Theorie der Zöpfe.

Von EMIL ARTIN in Hamburg.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen sind als ein Ansatz zu einem Wege gedacht, dem Studium der Knoten und Verkettungen näher zu kommen. Es handelt sich um eine Kennzeichnung einfacherer topologischer Gebilde, der Zöpfe. Dabei ist unter einem Zopf im wesentlichen ein Geflecht aus Fäden zu verstehen, wie schon der Name sagt. Die Zöpfe geben Anlaß zu einer Gruppe, da man aus zwei von ihnen durch „Aneinanderhängen" einen dritten komponieren kann. Die Konstitution dieser Gruppe ist einfach genug, um mit einem finiten Verfahren die Entscheidung zu ermöglichen, ob zwei vorgelegte Zöpfe sich ineinander deformieren lassen oder nicht. Schließt man einen Zopf, verknüpft man also Anfang und Ende, so entsteht eine Verkettung. Umgekehrt läßt sich auch jede Verkettung in diese Gestalt bringen. Von hier aus bis zum Knotenproblem ist aber noch ein weiter Weg. Immerhin gestatten bereits die gewonnenen Resultate, Aussagen über die Verkettungen, vor allem über ihre Fundamentalgruppe, zu machen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn O. SCHREIER, der mich bei der Abfassung dieser Arbeit tatkräftig unterstützt hat, insbesondere auch bei den langwierigen Rechnungen, mit denen wir zunächst durchzukommen hofften. Seine Hilfe kam mir besonders beim Beweis von Satz 9 zustatten.

§ 2. Komposition und Gruppenerzeugende.

Unter einem Zopf Z von n^{ter} Ordnung verstehen wir folgendes topologisches Gebilde:

Im Raum sei ein Rechteck mit Gegenseiten g_1, g_2 bzw. h_1, h_2 (der „Rahmen" von Z) vorgelegt. Auf jeder der beiden Seiten g_1 und g_2 seien n Punkte $A_1\, A_2 \cdots A_n$ bzw. $B_1\, B_2 \cdots B_n$ gegeben, wobei der Sinn der Numerierung von h_1 nach h_2 laufe. Jedem Punkte A_i sei eineindeutig ein Punkt B_{r_i} zugeordnet, mit dem er durch eine doppelpunktfreie Raumkurve μ_i verbunden ist, die keine andere Kurve μ_k schneidet. Die Kurve μ_i erhalte noch die Orientierung von A_i nach B_{r_i}. Zwei solche Zöpfe heißen äquivalent oder kürzer gleich, wenn sie sich ineinander ohne Selbstdurchdringung deformieren lassen. Bei dieser Deformation betrachte man auch die Verlängerungen von g_1 und g_2

als undurchdringlich. Man beachte die beiden Orientierungen, die im Zopfe liegen. Die erste betrifft die Numerierung der Punkte A_i, die zweite den Sinn der Kurve μ_i. Bei der Deformation hat man auf diese Orientierungen Rücksicht zu nehmen.

Diese Definition werde nun eingeengt durch die weitere Forderung: Nach passender Deformation von Z sollen die Projektionen der Kurven μ_i auf die Ebene des Rahmens ganz im Innern des Rechtecks laufen, sich nur in endlich vielen Punkten schneiden und mit einer zu g_1 parallelen Geraden nur einen Punkt gemein haben. Da man dreifache Punkte durch leichte Abänderung in Doppelpunkte auflösen kann, wollen wir auch noch annehmen, daß bei der Projektion nur einfache Schnittpunkte auftreten. Schematisch wird sich dann ein Zopf durch eine Zeichnung repräsentieren lassen, wie sie in Fig. 2 zur Darstellung gebracht ist. In Fig. 1 ist als Beispiel ein Geflecht gezeichnet, das wir nicht als Zopf betrachten werden. Im weiteren Verlauf denken wir uns die Zöpfe gleich in einer solchen „Normalgestalt“ gegeben.

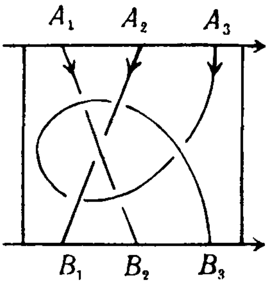

Fig. 1.

Aus zwei Zöpfen Z_1 und Z_2 von n^{ter} Ordnung kann durch Komposition ein dritter gebildet werden, indem man durch Deformation der Normalgestalten die beiden Rechtecke in einer Ebene so aneinanderlegt, daß die Seite g_2 von Z_1 an g_1' von Z_2 anstößt, die Punkte B_i von Z_1 mit den Punkten A_i' von Z_2 zusammenfallen und h_1', h_2' in die Verlängerungen von h_1 und h_2 fallen. Sodann lösche man die Gerade $g_2 = g_1'$. Das Resultat ist ein neuer Zopf, den wir mit $Z_1 Z_2$ bezeichnen. Der Zopf $Z_1 Z_2$ wird also kurz gesagt durch Aneinanderhängen der beiden Zöpfe Z_1 und Z_2 erhalten. In Fig. 2 ist dies andeutungsweise wiedergegeben. Man achte dabei wieder auf die Orientierungen. Wir erwähnen noch ausdrücklich, obwohl dies schon

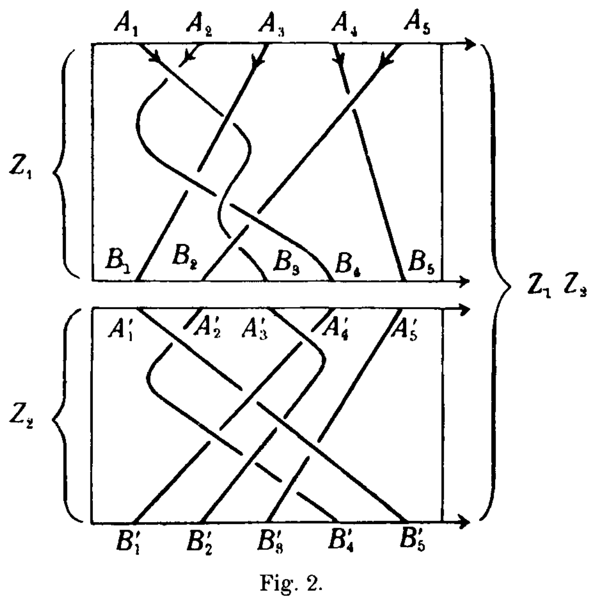

Fig. 2.

aus den Definitionen hervorgeht, daß bei diesem Prozess der i^{te} Faden von Z_1 nicht notwendig mit dem i^{ten} Faden von Z_2 zu verknüpfen ist. Ist vielmehr μ_i die Verbindung von A_i und B_{r_i}, so hat man ja B_{r_i} mit dem Punkt A'_{r_i} von Z_2 zusammenfallen zu lassen, so daß μ_i mit dem Faden μ'_{r_i} von Z_2 verknüpft wird. In Fig. 2 ist z. B. der erste Faden von Z_1 mit dem dritten Faden von Z_2 verbunden.

Das assoziative Gesetz

$$(1) \qquad Z_1(Z_2 Z_3) = (Z_1 Z_2) Z_3$$

für unsere Komposition leuchtet unmittelbar ein. Denn offenbar erscheint derselbe Zopf, wenn man an Z_1 den bereits verknüpften $Z_2 Z_3$ anhängt oder aber an Z_1 den Zopf Z_2 und an das Kompositionsresultat Z_3. Dagegen ist im allgemeinen die Reihenfolge von Z_1 und Z_2 wesentlich, d. h. es gilt nicht das kommutative Gesetz.

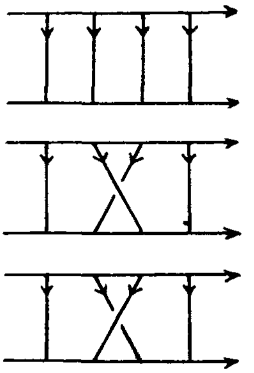

Fig. 3.

Die einfachsten Typen von Zöpfen n^{ter} Ordnung sind in Fig. 3 dargestellt. Wir haben:

1. Den Zopf E, bei dem der Punkt A_i mit B_i verbunden ist und die Fäden μ_i miteinander nicht verschlungen sind. (Bei passender Deformation schneiden sich dann die Projektionen unserer Kurven nicht.) Ersichtlich gilt, wenn Z ein beliebiger Zopf ist:

$$(2) \qquad ZE = EZ = Z.$$

Unser Zopf E spielt also die Rolle der Einheit und werde deshalb auch einfach mit 1 bezeichnet.

2. Der Zopf σ_i, bei dem A_i mit B_{i+1} und A_{i+1} mit B_i verbunden ist, wobei der i^{te} Faden einmal *über* dem $(i+1)^{\text{ten}}$ Faden läuft, die übrigen Fäden aber wie bei E laufen. (Also unverschlungen von A_r nach B_r.)

3. Der Zopf σ_i^{-1}, bei dem derselbe Sachverhalt wie bei σ_i vorliegt, nur daß der i^{te} Faden einmal *unter* dem $(i+1)^{\text{ten}}$ läuft.

Komponiert man den Zopf σ_i mit σ_i^{-1}, so kann man den i^{ten} Faden vom $(i+1)^{\text{ten}}$ herunterheben, erhält also den Zopf E. Ebenso wenn σ_i^{-1} mit σ_i komponiert wird. Es gilt also:

$$(3) \qquad \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1.$$

Aus diesem Grunde wurde der dritte Typus σ_i^{-1} genannt.

