UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Teoremi di tipo Paley-Wiener per gruppi abeliani localmente compatti

CANDIDATO:
Leonardo Tolomeo

RELATORE:
Prof. Fulvio Ricci

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è enunciare e dimostrare alcuni teoremi originali di tipo Paley-Wiener per gruppi abeliani localmente compatti. Il risultato principale che si vuole raggiungere è estendere il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia E un insieme convesso di $\mathbb{R}^n$ e sia ω la sua funzione supporto, $\omega(y) := \sup_{x \in E}\langle x, y\rangle$.*
Sia Γ il cono convesso definito da $\Gamma := \{y \in \mathbb{R}^n | \omega(y) < +\infty\}$.
Se $u : \mathbb{R}^n + i\Gamma \to \mathbb{C}$ è olomorfa e $\forall y \in \Gamma$, $\|u(\,\cdot\, + iy)\|_2 \leqslant Ce^{\omega(y)}$ per un'opportuna costante C, allora esiste una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ quasi ovunque nulla sul complementare di E tale che $u(\xi + iy) = \widehat{fe^{\langle y, \cdot\rangle}}(\xi)$ per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Viceversa, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è quasi ovunque nulla sul complementare di E, allora la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si estende ad una funzione olomorfa su $u : \mathbb{R}^n + i\Gamma \to \mathbb{C}$ data da $u(\xi + iy) := \widehat{fe^{\langle y, \cdot\rangle}}(\xi)$.

La Sezione 3.3 sarà dedicata a enunciare e dimostrare un risultato di questo tipo nel caso generale di un gruppo abeliano G. La parte precedente della tesi servirà a presentare la nozione di trasformata di Fourier su G e a definire lo spazio su cui estenderla in modo che diventi "olomorfa" in un senso opportuno.
Nel Capitolo 1, sono enunciati senza dimostrazione una serie di risultati preliminari che saranno utili nel seguito dell'esposizione. In particolare si tratta dei risultati principali sulle algebre di Banach e sulla trasformata di Gelfand, sulla misura di Haar per gruppi localmente compatti, sulla struttura di algebra di Banach commutativa di $(L^1(G), *)$, e i teoremi generali sul *gruppo duale* $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$. Il teorema di Gelfand-Raikov (gli elementi di $\widehat{G}$ separano i punti di G) è pure enunciato in questo capitolo.
Nel Capitolo 2, si definisce la trasformata di Fourier a partire dalla struttura di algebra di Banach di $L^1(G)$. Si fa vedere che lo spettro di L^1 ammette un'identificazione naturale con $\widehat{G}$ che è anche un omeomorifsmo, e quindi si definisce la trasformata di Fourier come la trasformata di Gelfand di $L^1(G)$:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_G f(x)\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x \quad \forall \xi \in \widehat{G}$$

Poiché vale $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ e $\widehat{S}^1 \cong \mathbb{Z}$, per $G = \mathbb{R}$ e $G = S^1$ questa definizione dà rispettivamente la trasformata e la serie di Fourier classiche. Analogamente, per $G = \mathbb{Z}_k$, questa definizione è esattamente quella di trasformata discreta di Fourier. Con questa definizione, si riescono a dimostrare risultati importanti ben noti nei casi classici, ossia:

Teorema 2 (Formula di inversione)**.** *Esiste una misura di Haar* $\mathrm{d}\xi$ *su* $\widehat{G}$*, la* misura duale *di* $\mathrm{d}x$ *tale che per ogni* $f \in L^1(G)$ *con* $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$*,*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\langle\xi, x\rangle \mathrm{d}\xi \qquad \text{per quasi ogni } x \in G$$

Teorema 3 (Plancherel)**.** *La trasformata di Fourier si estende da* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *ad un isomorfismo unitario* $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$

Il Capitolo 3 è rivolto alla dimostrazione dei teoremi di tipo Paley-Wiener. Nella Sezione 3.1, si riporta il caso classico, accennando ad un estensione di teoremi di questo tipo dovuta a Schwartz che ottiene un risultato analogo a quello del Teorema 1 per le distribuzioni a supporto in E.
La Sezione 3.2 è dedicata ad uno studio dettagliato dello spazio $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ e al suo collegamento con $\widehat{G}$ attraverso la mappa naturale $\exp_* : G^* \to \widehat{G}$ definita da $\langle \exp_*(\rho), x\rangle = e^{i\langle\rho,x\rangle}$. In particolare, dimostriamo che G^* separa i punti se e solo se $\exp_*(G)$ è denso in $\widehat{G}$, il che è a sua volta equivalente a chiedere che $\widehat{G}$ sia connesso. Sapere come agisce G^* su G è fondamentale per quanto riguarda i teoremi di tipo Paley-Wiener. Infatti, per sostituire adeguatamente l'ipotesi di convessità nel Teorema 1, si considera l'azione sul gruppo di un cono convesso $\Gamma \subseteq G^*$. Più precisamente, gli insiemi individuati come supporti dai teoremi di tipo Paley-Wiener sono quelli della forma $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) := \left\{x \in G | \langle \rho, x\rangle \leqslant \sup_{y \in E}\langle \rho, y\rangle \quad \forall \rho \in \Gamma\right\}$. Come nel caso reale, indicheremo come *funzione supporto* di E rispetto a Γ la funzione $\omega : \Gamma \to \mathbb{R}$ data da $\omega(\rho) := \sup_{y\in E}\langle\rho, y\rangle$. La Sezione 3.2 si conclude con un teorema che descrive il collegamento fra l'operazione di Hull su G e l'operazione di inviluppo convesso chiuso su $(G^*)^*$ (il duale topologico di G^*). Nell'ultima sezione, si definisce cosa si intende per "funzione olomorfa" su $\widehat{G} \times G^*$ e si enunciano e dimostrano alcuni teoremi di tipo Paley-Wiener. Per farlo, si estende la funzione $\exp_*$ ad un omomorifsmo fra lo spazio vettoriale complesso $G^*_{\mathbb{C}}$ (il complessificato di G^*) e il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \cong \widehat{G} \times G^*$ come $\langle \exp_*(\rho + i\eta), x\rangle := e^{i\langle\rho,x\rangle - \langle\eta,x\rangle}$. A questo punto, se $\Gamma \subseteq G^*$ è un cono convesso, una funzione $u : \widehat{G} \times \Gamma \to \mathbb{C}$ è detta olomorfa se $\forall \xi, \rho, \eta \in \widehat{G}$ la funzione $u(\xi \exp_*(-i\rho - z\eta)) : \{\Im(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa nel senso usuale. Per quanto riguarda le funzioni $L^1(G)$ a supporto in E questa definizione è soddisfacente, in quanto ponendo $\Gamma := \{\rho \in G^* | \, \rho$ è superiormente limitato su $E\}$ la sua trasformata di Fourier si estende ad una funzione olomorfa su $\widehat{G} \times \Gamma$. Per quanto riguarda funzioni in $L^2(G)$, invece, la definizione di olomorfa risulta essere troppo restrittiva, in quanto richiede un certo tipo di continuità. Pertanto, definiamo in modo opportuno insieme *trascurabile* su G^* e funzione olomorfa *quasi ovunque* su $\widehat{G} \times \Gamma$. A questo punto, riusciamo a dimostrare il risultato principale di questa tesi, costituito dai seguenti due enunciati, i quali insieme danno una generalizzazione del Teorema 1 per gruppi abeliani localmente compatti:

