Beweis des Jordanschen Kurvensatzes.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Der Beweis, den Herr Jordan von seinem grundlegenden Kurvensatze gibt,*) operiert mit gegen die Kurve konvergierenden Polygonfolgen, und in allen mir bekannten seitdem veröffentlichten Beweisen ist, insoweit sie sich nicht auf besondere Fälle beschränken oder unrichtig sind, diese Methode beibehalten.

Erst von Veblen**) wurde ein Beweis gegeben, der die Kurve, statt sie als Limes von Polygonen aufzufassen, gleich selbst in Betracht zieht, und mittels ihrer inneren Eigenschaften zum Resultate gelangt.

In dieser direkteren Weise werden auch wir im folgenden verfahren, aber auf einem völlig anderen und, wie ich glaube, erheblich kürzeren Wege das Ziel erreichen.

Der Satz läßt sich in folgender Form aussprechen: *Das eineindeutige stetige Bild eines Kreises bestimmt in der Ebene zwei Gebiete, und ist mit der Grenze jedes dieser Gebiete identisch; es ist m. a. W. in der Schoenfliesschen Terminologie eine geschlossene Kurve.*

Um die Aussage des Satzes und seinen Beweis völlig elementar verständlich zu machen, erinnere ich in den §§ 1 und 2 an einige einfache, längst bekannte mengentheoretische Definitionen und Theoreme; § 3 bringt einen Hilfssatz, und die §§ 4, 5 und 6 je einen der drei Bestandteile, in welche ich den Jordanschen Satz zergliedere.

§ 1.

Unter einem *Weg* wird verstanden ein aus einer endlichen Zahl von geradlinigen Strecken gebildeter, sich selbst nicht kreuzender Streckenzug.

Unter einem *Gebiete* wird verstanden eine ebene Menge mit den beiden folgenden Eigenschaften: 1. um jeden seiner Punkte läßt sich ein

*) Cours d'Analyse, I, 2^{me} éd., S. 91—99.

**) Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 6, S. 83.

Kreis schlagen, dessen Inneres ebenfalls zum Gebiete gehört; 2. je zwei seiner Punkte sind durch einen ganz zum Gebiete gehörigen Weg verbindbar.

Diejenigen Grenzpunkte eines Gebietes, welche nicht zum Gebiete gehören, bilden eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge, welche die *Grenze* des Gebietes heißt.

Die Restmenge einer abgeschlossenen ebenen Menge T zerfällt in eine endliche oder abzählbare Menge von Gebieten, welche wir als *von der Menge T bestimmt* bezeichnen.

Eine Menge heißt nach Schoenflies *geschränkt*, wenn sie ganz im Endlichen liegt.

Eine abgeschlossene Menge heißt *zusammenhängend*, wenn sie sich nicht in zwei abgeschlossene Teilmengen zerlegen läßt. Der Kürze halber nennen wir im folgenden eine zusammenhängende abgeschlossene Menge ein *Kontinuum*. Von einem Kontinuum gilt dann folgende Eigenschaft:

Theorem 1. *Wenn ein Gebiet und seine Restmenge beide Punkte eines Kontinuums Z besitzen, so besitzt auch die Grenze des Gebietes wenigstens einen Punkt von Z; und insbesondere: wenn sowohl das Innere wie das Äußere eines Polygons Punkte eines Kontinuums Z besitzen, so besitzt auch das Polygon selbst wenigstens einen Punkt von Z.*

Im entgegengesetzten Falle würden nämlich die im Gebiete und die in der Restmenge enthaltenen Punkte von Z zwei abgeschlossene Teilmengen von Z ausmachen.

Theorem 2. *Zu einer willkürlichen geschränkten, abgeschlossenen, nicht zusammenhängenden Punktmenge K kann man ein K nicht treffendes Polygon bestimmen, das einen Teil von K in seinem Inneren, einen anderen Teil von K in seinem Äußeren enthält.*

Beweis. Seien K_1 und K_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von K. Sie haben voneinander einen endlichen Abstand a. Sei P_1 ein Punkt von K_1, P_2 ein Punkt von K_2. Wir wählen nun $e < \frac{1}{2}a$, konstruieren eine quadratische Teilung der Ebene mit der Quadratseite e, heben diejenigen Quadrate q heraus, welche nebst ihrem Umfange von K_1 frei sind, und nehmen die Quadratseiten, welche zwei Quadrate q trennen, hinzu. Wir erhalten dann eine Menge von Gebieten γ, in denen K_2 enthalten ist, während K_1 weder in ihnen selbst noch auf ihrer Grenze einen Punkt besitzen kann. Sei nun G dasjenige unter den Gebieten γ, das P_2 enthält, so gibt es ein Grenzpolygon von G, das P_1 von P_2 trennt; dieses Polygon besitzt also die verlangte Eigenschaft.