Nunmehr kann man leicht einsehen, daß jeder Zopf durch passende Komposition der Elementarzöpfe $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1} \cdots \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ erhalten werden kann, da man ihn nach leichten Deformationen in solche Schichten zerlegen kann, so daß in jeder einzelnen Schicht nur eine Überkreuzung liegt. Die in Fig. 2 vorkommenden Zöpfe gestatten zum Beispiel die Darstellung:

$$Z_1 = \sigma_1 \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1}; \qquad Z_2 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_3^{-1}.$$

Dies hat aber zur Folge, daß es zu jedem Zopf Z einen inversen Z^{-1} gibt, für den gilt:

$$ZZ^{-1} = Z^{-1} Z = 1. \tag{4}$$

So ist z. B.: $Z_1^{-1} = \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1^{-1}$. Die geometrische Bedeutung von Z^{-1} ist auch unmittelbar zu erkennen. Man erhält ihn nämlich, wenn man die Projektion von Z an der Geraden g_2 spiegelt, die Orientierung der Kurven aber im Spiegelbild einfach fortsetzt.

Somit bilden die Zöpfe n^{ter} Ordnung eine Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ mit den $(n-1)$ Erzeugenden $\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$.

Als Beispiel eines einfachen Zopfes 3. Ordnung führen wir noch den allgemein bekannten Damenzopf an. Er hat die Formel:

$$Z = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^k.$$

Auch die Flechtart:

$$Z = (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1})^k$$

bei der vier Fäden verwendet werden, findet häufig Anwendung.

§ 3. Definierende Relationen.

Die Darstellung eines Zopfes Z mit Hilfe der σ_i ist natürlich nicht eindeutig, da zwischen den σ_i noch gewisse Relationen bestehen werden, die von den erlaubten Deformationen von Z herrühren. Es wird sich nun zunächst darum handeln, die definierenden Relationen unserer Gruppe zu bestimmen, die Deformationen also zu arithmetisieren. Man überlegt sich nun leicht, daß eine Deformation von Z aus einer Normalgestalt in eine andere stets auch in der Normalgestalt ausgeführt werden kann, so daß es nur auf ein Umordnen der Fäden ankommt.

Dieses Umordnen der Fäden soll nun in einzelne Schritte zerlegt werden. Statt mehrere Fäden zugleich umzuordnen, kann man sukzessiv die einzelnen Fäden über oder unter die anderen wegziehen. Dabei wird man allerdings mehrmals zum gleichen Faden zurückkehren müssen, nachdem man inzwischen die anderen Fäden passend umgelegt hat. Jedenfalls besteht aber ein einzelner Schritt darin, daß ein gewisser Faden allein deformiert wird und die anderen fest bleiben.

Dieser einzelne Schritt kann nun weiter in noch einfachere zerlegt werden. Verfolgen wir nämlich die Fadendeformation, so wird unser Faden in gewissen Augenblicken benachbarte Fäden überschreiten oder unterschreiten, ferner werden sich die Überkreuzungen, an denen unser Faden beteiligt ist, verschieben. Geschieht dies an mehreren Stellen zugleich, so kann man dies wieder hintereinander ausführen. Denken wir uns nun an einer Stelle den i^{ten} Faden über den $(i+1)^{\text{ten}}$ gelegt, so wird knapp nach der Überschreitung an dieser Stelle des Zopfes der Teil $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$ eingeschoben erscheinen. Dies gibt uns also keine Relation. Ebenso bedeutet die umgekehrte Operation nur das Weglassen eines Teils $\sigma_i\, \sigma_i^{-1}$.

Es bleibt also noch das „Verschieben" zu betrachten. Es handle sich etwa um σ_i. Solange man mit σ_i nicht eine Überkreuzung passiert, an der der $(i+1)^{\text{te}}$ Faden beteiligt ist, kann im Ausdruck für Z höchstens die Veränderung eintreten, daß σ_i, das vor dem Verschieben einem Gliede σ_k folgte, nunmehr diesem vorangeht. Dabei muß $k \neq i \pm 1$ sein, da der i^{te} und $(i+1)^{\text{te}}$ Faden in dem betrachteten Zopfteil nur an der Überkreuzung σ_i beteiligt sind. (Vgl. Fig. 4.) Diese Umordnung gibt also die Relation:

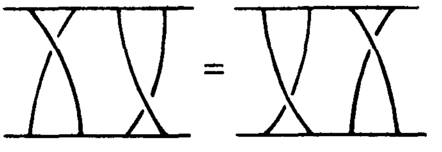

Fig. 4.

(5) $$\sigma_i\, \sigma_k = \sigma_k\, \sigma_i.$$

Wenn man aber beim „Verschieben" von σ_i (etwa nach „oben") eine Überkreuzung passiert, an der der $(i+1)^{\text{te}}$ Faden beteiligt ist, also $\sigma_i^{\pm 1}$, so entnehmen wir Fig. 5, 6, in denen natürlich nur das betroffene Segment unseres Zopfes gezeichnet ist:

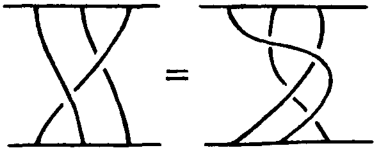

Fig. 5.

$$\sigma_{i+1}^{+1}\, \sigma_i = \sigma_i^{\mp 1}\, \sigma_{i+1}\, \sigma_i^{\pm 1}\, \sigma_{i+1}^{+1}.$$

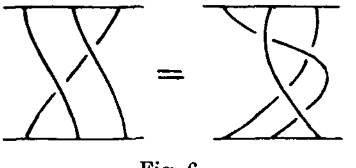

Fig. 6.

Dies gibt in beiden Fällen die Relation:

(6) $$\sigma_i\, \sigma_{i+1}\, \sigma_i = \sigma_{i+1}\, \sigma_i\, \sigma_{i+1}.$$

Die vollkommene Symmetrie von (6) weist schon darauf hin, daß man nichts Neues erhält, wenn man etwa σ_i nach „unten" verschiebt oder wenn man den i^{ten} Faden über den $(i-1)^{\text{ten}}$ zieht. Man kann sich davon mühelos explizit überzeugen. Ebenso führt auch das Verschieben von σ_i^{-1} nur auf (5) und (6).

Das Umordnen der Fäden läuft somit nur auf wiederholte Anwendung der Relationen (5) und (6) hinaus, so daß diese ein System definierender Relationen für unsere Gruppe sind. Wie haben also:

Satz 1. *Die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der Zöpfe n^{ter} Ordnung läßt sich aus den $(n-1)$ Erzeugenden $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_{n-1}$ aufbauen, zwischen denen die Relationen bestehen:*

(7) $$\sigma_i \rightleftarrows \sigma_k, \qquad k \neq i-1,\ i+1$$

(8) $$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i = \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \cdots n-2.$$

Dabei bedeutet nach J. NIELSEN[1]) das Zeichen $\rightleftarrows$ die *Vertauschbarkeit* von σ_i und σ_k.

Für $n = 3$ hat man z. B. die beiden Erzeugenden σ_1 and σ_2 sowie die eine Relation

(9) $$\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_1 = \sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2.$$

Man erkennt übrigens, daß die Gruppe $\mathfrak{Z}_3$ isomorph ist mit der Fundamentalgruppe der Kleeblattschlinge.

§ 4. Zusammenhang mit der Permutationsgruppe von n Ziffern.

Wir bemerken zunächst, daß sich die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ immer durch zwei Erzeugende darstellen läßt. Wir setzen nämlich:

(10) $$a = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}$$

(11) $$\sigma = \sigma_1.$$

Dann hat man wegen (7):

$$a\,\sigma_i = \sigma_1\,\sigma_2 \cdots \sigma_{i-1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+2}\,\sigma_{i+3} \cdots \sigma_{n-1}.$$

Wendet man (8) an, so wird:

$$a\,\sigma_i = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} \cdot \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1} \cdot \sigma_{i+2} \cdots \sigma_{n-1},$$

also wegen (7):

$$a\,\sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} \cdot \sigma_i\,\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1} = \sigma_{i+1} \cdot a$$

oder:

(12) $$\sigma_{i+1} = a\,\sigma_i\,a^{-1}.$$

Durch wiederholte Anwendung erschließt man daraus:

(13) $$\sigma_i = a^{i-1}\,\sigma\,a^{-(i-1)}.$$

---

[1]) J. NIELSEN, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. Mathematische Annalen, Bd. 91, S. 169.

Damit sind aber die σ_i durch die beiden Elemente a und σ ausgedrückt. Wir wollen noch die Relationen auf a und σ umrechnen. Dazu gehen wir so vor. Die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ kann man sich auch erzeugt denken durch die $n+1$ Erzeugenden σ_i, a und σ mit den Relationen (7), (8), (10), (11), (13). Dann ist (12) eine Folge von (13). Wendet man nun (12) wiederholt an auf die Relation (9), so erhält man die allgemeine Relation (8). Man benötigt (8) also nur für $i=1$. Aber auch dies ist überflüssig. Nach (7) ist nämlich σ_1 vertauschbar mit dem Produkt $\sigma_3 \sigma_4 \cdots \sigma_{n-1}$, wegen (10) also mit $\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} a$. Dies gibt:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} a = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} a \cdot \sigma_1 .$$

Nun ist nach (12): $a \sigma_1 = \sigma_2 a$. Trägt man dies ein, so wird:

$$\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 .$$

Dies erkennt man aber nach leichter Umrechnung als Relation (8) für $i=1$ wieder.

Aber auch (7) benötigt man wegen (12) nur für $i=1$. Trägt man in ihr (13) ein, so erhält man nach leichter Änderung der Bezeichnung:

$$(14) \qquad \sigma \rightleftarrows a^i \sigma a^{-i} \quad \text{für} \quad 2 \leqq i \leqq n-2$$

(für $n=3$ keine Relation).