Teorema 4. *Sia* $E \subseteq G$ *tale che* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) = E$ *e che ogni* $\rho \in \Gamma$ *sia limitato su* E. *Sia* ω *la funzione supporto di* E *rispetto ad* Γ. *Sia* $f \in L^2(G)$ *con supporto in* E. *Allora la trasformata di Fourier si estende ad una funzione* $\widehat{f} : \widehat{G} \times \Gamma \to \mathbb{C}$, $\widehat{f}(\xi, \rho) := \widehat{fe^\rho}(\xi)$ *olomorfa quasi ovunque su* $\widehat{G} \times \Gamma$ *e tale che* $\|\widehat{f}(\,\cdot\,, \rho)\|_2 \leqslant \|f\|_2 e^{\omega(\rho)}$.

Teorema 5. *Sia* $E \subseteq G$ *tale che* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) = E$ *e che ogni* $\rho \in \Gamma$ *sia limitato su* E. *Sia* ω *la funzione supporto di* E *rispetto ad* Γ. *Se* u *è una funzione olomorfa quasi ovunque su* $\widehat{G} \times \Gamma$ *tale che per quasi ogni* $\rho \in \Gamma$, $\|u(\,\cdot\,, \rho)\|_2 \leqslant Ce^{\omega(\rho)}$ *per un'opportuna costante* C, *allora esiste una funzione* $f \in L^2(\widehat{G})$ *con supporto in* E *tale che per quasi ogni* $\rho \in \Gamma$, $u(\,\cdot\,, \rho) = \widehat{f}(\,\cdot\,, \rho)$ *come elementi di* $L^2(\widehat{G})$.

Capitolo 1

Preliminari su gruppi topologici e algebre di Banach

Prima di parlare della teoria della trasformata di Fuorier su gruppi abeliani, è necessario avere alcune definizioni e alcuni risultati preliminari. Lo scopo di questo capitolo è quello di riassumere sinteticamente definizioni ed enunciati di questi risultati preliminari.

1.1 Algebre di Banach

Definizione 1.1. *Un'*algebra di Banach *è un'algebra $\mathcal{A}$ sul campo complesso dotata di una norma $\|\cdot\|$ tale che $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ sia uno spazio di Banach e $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ è detta* con unità *se ammette un elemento neutro rispetto al prodotto. Se il prodotto è commutativo, l'algebra è detta* commutativa. *Un'*involuzione *sull'algebra è un'applicazione continua $x \to x^*$ tale che:*

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x^*) = \overline{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad x^{**} = x.$$

Un'algebra dotata di un'involuzione è detta una *-algebra *di Banach. Se l'involuzione soddisfa $\|x^* x\| = \|x\|^2$ $\forall x$, allora l'algebra è detta* C* algebra.

Definizione 1.2. *Lo* spettro *$\sigma(\mathcal{A})$ di un'algebra di Banach commutativa $\mathcal{A}$ è l'insieme dei funzionali moltiplicativi non nulli su $\mathcal{A}$ dotato della topologia debole* di $\mathcal{A}^*$, ossia*

$$\mathcal{A}^* \supseteq \sigma(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{A}^* | \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \ \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \exists x \in \mathcal{A} : \varphi(x) \neq 0\}$$

Lemma 1.3. *Se $\mathcal{A}$ ha unità, allora il suo spettro $\sigma(\mathcal{A})$ è compatto.*

Definizione 1.4. *La* trasformata di Gelfand *su un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ è $\Gamma : \mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A}))$ definita da $\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x)$. $\Gamma(x)$ si indica anche come $\widehat{x}$.*

Proposizione 1.5. *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach senza unità, allora esiste $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ algebra di Banach con unità tale che la norma di $\tilde{\mathcal{A}}$ coincide con la norma di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ è una *-algebra o una C*-algebra, si può estendere la norma e l'involuzione su $\tilde{\mathcal{A}}$ in modo che anche $\tilde{\mathcal{A}}$ sia rispettivamente una *-algebra o una C*-algebra.*

Proposizione 1.6. *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach commutativa senza unità. Allora $\sigma(\mathcal{A})$ è localmente compatto e se non è compatto la sua chiusura in $\mathcal{A}^*$ è $\sigma(A) \cup \{0\} \cong \sigma(\tilde{\mathcal{A}})$. La trasformata di Gelfand è un omomorfismo di algebre $\mathcal{A} \to C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ con immagine densa e $\|\hat{x}\|_{\sup} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|x\|$.*

1.2 Gruppi localmente compatti

Definizione 1.7. *Un* gruppo topologico *è un gruppo $(G, \cdot)$ dotato di una topologia τ tale che*

1. *$\cdot : G \times G \to G$ data da $(u, v) \mapsto u \cdot v$ è continua*
2. *${}^{-1} : G \to G$ data da $x \mapsto x^{-1}$ è continua (e quindi è un omeomorfismo)*

L'elemento neutro di G sarà indicato con 1.
Se G è abeliano, spesso verrà usata la notazione $(G, +)$ al posto di $(G, \cdot)$. In questo caso, l'inverso dell'elemento x sarà indicato con $-x$ e l'elemento neutro sarà indicato con 0.

Da adesso in poi, tutti i gruppi topologici saranno T_2. Vale comunque il seguente:

Lemma 1.8. *Se $H < G$ è un sottogruppo, allora anche $\overline{H}$ lo è. Inoltre, se H è normale, lo è anche $\overline{H}$ e $G/\overline{H}$ con la topologia quoziente è un gruppo topologico T_2.*

Corollario 1.9. *Se G è T_1, allora è anche T_2.*

Dimostrazione. $\{1\}$ è chiuso per ipotesi e quindi $G/\{1\} \cong G$ è T_2 per il Lemma. □

Lemma 1.10. *Se G, H sono gruppi topologici e $\Phi : G \to H$ è un omomorfismo di gruppi, allora Φ è continuo se e solo se è continuo in 0.*

Lemma 1.11. *Se $y \in G$, $L_y : G \to G$ e $R_y : G \to G$ dati rispettivamente da $x \mapsto yx$ e $x \mapsto xy^{-1}$ sono degli omeomorfismi. Inoltre $y \to L_y$, $y \mapsto R_y$ sono degli omomorfismi di gruppo continui da G a $C(X, X)$.*

Definizione 1.12. *$f \in C(G)$ si dice* uniformemente continua *da sinistra (rispettivamente da destra) se l'applicazione $G \to C(G)$ data da $y \mapsto L_y(f)$ (risp. $y \to R_y(F)$) è continua in 1.*