Theorem 3. *Die Grenze Z eines von einem geschränkten Kontinuum Z' bestimmten Gebietes $\mathfrak{G}$ ist wieder ein Kontinuum.*

Beweis. Falls sie kein Kontinuum wäre, könnten wir nach Theorem 2 ein Z nicht treffendes Polygon π bestimmen, das sowohl in seinem Inneren, wie in seinem Äußeren Punkte von Z, also auch von $\mathfrak{G}$ enthielte. Verbinden wir sodann einen innerhalb π und einen außerhalb π liegenden Punkt von $\mathfrak{G}$ durch einen zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Weg w, so sehen wir, daß π wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{G}$ besitzt, also, da π die Grenze von $\mathfrak{G}$ nicht trifft, daß π ganz zu $\mathfrak{G}$ gehören müßte, also auch Z' nicht treffen könnte. Dies ist aber nach Theorem 1 ein Widerspruch.

§ 2.

Es seien K_1 und K_2 zwei geschränkte Kontinua ohne gemeinschaftliche Punkte. Nach Theorem 2 kann man sie trennen durch ein Polygon π, das weder K_1 noch K_2 trifft, und eines von beiden in seinem Inneren, das andere in seinem Äußeren enthält. Dasjenige von K_1 und K_2 bestimmte Gebiet g, das π enthält und, wie man unmittelbar einsieht, von der Wahl von π unabhängig ist, nennen wir das *Zwischengebiet* von K_1 und K_2.

Sei w ein Weg, der, während von seinen Endpunkten der eine auf K_1, der andere auf K_2 liegt, ganz in g verläuft, kurz, der *K_1 und K_2 innerhalb g verbindet.* Dieser Weg besitzt zwei Seiten, welche wir seine *rechte* und *linke Seite* nennen. Wir wollen untersuchen, wieviel Teilgebiete w in g bestimmt.

Aus jedem Punkte P von g läßt sich ein Weg nach w ziehen, welcher entweder auf die rechte oder auf die linke Seite von w mündet. Jedenfalls gehören nun alle diejenigen Punkte P, für welche diese Mündung auf derselben Seite von w stattfindet, zum selben von K_1, K_2 und w bestimmten Gebiete $_r\gamma$ resp. $_l\gamma$.

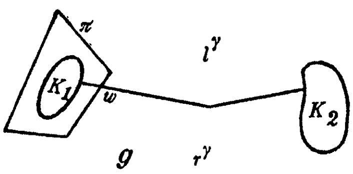

Fig. 1.

Weil nun aber von den Endpunkten von w der eine innerhalb π, der andere außerhalb π liegt, muß π wenigstens einen w nicht treffenden Teilstreckenzug besitzen, der die beiden Seiten von w verbindet. Da nun die Punkte dieses Streckenzugs sowohl zu $_r\gamma$ wie zu $_l\gamma$ gehören müssen, sind $_r\gamma$ und $_l\gamma$ identisch. Mithin gilt:

Theorem 4. *Im Zwischengebiete zweier Kontinua wird von einem sie verbindenden Wege nur ein Gebiet bestimmt.*

Wir setzen weiter voraus, daß K_1 und K_2 innerhalb g durch *zwei* einander nicht treffende Wege w_1 und w_2 verbunden sind.

Aus jedem Punkte P von g läßt sich nach Theorem 4 ein w_1 nicht treffender Weg nach w_2 ziehen, welcher entweder auf die rechte oder auf die linke Seite von w_2 mündet, und alle Punkte P, für welche die Mündung auf derselben Seite von w_2 stattfindet, gehören zum selben von K_1, K_2, w_1 und w_2 bestimmten Gebiete ${}_r\gamma_2$ resp. ${}_i\gamma_2$.

Wären nun diese beiden Gebiete identisch, so könnten wir die beiden Seiten von w_2 durch einen Weg $\mathfrak{F}$ verbinden, der in seinem Verlaufe weder w_1 noch w_2 träfe und mit einem Teilstreckenzuge τ von w_2 ein Polygon p bilden würde, welches von den Endpunkten von w_2 den einen in seinem Inneren, den anderen in seinem Äußeren enthielte. Von dem aus K_1, K_2 und w_1 gebildeten Kontinuum μ würden also sowohl in dem Inneren, wie in dem Äußeren von p, aber nicht auf p selbst Punkte liegen, was nach Theorem 1 ein Widerspruch ist. Wir haben also bewiesen:

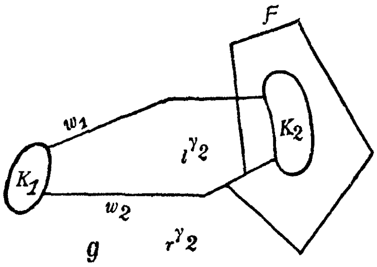

Fig. 2.