Umgekehrt liefert (14) und (13) die Relation (7). Es bleiben also noch die Relationen (10), (11), (13), (14). Man trage nun (13) ein in (10) und erhält:

$$a = \sigma a \sigma a \cdots a \sigma a^{-(n-2)} = a^{-1} (a \sigma)^{n-1} \cdot a^{-(n-2)} .$$

Dies gibt die Relation:

$$(15) \qquad a^n = (a \sigma)^{n-1} .$$

Aus (15) und (13) ergibt sich umgekehrt (10), so daß man der Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ auch die Relationen (11), (13), (14), (15) zugrunde legen kann. In ihnen haben aber (11) und (13) nur den Charakter von Benennungen, so daß man sie weglassen kann. Dann aber bleiben nur die beiden Erzeugenden a und σ mit den Relationen (14) und (15) übrig.

Die Elemente a und $a\sigma$ erzeugen auch die ganze Gruppe. Nach (15) ist a^n Potenz von jeder dieser Erzeugenden. Somit ist a^n mit ihnen, also auch mit jedem Element der Gruppe vertauschbar. Dies folgt allein aus (15). Nun ist leicht zu sehen, daß man die Hälfte der Relationen (14) weglassen kann. Aus (14) folgt nämlich nach Transformation mit a^{-i}:

$$a^{-i} \sigma a^i \rightleftarrows \sigma$$

also:

$$\sigma \rightleftarrows a^{-i}\sigma a^{i} = a^{n}\cdot a^{-i}\sigma a^{i}\cdot a^{-n}$$

oder

$$\sigma \rightleftarrows a^{(n-i)}\sigma a^{-(n-i)}$$

Wir haben also:

Satz 2. *Die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ besitzt die zwei Erzeugenden a und σ mit den definierenden Relationen:*

$$a^n = (a\sigma)^{n-1} \tag{16}$$

$$\sigma \rightleftarrows a^i\sigma a^{-i} \quad \text{für} \quad 2 \leqq i \leqq \frac{n}{2}. \tag{17}$$

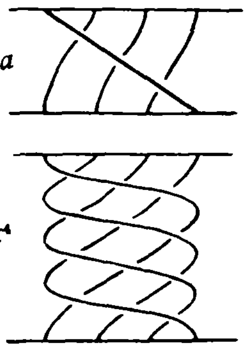

Fig. 7.

In Fig. 7 sind die beiden Zöpfe a und a^n für $n = 4$ gezeichnet. Wir erkennen, daß a^n aus dem Zopf E durch eine volle Torsion aller Fäden erhalten wird, und sehen nunmehr auch anschaulich ein, daß a^n mit jedem Zopf vertauschbar ist.

Nehmen wir nun zu unseren Relationen (16), (17) noch die weitere, in unserer Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ natürlich *nicht* erfüllte Relation:

$$\sigma^2 = 1 \tag{18}$$

hinzu. Was für eine Gruppe ergibt dies? Aus (13) folgt dann auch $\sigma_i^2 = 1$ oder $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$. Dies bedeutet geometrisch, daß es bei einer Überkreuzung nicht darauf ankommt, welcher Faden oben läuft, daß also bei den Deformationen eines Zopfes auch Durchdringungen der Fäden zugelassen werden. Wenn aber das der Fall ist, so kommt es aber offenbar nur noch darauf an, mit welchem Punkte B_{r_i} ein Punkt A_i verbunden ist, da man, falls Durchdringung erlaubt ist, jede Verschlingung der Fäden in jede andere deformieren kann. Es kommt also nur auf die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ an. Komponiert man zwei Zöpfe, so komponieren sich die zugehörigen Permutationen. Die gesuchte Gruppe stellt sich also als die Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ von n Ziffern heraus. Wir haben also:

Satz 3. *Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Permutationen von n Ziffern besitzt zwei Erzeugende a und σ mit den definierenden Relationen* (16), (17), (18).

Offenbar ist σ die Transposition $(1, 2)$ und a der n-gliedrige Zyklus $(n, n-1, \cdots, 2, 1)$. Literaturangaben über das Relationensystem der symmetrischen Gruppe findet man in der schon zitierten Arbeit von J. Nielsen [1]. Es werde noch hervorgehoben, daß bei Nielsen die weitere.

nach dem Bewiesenen überflüssige Relation $a^n = 1$ gefordert wird. Sie muß Folgerelation von (16), (17), (18) sein, was man auch durch direktes Rechnen, wenn auch etwas umständlich, bestätigen kann.

Der gruppentheoretische Zusammenhang zwischen $\mathfrak{Z}_n$ und $\mathfrak{S}_n$ ist der, daß $\mathfrak{S}_n$ die Faktorgruppe des vom Element σ^2 erzeugten Normalteilers $\mathfrak{P}_n$ in bezug auf $\mathfrak{Z}_n$ ist. Die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{P}_n$ ist die, daß $\mathfrak{P}_n$ die Gruppe aller Zöpfe mit identischer Permutation bezeichnet.

§ 5. Der geschlossene Zopf.

Wir betrachten im Raum irgendeine Gerade h, die „Achse". Ferner sei ein Zopf Z vorgelegt. Wir schlingen Z, ohne ihn zu tordieren, um die Achse h, so daß die Geraden g_1 und g_2 zusammenfallen und der Punkt A_i auf B_i zu liegen kommt. Nun löschen wir den „Rahmen". Das entstehende topologische Gebilde, bei dem also das Ende von μ_i mit dem Anfang von μ_{r_i} verknüpft ist, nennen wir den zu Z gehörigen geschlossenen Zopf.

Als erlaubte Abänderung betrachten wir dabei jede Deformation der Fäden, bei der die Achse h nicht überschritten wird. Dabei darf die Deformation auch an den früher festzuhaltenden Punkten A_i ausgeführt werden, die jetzt gleichberechtigt mit allen anderen Punkten sind. Da somit die in den Punkten A_i ursprünglich bestehende Orientierung ihre Bedeutung verliert, liegt in einem geschlossenen Zopf nur noch die eine Orientierung, die die Fäden erhalten haben, also der Umlaufsinn um die Achse h. In Fig. 8 ist ein Beispiel eines geschlossenen Zopfes für $n = 3$ gezeichnet. Er gehört zum Zopf:

$$Z = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}.$$

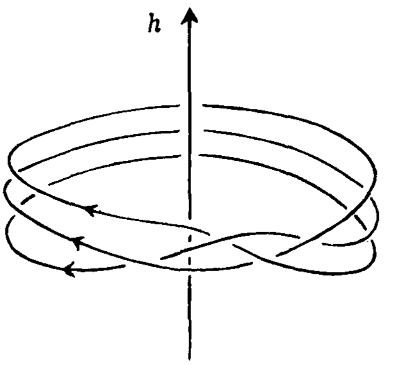

Fig. 8.

Welche Zöpfe Z' geben den gleichen geschlossenen Zopf wie Z? Zu den früher besprochenen Abänderungen kommt noch hinzu, daß man jetzt auch an der Verknüpfungsstelle abändern darf. Man kann dort also das Glied $X^{-1} \cdot X$ einschieben. Dies führt aber auf den Zopf $Z' = XZX^{-1}$. Außerdem hat man noch die Relationen von $\mathfrak{Z}_n$ anzuwenden. Schneidet man den geschlossenen Zopf an einer anderen Stelle auf, etwa von der Art, daß erst nach dem Zopfteil Y die alte Verknüpfungsstelle kommt, so führt dies auf einen Zopf $Z'' = YZY^{-1}$, da ja hinten der Teil Y wieder fehlen muß. Dies sind aber jetzt alle neu hinzukommenden zulässigen Abänderungen, so daß wir haben:

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Zöpfe Z und Z' denselben geschlossenen Zopf erzeugen, ist die Existenz eines Zopfes X, so daß*

$$Z' = XZX^{-1} \tag{19}$$

ist, daß also Z in Z' transformierbar ist.

Zu jedem geschlossenen Zopf gehört also eine ganze Klasse äquivalenter Elemente aus $\mathfrak{Z}_n$ und umgekehrt.

Löscht man bei einem geschlossenen Zopf auch noch die Achse h, so geht er in eine Verkettung einer gewissen Anzahl geschlossener orientierter Kurven bzw. in einen Knoten über. In unserer Fig. 8 liegt eine einzige Kurve, also ein Knoten vor (übrigens die Doppelschlinge).

Man überlegt sich leicht, wie man aus dem Ausdruck für Z erkennt, in wieviel Kurven der geschlossene Zopf zerfällt. Zu jedem Z gehört nämlich eine gewisse Permutation π, die man erhält, wenn man in Z das Element σ_i durch die Transposition $(i, i+1)$ ersetzt. Man zerlege nun π in Zyklen. Die Anzahl dieser Zyklen ist dann die Anzahl der Kurven, in die der zugehörige geschlossene Zopf zerfällt.

Hier setzt nun der Zusammenhang mit beliebigen Verkettungen und Knoten ein. Es gilt nämlich

Satz 5. *Jede beliebige Verkettung (oder Knoten) läßt sich bei beliebiger Orientierung der Komponenten als geschlossener Zopf darstellen (natürlich nicht eindeutig).*

Herrn H. KNESER verdanke ich die Mitteilung, daß für diesen Satz bisher schon zwei Beweise vorliegen. Der eine stammt von H. BRUNN[2]), der andere von J. W. ALEXANDER[3]). Ich unterdrücke daher hier meinen ursprünglichen Beweis und verweise etwa auf die Alexandersche Arbeit. Der dortige Beweis läßt an Einfachheit und Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig. Es sei nur noch gestattet darauf hinzuweisen, daß sich aus diesem Satz unmittelbar eine Vermutung von H. WEITH[4]) bestätigen läßt, nach der jede Verkettung nach passender Deformation eine wendepunktfreie Projektion besitzt.

Es mögen noch als Beispiele einige einfache Knoten und Verkettungen als geschlossener Zopf dargestellt werden:

1. Verkettung auf dem Torus mit n-Längsumläufen und r-Querumläufen: Ordnung des Zopfes Z ist dann n und $Z = a^r$, wo a durch (10) erklärt ist.

