Mathematischer Salon

HIM

21. August 2008

Pausenessay

Wenn Vorträge ausfallen… oder… damit nichts verloren geht

F. Hirzebruch

Im 1. Halbjahr 2008 hatte ich sieben Einladungen zu Vorträgen angenommen. Vier fielen aus. Warum? Im April hatte ich eine heftige Infektion, eine für den 5. Mai geplante Reise nach Berlin fiel aus: Sir Michael Atiyah, zur Zeit Präsident der Royal Society of Edinburgh, war eingeladen, im Jahr der Mathematik vor der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften zu sprechen. Thema: "Mind, Matter and Mathematics", sicher ein vortreffliches Essay-Thema. Ich sollte Atiyah vorstellen.

Am 17. Mai war ich wieder reisefähig, um zu der Tagung HIRZ80 (nachträgliche Feier meines 80. Geburtstages) nach Israel zur Bar Ilan University zu reisen, gemeinsam mit meiner Frau, unserem Sohn und dessen Frau. Matthias Kreck war auch dabei. Die Tagung war wunderbar (Wiedersehen mit vielen Freunden aus aller Welt, viel Mathematik, Exkursionen und schöne Feste). Am Abend vor dem Abreisetag war die Exkursion "Jerusalem at Night". Ich stürzte in der Nähe der Klagemauer und brach ein Bein. Mit Hilfe unseres Sohnes, der Arzt ist, erreichten wir am nächsten Tag die von uns gebuchte Lufthansa-Maschine, und ich landete für drei Wochen in einem Bonner Krankenhaus. Drei Vorträge fielen aus: erstens mein für Israel geplanter Vortrag (er sollte nämlich am Abreisetag vor dem *farewell lunch* stattfinden), zweitens meine Einführung von Yuri Manin, emeritiertes Wissenschaftliches Mitglied des Bonner Max-Planck-Instituts für Mathematik, in den Orden pour le mérite in Berlin, und drittens ein Vortrag in Münster zu Ehren des 60. Geburtstages des Mathematikers Andrew Ranicki; bei dieser Veranstaltung sprach dessen Vater, Marcel Reich-Ranicki, über den Nutzen der Literatur, und ich sollte über den Nutzen der Mathematik sprechen. Zwischen den beiden Vorträgen war ein Cello-Konzert von Matthias Kreck. Diese Veranstaltung fand statt. An meiner Stelle sprach der Münsteraner Mathematiker Wolfgang Lück.

Die vier ausgefallenen Vorträge bzw. Laudationes waren vollständig vorbereitet. Sie sind in meinem Kopf und wollen raus. Das soll in den verbleibenden 17 Minuten geschehen. Da inzwischen bekannt ist, daß es mit einem Risiko verbunden ist, mich einzuladen, hat Matthias Kreck für den heutigen Abend einen Ersatzredner verpflichtet. Ich freue mich natürlich, daß dieser nicht zum Einsatz kommen muß.

Ich spreche zunächst über Michael Atiyah und Yuri Manin, da zwei der ausgefallenen Vorträge (Laudationes) ihnen gewidmet waren. Beide sind führende und hervorragende Mathematiker, die man in jedem Cluster of Excellence und jeder Eliteuniversität, um Begriffe der Exzellenzinitiative zu verwenden, gerne haben möchte. Beide sind Pioniere, denen man viele Durchbrüche verdankt, auch in den Beziehungen zwischen Mathematik und Physik, die sich in den letzten 30 Jahren gewandelt haben: Die Physiker studieren Modelle wie "Quantum fields and strings" und entdecken überraschende neue mathematische Einsichten. Die fundamentalen Sätze dabei sind aber nicht bewiesen. Das müssen die Mathematiker nachholen. Früher waren häufig die mathematischen Theorien, die die Physiker, z. B. Einstein oder Heisenberg, brauchten, den Mathematikern bereits vorher bekannt. Hervorheben möchte ich, daß Atiyah und Manin, ganz im Gegensatz zu mir, hervorragende, geradezu professionelle Essayisten sind. Im Falle von Atiyah sind seine Reden als Präsident der Royal Society of London Musterbeispiele. Atiyah war sechs Jahre lang gleichzeitig Präsident der Royal Society, Master of Trinity College, Cambridge, und Gründungsdirektor des Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, ebenfalls in Cambridge. In seinem Vortrag "Beauty and Truth in Mathematics" (Bonn, Oktober 2007) sagte er, daß er manchmal einen schönen und falschen Beweis einem häßlichen und richtigen Beweis vorzieht. Warum? Oft läßt sich der schöne Beweis korrigieren. Seine Schönheit führt dann zu weiteren unerwarteten Resultaten. Atiyah hat 30 Ehrendoktorate, das erste 1968 von der jungen, dynamischen Universität Bonn bei ihrem 150-jährigen Jubiläum, das vorerst letzte von der altehrwürdigen Harvard University 40 Jahre später.

