit un mot dans les nos 31 et 32 du Mémoire précédent, a démontré plusieurs propriétés remarquables relatives aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure des surfaces du second ordre. M. Bertrand a ensuite fait connaître quelques propriétés du même genre à la fin de son Mémoire sur les surfaces isothermes (*voyez* le tome IX du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville). Toutes ces propriétés se déduisent d'une manière extrêmement simple de la théorie des coordonnées elliptiques; mais il peut être intéressant de savoir les démontrer à priori : c'est ce que je me propose de faire dans cette Note. Je dois faire remarquer qu'il y a quelques points communs entre la méthode que j'emploie et celle de M. Joachimstal.

J'établirai d'abord par une méthode géométrique l'équation différentielle du second ordre que M. Joachimstal a donnée pour représenter une ligne géodésique ou une ligne de courbure d'une surface quelconque.

Remarquons pour cela que si sur une surface on trace une ligne géodésique ou une ligne de courbure AmB, et que l'on considère la normale principale mC au point quelconque m, le cosinus de l'angle α, que cette ligne fera avec la normale à la surface au point m, sera égal, en négligeant les infiniment petits du second ordre, au cosinus de l'angle β, que la même ligne mC fera avec la normale à la surface au point m' infiniment voisin de m, et situé sur AmB. En effet, quand AmB est une ligne géodésique, l'angle α est nul et l'angle β est infiniment petit du premier ordre (il va sans dire que l'on prend mm' comme terme de comparaison des infiniment petits); donc $\cos\alpha$ est égal à 1, et $\cos\beta$ ou $1-\frac{\beta^2}{2}+\ldots\ldots$ en diffère de $\frac{\beta^2}{2}+\ldots$, c'est-à-dire d'un infiniment petit du second ordre. Si AmB est une ligne de courbure, les normales à la surface aux deux points infiniment voisins m et m' de cette ligne sont dans un même plan perpendiculaire, d'ailleurs, à celui que détermine la normale au point m et la ligne mC : donc les angles α et β que forme mC avec ces deux normales sont égaux, aux infiniment petits près du second ordre; par suite, les cosinus de ces angles sont aussi égaux avec le même degré d'approximation.

Ceci posé, soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface; posons

$$d.F(x, y, z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

de manière que l'on ait aussi

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

lorsque dx, dy, dz se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la surface.

Appelons λ, μ, ν les angles que la normale à cette surface, menée d'un certain côté déterminé, fait avec les parties positives des axes des coordonnées en un point quelconque x, y, z; nous aurons

$$\cos\lambda = X\Delta, \quad \cos\mu = Y\Delta, \quad \cos\nu = Z\Delta,$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

le radical ayant un signe déterminé, qui, d'ailleurs, peut être + ou —.

Soient aussi λ_1, μ_1, ν_1, les angles que fait avec les parties positives des axes des coordonnées, la normale principale d'une ligne géodésique, ou d'une ligne de courbure tracée sur la surface, au même point m; on aura

$$\cos\lambda_1 = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\mu_1 = \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\nu_1 = \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

ρ étant le rayon de courbure, ds l'élément de l'arc de la courbe considérée, et les différentielles se rapportant (convention qui sera maintenue dans tout ce qui va suivre) à un déplacement infiniment petit effectué sur cette même courbe. Maintenant on peut avoir aisément $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, et on trouve

$$\cos\alpha = \rho\Delta\left(X\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + Y\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + Z\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)$$

$$\cos\beta = \rho\left[\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}(X\Delta + d.X\Delta) + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}(Y\Delta + d.Y\Delta) + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}(Z\Delta + d.Z\Delta)\right];$$

l'égalité de ces deux cosinus exige que

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}d.X\Delta + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}d.Y\Delta + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}d.Z\Delta = 0,$$

ou, développant en remarquant que $\Delta = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, faisant passer les termes affectés du signe — dans le second membre et divisant par Δ,

$$dX\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + dY\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + dZ\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\left(X\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}Y + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + Z\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)(XdX + YdY + ZdZ)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

ou bien, développant encore, simplifiant au moyen de la relation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

et multipliant par ds^2, il vient

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z - (dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz)\frac{dds}{ds}$$
$$= \frac{(X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z)(X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Mais de la relation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

on déduit

$$X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z = -\,dX\,dx - dY\,dy - dZ\,dz.$$