---

[2]) H. BRUNN, Über verknotete Curven. Verh. Math.-Kongr. Zürich 1897, S. 256.

[3]) J. W. ALEXANDER: A Lemma on Systems of Knotted Curves. Proc. Nat. Ac. U. S. A., vol. 9, S. 93.

[4]) Vgl. Enzyklopädieartikel M. DEHN III AB 3. Seite 209.

Für die beiden Kleeblattschlingen hat man insbesondere $Z = \sigma_1^3$ bzw. $Z = \sigma_1^{-3}$ bei $n = 2$.

2. Doppelschlinge: Zopf 3. Ordnung $Z = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^2$.

3. Verkettung zweier Kreise mit verschwindendem Verschlingungsintegral (vgl. Enzyklopädieartikel III AB 3, Fig. 21) $n = 3$ und etwa: $Z = \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$.

4. Verkettung dreier Kreise, bei denen je zwei unverkettet sind: $n = 3$ und $Z = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^3$.

Die Umformung eines Knotens in einen geschlossenen Zopf macht übrigens auch bei komplizierten Gebilden keine Schwierigkeiten, wenn man die zum Beweis von Satz 5 benutzte Methode verwendet. Ohne Anlehnung an diese Methode, also durch reines Probieren, ist sie ein empfehlenswertes Geduldspiel.

Will man nun auf diesem Wege dem Studium der Knoten und Verkettungen näherkommen, so hat man zunächst zwei Probleme zu lösen:

1. Wann sind zwei Zöpfe Z und Z' einander gleich? Es wird also nach einem finiten Verfahren gesucht, das gestattet zu entscheiden, ob zwei Elemente Z und Z' unserer Gruppe, die in σ-Darstellung gegeben seien, auf Grund der definierenden Relationen ineinander überführbar sind. Nach Dehn nennt man diese Frage das *Wortproblem* für die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$.

2. Wann sind zwei geschlossene Zöpfe einander gleich, wann sind also zwei Elemente Z und Z' ineinander transformierbar? Dies ist das *Transformationsproblem* unserer Gruppe $\mathfrak{Z}_n$.

Wenn diese Probleme gelöst sind, kann man an die Frage herantreten, wie die verschiedenen Arten eine Verkettung als geschlossenen Zopf darzustellen miteinander zusammenhängen. Ich glaube, daß es möglich sein wird, auf diese Frage eine befriedigende Antwort zu geben.

Im folgenden beschäftigen wir uns hauptsächlich mit der ersten Frage. Ihre Lösung wird uns gelingen, sobald wir den Zusammenhang mit den üblichen Begriffen der Topologie, vor allem mit der Fundamentalgruppe einer Verkettung hergestellt haben.

§ 6. Die Fundamentalgruppe.

Wir betrachten einen Zopf Z und den zugehörigen geschlossenen Zopf. Die dazugehörige Verkettung besitzt eine Fundamentalgruppe (im üblichen Sinne), zu deren Bestimmung wir uns nun wenden.

Wir wählen also im Raum einen festen Punkt P und betrachten die von P ausgehenden geschlossenen orientierten Wege. Dabei wird ein Weg die Identität genannt, wenn er sich auf den Punkt P zusammenziehen läßt, ohne die Verkettung zu überschreiten; dabei wird allerdings

Selbstdurchdringung des Weges zugelassen. Allgemein heißen zwei Wege gleich, wenn sie sich, ohne die Verkettung zu schneiden, ineinander deformieren lassen. Unter der Fundamentalgruppe der Verkettung versteht man dann bekanntlich die Gruppe dieser Wege, wobei Komposition ein sukzessives Durchlaufen der Einzelwege bedeutet.

Sei nun

$$Z = \sigma_i^{\pm 1} \sigma_{i'}^{\pm 1} \sigma_{i''}^{\pm 1} \cdots \sigma_{i^{(r-1)}}^{\pm 1}.$$

Wir denken uns gemäß dieser Darstellung den geschlossenen Zopf wirklich in Schichten zerlegt, deren erste aus σ_i, deren zweite aus $\sigma_{i'}$ usw. besteht. Fassen wir nun im ersten Abschnitt die Fäden knapp vor σ_i ins Auge und nennen einen Umlauf um den ν^{ten} Faden t_ν. Dabei soll man, wenn man sich etwa wie in unserer Figur den Punkt P links vom Zopf gelegen denkt, vom Punkte P aus über die Fäden von 1 bis $\nu - 1$ weglaufen, den ν^{ten} Faden von unten her umkreisen und wieder über die vorangegangenen Fäden zum Punkt P zurückkehren. Die analogen Umläufe um die Fäden der zweiten Schicht knapp vor $\sigma_{i'}$ nennen wir $t'_1, t'_2, \cdots t'_n$. Dasselbe machen wir in jeder der Schichten. Die letzten Umläufe, die eingeführt werden, knapp von $\sigma_{i^{(r-1)}}$, heißen $t_\nu^{(r-1)}$. Geht man noch eine Schicht weiter, so kommt man, da der Zopf geschlossen ist zur ersten, also zu den Umläufen $t_1\, t_2 \cdots t_n$ zurück, denen wir deshalb auch den Namen $t_1^{(r)}, t_2^{(r)} \cdots t_n^{(r)}$ geben.

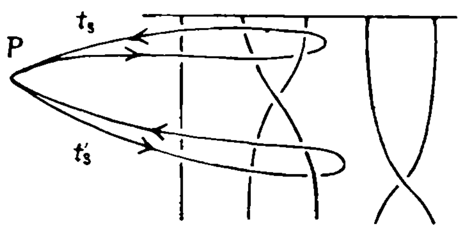

Fig. 9.

Die Erzeugenden der Fundamentalgruppe und die definierenden Relationen findet man nun wohl am einfachsten mit Hilfe einer Methode, die Herr WIRTINGER in seinen Vorlesungen entwickelt hat und deren Kenntnis ich Herrn SCHREIER verdanke.

Man denke sich zunächst den Zopf so gelegt, daß seine Projektion auf die Zeichenebene schematisch unsere Zerlegung in Schichten wiedergibt. Nunmehr lege man durch jeden Punkt des Zopfes eine Gerade, die auf der Zeichenebene senkrecht steht und betrachte die „untere" Hälfte dieser

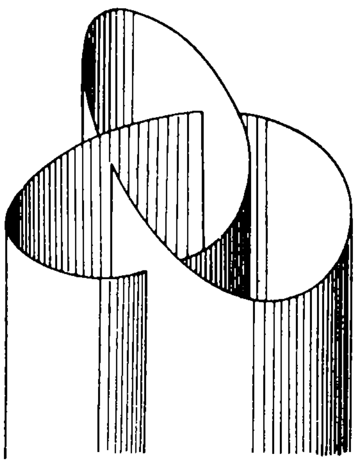

Fig. 10.

Geraden. Diese Halbstrahlen erfüllen einen Zylinder, der vom geschlossenen Zopf berandet wird. Unsere Fig. 10 zeigt ihn für den Fall der Kleeblattschlinge in Seitenansicht. Die Verlängerungen der Selbstdurchdringungskanten des Zylinders laufen dann durch einen Überkreuzungspunkt des Zopfes.

Ein beliebiger Weg um unseren geschlossenen Zopf wird nun den Zylinder in gewissen Punkten durchdringen. Da nun der längs des Zylinders aufgeschnittene Raum einfach zusammenhängt, ist der Weg umgekehrt durch Angabe der Durchdringungspunkte, ihrer Reihenfolge und der Richtung der einzelnen Durchdringung bis auf Deformationen, die den Zylinder nicht treffen, eindeutig bestimmt. Bei Komposition zweier Wege sind ferner die Durchdringungspunkte der Komponenten hintereinander zu setzen.

Die Selbstdurchdringungskanten zerlegen den Zylinder in einzelne Wandteile, die ihrerseits frei von Durchdringungskanten sind (dabei hat man allerdings die Selbstdurchdringungskanten auf den Zylinder bis zum äußersten Rand zu verlängern). Da man auf einer solchen Wand den Durchdringungspunkt bei einfachster Deformation des Weges beliebig verschieben kann, kommt es also für die Fundamentalgruppe nur darauf an, welche Wände durchsetzt werden. Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß man einen beliebigen Weg stets aus solchen Elementarwegen komponieren kann, die jeweils nur eine Wand in einem bestimmten Sinn durchsetzen.

Das tun nun unsere vorhin eingeführten Umläufe; andererseits gibt es auch zu jeder Wand einen Umlauf, der gerade sie durchsetzt. Die $t_\nu^{(s)}$ sind also Erzeugende der Fundamentalgruppe. Dabei wollen wir aber gleich hervorheben, daß die Durchsetzungen einer Wand mitunter verschiedene Namen haben. Zum Beispiel durchsetzen die Umläufe t_ν und t'_ν genau dieselbe Wand, wenn dieser Teil des Zylinders an der Überkreuzung σ_i nicht beteiligt ist, wenn also $\nu \neq i, i+1$ ist. Dies führt bereits auf die Relation:

$$(20) \qquad t_\nu = t'_\nu. \qquad \nu \neq i,\ i+1.$$

Analoge Relationen gelten natürlich zwischen t'_ν und t''_ν.

Um nun die Relationen der Fundamentalgruppe zu bestimmen, hat man zu beachten, daß ein Weg einer beliebigen Deformation unterworfen werden darf, sofern nur unser Zopf nicht überschritten wird. Eine solche Deformation läßt sich immer auf den Zusatz kleiner Kreise zurückführen, die den Zopf nicht umschlingen. Wir finden also die Relationen, wenn wir die Bedingung dafür aufstellen, daß ein solcher kleiner Kreis stets die Identität ist. Dabei kommt es natürlich nur auf die Wände an, die dieser Kreis durchsetzt. Durchsetzt er nur eine Wand, so liefert dies nichts Neues, da dies nur auf das bereits berücksichtigte Verschieben eines Durchdringungspunktes auf einer Wand hinausläuft. Es bleiben dann noch zwei Möglichkeiten. (Siehe Fig. 11.)