In meiner Laudatio für Yuri Manin wies ich auf sein kürzlich erschienenes Buch "Mathematics as Metaphor. Selected Essays" hin und sagte: "Der bekannte Physiker und Mathematiker Freeman Dyson (Princeton) hat das Vorwort geschrieben. Er teilt die Mathematiker in Vögel und Frösche ein. Die Vögel fliegen hoch in der Luft und übersehen breite Aussichten der Mathematik bis zum fernen Horizont. Sie bringen Probleme aus verschiedenen Teilen der Landschaft miteinander in Verbindung. Die Frösche leben unten im Schlamm und sehen nur die Blumen, die in der Nähe wachsen, und studieren diese aber

dafür in allen Einzelheiten. Manin ist ein Vogel, Freeman Dyson ein Frosch, wie er behauptet. Jeder Mathematiker wird sich nun fragen: 'Was bin ich?' "
Atiyah und Manin wären ideale Essayisten für den Mathematischen Salon. Aber Carl-Friedrich Bödigheimer mit seinem Essay "Lob der Unaufmerksamkeit" im ersten Mathematischen Salon gehört auch zum Kreis der vortrefflichen Essayisten.

Mein für die Tagung HIRZ80 vorgesehener und ausgefallener Vortrag hatte den Titel "Riemann-Roch reminiscences, recent remarks". Als ich 1953 in Princeton den Satz von Riemann-Roch für beliebige Dimensionen formulierte und bewies, dachte niemand daran, daß dieser Satz und die Gebiete, zu denen er gehört, einmal für Physiker wichtig sein könnten. Das ist heute der Fall, für manche theoretischen Physiker gehört das zur Standardausrüstung. Neulich hörte ich, daß eine Dualität, die in meinem Vortrag vorkommt, bei Physikern auch *Feld* und *Antifeld* heißt. Aber davon verstehe ich nichts.

Jetzt zu dem Münsteraner Vortrag, wo ich über den Nutzen der Mathematik parallel zu Marcel Reich-Ranicki sprechen sollte. Im vergangenen Jahr war der 300. Geburtstag des genialen Mathematikers Leonhard Euler, der in Basel aufwuchs, ab 1727 an der Akademie in St. Petersburg tätig war, bis er 1741 zu Friedrich II, dem Großen, an die Akademie nach Berlin ging. In den 60er Jahren wurde das Verhältnis zu Friedrich schlechter, Euler ging 1766 wieder nach St. Petersburg an die Akademie. In Rußland herrschte inzwischen Katharina II, die Große. Eulers Geburtstag wurde in Basel, Berlin und St. Petersburg durch Kolloquien und Vorträge gefeiert. Durch meinen Vortrag in St. Petersburg habe ich Euler ein wenig kennengelernt. Das Büchlein von Emil A. Fellmann (Leonhard Euler, Rowohlt 1995) war sehr hilfreich. Ich empfehle es Ihnen sehr. Dort wird auch Eulers Abhandlung "Vom Nutzen der höheren Mathematik", die er in seiner Berliner Zeit schrieb, besprochen. Sie ist heute im Jahr der Mathematik aktuell wie damals. Ich zitiere einige Sätze: "Heute bezweifelt niemand den großen Nutzen der Mathematik, denn vielen Wissenschaften und Künsten ist sie unentbehrlich. Dieses Lob wird aber gewöhnlich der niederen Mathematik, sozusagen ihren Elementen, gezollt, während man jener Mathematik, die mit Recht die höhere genannt wird, jede praktische Bedeutung abspricht... Selbst im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche die elementare Mathematik vorerst allgemein zu genügen schien, ist die Weiterentwicklung der höheren Mathematik bis zu einem Grade erforderlich, den sie noch lange nicht erreicht hat." Der letzte Satz ist heute im Jahr der Mathematik besonders wichtig: Ohne eine ständige Weiterentwicklung der Mathematik kommen viele Wissenschaften nicht voran.