Substituant, divisant par $dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz$, et faisant tout passer dans le premier membre, on a finalement

$$(1) \qquad \frac{dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z}{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz} + \frac{X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dds}{ds} = 0;$$

c'est l'équation différentielle du second ordre que M. Joachimstal a trouvée pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure d'une surface quelconque. M. Joachimstal avait déduit cette équation du calcul; la démonstration précédente a l'avantage d'en donner l'interprétation géométrique.

Supposons maintenant que la surface proposée soit du second degré, de telle sorte que

$$F = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z - f,$$

a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', f étant des constantes; nous aurons, dans ce cas,

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z = \tfrac{1}{2}d.(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz),$$

ou, ce qui revient au même,

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z = d^2X\,dx + d^2Y\,dy + d^2Z\,dz.$$

En effet, on a

$$X = 2(ax + b''y + b'z + c),$$
$$Y = 2(a'y + bz + b''x + c'),$$
$$Z = 2(a''z + b'x + by + c'');$$

donc

$$dX = 2(a\,dx + b''dy + b'dz),$$
$$dY = 2(a'dy + b\,dz + b''dx),$$
$$dZ = 2(a''dz + b'dx + b\,dy);$$

et

$$d^2X = 2(ad^2x + b''d^2y + b'd^2z),$$
$$d^2Y = 2(a'd^2y + bd^2z + b''d^2x),$$
$$d^2Z = 2(a''d^2z + b'd^2x + bd^2y);$$

donc

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z = 2\begin{bmatrix} a\,dx\,d^2x + a'\,dy\,d^2y + a''\,dz\,d^2z + b''(dy\,d^2x + dx\,d^2y) \\ + b'(dz\,d^2x + dx\,d^2z) + b(dz\,d^2y + dy\,d^2z) \end{bmatrix}$$

et

$$dx\,d^2X + dy\,d^2Y + dz\,d^2Z = 2\begin{bmatrix} a\,dx\,d^2x + a'\,dy\,d^2y + a''\,dz\,d^2z + b''(dy\,d^2x + dx\,d^2y) \\ + b'(dz\,d^2x + dx\,d^2z) + b(dz\,d^2y + dy\,d^2z) \end{bmatrix}.$$

Cela étant, l'équation (1) s'intègre immédiatement, et il vient

$$(2)\qquad \frac{(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz)(X^2 + Y^2 + Z^2)}{ds^2} = \text{const.}$$

Interprétons ce résultat.

Nous avons posé

$$\cos\lambda = X\Delta, \quad \cos\mu = Y\Delta, \quad \cos\nu = Z\Delta;$$

donc on a

$$d.\cos\lambda = \Delta\,dX + X\,d\Delta,$$

$$d.\cos\mu = \Delta\,dY + Y\,d\Delta,$$

$$d.\cos\nu = \Delta\,dZ + Z\,d\Delta,$$

ce qui donne

$$\Delta(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ) = dx\,d.\cos\lambda + dy\,d.\cos\mu + dz\,d.\cos\nu,$$

puisque

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

L'équation (2) devient donc, en se rappelant la valeur de Δ,

$$(3)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d.\cos\lambda}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d.\cos\mu}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d.\cos\nu}{ds} = \frac{\text{const.}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or le premier membre est évidemment égal au cosinus de l'angle que la tangente de la ligne géodésique ou de la ligne de courbure considérée au point m dont les coordonnées sont x, y, z, fait avec la normale à la surface au point m', dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, divisé par ds ou mm'; ce premier membre n'est donc autre chose que la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la section normale à la surface dirigée suivant la ligne géodésique ou la ligne de courbure. Occupons-nous du second : considérons en même temps que la surface du second degré représentée par l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z = f;$$

celle que représente l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z = f + \delta f,$$

où δf est infiniment petit, c'est-à-dire la surface homothétique infiniment voisine de la première; il est facile de voir qu'en appelant δn la distance des deux surfaces au point m, on a

$$\delta n = \frac{\delta f}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suffit de remarquer que si $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ sont les coordonnées de la seconde extrémité de δn, on a