1. Der kleine Weg umkreist eine Selbstdurchdringungskante, etwa die von $\sigma_i^{\pm 1}$ herrührende. Dies führt auf:

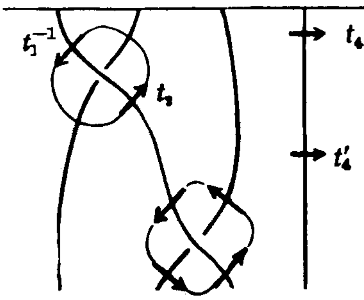

Fig. 11.

$$t_i\, t_{i+1}\, t'^{-1}_{i+1}\, t'^{-1}_i = 1$$

oder

$$t_i\, t_{i+1} = t'_i\, t'_{i+1}. \tag{21}$$

2. Der kleine Weg umkreist die Verlängerung einer Selbstdurchdringungskante, etwa die bei $\sigma_i^{\pm 1}$. Hier muß man unterscheiden. Für $Z = \sigma_i^{+1} \cdots$ erhält man:

$$t_i = t'_{i+1}, \tag{22}$$

für $Z = \sigma_i^{-1} \cdots$ aber wird

$$t_{i+1} = t'_i. \tag{23}$$

Daraus findet man insgesamt:

$$t_\nu = t'_\nu \text{ für } \nu \neq i,\ i+1$$

$$Z = \sigma_i \cdots \begin{cases} t_i = t'_{i+1} \\ t_{i+1} = t'^{-1}_{i+1}\, t'_i\, t'_{i+1} \end{cases} \text{bzw. } Z = \sigma_i^{-1} \cdots \begin{cases} t_i = t'_i\, t'_{i+1}\, t'^{-1}_i. \\ t_{i+1} = t'_i \end{cases} \tag{24}$$

Analoge Relationen natürlich zwischen t'_ν und t''_ν usw. Dies sind dann die gesuchten Relationen der Fundamentalgruppe. Dabei beachte man nur, daß bei den zum Segment von $\sigma^{\pm 1}_{i(r-1)}$ gehörigen Relationen rechts $t^{(r)}_\nu = t_\nu$ ist.

Die Relationen (24) lassen sich nach t'_ν auflösen, wie ja schon aus der Symmetrie der ursprünglichen Relationen hervorgeht. Daraus folgert man, daß schon die Umläufe $t_1, t_2, \cdots t_n$ Erzeugende der Fundamentalgruppe sind, da man ja die übrigen Umläufe $t'_\nu, t''_\nu \cdots$ durch sie ausdrücken kann.

Um nun die Relationen in diesen Erzeugenden allein zu haben, hat man aus (24) und den analog gebauten Gleichungen die überflüssigen Größen zu eliminieren. Dies geschieht so. Man setze in (24) für die t'_ν ihre Ausdrücke durch die t''_ν ein (es sind dies die im zweiten Segment aufzustellenden Relationen, die genau wie (24) aussehen). Dadurch ist t'_ν eliminiert und t_ν durch die t''_ν ausgedrückt. Die t''_ν drücke man durch die t'''_ν aus und fahre so fort. Hat man schließlich die $t^{(r-1)}_\nu$ durch die $t^{(r)}_\nu$

ausgedrückt, so beachte man $t_\nu^{(r)} = t_\nu$ und erhält so die gewünschten Relationen zwischen den t_ν allein.

Um diese Rechnung bequemer ausführen zu können, betrachte man (24) als Substitution, in der man dann die Akzente weglassen kann. Man ordne also dem Element σ_i die Substitution

$$\bar{\sigma}_i = \begin{pmatrix} t_\nu & t_i & t_{i+1} \\ t_\nu & t_{i+1} & t_{i+1}^{-1}\, t_i\, t_{i+1} \end{pmatrix}$$

zu, wobei $\nu \neq i, i+1$ ist. Ebenso dem Element σ_i^{-1} die Substitution:

$$\bar{\sigma}_i^{-1} = \begin{pmatrix} t_\nu & t_i & t_{i+1} \\ t_\nu & t_i\, t_{i+1}\, t_i^{-1} & t_i \end{pmatrix}.$$

Bezüglich dieser Schreibweise bemerken wir, daß eine leichte Rechnung die Substitutionen $\bar{\sigma}_i$ und $\bar{\sigma}_i^{-1}$ wirklich als inverse nachweist.

Der Prozeß, in (24) t'_ν durch die t''_ν auszudrücken, läuft nun auf Komposition der Substitutionen $\bar{\sigma}_i^{\pm 1}$ und $\bar{\sigma}_{i'}^{\pm 1}$ hinaus. Um das Endresultat zu erhalten, hat man die Substitution

$$\bar{\sigma}_i^{\pm 1}\, \bar{\sigma}_{i'}^{\pm 1} \cdots \bar{\sigma}_{i^{(r-1)}}^{\pm 1}$$

auszurechnen. Wir wollen sie mit $\bar{Z}$ bezeichnen. Es sei nun $\bar{Z} = \begin{pmatrix} t_\nu \\ T_\nu \end{pmatrix}$ wo T_ν ein Potenzprodukt der t_ν ist. Dann lauten die gesuchten Relationen der Fundamentalgruppe: $t_\nu = T_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$.

Satz 6. *Um die Fundamentalgruppe der zu einem geschlossenen Zopf Z gehörigen Verkettung zu erhalten, ersetze man im Ausdruck für Z die Elemente σ_i bzw. σ_i^{-1} durch die Substitutionen:*

$$\text{(25)} \qquad \bar{\sigma}_i = \begin{pmatrix} t_\nu & t_i & t_{i+1} \\ t_\nu & t_{i+1} & t_{i+1}^{-1}\, t_i\, t_{i+1} \end{pmatrix} \quad (\text{wo } \nu \neq i, i+1).$$

$$\text{(26)} \qquad \bar{\sigma}_i^{-1} = \begin{pmatrix} t_\nu & t_i & t_{i+1} \\ t_\nu & t_i\, t_{i+1}\, t_i^{-1} & t_i \end{pmatrix}.$$

Das Resultat, nach Komposition aller Substitutionen, ist eine gewisse Substitution $\bar{Z}$ etwa:

$$\text{(27)} \qquad \bar{Z} = \begin{pmatrix} t_\nu \\ T_\nu \end{pmatrix} \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots n,$$

wo die T_ν Potenzprodukte der t_ν sind. Die Relationen der Fundamentalgruppe lauten dann:

$$\text{(28)} \qquad t_\nu = T_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots n.$$

Wir haben noch, einer späteren Anwendung willen, die geometrische Bedeutung der Relationen (28) zu erläutern, wenn wir die t_ν in der ursprünglichen Weise als Umläufe deuten.

Was zunächst (24) betrifft, so gibt dies an, wie sich die Umläufe t_ν durch die t'_ν ausdrücken, wenn man sie aus dem ersten Segment des Zopfes in das zweite verschiebt. Unsere Relationen (24) hätten auch auf diese Weise gewonnen werden können und man überzeugt sich leicht an der Hand einer Skizze, daß man sie so in der Tat erhält. Der daraufhin angewendete Prozeß der Elimination besagt nun einfach, daß ein Umlauf t_ν vom ersten Zopfsegment ins zweite verschoben wird, von dort ins dritte usw., bis man schließlich wieder im ersten Segment ankommt. Aus t_ν ist dann eine Verschlingung T_ν mit den ursprünglichen Fadenteilen geworden, so daß sich T_ν direkt durch die t_ν als Potenzprodukt ausdrücken läßt, ohne das erste Segment weiter zu verlassen. Die Relation $t_\nu = T_\nu$ besagt also, daß t_ν, nachdem es einmal um den ganzen Zopf herumgeführt wird, die Form T_ν angenommen hat.

Es sei noch erwähnt, daß bei der Komposition der $\bar{\sigma}_i$ zwischen den t_i keinerlei Relationen vorausgesetzt werden dürfen, daß sie also als freie Veränderliche zu betrachten sind.

§ 7. Das Wortproblem.

Nunmehr lassen wir für den Augenblick die Beziehung unserer Substitutionen zur Fundamentalgruppe beiseite und betrachten sie an sich.

Hängt die Substitution $\bar{Z}$ ab von der Art und Weise, wie Z durch die σ_i ausgedrückt ist?

Dies ist nicht der Fall. Denn man rechnet mühelos nach, daß die *Substitutionen* $\bar{\sigma}_i$ auch die Relationen

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\bar{\sigma}_i \rightleftarrows \bar{\sigma}_k\,, \qquad k \neq i \pm 1 \\ &\bar{\sigma}_i\, \bar{\sigma}_{i+1}\, \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{i+1}\, \bar{\sigma}_i\, \bar{\sigma}_{i+1} \end{aligned}$$

identisch in den t_ν erfüllen. Ferner wurde schon bemerkt, daß $\bar{\sigma}_i$ und $\bar{\sigma}_i^{-1}$ wirklich inverse Substitutionen sind.

Eine Anwendung der Relationen (7), (8) auf Z bewirkt also keinerlei Veränderung in der Substitution $\bar{Z}$, da ja die $\bar{\sigma}_i$ die gleichen Relationen erfüllen. $\bar{Z}$ ist also eindeutig durch Z bestimmt.