Im Zentrum von Eulers riesigem Werk stehen die Analysis und die Funtionentheorie in Verbindung mit der Zahlentheorie. Er hat viele Anwendungsgebiete bearbeitet: Mechanik, Astronomie, Geodäsie, Ballistik, Optik... und zahlreiche Lehrbücher geschrieben (trotz seiner Erblindung bald nach seiner zweiten Ankunft in St. Petersburg). Euler hatte seit 1729 eine umfangreiche Korrespondenz mit Christian Goldbach (1690-1764), Sohn eines Königsberger Arztes, Sekretär der Akademie in St. Petersburg, ein mathematisch breit interessierter und gebildeter Laie. Einige Briefe Eulers zur Kombinatorik habe ich mir angesehen. Die Kombinatorik (diskrete Mathematik) ist wichtig für praktische Fragen, wie Transportprobleme.

Aber wir steigen in die Unterhaltungsmathematik ein.

Ich habe in dem Pausen-Essay parallel zu den gezeigten Dokumenten gesprochen. Davon gibt es kein Manuskript. Ich werde deshalb jetzt der Reihe nach diese Dokumente zeigen, die hoffentlich für sich selbst sprechen.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Rösselsprung
Euler an Goldbach
vom 26.4.1757

Der absolute Betrag der Differenz zweier Zahlen in symmetrischen Positionen ist immer gleich 32.

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

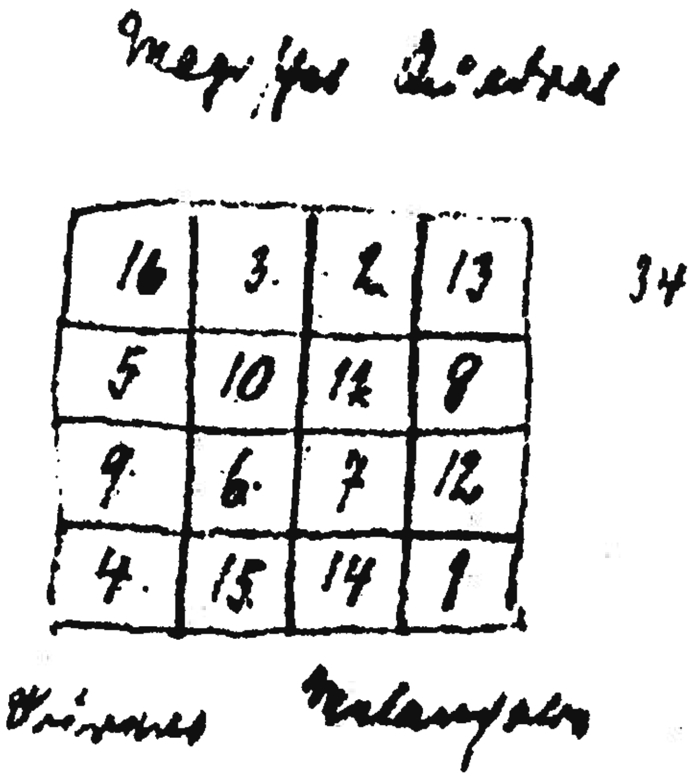
Der "magische Rösselsprung"
von Jaenisch, 1859.