Teorema 1.13 (Heine - Cantor)**.** *Sia $f \in C(G)$ a supporto compatto. Allora f è uniformemente continua (sia destra che sinistra).*

Definizione 1.14. *Se X è uno spazio topologico, una* misura di Radon *su G è una misura positiva μ tale che*

- *μ è finita sui compatti*
- *$\mu(E) = \sup\{\mu(K)|K \subseteq E,\ K$ compatto $\}$ $\forall E$ boreliano.*
- *$\mu(E) = \inf\{\mu(V)|E \subseteq V,\ V$ aperto $\}$ $\forall E$ boreliano.*

Definizione 1.15. *Una misura μ positiva sui boreliani di G si dice* invariante a destra *(risp. a sinistra) se $\forall y \in G$, $\forall A \subseteq (B)(G)$, $\mu(Ay) = \mu(A)$ (risp. $\mu(yA) = \mu(A)$)*

Teorema 1.16 (Misura di Haar)**.** *Se G è un gruppo topologico localmente compatto, allora esiste μ_s misura di Radon non nulla invariante a sinistra (risp. μ_d a destra).*
Inoltre, $\forall \nu_s$ di Radon invariante a sinistra (risp. ν_d a destra), $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$ tale che $\nu_s = \lambda\mu_s$ (risp. $\nu_d = \lambda\mu_d$).
Una qualunque di queste misure si dice misura di Haar *sinistra (risp. destra) del gruppo.*
La misura di Haar è finita se e solo se il gruppo è compatto.
Se il gruppo è compatto, o se è abeliano, le misure di Haar sinistra e destra coincidono.

La misura di Haar è per molti versi una generalizzazione della misura di Lebesgue ai gruppi. Infatti molte concetti dell'analisi classica si trasportano in modo naturale in questo contesto dei gruppi localmente compatti.

Lemma 1.17. *La misura di Haar è continua per traslazioni, ossia $\forall f \in L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, vale che le applicazioni $f \to R_y f$ e $f \to L_y f$ sono continue in y. In particolare, per $y \to 0$ si ottiene che $\|L_y f - f\|_{L^p(\mu_s)} \to 0$ e $\|R_y f - f\|_{L^p(\mu_d)} \to 0$.*

1.3 Convoluzione

Da adesso in poi, per semplicità, $(G, +)$ sarà sempre abeliano. Indicheremo con dx una fissata misura di Haar di G e $L^p(G)$, dove non specificato, sarà considerato rispetto a questa misura di Haar, inoltre C_b indicherà le funzioni da G a $\mathbb{C}$ limitate, C_0 indicherà le funzioni di C_b infinitesime all'infinito e C_c indicherà le funzioni di C_0 a supporto compatto.

Definizione 1.18 (Convoluzione di misure)**.** *Siano μ,$\nu \in M(G)$ misure complesse finite. La* convoluzione *fra μ e ν è l'unica misura $\mu * \nu \in M(G)$ tale che*

$$\int_G \varphi(x)\mathrm{d}\mu * \nu(x) = \int_G \int_G \varphi(x + y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) \qquad \forall \varphi \in C_0(G)$$

Inoltre vale che $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\|\nu\|$, dove con $\|\mu\|$ indichiamo la variazione totale di μ.
Di conseguenza, $(M(G), *)$ è un algebra di Banach con unità δ_0

Diciamo che $L^1(G) \subseteq M(G)$ in questo senso: se $f \in L^1$, allora la misura $f\mathrm{d}x \in M(G)$ e $\|f\mathrm{d}x\| = \|f\|_1$

Lemma 1.19.

- *La formula* $\int_G \varphi(x)\mathrm{d}\mu * \nu(x) = \int_G \int_G \varphi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$ *è valida* $\forall \varphi \in C_b(G)$
- *Il prodotto di convoluzione è abeliano*
- $\delta_0 \in L^1 \iff G$ *è discreto*
- L^1 *è un ideale di* $M(G)$*: se* $f \in L^1$, $\mu \in M(G)$, *allora* $\int_G f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)$ *è definito quasi ovunque, è in* L^1 *ed è la densità di* $f * \mu$
- *Se* $f, g \in L^1$, *allora* $f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ *e* $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$
- *Su* L^1 *si definisce un'involuzione:* $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. *Vale che* $(f * g)^* = g^* * f^*$, *quindi* L^1 *col prodotto di convoluzione e questa involuzione è una *-algebra di Banach commutativa. Ammette unità sse* G *è discreto.*

Lemma 1.20. *Se* $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *allora si può definire* $f * g$ *con la formula sopra. Risulta che* $f * g(x)$ *è definita ovunque ed è uniformemente continua.*

Lemma 1.21. *Dato un sistema fondamentale di intorni di* 0 $\{U \in \mathcal{U}\}$, *per ogni famiglia* $\{\psi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ *di funzioni continue* $\geqslant 0$, *con* φ_U *a supporto compatto in* U *tali che* $\psi_U(x) = \psi_U(-x)$ *e* $\int_G \psi_U = 1$, *vale che al tendere di* U *a* $\{0\}$, $\|f * \psi_U - f\|_p \to 0$ $\forall f \in L^p$ *e* $\|f * \psi_U - f\|_\infty \to 0$ $\forall f$ *uniformemente continua. Inoltre, una tale famiglia esiste per ogni* $\mathcal{U}$.
Una famiglia di funzioni con questa proprietà si chiama identità approssimate.

1.4 Il gruppo duale Ĝ

Definizione 1.22. *Se* G *gruppo abeliano localmente compatto, il suo gruppo duale è* $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$ *(per* Hom *si intende l'insieme degli omomorfismi continui da* G *a* S^1, *o equivalentemente l'insieme dei morfismi da* G *a* S^1 *nella categoria dei gruppi abeliani localmente compatti). Se* $\xi \in \widehat{G}$, *si indica* $\langle \xi, x \rangle := \xi(x)$. *Gli elementi di* $\widehat{G}$ *sono detti* caratteri *di* G.

Proposizione 1.23. *Se* $\xi, \zeta \in \widehat{G}$, *allora* $\cdot : \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ *definito da*

$$\langle \xi \cdot \zeta, x \rangle := \langle \xi, x \rangle \langle \zeta, x \rangle$$

è un prodotto su $\widehat{G}$ *che rende* $\widehat{G}$ *un gruppo abeliano.*
Se si dota $\widehat{G}$ *della topologia compatto - aperto, ossia quella in cui una base di aperti è*

$$V_{K,U,\xi} := \{\zeta | \langle \zeta, x \rangle \in U \quad \forall x \in K\}$$

al variare di $K \subseteq G$ compatto, $U \subseteq S^1$ aperto, $\xi \in \widehat{G}$, $\widehat{G}$ diventa un gruppo topologico. Vedremo più avanti che, con questa topologia, $\widehat{G}$ è anche localmente compatto.