Aus der Definition von $\bar{Z}$ folgt ferner direkt:

$$(30)\qquad \overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1\, \bar{Z}_2\,; \qquad \overline{Z^{-1}} = \bar{Z}^{-1}.$$

Die Substitutionen $\overline{Z}$ bilden also eine mit $\mathfrak{Z}_n$ isomorphe Gruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_n$. Man wird nun schon vermuten, daß dies ein einstufiger Isomorphismus ist, daß also auch aus

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 \quad \text{folgt} \quad Z_1 = Z_2.$$

Wegen (30) ist dies gleichwertig mit $\overline{Z_1 Z_2^{-1}} = 1$ und $Z_1 Z_2^{-1} = 1$. Es genügt also nachzuweisen, daß aus

$$\overline{Z} = 1 \quad \text{folgt} \quad Z = 1.$$

Dieser Nachweis gelingt nun in der Tat. Denn nach der geometrischen Bedeutung von $\overline{Z}$ besagt $\overline{Z} = 1$, daß der Umlauf t_ν in sich selbst übergeht, wenn man ihn einmal um den ganzen Zopf herumführt. Wir denken uns nun den Umlauf t_ν von folgender Beschaffenheit.

Der Punkt P werde zunächst in Richtung der Achse des geschlossenen Zopfes ins Unendliche verlegt. Von P aus gehe man längs einer Kurve $\mathfrak{C}$ (die natürlich der ursprünglichen Bedeutung von t_ν entspricht) bis knapp an den ν^{ten} Faden, umkreise ihn längs eines kleinen Kreises und laufe längs $\mathfrak{C}$ wieder zurück nach P. Verschiebt man nun den Umlauf t_ν einmal den ganzen Zopf entlang, so beschreibt die Kurve $\mathfrak{C}$ eine Fläche F, die den Zopf an keiner Stelle trifft, da man ja von $\mathfrak{C}$ dasselbe voraussetzt. Beachten wir nun, daß t_ν, wenn es einmal herumgekommen ist, sich identisch in t_ν überführen läßt (ohne etwa wieder rückwärts zu laufen, denn dies war ja die geometrische Bedeutung von T_ν). Die Fläche F wird dann geschlossen. Man kann es nun auch noch so einrichten, daß die Fläche F auch die Achse des Zopfes nie durchsetzt, da sich ja die wesentlichen Deformationen weit entfernt von der Achse abspielen.

Der kleine Kreis aber beschreibt einen Torus, der auf der Berandung der Fläche F aufsitzt und im Innern einen Faden enthält. Dieser Faden ist somit schon nach einem Umlauf geschlossen, also ein Kreis. Man lasse diesen Faden nun auf die Wandung des Torus gleiten, von hier auf die Fläche F und dann diese Fläche entlang ins Unendliche. Bei dieser Deformation des Fadens trifft er nie die übrigen Zopfteile, da ja weder Torus noch Fläche F die Zopfteile schneidet. Aus demselben Grund trifft er nie die Achse. Dieser Kreis ist somit mit dem Rest des Zopfes unverkettet. Da der ν^{te} Faden beliebig war, läßt sich also der geschlossene Zopf Z in n unverkettete Kreise um die Achse deformieren. Wegen Satz 4 gibt es also ein X von der Art, daß

$$X Z X^{-1} = 1$$

ist. Dies besagt aber $Z = 1$, womit alles gezeigt ist.

Satz 7. *Die den Zöpfen Z zugeordneten Substitutionen $\bar{Z}$ sind ihnen eineindeutig zugeordnet, sie bilden also eine mit $\mathfrak{Z}_n$ einstufig isomorphe Gruppe.*

Nun ist es ein leichtes, das Wortproblem unserer Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ zu lösen. Darunter verstehen wir, wie schon erwähnt, die Angabe eines finiten Verfahrens die Identität zweier Elemente Z_1 und Z_2, die in ihrer Darstellung durch die σ_i gegeben seien, zu entscheiden. Sie sind eben dann und nur dann gleich, wenn die zugehörigen Substitutionen $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ identisch übereinstimmen. Dies ist aber unmittelbar zu entscheiden. Wir erhalten also:

Satz 8. *Um die Identität zweier Zöpfe Z_1 und Z_2 zu entscheiden, bilde man nach der Vorschrift von Satz 6 die zugehörigen Substitutionen $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$. Man sehe nun nach, ob $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$ ist oder nicht.*

Durch dieses Verfahren ist die Fundamentalgruppe der zugehörigen geschlossenen Zöpfe gleich mitbestimmt. Wenden wir es auf einfache Beispiele an, so erhalten wir in der Tat nach leichten Umformungen die Relationen.

§ 8. Algebraische Kennzeichnung der Fundamentalgruppe einer Verkettung.

Die aufgestellten Substitutionen $\bar{Z} = \begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}$ bilden eine Gruppe. Eine naheliegende Frage ist es nun, wodurch sich die Potenzprodukte T_i algebraisch kennzeichnen lassen. Für den Fall der Gruppenerzeugenden (25) erkennen wir, daß t_ν übergeht in eine gewisse Transformierte eines anderen t_μ. Dasselbe muß also auch bei den T_i gelten, sie haben also die Form

$$T_i = Q_i^{-1} t_{r_i} Q_i. \tag{31}$$

Dabei ist Q_i ein gewisses Potenzprodukt und $\begin{pmatrix} i \\ r_i \end{pmatrix}$ die zu Z gehörige Permutation. Man kann annehmen, daß (31) die unverkürzbare Form von T_i ist.

Die Gruppenerzeugenden (25) führen ferner das Produkt $t_1 t_2 \cdots t_n$ in sich über. Auch dies muß allgemein gelten, es ist also identisch:

$$T_1 T_2 \cdots T_n = t_1 t_2 \cdots t_n. \tag{32}$$

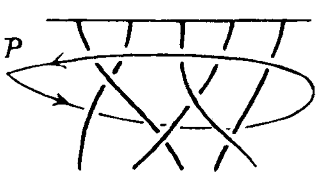

Fig. 12.

Die Bedingung (32) ist anschaulich einleuchtend. Denn die rechte Seite ist, wie man sich leicht überlegt, ein Umlauf um alle Fäden unseres Zopfes zugleich und wird somit beim Herumschieben nicht verändert. Siehe Fig. 12.

Die Bedingungen (31) und (32) reichen aber bereits hin. Potenzprodukte T_i, die sie befriedigen, liefern in $\overline{Z} = \begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}$ auch umgekehrt eine zu einem Zopf gehörige Substitution.

Zum Beweise gehen wir ähnlich vor wie NIELSEN bei der Isomorphismengruppe der freien Gruppe. Die T_i mögen also in unverkürzbarer Form die Gestalt (31) haben und identisch (32) befriedigen.

Wir behaupten nun zunächst: Es gibt ein ν von der Art, daß entweder Q_ν in (32) den rechts davon stehenden Teil $Q_{\nu+1}^{-1}\, t_{r_{\nu+1}}$ verzehrt (daß sich dieser Teil also gegen einen Teil von Q_ν hebt) oder aber $Q_{\nu+1}^{-1}$ den links davon stehenden Teil $t_{r_\nu}\, Q_\nu$. Ein solches ν kann es nur dann nicht geben, wenn identisch gilt $T_\nu = t_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, ein Fall, der sofort zu übersehen ist, da dann die identische Substitution vorliegt, der zugehörige Zopf also die Einheit ist.

Damit nämlich (32) zutrifft, müssen sich auf der linken Seite Kürzungen vornehmen lassen. Dabei kann es zunächst geschehen, daß es ein Glied T_i gibt, das von seinen Nachbarn T_{i-1} und T_{i+1} zur Gänze verzehrt wird. Betrachten wir zunächst diesen Fall. Dann verschwindet beim Kürzen in

$$Q_{i-1}^{-1}\, t_{r_{i-1}}\, Q_{i-1} \cdot Q_i^{-1}\, t_{r_i}\, Q_i \cdot Q_{i+1}^{-1}\, t_{r_{i+1}}\, Q_{i+1}$$

der mittlere Teil vollständig. Beobachten wir nun, wogegen sich t_{r_i} weghebt. Da kommen zunächst die Terme $t_{r_{i-1}}$ und $t_{r_{i+1}}$ ihres Exponenten wegen schon nicht in Betracht.

Kürzt sich nun t_{r_i} gegen ein Glied aus Q_{i-1}^{-1}, so verzehrt vor dieser Kürzung der Term Q_i^{-1} sicher die Glieder $t_{r_{i-1}}\, Q_{i-1}$ und wir sind fertig. Kürzt sich t_{r_i} gegen Q_{i-1}, so muß vorher Q_{i-1} sicher auch noch Q_i^{-1}, im ganzen also $Q_i^{-1}\, t_{r_i}$, verzehren und wir sind wieder zu Ende. Kürzt sich t_{r_i} aber nach rechts gegen Q_{i+1}^{-1}, so muß Q_{i+1}^{-1} die Glieder $t_{r_i}\, Q_i$ verzehren, kürzt es sich gegen Q_{i+1}, so muß wieder das Glied Q_i die Terme $Q_{i+1}^{-1}\, t_{r_{i+1}}$ verschluckt haben. In jedem Falle ist also ein solches ν gefunden.

Der andere Fall wäre der, daß keines der Glieder T_i von seinen beiden Nachbarn völlig verzehrt wird. Nehmen wir dann in (32) diese Kürzungen vor, so bleibt von jedem Teil T_i ein Überrest R_i stehen, der gegen seine Nachbarn keine Kürzung mehr zuläßt und durch sein Vorhandensein auch Kürzungen entfernterer T_ν ausschließt. Die linke Seite geht dann in den unverkürzbaren Ausdruck $R_1\, R_2 \cdots R_n$ über, der gleich $t_1\, t_2 \cdots t_n$ sein soll. Dies geht nur, wenn $R_i = t_i$ ist. Beim Kürzen bleibt also von T_i genau t_i stehen. Nun schließen wir so weiter:

Von T_1 bleibt t_1 stehen. Da links von T_1 überhaupt nichts steht, muß also T_1 mit diesem Glied t_1 beginnen. Hierbei treten wieder zwei Fälle auf.