Theorem 5. *Im Zwischengebiete zweier Kontinua werden von zwei sie verbindenden und einander nicht treffenden Wegen zwei Teilgebiete bestimmt.*

Denken wir nunmehr K_1 und K_2 noch durch einen *dritten*, w_1 und w_2 nicht treffenden Weg w_3 verbunden, so liegt dieser in einem der beiden von w_1 und w_2 in g bestimmten Teilgebiete. Aus jedem Punkte P dieses Teilgebietes läßt sich ein weder w_1 noch w_2 treffender Weg nach w_3 ziehen, welcher entweder auf seine rechte oder auf seine linke Seite mündet, und alle Punkte P, für welche die Mündung auf derselben Seite von w_3 stattfindet, gehören zum selben von K_1, K_2, w_1, w_2 und w_3 bestimmten Gebiete ${}_r\gamma_3$ resp. ${}_i\gamma_3$; daß diese beiden Gebiete nicht identisch sein können, zeigt sich genau so wie beim Theorem 5, sodaß in g von w_1, w_2 und w_3 drei Gebiete bestimmt werden. Und da man dieselben Überlegungen für jeden neu hinzugefügten Weg w_n anstellen kann, gilt allgemein:

Theorem 6. *Im Zwischengebiete zweier Kontinua werden von n sie verbindenden und einander nicht treffenden Wegen n Teilgebiete bestimmt.*

§ 3.

Es sei nun C ein Kreis, C' sein eineindeutiges stetiges Bild, c ein Teilbogen von C mit den Endpunkten A und B; c', A' und B' die entsprechenden Bilder. Wir wollen auch c' kurz als Teilbogen von C' bezeichnen.

Sei G ein Gebiet, dessen Grenze eine c' enthaltende Teilmenge von C' ist, und H ein nicht mit A' oder B' zusammenfallender Punkt von c'.

Dieser Punkt H hat sodann einen endlichen Abstand a von der Menge $C' - c'$, und man kann in G einen Punkt L bestimmen, dessen Abstand von $H < \frac{1}{2}a$, dessen Abstand von $C' - c'$ also $> \frac{1}{2}a$ ist. Die Strecke LH kann dann nicht von $C' - c'$ getroffen werden. Sei N der erste Punkt, in dem diese Strecke c' trifft, so wird die Strecke LN weder von c' noch von $C' - c'$, also von C' überhaupt nicht getroffen. Mithin ist bewiesen:

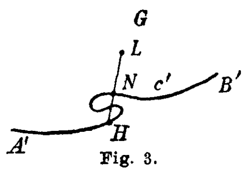

Fig. 3.

Hilfssatz. *Wird die Grenze eines Gebietes von einer Jordanschen Kurve oder einer Teilmenge einer solchen gebildet, so kann man aus ihm nach jedem Teilbogen seiner Grenze einen Weg legen.*

§ 4.

Bestimmt C' nur ein einziges, in der ganzen Ebene überall dicht liegendes Gebiet G, so ist die Grenze von G sicher mit C' identisch.

Sei aber G_1 ein von C' bestimmtes, in der Ebene nicht überall dicht liegendes Gebiet, und G_2 ein weiteres von der Grenze von G_1 bestimmtes Gebiet.

Nach Theorem 3 ist dann die Grenze von G_2 ein Kontinuum C_a', von dem wir beweisen wollen, daß es mit C' identisch ist, indem wir zeigen, daß die entgegengesetzte Annahme auf einen Widerspruch führt.

Entspricht nämlich C_a' auf dem Kreise ein Teilbogen C_a, so können wir diesen mittels zweier Punkte D und E wieder in drei Teilbogen c_1, c_2 und c_3 zerlegen. Die entsprechenden Bilder seien D', E', c_1', c_2' und c_3'. Auf Grund des Hilfssatzes von § 3 können wir c_1' und c_3' sowohl innerhalb G_1 wie innerhalb G_2 durch einen Weg verbinden. Diese beiden Wege v_1 und v_2 verlaufen notwendig im Zwischengebiete von c_1' und c_3', und bestimmen in ihm nach Theorem 5 zwei Teilgebiete, γ_1 und γ_2. Innerhalb jedes dieser Gebiete können wir v_1 und v_2 durch Wege u_1 resp. u_2 verbinden, welche sowohl zu G_2, wie zur Restmenge von G_2 gehörige Punkte besitzen, also nach Theorem 1 beide notwendig die Grenze von G_2, d. h. C_a' treffen müssen; c_1' und c_3' treffen sie aber sicher nicht, sie treffen also c_2'. *Mithin liegen sowohl in γ_1 wie in γ_2 Punkte von c_2'.*

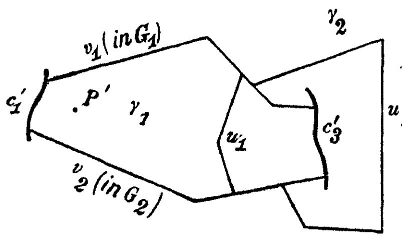

Fig. 4.