Teorema 1.24 (Gelfand - Raikov)**.** *$\widehat{G}$ separa i punti, ossia se $x, y \in G$, $x \neq y$, allora $\exists \xi : \langle \xi, x \rangle \neq \langle \xi, y \rangle$*

1.5 Funzioni di tipo positivo

Definizione 1.25. *Sia $\phi \in L^\infty$ tale che $\forall f \in L^1$, $\int_G f * f^*(x)\phi(x) \geqslant 0$ (nel senso che è reale e $\geqslant 0$). Allora ϕ si dice di* tipo positivo.

Lemma 1.26.

1. *ϕ è di tipo positivo sse $\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(y-x) \geqslant 0 \ \forall f \in L^1$*
2. *Se $\xi \in \widehat{G}$, allora ξ è di tipo positivo.*
3. *Se $f \in L^2$, allora $f * f^*$ è di tipo positivo.*

Proposizione 1.27. *Sia ϕ continua limitata. Vale che ϕ è di tipo positivo se e solo se, per ogni scelta di $x_1, \ldots, x_n \in G$ la matrice $(a_{ij}) = \phi(x_i - x_j)$ è hermitiana semidefinita positiva.*

Teorema 1.28. *Se ϕ è di tipo positivo, allora ϕ è uguale quasi ovunque ad una funzione continua che soddisfa le proprietà della Proposizione precedente.*

Corollario 1.29. *Se ϕ è di tipo positivo, allora $\|\phi\|_\infty = \phi(0)$ e $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$*

Corollario 1.30. *Se ϕ è di tipo positivo, $\langle f, g \rangle_\phi := \int_G f * g^*(x)\phi(x)$ è un prodotto hermitiano semidefinito positivo su L^1.*

Indicherò con $\mathcal{P}$ l'insieme delle funzioni continue di tipo positivo, con $\mathcal{B}$ il suo span in L^∞ e con $\mathcal{B}^p := \mathcal{B} \cap L^p$

Lemma 1.31. *Se $f, g \in C_c(G)$, allora vale che $f * g \in C_c(G)$. Inoltre*

$$4(f * g) =$$

$$(f+g^*)*(f+g^*)^* - (f-g^*)*(f-g^*)^* + i(f+ig^*)*(f+ig^*)^* - i(f-ig^*)*(f-ig^*)^*$$

per polarizzazione ($f * g^*$ è sesquilineare), quindi $f * g \in \mathcal{B}^p \ \forall p$.

Capitolo 2

Trasformata di Fourier e dualità di Pontrjagin

Sia G un gruppo topologico abeliano localmente compatto. Come visto nei preliminari, $(L^1, *)$ è un'algebra di Banach, in generale senza unità. Per questo, ne si può considerare lo spettro σ e la sua trasformata di Gelfand.

2.1 Spettro di L^1 e $\hat{G}$

Dimostriamo che lo spettro di L^1 coincide con il gruppo duale $\widehat{G}$.

Lemma 2.1. *Sia ι l'inclusione di $\widehat{G}$ in $L^\infty = (L^1)^*$. Vale che $\bar{\iota}(\widehat{G}) \subseteq \sigma(L^1)$*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che

$$\int_G f * g(x)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}x = \int_G f(x)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}x \int_G g(y)\langle \xi, y\rangle \mathrm{d}y$$

Vale che:

$$\int_G f * g(x)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}x = \int_G \int_G f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\langle \xi, x-y\rangle\langle \xi, y\rangle \mathrm{d}x$$

per il Teorema di Fubini-Tonelli, questo è

$$\int_G g(y)\langle \xi, y\rangle \int_G f(x-y)\langle \xi, x-y\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_G g(y)\langle \xi, y\rangle \mathrm{d}y \int_G f(x)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}x$$

per l'invarianza per traslazioni. □

Vale anche il viceversa:

Proposizione 2.2. *Sia $\varphi \in \sigma(L^1)$, ossia $\varphi \in L^\infty$ tale che $\langle f*g, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle\langle g, \varphi\rangle$. Allora φ è uguale quasi ovunque ad un elemento di $\widehat{G}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1$ tale che $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$. $\forall g \in L^1$ vale che:

$$\int_G \langle \varphi, f \rangle \varphi(y) g(y) \mathrm{d}y = \langle \varphi, f \rangle \langle \varphi, g \rangle = \langle \varphi, f * g \rangle =$$

$$= \int_G \int_G \varphi(x) f(x-y) g(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_G \langle \varphi, L_y f \rangle g(y) \mathrm{d}y$$

Per cui per quasi ogni y si ha che $\frac{\langle \varphi, L_y f \rangle}{\langle \varphi, f \rangle} = \varphi(y)$. Ma per il Lemma 1.17, $\langle \varphi, L_y f \rangle$ è continua in y, quindi φ è uguale quasi ovunque ad una funzione continua, quindi senza perdere generalità φ è continua e l'uguaglianza vale ovunque. Inoltre, poiché quell'uguaglianza è vera $\forall f$ tale che $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$,

$$\varphi(x+y) \langle \varphi, f \rangle = \langle \varphi, L_{x+y} f \rangle = \langle \varphi, L_x L_y f \rangle = \varphi(x) \varphi(y) \langle \varphi, f \rangle$$

e quindi $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$. □

Quindi abbiamo identificato lo spettro dell'algebra $L^1(G)$ con il gruppo duale $\widehat{G}$. Con la topologia debole* di sottospazio di L^∞, $\widehat{G}$ è un gruppo topologico ed è localmente compatto per la Proposizione 1.6. In realtà, vale che questa topologia coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti descritta nella Sezione 1.4. Prima di dimostrarlo, indico con $\widehat{G}$ il gruppo duale se lo intendo con la topologia uniforme sui compatti, $\sigma(L^1)$ se lo intendo con la topologia debole* di L^∞.

Lemma 2.3. *L'applicazione $F : G \times \sigma(L^1) \to S^1$ data da $F(x, \xi) = \langle \xi, x \rangle$ è continua.*

Dimostrazione. F è chiaramente un omomorfismo di gruppi, quindi basta verificare la continuità in 1. Sia $x_\alpha \to 0$ in G e $\xi_\alpha \to 1$ in $\sigma(L^1)$. Vale che $\forall f \in L^1$:

$$\left| \int_G (L_{x_\alpha} f) \xi_\alpha - \int_G f \right| \leqslant \int_G |L_{x_\alpha} f - f| + \left| \int_G (f \xi_\alpha - f) \right| \to 0$$

per il Lemma 1.17 e la convergenza debole* di ξ_α. Inoltre vale:

$$\int_G (L_x f) \xi = \int_G f(y-x) \langle \xi, y \rangle \mathrm{d}y = \int_G f(y) \langle \xi, y+x \rangle \mathrm{d}y = \langle \xi, x \rangle \int_G f(y) \langle \xi, y \rangle \mathrm{d}y.$$