1. $Q_1 \neq 1$. Dann hat Q_1^{-1} die Form $Q_1^{-1} = t_1 \bar{Q}_1^{-1}$, also $T_1 = t_1 \bar{Q}_1^{-1} t_{r_1} Q_1$. Der Teil $\bar{Q}_1^{-1} t_{r_1} Q_1$ muß sich nun gegen $T_2 = Q_2^{-1} t_{r_2} Q_2$ wegheben, da ja jetzt Kürzungen nur zwischen Nachbarn eintreten und von T_1 nur t_1 stehen bleibt. Dabei wird sich t_{r_1} wieder entweder gegen Q_2^{-1} kürzen oder gegen Q_2. Im ersten Fall muß Q_2^{-1} das Produkt $t_{r_1} Q_1$ verzehren, im zweiten Fall aber wird Q_1 die Glieder $Q_2^{-1} t_{r_2}$ verschlucken müssen. Wieder sind wir zu Ende.

2. $Q_1 = 1$. Dann ist $T_1 = t_{r_1}$. Da aber in dem jetzt betrachteten Fall T_1 mit t_1 beginnen soll, muß also $T_1 = t_1$ sein. Dann kann man aber in (32) auf beiden Seiten das Glied $t_1 = T_1$ heben und erhält die analoge Gleichung

$$T_2 T_3 \cdots T_n = t_2 t_3 \cdots t_n.$$

An ihr kann man bei T_2 die Schlußweise wiederholen. Wir erkennen also in der Tat, daß ein solches ν nur im trivialen Fall $T_\nu = t_\nu$ $(\nu = 1, 2 \cdots n)$ nicht existieren kann.

Die Summe der Absolutbeträge aller im Ausdruck von T_i vorkommenden Potenzexponenten wollen wir nun in Anlehnung an Nielsen[1]) die Länge des Gliedes T_i nennen. Die Summe der Längen aller T_i heiße die Länge des T_i-Systems. Aus (31) geht nun hervor, daß jedes T_i mindestens die Länge 1 hat, ein T_i-System also mindestens die Länge n. Bei einem T_i-System dieser Minimallänge n müssen nun die einzelnen T_i die Länge 1 haben. Nach (31) ist also $T_i = t_{r_i}$. Wegen (32) muß aber genauer gelten $T_i = t_i$. Dies führt auf die identische Substitution.

Für ein T_i-System der Länge n ist also unsere Behauptung, daß (31) und (32) die Substitutionen kennzeichnen, richtig. Wir können also vollständige Induktion anwenden und annehmen (wenn T_i vorgelegt ist), daß unsere Behauptung für alle kleineren Längen bereits bewiesen ist.

Nun bestimmen wir auf Grund des vorhin Bewiesenen die Zahl ν. Dabei treten zwei Fälle ein.

1. Q_ν verzehrt $Q_{\nu+1}^{-1} t_{r_{\nu+1}}$, so daß man setzen kann: $Q_\nu = \bar{Q}_\nu t_{r_{\nu+1}}^{-1} Q_{\nu+1}$ (und zwar in unverkürzbarer Form). Man setze nun:

$$
(33) \qquad
\begin{aligned}
T'_\mu &= T_\mu \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu,\ \nu+1, \\
T'_\nu &= T_{\nu+1} \qquad \text{und} \\
T'_{\nu+1} &= T_{\nu+1}^{-1} T_\nu T_{\nu+1} = Q_{\nu+1}^{-1} \bar{Q}_\nu^{-1} t_{r_\nu} \bar{Q}_\nu Q_{\nu+1}.
\end{aligned}
$$

Die T'_ν haben wieder die Form (31) und es gilt:

$$T'_1 T'_2 \cdots T'_n = T_1 T_2 \cdots T_n = t_1 t_2 \cdots t_n,$$

so daß sie auch die Bedingung (32) befriedigen.

Für $\mu \neq \nu, \nu+1$ hat nun T'_μ dieselbe Länge wie T_μ. Der Term T'_ν hat die gleiche Länge wie $T_{\nu+1}$, $T'_{\nu+1}$ aber hat eine kleinere Länge wie T_ν, da in $Q'_{\nu+1} = \bar{Q}_\nu Q_{\nu+1}$ mindestens das Glied $t_{r_{\nu+1}}^{-1}$ aus Q_ν in Fortfall gekommen ist (vielleicht mehr, da ja diese Form von $Q'_{\nu+1}$ nicht notwendig unverkürzbar ist). Das System der T'_i hat somit eine kleinere Länge wie das System der T_i. Unsere Behauptung trifft also für die T'_i zu, $\begin{pmatrix} t_i \\ T'_i \end{pmatrix}$ ist also eine unserer Substitutionen, die mit $\bar{S}$ bezeichnet werden möge.

Nun berechne man $\bar{\sigma}_\nu^{-1} \cdot \bar{S}$. Es ist

$$\bar{\sigma}_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} t_\mu & t_\nu & t_{\nu+1} \\ t_\mu & t_\nu\, t_{\nu+1}\, t_\nu^{-1} & t_\nu \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu,\ \nu+1.$$

Also:

$$\bar{\sigma}_\nu^{-1} \cdot \bar{S} = \begin{pmatrix} t_\mu & t_\nu & t_{\nu+1} \\ T'_\mu & T'_\nu\, T'_{\nu+1}\, T'^{-1}_\nu & T'_\nu \end{pmatrix}.$$

Aus (33) folgt aber:

$$T'_\mu = T_\mu \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu, \nu+1$$

und

$$T'_\nu\, T'_{\nu+1}\, T'^{-1}_\nu = T_\nu; \qquad T'_\nu = T_{\nu+1}.$$

Es ist also

$$\bar{\sigma}_\nu^{-1} \cdot \bar{S} = \begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}$$

womit auch $\begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}$ als Substitution erkannt ist.

2. $Q_{\nu+1}^{-1}$ verzehrt nach links $t_{r_\nu} Q_\nu$, so daß $Q_{\nu+1}$ die Form $Q_{\nu+1} = \bar{Q}_{\nu+1}\, t_{r_\nu}\, Q_\nu$ hat. Man setze wieder

$$\begin{aligned} & T'_\mu = T_\mu \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu,\ \nu+1, \\ (34)\qquad & T'_\nu = T_\nu\, T_{\nu+1}\, T_\nu^{-1} = Q_\nu^{-1}\, \bar{Q}_{\nu+1}^{-1}\, t_{r_{\nu+1}}\, \bar{Q}_{\nu+1}\, Q_\nu \\ & T'_{\nu+1} = T_\nu. \end{aligned}$$

Wieder haben die T'_i die Form (31) und wieder erfüllen sie (32). Da sie, genau wie vorhin, eine kürzere Gesamtlänge haben, ist $\begin{pmatrix} t_i \\ T'_i \end{pmatrix}$ eine unserer Substitutionen, etwa $\bar{S}$. Man errechnet nun:

$$\bar{\sigma}_\nu \cdot \bar{S} = \begin{pmatrix} t_\mu & t_\nu & t_{\nu+1} \\ T'_\mu & T'_{\nu+1} & T'^{-1}_{\nu+1}\, T'_\nu\, T'_{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem letzten Fall ist unser Satz als richtig erkannt.

Wir haben also:

Satz 9. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Ausdruck* $\begin{pmatrix} t_i \\ T_i \end{pmatrix}$ *eine unserer Substitutionen ist, besteht darin, daß die Potenzprodukte* T_i *die Form* (31) *haben und identisch die Gleichung* (32) *befriedigen.*

Dieser Satz scheint mir schon deshalb bemerkenswert, weil ja unsere Substitutionen spezielle Isomorphismen der freien Gruppe sind, die Gleichungen

$$X_i = T_i(t_\nu)$$

sich also nach den t_ν auflösen lassen müssen. Dies wird in Satz 9 nicht gefordert, folgt also auch aus (31) und (32).

Kombinieren wir nun dieses Resultat mit den Sätzen 5 und 6, so folgt:

Satz 10. *Die Relationen der Fundamentalgruppe einer beliebigen Verkettung lassen sich stets auf die Form bringen:*

$$t_i = T_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{35}$$

Dabei bedeuten T_i *Potenzprodukte der Form:*

$$T_i = Q_i^{-1}\, t_{r_i}\, Q_i \tag{36}$$

und erfüllen identisch die Gleichung:

$$T_1\, T_2 \cdots T_n = t_1\, t_2 \cdots t_n. \tag{37}$$

Umgekehrt ist jede Gruppe mit den Relationen (35) *Fundamentalgruppe einer Verkettung, wenn nur die Bedingungen* (36) *und* (37) *erfüllt sind.*

Die Fundamentalgruppen von Verkettungen sind damit in einem gewissen Sinn algebraisch gekennzeichnet.

§ 9. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Die niedersten Fälle $n = 2$ und $n = 3$ lassen eine gesonderte Behandlung zu, da diese Gruppen besonders einfach sind.

Die Zöpfe 2^{ter} Ordnung liefern eine triviale Gruppe. Man hat dann eine Erzeugende $\sigma_1 = \sigma$ und keine Relation. Es liegt also eine unendliche zyklische Gruppe vor.

Sowohl die gewöhnlichen Zöpfe als auch die geschlossenen haben dann nur die eine Darstellung $Z = \sigma^\nu$.

Was nun die zugehörigen Verkettungen betrifft, so sind zunächst die beiden Ausnahmefälle $Z = \sigma$ und $Z = \sigma^{-1}$ zu betrachten. Man erkennt leicht, daß dies Kreise sind. Im Falle $\nu = \pm 2$ sind die beiden Zöpfe $Z_1 = \sigma^2$ und $Z_2 = \sigma^{-2}$ die einfachste Verkettung zweier Kreise. Sie lassen sich ineinander überführen, wenn man die Orientierung der einen Komponente ändert, sind dagegen verschieden, wenn man die Orientierung festhält.