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta f$$

et

$$\delta x = \delta n \cos\lambda = \delta n X \Delta,$$

$$\delta y = \delta n \cos\mu = \delta n Y \Delta,$$

$$\delta z = \delta n \cos\nu = \delta n Z \Delta;$$

d'où l'on tire aisément la valeur de δn indiquée plus haut. Cela étant, l'équation (3) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \alpha \delta n^3 \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\beta}{\delta n^3},$$

α et β étant des constantes; et alors nous voyons qu'elle exprime que *pour toute surface du second degré, le rayon de courbure d'une section normale à la surface, cette section étant menée tangentiellement à une ligne géodésique ou à une ligne de courbure, varie pour les différents points de cette ligne, en raison inverse du cube de la distance de la surface à la surface homothétique infiniment voisine.*

On sait que la distance d'une surface du second degré à la surface homothétique infiniment voisine est, pour les mêmes points, en raison inverse de la distance de cette surface à la surface homofocale infiniment voisine. On peut donc dire, en combinant cette propriété, qui est bien connue dans la théorie de l'attraction, avec la précédente, que *pour toute surface du second degré, le rayon de courbure d'une section normale à la surface, cette section étant menée tangentiellement à une ligne géodésique ou à une ligne de courbure, varie pour les différents points de cette ligne, proportionnellement au cube de la distance de la surface à la surface homofocale infiniment voisine.*

Passons maintenant aux propriétés de M. Bertrand.

Désignons, comme plus haut, par la caractéristique d les déplacements infiniment petits effectués sur la courbe AmB, que nous supposons ici être exclusivement une ligne de courbure; représentons, en outre, par la caractéristique δ les déplacements infiniment petits effectués perpendiculairement à la courbe AmB, ou, ce qui revient au même, les déplacements effectués sur les lignes de courbure du système différent de celui dont AmB fait partie. Nous aurons d'abord l'identité

$$\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta s}\right)^2 = 1,$$

δs étant l'élément d'une ligne de courbure coupant à angle droit la courbe AmB; d'où, en différentiant suivant la caractéristique d, on a

$$(4)\qquad \delta x d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta y d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

Mais en appelant, comme plus haut, λ, μ, ν les angles que la normale à la surface au point xyz fait avec les parties positives des axes, on a

$$(a)\qquad \frac{\delta x}{\delta \cos \lambda} = \frac{\delta y}{\delta \cos \mu} = \frac{\delta z}{\delta \cos \nu} = \frac{1}{R'},$$

R' étant le rayon de courbure de la section principale perpendiculaire à AmB. En effet, si l'on considère les normales à la surface au point m, dont les coordonnées sont x, y, z, et au point n, dont les coordonnées sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, normales qui se rencontrent en un certain point O, puisque mn est un élément de ligne de courbure; puis que l'on prenne sur ces deux normales des longueurs Om' et On' égales à 1, à partir du point O l'élément $m'n'$ sera parallèle à mn, et, par conséquent, la différence des distances des points m et n à l'un quelconque des plans coordonnés sera à la différence des distances analogues, relatives aux points m' et n', dans le même rapport que $m'n'$ à mn ou dans le rapport de 1 à $Om = R'$; or cette proportionnalité est évidemment exprimée par les équations précédentes.