Per cui, scegliendo $f \in L^1$ tale che $\int f = 1$, si ha che:

$$|\langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle - 1| = |\langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle - 1| \left| \int_G f \right| = \left| \langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle \int_G f(y) \mathrm{d}y - \int_G f(y) \mathrm{d}y \right|$$

$$\leqslant \left| \langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle \int_G f(y) \mathrm{d}y - \langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle \int_G f(y) \langle \xi_\alpha, y \rangle \mathrm{d}y \right| + \left| \langle \xi_\alpha, x_\alpha \rangle \int_G f(y) \langle \xi_\alpha, y \rangle \mathrm{d}y - \int f(y) \mathrm{d}y \right|$$

$$= \left| \int_G f(y) \mathrm{d}y - \int_G f(y) \langle \xi_\alpha, y \rangle \mathrm{d}y \right| + \left| \int_G (L_{x_\alpha} f) \xi_\alpha - \int_G f \right| \to 0$$

per la convergenza di ξ_α e l'osservazione iniziale. □

Teorema 2.4. *Le topologie su $\sigma(L^1(G))$ e su $\widehat{G}$ coincidono.*

Dimostrazione. La tesi è equivalente a dimostrare che l'identità $i : \widehat{G} \to \sigma(L^1(G))$ e la sua inversa $j : \sigma(L^1(G)) \to \widehat{G}$ sono continue. Poiché sono omomorfismi di gruppi, basta verificare che siano continue in 1.
Continuità di i: Sia $\xi_\alpha \to 1$ uniformemente sui compatti. Dimostriamo che $\xi_\alpha \to 1$ in $\sigma(L^1(G))$. Sia $f \in L^1(G)$. Poiché la misura di Haar è di Radon, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K$ compatto tale che $\|f - f\mathbb{1}_K\|_1 < \varepsilon$. Di conseguenza,

$$\limsup_\alpha \left| \int_G f\xi_\alpha - \int_G f \right|$$
$$\leqslant \limsup_\alpha \left(\left| \int_G f\xi_\alpha - \int_G f\mathbb{1}_K \xi_\alpha \right| + \left| \int_G f\mathbb{1}_K \xi_\alpha - \int_G f\mathbb{1}_K \right| + \left| \int_G f\mathbb{1}_K - \int_G f \right| \right)$$
$$\leqslant 2 \int_G |f - f\mathbb{1}_K| + \limsup_\alpha \|f - f\mathbb{1}_K\|_1 \|\xi_\alpha - 1\|_{\infty,K} = 2 \int_G |f - f\mathbb{1}_K| < 2\varepsilon.$$

Quindi per l'arbitrarietà di ε, $\int_G f\xi_\alpha \to \int_G f$, e quindi $\xi_\alpha \to 1$ in $\sigma(L^1(G))$.
Continuità di j: Dimostriamo che un intorno di 1 in $\widehat{G}$ lo è anche in $\sigma(L^1(G))$. Sia $U_{K,\varepsilon} := \{\xi \in \widehat{G} | |\langle \xi, x\rangle - 1| < \varepsilon\ \forall x \in K\}$ un intorno di 1 nella topologia compatto-aperto. Per il Lemma 2.3, $\forall y \in K\ \exists S(y)$ intorno aperto di y e V_y intorno aperto di 1 in $\sigma(L^1(G))$ tali che $|\langle \xi, x\rangle - 1| < \varepsilon\ \forall x \in S(y)$, $\forall \xi \in V_y$. Poiché gli $S(y)$ ricoprono K, sia $S(y_1), \dots, S(y_n)$ un ricoprimento finito. Vale che $V := V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ è un intorno aperto di 1 in $\sigma(L^1(G))$. Quindi $\forall x \in \cup S(y_i) \supseteq K$, $\forall \xi \in V$, $|\langle \xi, x\rangle| < \varepsilon$, quindi $j(V) \subseteq U_{K,\varepsilon}$. □

Corollario 2.5. *$\widehat{G}$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti è localmente compatto.*

Dimostrazione. $\widehat{G} = \sigma(L^1(G))$, quindi la tesi segue dalla Proposizione 1.6. □

Quando G è discreto o G è compatto, si può dire qualcosa in più sulla struttura di $\widehat{G}$. Per prima cosa, se G è compatto, allora ha misura finita, quindi $\widehat{G} \subseteq L^\infty \subseteq L^p$ per ogni $p \geqslant 1$. Inoltre:

Lemma 2.6. *Se G è compatto e $|G| = 1$, allora $\widehat{G} \subseteq L^2$ è un sistema ortonormale.*

Dimostrazione. Se $\xi \in \widehat{G}$, allora $|\xi|^2 \equiv 1$, quindi $\int_G |\xi|^2 = 1$. Sia $\xi \neq \zeta$, e sia $x \in G$ tale che $\langle \xi, x\rangle \neq \langle \zeta, x\rangle$. Allora:

$$\int \xi\overline{\zeta} = \int_G \langle \xi\zeta^{-1}, y\rangle \mathrm{d}y = \langle \xi\zeta^{-1}, x\rangle \int_G \langle \xi\zeta^{-1}, y - x\rangle \mathrm{d}y$$
$$= \langle \xi\zeta^{-1}, x\rangle \int_G \langle \xi\zeta^{-1}, y\rangle \mathrm{d}y = \langle \xi\zeta^{-1}, x\rangle \int \xi\overline{\zeta}$$

E quindi $\int \xi\overline{\zeta} = 0$. □

Proposizione 2.7.

1. *Se G è compatto, allora $\widehat{G}$ è discreto.*

2. *Se G è discreto, allora $\widehat{G}$ è compatto.*

Dimostrazione.

1. Poiché se $\xi \in \widehat{G}$, $\xi \in L^1$, $U_\xi := \{\zeta \in \widehat{G} | \int_G \xi\zeta < \frac{1}{2}\}$ è aperto in $\sigma(L^1(G)) = \widehat{G}$, ma per il Lemma 2.6 contiene solo ξ.

2. Se G è discreto, allora $L^1(G)$ ha unità $\delta_0 = \mathbb{1}_{\{0\}}$, quindi lo spettro di $L^1(G)$ è compatto.

□

Nel resto della sezione, calcoliamo il gruppo duale di alcuni gruppi. Per i tre esempi che seguono, è molto facile verificare che l'identificazione descritta è effettivamente un omeomorfismo con l'immagine, quindi ci limitiamo a dimostrare la suriettività:

Esempio 2.8. Il duale di $\mathbb{R}$ è $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, con $\mathbb{R} \ni t \mapsto \xi_t$, $\langle \xi_t, x\rangle = e^{itx}$

Dimostrazione. Vale che $\langle \xi, 0\rangle = 1$, quindi per continuità esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A := \int_0^a \langle \xi, x\rangle \neq 0$. Vale che

$$A\langle \xi, x\rangle = \int_0^a \langle \xi, x+t\rangle \mathrm{d}t = \int_x^{a+x} \langle \xi, x\rangle$$

quindi:

$$\xi'(x) = \frac{\langle \xi, a+x\rangle - \langle \xi, x\rangle}{A} = c\langle \xi, x\rangle \text{ con } c = \frac{\langle \xi, a\rangle - 1}{A}$$

da cui $\langle \xi, x\rangle = e^{cx}$. Poiché $|\xi| = 1$, c è immaginario puro e quindi $\xi = \xi_{-ic}$ □