Alle übrigen Fälle liefern nach M. Dehn[5]) (da sie auf dem Torus liegen) verschiedene Knoten und Verkettungen, und zwar ist $Z = \sigma^\nu$ für gerades ν eine Verkettung zweier Kreise, für ungerades ν ein Knoten. Die beiden Fälle $\nu = \pm 3$ liefern die Kleeblattschlingen. Was die Fundamentalgruppe betrifft, so findet man leicht für $\nu = 2k$:

$$\bar{\sigma}^{2k} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ (t_1\, t_2)^{-k}\, t_1\, (t_1\, t_2)^k & (t_1\, t_2)^{-k}\, t_2\, (t_1\, t_2)^k \end{pmatrix}.$$

Führt man die neuen Erzeugenden $t = t_1$ und $\alpha = t_1\, t_2$ ein, so liefert dies die Relation:

$$t \rightleftarrows \alpha^k,$$

die sehr leicht zu behandeln ist und auf eine übersichtliche Gruppe führt.

Ebenso gibt $\nu = 2k+1$:

$$\bar{\sigma}^{2k+1} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ (t_1\, t_2)^{-k}\, t_2\, (t_1\, t_2)^k & (t_1\, t_2)^{-(k+1)}\, t_1\, (t_1\, t_2)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

So findet man die eine Relation:

$$t_1 = (t_1\, t_2)^{-k}\, t_2\, (t_1\, t_2)^k,$$

da die andere eine Folge von dieser ist (Gleichung (37)). Man nehme als neue Erzeugende: $\alpha = t_1\, t_2$, $\beta = (t_1\, t_2)^k\, t_1$. Das gibt aufgelöst: $t_1 = \alpha^{-k}\beta$, $t_2 = \beta^{-1}\alpha^{k+1}$. Setzt man dies ein in unsere Relation, so geht sie über in:

$$\alpha^{-k}\beta = \alpha^{-k}\beta^{-1}\alpha^{2k+1}.$$

Dies aber gibt nach leichter Umrechnung:

$$\alpha^{2k+1} = \beta^2.$$

Diese Gruppe hat wieder eine leicht zu übersehende Bauart. Damit sind die wesentlichen Fragen für $n = 2$ beantwortet. Wir wenden uns nun zum Falle $n = 3$.

---

5) M. Dehn, Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann., Bd. 75, S. 402.

Hier führen wir an Stelle der in Satz 2 verwendeten Erzeugenden σ die Erzeugende $b = a\sigma$ ein. Der Zusammenhang mit σ_1 und σ_2 ist dann gegeben durch die Formeln

$$(38) \qquad a = \sigma_1 \sigma_2; \qquad b = a\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1,$$

$$(39) \qquad \sigma_1 = a^{-1} b; \qquad \sigma_2 = b a^{-1} \quad \text{(wegen (12))}.$$

Zwischen a und b besteht die eine Relation

$$(40) \qquad a^3 = b^2 \quad \text{(siehe (16))}.$$

Diese Gruppe wurde ausführlich von Dehn[5]) und Schreier[6]) behandelt. Insbesondere die Untersuchungen von Schreier gewähren genauen Einblick in die Struktur der Gruppe. Das Element $c = a^3 = b^2$ ist, wie wir schon in § 4 sahen, mit jedem Element vertauschbar. Es läßt sich somit jedes Element Z auf die Form bringen:

$$(50) \qquad Z = a^{\pm 1} b \cdot a^{\pm 1} b \cdot \ldots \cdot a^{\pm 1} b \cdot c^k.$$

Darin kann das erste Glied $a^{\pm 1}$ oder das letzte Glied b fehlen. Diese Darstellung ist nach Schreier eindeutig, so daß für $n = 3$ eine neue Lösung des Wortproblems vorliegt.

Aber auch das Transformationsproblem läßt, wie mich Herr Schreier aufmerksam machte, dieselbe Behandlung zu. Zwei Zöpfe Z_1 und Z_2 sind ineinander transformierbar, wenn sie sich durch zyklische Vertauschung ihrer Erzeugenden ineinander überführen lassen.

Insbesondere läßt sich jeder geschlossene Zopf in die Form (50) setzen, wo diesmal die Anfangs- und Endglieder nicht fehlen dürfen, es sei denn, Z habe eine der Formen c^k, $a^{\pm 1} c^k$ oder $b c^k$. Die einzigen wesentlichen Abänderungen, die man noch mit dem geschlossenen Zopf vornehmen kann, sind die zyklischen Vertauschungen der einzelnen Faktoren $a^{\pm 1} b$.

Es möge nun noch untersucht werden, wann ein geschlossener Zopf „amphicheiral" ist, d. h. wann er äquivalent ist mit jenem Zopf, der aus ihm entsteht, indem man alle Überkreuzungen in die inversen verwandelt.

Man hat also im Ausdruck von Z die Erzeugenden σ_1 und σ_2 durch σ_1^{-1} und σ_2^{-1} zu ersetzen. Dabei geht a über in $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = b^{-1} a^2 b^{-1} = b^{-1} a^{-1} b$ und b in $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = b^{-1} a^{-1} b \cdot b^{-1} a = b^{-1} = b^{-1} b^{-1} b$.

[6]) O. Schreier, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$. Hamburger Abhandlungen Bd. 3, S. 167.

Man hat also a und b durch a^{-1} und b^{-1} zu ersetzen und sodann den Zopf mit b zu transformieren. Da es sich aber um einen geschlossenen Zopf handelt, kann man sich diese letzte Operation ersparen. Es genügt also, a und b durch a^{-1} und b^{-1} zu ersetzen. Dabei geht $c = a^3$ in c^{-1} über. Hat man also:

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_r} b \cdot c^k,$$

wo $\nu_i = \pm 1$ ist, so geht Z über in

$$Z' = a^{-\nu_1} b^{-1} a^{-\nu_2} b^{-1} \cdots a^{-\nu_r} b^{-1} \cdot c^{-k}.$$

Dies formt man leicht um in:

$$Z' = a^{-\nu_1} b\, a^{-\nu_2} b \cdots a^{-\nu_r} b \cdot c^{-(k+r)}.$$

Soll also Z sich in Z' transformieren lassen, so muß zunächst gelten: $2k = -r$. Man hat also $r = 2s$, $k = -s$:

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_{2s}} b \cdot c^{-s},$$
$$Z' = a^{-\nu_1} b\, a^{-\nu_2} b \cdots a^{-\nu_{2s}} b \cdot c^{-s}.$$

Die Zahlenfolge $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{2s}$ muß also durch zyklische Vertauschung übergehen in $-\nu_1, -\nu_2, \cdots -\nu_{2s}$. Man überlegt sich nun leicht, daß sich Z auf die Form bringen läßt:

$$Z = (a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_m} b \cdot a^{-\nu_1} b\, a^{-\nu_2} b \cdots a^{-\nu_m} b)^k \cdot c^{-mk},$$

wobei $k > 0$ und $\nu_i = \pm 1$ ist. Die Doppelschlinge zum Beispiel wird nach leichter Umformung:

$$Z = (a\, b\, a^{-1} b)^2 \cdot c^{-2}.$$

Ein mit Z verwandter Zopf ist auch der, den man durch Umkehr der Orientierung aus Z erhält. In der σ-Darstellung hat man zunächst Z von rückwärts zu lesen, und überdies σ_1 und σ_2 zu vertauschen. Dabei geht a über in sich, b aber in $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$, also auch in sich. In der Darstellung durch a und b hat man Z also einfach von hinten zu lesen. Ist also:

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_r} b \cdot c^k,$$

so wird

$$Z'' = a^{\nu_r} b\, a^{\nu_{r-1}} b \cdots a^{\nu_1} b \cdot c^k.$$

Einen Zopf, bei dem Z in Z'' transformierbar ist, wird man zweckmäßig einen *symmetrischen* Zopf nennen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Zahlenfolge $\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_r$ durch zyklische Vertauschung übergeht in die Folge $\nu_r \nu_{r-1} \cdots \nu_1$. Man überlegt sich leicht, daß sich dann durch passende Transformation Z auf eine der Formen $(\nu_i = \pm 1)$

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_{m-1}} b\, a^{\nu_m} b\, a^{\nu_{m-1}} b \cdots a^{\nu_1} b \cdot c^k,$$

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_{m-1}} b\, a^{\nu_m} b\, a^{\nu_{m-1}} b \cdots a^{\nu_2} b \cdot c^k,$$

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_m}\, b \cdot a^{\nu_m} b\, a^{\nu_{m-1}} b \cdots a^{\nu_1} b \cdot c^k$$

bringen lassen muß. Die Doppelschlinge liefert wieder ein Beispiel eines symmetrischen geschlossenen Zopfes, und zwar von der zweiten Form.

Endlich können die beiden besprochenen Abänderungen zusammengesetzt werden. Dabei geht einfach Z über in Z^{-1}. Entsteht so wieder derselbe Zopf, ist also Z in Z^{-1} transformierbar, so wird man Z etwa *ambig* nennen. Dann muß die Zahlenfolge $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_r$ durch zyklische Vertauschung übergehen in $-\nu_r, -\nu_{r-1}, \cdots -\nu_1$ und wieder $r = 2s$; $k = -s$ sein. Man findet leicht, daß die ambigen Zöpfe die Gestalt haben:

$$Z = a^{\nu_1} b\, a^{\nu_2} b \cdots a^{\nu_s} b \cdot a^{-\nu_s} b \cdots a^{-\nu_2} b\, a^{-\nu_1} b \cdot c^{-s}.$$

Hamburg, Mathematisches Seminar, Januar 1925.