Sei nun P' ein in γ_1 liegender Punkt von c_2', dem im Kreise der Punkt P entspricht. Sei c_4 ein willkürlicher Teilbogen von c_2, der P

enthält, aber D und E nicht enthält. Weil sodann c_4' keinen Punkt der Grenze von γ_1 enthält, muß nach Theorem 1 c_4' gänzlich zu γ_1 gehören. Dies gilt unabhängig von der Wahl des c_4, sodaß mit Ausnahme der Punkte D' und E' das ganze Kontinuum c_2' in γ_1 liegt, *und* γ_2 *keinen Punkt von* c_2' *enthalten kann,* was ein Widerspruch ist.

Es gilt also auf jeden Fall:

Satz 1. *Die Grenze eines von einer Jordanschen Kurve bestimmten Gebietes ist mit der ganzen Kurve identisch.*

In der Aussage dieses Satzes ist enthalten:

Satz 1a. *Eine Jordansche Kurve ist eine nirgends dichte Punktmenge.*

§ 5.

Wir nehmen nun an, daß C' $n(>2)$ Gebiete bestimmt. Dann zerlegen wir C in vier Teilbogen c_1, c_2, c_3 und c_4, welche sich in der angegebenen Reihenfolge aneinander schließen. Seien c_1', c_2', c_3' und c_4' ihre Bilder. Innerhalb jedes der n durch C' bestimmten Gebiete verbinden wir sodann c_1' und c_3' durch einen Weg, was nach dem Hilfssatze und Satz 1 möglich ist. Diese Wege bestimmen im Zwischengebiete von c_1' und c_3' n Teilgebiete. Genau nach der Methode des § 4 zeigt sich, daß einerseits jedes dieser Teilgebiete Punkte von c_2' oder c_4' enthalten muß, und andererseits sowohl c_2' wie c_4' nur in je eines der Teilgebiete eindringen kann. Aus diesem Widerspruche folgern wir:

Satz 2. *Eine Jordansche Kurve kann nicht mehr als zwei Gebiete bestimmen.*

§ 6.

Schließlich nehmen wir an, daß C' nur *ein* Gebiet G bestimmt.

Dann legen wir aus einem Punkte M von G zwei einander nicht treffende Wege u_1 und u_2 nach C', welche in den Punkten P_1 und P_2 von C' münden. Nach Theorem 5 bestimmt die von C', u_1 und u_2 gebildete Menge τ in G zwei Gebiete g_1 und g_2.

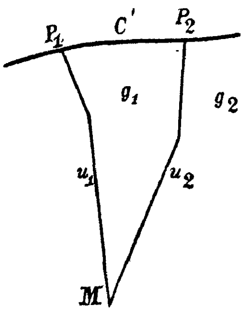

Fig. 5.

Seien z' und z'' die beiden P_1 und P_2 verbindenden Teilbogen von C', und τ' und τ'' die von z', u_1 und u_2 resp. z'', u_1 und u_2 gebildeten Jordanschen Kurven. Nach Theorem 5 bestimmt τ' zwei Gebiete g_1' und g_2'. Ein Weg, der einen Punkt von g_1' mit einem Punkte von g_2' verbindet, trifft notwendig τ', also τ; die beiden Punkte können also weder beide in g_1, noch beide in g_2 liegen. Mithin ist beispielsweise g_1 in g_1' und g_2 in g_2' enthalten.

Nach Satz 1a liegt dann g_1 in g_1' und g_2 in g_2' überall dicht. Nach Satz 1 ist weiter jeder Punkt von τ' gemeinsamer Grenzpunkt von g_1' und g_2', also auch von g_1 und g_2.

Sei Q ein Punkt von z'', so liegt er entweder in g_1' oder in g_2'; wir nehmen an, daß er in g_1' liegt. Dann gehört er aber weder zu g_2' noch zu seiner Grenze, also auch weder zu g_2 noch zu dessen Grenze. Andererseits muß aber jeder Punkt von τ'', ebenso wie jeder Punkt von τ', zur Grenze von g_2 gehören. Wir werden somit auf einen Widerspruch geführt und sprechen aus:

Satz 3. *Eine Jordansche Kurve muß wenigstens zwei Gebiete bestimmen.*