Esempio 2.9. Il duale di S^1 è $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$, con $\langle \xi_n, z\rangle = z^n$

Dimostrazione. Poiché $S^1 \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, i caratteri di S^1 sono la proiezione dei caratteri su $\mathbb{R}$ che sono banali su $2\pi\mathbb{Z}$. □

Esempio 2.10. Il duale di $\mathbb{Z}$ è $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, con $\langle \xi_z, n\rangle = z^n$

Dimostrazione. Ponendo $z := \langle \xi, 1\rangle$, si ha che $\langle \xi, n\rangle = \langle \xi, 1\rangle^n = z^n$ □

Esempio 2.11. Se $\mathbb{Z}_k$ è il gruppo ciclico di n elementi, il suo duale è isomorfo a $\mathbb{Z}_k$, con $\langle n, m\rangle = e^{\frac{2\pi i n m}{k}}$

Lemma 2.12. *Siano $G_1, \dots, G_n$ gruppi abeliani localmente compatti. Allora $\widehat{\prod_{i=1}^n G_i} \cong \prod_{i=1}^n \widehat{G}_i$ con l'omomorfismo $\langle \varphi(\xi), (x_1, \dots, x_n)\rangle = \prod_{i=1}^n \langle \xi_i, x_i\rangle$ (ξ_i definito da $\langle \xi_i, x_i\rangle = \langle \xi, (0, \dots, 0, x_i, 0 \dots 0)\rangle$).*

Dimostrazione. E' facile trovare l'inversa ψ di φ: se $\xi_i \in \widehat{G}_i$, allora $\prod_{i=1}^n \langle \xi_i, x_i \rangle$ è un carattere su $\prod G_i$. La continuità di ψ e φ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti segue facilmente dalla definizione. $\square$

Corollario 2.13. *Il duale di $\mathbb{R}^n$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Il duale di $\mathbb{T}^n$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. Il duale di $\mathbb{Z}^n$ è isomorfo a $\mathbb{T}^n$*

Il Lemma 2.11 si può generalizzare ai prodotti infiniti di gruppi compatti:

Lemma 2.14. *Se $\{G_i\}_{i \in I}$ sono gruppi compatti, allora anche $G = \prod_{i \in I} G_i$ lo è e il suo duale è $\widehat{G} = \bigoplus_{i \in I} \widehat{G_i}$ dotato della topologia discreta.*

Dimostrazione. Come nella 2.11, se $\xi_i \in \bigoplus_{i \in I} \widehat{G_i}$, allora $\prod_{i \in I} \langle \xi_i, x_i \rangle$ è un carattere su G. Viceversa, sia ξ un carattere di G. Allora $V := \{x \in G || \langle \xi, x \rangle - 1| < 1\}$ è aperto in G, quindi per definizione di topologia prodotto contiene in un insieme della forma $\prod_{i \in I} V_i$, con V_i aperto in G_i e $V_i = G_i$ tranne che per finiti indici i. Ma quindi se $V_i = G_i$, $\xi_i(G_i)$ è un sottogruppo di S^1 contenuto in $\{z \in S^1 || z - 1| < 1$, ma quindi $\xi_i(G_i) = \{1\}$, e quindi $\xi_i \equiv 1$. $\square$

2.2 Trasformata di Fourier

Poiché $(L^1(G), *)$ è un'algebra di Banach con spettro $\sigma = \widehat{G}$, è possibile farne la trasformata di Gelfand. Ad esempio, nel caso di $\mathbb{R}$ si ottiene:

$$\widehat{f}(\xi) = \langle \xi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \langle \xi, x \rangle \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i \xi x} \mathrm{d}x$$

che a meno di sostituire ξ con $\overline{\xi}$ è l'usuale trasformata di Fourier. Una cosa analoga succede per S^1:

$$\widehat{f}(n) = \int_{S^1} f(x) e^{inx} \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}$$

che a meno di sostituire n con $-n$ e di un fattore 2π, dà i coefficienti della serie di Fourier di f (se $f \in L^2$). Quindi risulta abbastanza naturale identificare $\widehat{G}$ con $\sigma(L^1)$ non con l'immersione di $\widehat{G}$ in L^∞, ma con $\xi \mapsto \overline{\xi}$ e estendere la trasformata di Fourier in questo modo:

Definizione 2.15. *La* trasformata di Fourier *su G è la trasformata di Gelfand $\mathcal{F} : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$, ossia $f \mapsto \widehat{f}$,*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G f(x) \overline{\langle \xi, x \rangle} \mathrm{d}x$$

Valgono alcuni risultati che sono ben noti per la trasformata di Fourier classica:

Proposizione 2.16.

1. *$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.*
2. *$\mathcal{F}(L^1)$ è denso in C_0.*
3. *Se $y \in G$, $g(x) = f(x-y)$, $\widehat{g}(\xi) = \overline{\langle \xi, y\rangle}\widehat{f}(\xi)$.*
4. *Se $\zeta \in \widehat{G}$, $\widehat{\zeta f}(\xi) = \widehat{f}(\zeta^{-1}\xi)$.*

Dimostrazione.

1. $|\widehat{f}(\xi)| = \left|\int_G f(x)\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_G |f(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1$.
2. E' parte del Teorema 1.6 letto sull'algebra $L^1(G)$.
3. $\widehat{g}(\xi) = \int_G g(x)\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \int_G f(x-y)\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \int_G f(x)\overline{\langle \xi, x+y\rangle}\mathrm{d}x = \overline{\langle \xi, y\rangle}\int_G f(x)\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \overline{\langle \xi, y\rangle}\widehat{f}(\xi)$.
4. $\widehat{\zeta f}(\xi) = \int_G f(x)\langle \zeta, x\rangle\overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \int_G f(x)\overline{\langle \zeta^{-1}, x\rangle\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \int_G f(x)\overline{\langle \zeta^{-1}\xi, x\rangle}\mathrm{d}x = \widehat{f}(\zeta^{-1}\xi)$.