Carl Friedrich von Jaenisch (1813-1872)
Professor der Mathematik in St. Petersburg,
Begründer der "russischen Schachschule"

Aus: "Leonhard Euler"
von Emil A. Fellmann,
Rowohlt 1995

Dies ist ein Zahlenquadrat, in dem die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte immer den Wert 260 ergibt, während das für die beiden Diagonalen nicht stimmt.
Bei einem magischen Quadrat verlangt man, dass die Summe in Zeilen, Spalten und Diagonalen immer die gleiche ist.

Es folgt ein 4x4 magisches Quadrat, das bei Thomas Mann vorkommt.



Aus Thomas Manns Notizen zum "Doktor Faustus"

Prof. Dr. Urs Stammbach (ETH Zürich)
Vortrag Göttinger Akademie 23.09.08
"Thomas Mann und die Mathematik - eine vergnügliche Spurensuche"

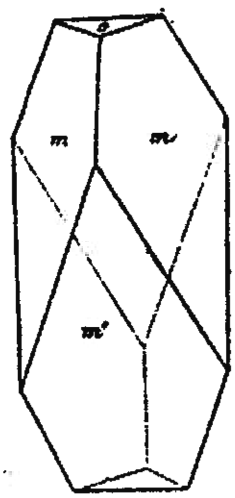
Wie ich erst nach meinem Essay feststellte, hat Herr Stammbach einen Artikel geschrieben: "Thomas Mann und die Mathematik. Eine Spurensuche", erschienen in: "Was war das Leben? Man wusste es nicht!" Thomas-Mann-Studien Band 39, Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 2006. S. 179-204

Albrecht **Dürer, "Die Melancholie"** (Melencolia I), 1514, Kupferstich

Thomas Mann bezieht sich in seinen Notizen auf diesen Kupferstich "Melencolia I".
Das 4x4-magische Quadrat ist rechts oben.

Trigonale, tetragonale und hexagonale Trapezoeder sind – im kristallographischen Sinne - einfache Kristallformen. In Kombination mit zwei Flächen orthogonal zur n- zähligen Achse können sich als zusammengesetzte Kristallformen die oben konstruierten Polyeder für n= 3, 4, 6 ergeben. Für n=4 und n=6 habe ich keine Abbildungen derartiger kombinierter Kristallformen gefunden. Aber für n=3, also für das Dürersche Polyeder, findet man eine ganze Reihe von Abbildungen in den 9 Tafelbänden des *Atlas der Kristallformen* von Victor Goldschmidt, Heidelberg 1913-1923

Als Beispiel füge ich nur Calcit No. 17 ein:



Ich frage mich, ob die Künstler der Renaissance zu Dürers Zeit vielleicht auch von den Formen der Kristalle angeregt worden sind, oder ob umgekehrt ihre Polyeder dem freien Spiel der Phantasie zu verdanken sind und die Künstler der Entwicklung der Kristallographie voraus waren. Ich habe eben in einem ganz hübschen Buch zur Geschichte der Kristallographie geblättert: *Die Entdekkung der Kristalle,* von E. Fabian, Leipzig 1986. Der Verfasser geht, obwohl er sonst recht umfassende Perspektiven hat, mit keinem Wort auf die Kunst der Renaissance ein. Er beschreibt ganz richtig den Gegensatz zwischen morphologischen und strukturellen Auffassungen der Kristalle und deren Entwicklung bis zum 19. Jahrhundert. Wenn man ihm glauben kann, setzt eine genauere, wenigstens teilweise mathematische Beschreibung der Gestalt der Kristalle erst im 17. Jahrhundert ein, beispielsweise in Stensens *De Solido intra Solidum naturaliter contento Dissertationis Prodromus* von 1669 für den Bergkristall und ebenfalls 1669 mit Erasmus Bartolins *Experimenta Crystalli Islandici Disdiaclastici Quibus mira et isolita Refractio detegitur,* in der das Rhomboeder beschrieben wird. Ungenaue Abbildungen von Kristallen findet man schon früher, z. B. in Anselmus Boetius de Boodt's *Gemmarum et lapidarum Historia.*

Diese Seite gehört zu einem Manuskript, das Egbert Brieskorn zu meinem 80. Geburtstag verfasst hat. Sein großes Geschenk war ein wunderschön restaurierter und gerahmter Faksimile-Druck der "Melencolia I".