Portant maintenant les valeurs de δx, δy, δz dans l'équation (4), il vient

$$\delta . \cos \lambda d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta . \cos \mu d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta \cos \nu d \frac{\delta z}{\delta s} = 0;$$

mais puisque

$$\cos \lambda = X\Delta, \quad \cos \mu = Y\Delta, \quad \cos \nu = Z\Delta,$$

on a

$$\delta . \cos \lambda = \Delta\, \delta X + X \delta \Delta,$$

$$\delta . \cos \mu = \Delta\, \delta Y + Y \delta \Delta,$$

$$\delta . \cos \nu = \Delta\, \delta Z + Z \delta \Delta.$$

Substituant, on a simplement

$$(5)\qquad \delta X d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta Y d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta Z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

En effet, la normale à la surface au point m est non-seulement perpendiculaire à l'élément mn, mais encore à ce que devient mn, quand on passe du point m au point m' infiniment voisin de m et situé sur AmB, d'après le théorème de M. Dupin; par conséquent, l'on a

$$X d \frac{\delta x}{\delta s} + Y d \frac{\delta y}{\delta s} + Z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

Développant l'équation (5), on trouve

$$\frac{\delta X d\, \delta x + \delta Y d . \delta y + \delta Z d . \delta z}{\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z} - \frac{d \delta s}{\delta s} = 0;$$

mais quand la surface considérée est du second degré, on a, il serait facile de le vérifier comme on a fait plus haut,

$$\delta X d.\delta x + \delta Y d\delta.y + \delta Z d.\delta z = \tfrac{1}{2} d.(\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z).$$

On peut alors intégrer, et il vient

$$\frac{\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z}{\delta s^2} = C,$$

C étant une constante arbitraire; ou bien, introduisant $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ au lieu de X, Y, Z, et remarquant que

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0,$$

on a

$$\frac{\delta.\cos\lambda\,\delta x + \delta.\cos\mu\,\delta y + \delta\ \cos\nu\,\delta z}{\Delta\,ds^2} = c,$$

ou bien encore, en vertu des relations (a),

$$\frac{1}{R'} = \frac{c}{\Delta} = c\,(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où enfin

$$R' = \frac{\alpha}{\delta n},$$

α étant une nouvelle constante, et δn représentant, comme tout à l'heure, la distance de la surface du second degré considérée à la surface homothétique infiniment voisine, pour le point x, y, z.

Cela nous montre que, *suivant une même ligne de courbure d'une surface du second degré, le rayon de courbure de la section principale qui lui est perpendiculaire, varie dans le rapport inverse de la distance de la surface considérée à la surface homothétique infiniment voisine.*

Par conséquent aussi, d'après une remarque faite plus haut, *suivant une même ligne de courbure d'une surface du second degré, le rayon de courbure de la section principale qui lui est perpendiculaire, varie dans le même rapport que la distance de la surface considérée à la surface homofocale infiniment voisine.*

Combinant ces deux propriétés de M. Bertrand avec celles de M. Joachimstal, on voit encore *que suivant toute ligne de courbure d'une surface de second degré, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal.* C'est la propriété que j'ai démontrée directement dans le XXX^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* pour toutes les surfaces faisant partie d'un système triple de surfaces isothermes, et qui m'a servi à simplifier la démonstration du théorème important que l'on doit à M. Lamé et d'après lequel les surfaces du second degré homofocales sont les seules surfaces susceptibles de former un système triple de surfaces isothermes.

Considérons maintenant, sur une surface du second degré quelconque, un quadrilatère fini formé par quatre lignes de courbure. Soit $AA_1A_2A_3$ ce quadrilatère; appelons a, a_1, a_2, a_3 les distances de la surface proposée à la surface homofocale infiniment voisine, aux points A, A_1, A_2, A_3; soient enfin ρ, ρ'; ρ_1, ρ'_1; ρ_2, ρ'_2; ρ_3, ρ'_3 les rayons de courbure principaux de la surface aux mêmes points, les lettres sans accent servant à désigner les rayons de courbure correspondants aux sections principales, tangentes aux lignes de courbure du même système que AA_1 : nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{a^3}{a_1^3},\quad \frac{\rho'}{\rho'_1}=\frac{a}{a_1};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{a_1}{a_2},\quad \frac{\rho'_1}{\rho'_2}=\frac{a_1^3}{a_2^3};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{a_2^3}{a_3^3},\quad \frac{\rho'_2}{\rho'_3}=\frac{a_2}{a_3};$$

$$\frac{\rho_3}{\rho}=\frac{a_3}{a},\quad \frac{\rho'_3}{\rho'}=\frac{a_3^3}{a^3}.$$