□

Proposizione 2.17. *La definizione di trasformata di Fourier si estende in modo naturale ad una qualsiasi misura di Radon. Infatti, se $\mu \in M(G)$, $\widehat{\mu}(\xi) := \int_G \overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}\mu(x)$ è definito ovunque ed è una funzione limitata uniformemente continua. Inoltre vale che se $\mu, \nu \in M(G)$, $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \widehat{\mu}(\xi)\widehat{\nu}(\xi)$*

Dimostrazione. Chiaramente

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leqslant \int_G \mathrm{d}|\mu|(x) = \|\mu\|$$

Per l'uniforme continuità, si ha che:

$$|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi\zeta)| = \left|\int_G \overline{\langle \xi, x\rangle} - \overline{\langle \xi\zeta, x\rangle}\mathrm{d}\mu(x)\right| =$$

$$\left|\int_G \overline{\langle \xi, x\rangle}(1 - \langle \zeta, x\rangle)\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \int_G |1 - \langle \zeta, x\rangle|\mathrm{d}|\mu|(x)$$

e poiché $|\mu|$ è di Radon, quando $\zeta \to 1$ uniformemente sui compatti, allora $\int_G |1 - \langle \zeta, x\rangle|\mathrm{d}|\mu|(x) \to 0$. Inoltre:

$$\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \int_G \overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}\mu * \nu(x) = \int_G \overline{\langle \xi, x+y\rangle}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) =$$

$$\int_G \overline{\langle \xi, x\rangle}\mathrm{d}\mu(x)\int_G \overline{\langle \xi, y\rangle}\mathrm{d}\nu(y) = \widehat{\mu}(\xi)\widehat{\nu}(\xi).$$

□

In questa fase, si rivelerà utile anche un'operazione simile fatta su $M(\widehat{G})$:

Definizione 2.18. *Sia* $\mu \in M(\widehat{G})$. *Si definisce la funzione*

$$\phi_\mu(x) := \int_{\widehat{G}} \langle \xi, x \rangle \mathrm{d}\xi$$

Proposizione 2.19. $\phi_{(\,\cdot\,)}$ *è lineare e iniettiva, ha immagine in* $C_b(G)$ *e* $\|\varphi_\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\|$.

Dimostrazione. E' tutto analogo all'osservazione precedente tranne l'iniettività. Ma se $\varphi_\mu \equiv 0$, allora $\forall f \in L^1(G)$:

$$0 = \int_G \int_{\widehat{G}} f(x) \langle \xi, x \rangle \mathrm{d}\mu(\xi) \mathrm{d}x = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi^{-1}) \mathrm{d}\mu(\xi)$$

Ma poiché l'immagine della trasformata di Fourier è densa in $C_0(\widehat{G})$, allora $\int_{\widehat{G}} \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0 \ \forall \varphi \in C_0(\widehat{G})$, e quindi $\mu \equiv 0$.

□

Lemma 2.20. *Se* $\mu \geqslant 0$, *vale che* $\phi_\mu \in \mathcal{P}(G)$.

Dimostrazione. Se $f \in L^1(G)$, allora:

$$\int_G f * f^*(x) \phi_\mu(x) \mathrm{d}x = \int_G \int_G f(x) \overline{f(y)} \phi_\mu(x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$$

$$\int_G \int_G \int_{\widehat{G}} f(x) \langle \xi, x \rangle \overline{f(y) \langle \xi, y \rangle} \mathrm{d}\mu(\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_G |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\mu(\xi) \geqslant 0$$

□

Il viceversa di questo Teorema è uno dei risultati fondamentali della teoria.

Teorema 2.21 (Bochner)**.** *Se* $\phi \in \mathcal{P}(G)$, *allora* $\exists! \mu \geqslant 0$ *tale che* $\phi = \phi_\mu$.

Dimostrazione. L'unicità di μ è stata stabilita dalla Proposizione 2.19, quindi bisogna dimostrare solo l'esistenza. Senza perdita di generalità, posso supporre $\phi(0) = 1$. Poiché ϕ è di tipo positivo, applicando la disuguaglianza di Schwarz alla forma Hermitiana $\langle f, g \rangle_\phi := \int_G \phi(f * g^*)$ si ottiene:

$$\left| \int_G \phi(f * g^*) \right|^2 \leqslant \int_G \phi(f * f^*) \int_G \phi(g * g^*) \qquad \forall f, g \in L^1(G)$$

Quindi, se si prende $g = \psi_U$ identità approssimate, $f * \psi_U^* \to f$ in L^1 e $\psi_U * \psi_U^*$ è ancora un'identità approssimata, quindi si ottiene per $U \to 0$:

$$\left| \int_G \phi f \right|^2 \leqslant \phi(0) \int_G \phi(f * f^*) = \int_G \phi(f * f^*)$$

poiché $h := f * f^*$ è tale che $h = h^*$, ponendo $h^{(n)} := \overbrace{h * h * \cdots * h}^{n \text{ volte}}$ e iterando l'ultima disuguaglianza si ottiene:

$$\left|\int \phi f\right| \leqslant \left|\int \phi h\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant \left|\int \phi h^{(2)}\right|^{\frac{1}{4}} \leqslant \cdots \leqslant \left|\int \phi h^{(2^n)}\right|^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leqslant \|h^{(2^n)}\|_1^{2^{-n-1}}$$

in quanto $\|\phi\|_\infty = \phi(0) = 1$. Quindi per il Teorema 1.6,

$$\lim \|h^{(2^n)}\|_1^{2^{-n-1}} = \|\widehat{h}\|_\infty^{\frac{1}{2}} = \||\widehat{f}|^2\|_\infty^{\frac{1}{2}} = \|\widehat{f}\|_\infty.$$

Quindi la mappa $\widehat{f} \to \int \phi f$ è un funzionale lineare di norma $\leqslant 1$ su $\mathcal{F}(L^1(G))$, e quindi si estende ad un funzionale lineare di norma $\leqslant 1$ su $C_0(\widehat{G})$. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste $\breve{\mu} \in M(\widehat{G})$ con $\|\breve{\mu}\| \leqslant 1$ tale che

$$\int_G \phi(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\breve{\mu}(\xi) = \int_G \int_{\widehat{G}} f(x) \langle \xi^{-1}, x \rangle \mathrm{d}\breve{\mu}(\xi) \mathrm{d}x \qquad \forall f \in L^1(G)$$

e quindi ponendo $\mathrm{d}\mu(\xi) = \mathrm{d}\breve{\mu}(\xi^{-1})$ si ha che $\phi(x) = \int \langle \xi, x \rangle \mathrm{d}\mu(\xi) = \phi_\mu(x)$. Infine, vale che $1 = \phi(0) = \mu(\widehat{G}) \leqslant \|\mu\| \leqslant 1$, quindi $\|\mu\| = \mu(\widehat{G})$ e quindi $\mu \geqslant 0$. □

Di conseguenza, poiché ogni misura si può decomporre come combinazione lineare di misure positive, da questo Teorema segue che l'immagine secondo $\phi_{(\cdot)}$ di $M(\widehat{G})$ è proprio $\mathcal{B}(G)$. Per $\phi \in \mathcal{B}(G)$, indichiamo con μ_ϕ l'unica misura tale che $\phi_{\mu_\phi} = \phi$.
Dal Teorema di Bochner, si riesce a dimostrare una prima versione della formula di inversione per la trasformata di Fourier. Prima servono due lemmi tecnici:

Lemma 2.22. *$\forall K \subseteq \widehat{G}$ compatto, esiste $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$ tale che $\widehat{f} \geqslant 0$ ovunque e $\widehat{f} > 0$ su K.*