Euler an Goldbach
Berlin, 3./14. Nov. 1750

I. die hedrae, deren Anzahl sei $= H$

II. die anguli solidi, deren Anzahl sei $= S$

III. die Fügungen, wo zwei hedrae secundum latera zusammenkommen, so ich aus Mangel eines rezipierten Worts acies nenne deren Anzahl sei $= A$

6. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est $H + S = A + 2$.

$f + e = k + 2$ heutige Notation

11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est $= 4S - 8$ rectis.

Summe aller Winkel $= (4e - 8) \cdot 90°$

Das auf Dürers "Melancholie" abgebildete Polyeder ist kombinatorisch ein Würfel, der in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten gestutzt ist.

Für dieses Polyeder ist $e = 12$, $k = 18$, $f = 8$.

VOM NUTZEN DER HÖHERN MATHEMATIK

übersetzt von J. J. BURCKHARDT

Commentatio 790 C indicis ENESTROEMIANI

Heute bezweifelt niemand den großen Nutzen der Mathematik, denn vielen Wissenschaften und Künsten, deren wir uns täglich bedienen, ist sie unentbehrlich. Dies Lob wird nun aber gewöhnlich der niedern Mathematik, sozusagen ihren Elementen gezollt, während man jener Mathematik, die mit Recht die höhere genannt wird, jede praktische Bedeutung abspricht. Sie sei ein Spinngewebe, denkt man, das seiner ausserordentlichen Zartheit wegen nicht gebraucht werden könne. Die gesamte Mathematik befasst sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Grössen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch anderseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiss der grössten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist. Man wendet auch etwa ein, die höhere Mathematik versenke sich zu tief in die Ergründung der Wahrheit. Dies ist eher ein Lob als eine Kritik.

Doch verweilen wir nicht zu lange bei diesen abstrakten Vorzügen, können wir doch leicht beweisen, dass die höhere Analysis mit nicht weniger Recht als die elementare Mathematik die Bezeichnung einer nützlichen Wissenschaft verdient, ja, dass ihr sogar ein viel weiteres Feld der Anwendung offensteht. Selbst im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche die elementare Mathematik vorerst allgemein zu genügen schien, ist die Weiterentwicklung der höhern Mathematik bis zu einem Grade erforderlich, den sie noch lange nicht erreicht hat. Daher will ich in dieser Abhandlung zeigen, dass der Nutzen, den man der elementaren Mathematik zugesteht, bei der höhern Mathematik nicht etwa verschwindet, sondern im Gegenteil stets wächst, je höher man in dieser Wissenschaft steigt; ja, dass die Mathematik noch nicht einmal so weit entwickelt ist, als auch die gebräuchlichsten Anwendungen es eigentlich erfordern. Um dies deutlich zu beweisen, möchte ich der Reihe nach jene Wissenschaften durchgehen, deren Nutzen und Notwendigkeit von jedermann anerkannt wird, nämlich: Mechanik, Hydrostatik, Astronomie, Artillerie, Physik und Physiologie. Ich werde zur Evidenz zeigen, dass eine um so höhere Analysis erforderlich ist, je grösser der Nutzen, den wir aus diesen Wissenschaften ziehen wollen; dass es aber fast immer der noch ungenügenden Entwicklung der Mathematik zuzuschreiben ist, wenn unsere Hoffnungen, die wir in jene setzen, nicht erfüllt werden.