Multipliant membre à membre les égalités de la première ou de la seconde colonne verticale, on a

$$a^2a_2^2=a_1^2a_3^2,$$

ou

$$\frac{a}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}.$$

Ainsi, *si sur une surface du second degré on considère un rectangle fini formé par quatre lignes de courbure, les distances des sommets de ce rectangle à la surface du second degré homofocale infiniment voisine, forment une proportion.*

C'est la première des propriétés que M. Bertrand a reconnues à toutes les surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple de surfaces isothermes (*voyez* le Journal de M. Liouville, tome IX).

Quant à la seconde de ces propriétés, qui consiste, comme l'on sait, en ce que toute surface du second degré peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, j'aurai besoin, pour l'établir, de supposer connu le théorème de M. Binet, d'après lequel les lignes de courbure d'une surface du second degré ne sont autre chose que les intersections de cette surface avec les surfaces du second degré homofocales qui ne sont pas de même nature qu'elle; du reste, on sait que ce dernier théorème peut se déduire très-simplement de l'équation (3), comme l'a fait M. Joachimstal, ou plus simplement M. Chelini (*voyez* la *Revue scientifique italienne*).

Ceci posé, soit une surface du second degré; supposons-la découpée en rectangles infiniment petits, par ses lignes de courbure, et considérons un de ces rectangles *abcd*. Le côté *ab* sera un élément d'une ligne de courbure *ax*, non-seulement de la surface du second degré proposé, mais encore d'une surface du second degré homofocale, coupant la première à angle droit, et que nous appellerons, pour simplifier le discours, surface S. De même le côté ac sera un élément d'une seconde ligne de courbure ay de la surface proposée et d'une surface du second degré homofocale S', qui coupe la première à angle droit. Appelons ρ le rayon de courbure au point a de la section principale faite dans la surface S, tangentiellement à sa ligne de courbure ax, et ρ' le rayon de courbure au même point de la section principale faite dans la surface S', tangentiellement à la ligne de courbure ay : le rapport

$$\frac{ac^3}{\rho}$$

devra garder la même valeur, d'après un théorème démontré plus haut, lorsqu'au lieu du point a on considérera tout autre point de la ligne ax, ac étant toujours la distance de la ligne de courbure ax à la ligne de courbure infiniment voisine de la surface proposée et appartenant au même système qu'elle; cela prouve qu'en représentant par la caractéristique d les accroissements infiniment petits effectués sur ax, on a

$$\frac{3\overline{ac}^2 d.ac}{\rho} + \overline{ac}^3 . d\frac{1}{\rho} = 0,$$

d'où

$$d\frac{1}{\rho} = -3\frac{d.ac}{ac.\rho},$$

d'où

$$\frac{d.\frac{1}{\rho}}{ab} = -3\frac{d.ac}{ab.ac}\frac{1}{\rho}.$$

Mais en supposant que ab soit égal au déplacement correspondant à l'accroissement indiqué par d, on a

$$\frac{d.ac}{ab.ac} = -\frac{1}{\rho'};$$

donc

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{ab} = 3\frac{1}{\rho\rho'}.$$

On trouverait de même, en indiquant par δ un accroissement correspondant au déplacement ac effectué sur ay,

$$\frac{\delta\frac{1}{\rho'}}{ac} = -3\frac{1}{\rho\rho'}; \text{ (*)}$$

(*) Les signes s'expliquent par ce qui a été dit tant de fois dans le Mémoire, § III et autres.

de là nous pouvons conclure

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{ab}+\frac{\delta\frac{1}{\rho'}}{ac}=0.$$

Or c'est là la condition pour que les deux systèmes de lignes orthogonales que l'on considère sur la surface proposée, puissent découper cette surface en carrés infiniment petits, comme je l'ai fait voir au n° 36 du Mémoire précédent, ou mieux, dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes, inséré dans le XXX[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* la seconde propriété de M. Bertrand est donc aussi démontrée.