Dimostrazione. Sia $h \in C_c(G)$ tale che $\int_G h = \widehat{h}(1) = 1$. Allora $g := h * h^*$ è di tipo positivo, a supporto compatto, $\widehat{g}(\xi) = |\widehat{h}(\xi)|^2 \geqslant 0$ e $\widehat{g}(1) = 1$. Poiché $\widehat{g}$ è continua, esiste V intorno aperto di 1 tale che $\widehat{g} > 0$ su V. Per compattezza, K può essere ricoperto da finiti traslati di V, ossia $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \xi_j V$. Sia $f = \sum_{j=1}^n \xi_j g$. f ha lo stesso supporto di g ed è di tipo positivo ($\int f(a*a^*) = \sum \int g[(\xi_j a)*(\xi_j a)^*]$). Vale che $\widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^n \widehat{g}(\xi_j^{-1}\xi) \geqslant \widehat{g}(\xi_j^{-1}\xi) \geqslant 0$ $\forall j$, e quindi $\widehat{f} > 0$ su $\bigcup \xi_j V \supseteq K$. □

Lemma 2.23. *Se $f, g \in \mathcal{B}^1(G)$, allora $\widehat{f}\mathrm{d}\mu_g = \widehat{g}\mathrm{d}\mu_f$*

Dimostrazione. Sia $h \in L^1(G)$. Abbiamo che:

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\xi) \mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \int_G \langle \xi, -x \rangle h(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int_G h(x) f(-x) \mathrm{d}x = h * f(0).$$

Quindi sostituendo h con $h * g$ e sostituendo f con g e h con $h * f$ si ottiene:

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{g} \mathrm{d}\mu_f = (h * g) * f(0) = (h * f) * g(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f} \mathrm{d}\mu_g$$

e poiché $\mathcal{F}(L^1(G))$ è denso in $C_0(\widehat{G})$, si ottiene che $\widehat{f}\mathrm{d}\mu_g = \widehat{g}\mathrm{d}\mu_f$. □

Teorema 2.24 (Formula di inversione)**.** *Se $f \in \mathcal{B}^1(G)$, allora $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Inoltre esiste una misura di Haar $\mathrm{d}\xi$ su $\widehat{G}$ tale che, $\forall f \in \mathcal{B}^1(G)$, $\mathrm{d}\mu_f = \widehat{f}\mathrm{d}\xi$, ossia*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\xi$$

Dimostrazione. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali positivi, per trovare la misura di Haar $\mathrm{d}\xi$, costruiamo un funzionale lineare positivo su $C_c(\widehat{G})$. Sia $\psi : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ continua a supporto compatto. Sia $f \in C_c(G)$ tale che $\widehat{f} > 0$ su $\operatorname{supp}\psi$ (esiste per il Lemma 2.22). Definiamo

$$I(\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{f}} \mathrm{d}\mu_f$$

Se g è un'altra funzione di questo tipo, allora vale:

$$\int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{f}} \mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{g}\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{f}\mathrm{d}\mu_g = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{g}} \mathrm{d}\mu_g$$

Quindi I è ben definito. A questo punto, è facile verificare che è lineare e se $\psi \geqslant 0$, allora poiché $\widehat{f} > 0$ su $\operatorname{supp}\psi$, $I(\psi) \geqslant 0$. Inoltre

$$I(\widehat{g}\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\widehat{f}} \widehat{g}\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \psi \mathrm{d}\mu_g$$

e chiaramente $\exists \psi \in C_c(\widehat{G})$ e $\mu_g \in M(G)$ tali che $\int_{\widehat{G}} \psi \mathrm{d}\mu_g \neq 0$ (ad esempio, data una qualunque ψ' non nulla a supporto compatto K, basta prendere $\psi = |\psi'|$ e $\mu_g = \mathbb{1}_K \mathrm{d}\xi$, con $\mathrm{d}\xi$ una qualunque misura di Haar su $\widehat{G}$), e quindi I non è il funzionale nullo. Inoltre, per $\zeta \in \widehat{G}$,

$$\int_{\widehat{G}} \langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\mu_f(\zeta\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle \zeta^{-1}\xi, x\rangle \mathrm{d}\mu_f(\xi) = \overline{\langle \zeta, x\rangle} f(x) = (\overline{\zeta} f)(x)$$

e quindi $\mathrm{d}\mu_{\overline{\zeta} f}(\xi) = \mathrm{d}\mu_f(\zeta\xi)$. Quindi, se $\widehat{f} > 0$ su $\operatorname{supp}\psi \cup \operatorname{supp} L_\zeta\psi$:

$$I(L_\zeta\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\zeta^{-1}\xi)}{\widehat{f}(\xi)} \mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\zeta\xi)} \mathrm{d}\mu_f(\zeta\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{\overline{\zeta} f}(\xi)} \mathrm{d}\mu_{\overline{\zeta} f}(\xi) = I(\psi).$$

Per cui esiste una misura di Haar $\mathrm{d}\xi$ tale che $I(\psi) = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$. Quindi, se $f \in \mathcal{B}^1(G)$, vale che:

$$\int_{\widehat{G}} \psi(\xi)\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = I(\psi\widehat{f}) = \int \psi \mathrm{d}\mu_f \qquad \forall \psi \in C_c(\widehat{G})$$

per cui $\mathrm{d}\mu_f = \widehat{f}\mathrm{d}\xi$, da cui $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ (in quanto $\mathrm{d}\mu_f$ è finita) e $f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle \xi, x\rangle \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$. □

Definizione 2.25. *La misura di Haar $\mathrm{d}\xi$ che rende vera la formula di inversione è detta* misura duale *di $\mathrm{d}x$.*

Vedremo più avanti che la formula di inversione resta vera se si sostituisce l'ipotesi $f \in \mathcal{B}^1$ con $f \in L^1$ e $\widehat{f} \in L^1$. E' facile osservare che se $\mathrm{d}\xi$ è la misura duale di $\mathrm{d}x$, allora la misura duale di $c\mathrm{d}x$ è $c^{-1}\mathrm{d}\xi$. In particolare, per ogni funzione non nulla la misura per cui è vera la formula di inversione è unica. Quindi un modo per trovare la misura duale in un caso specifico è verificare la formula di inversione per una funzione speciale.

Proposizione 2.26.

1. *Se G è discreto e $\mathrm{d}x$ è la misura contapunti, allora la sua misura duale è quella tale che $|\widehat{G}| = 1$.*

2. *Se G è compatto e $\mathrm{d}x$ è tale che $|G| = 1$, allora la sua misura duale è la misura contapunti.*

Dimostrazione.

1. Se G discreto, sia $g = \mathbb{1}_{\{0\}}$. $g * g = g$, quindi $g \in \mathcal{B}^1$. Inoltre $\widehat{g} \equiv 1$, e poiché $\langle \xi, x \rangle$ è un carattere di $\widehat{G}$ $\forall x \in X$, per il Lemma 2.6 vale che se $\mathrm{d}\xi$ è tale che $|\widehat{G}| = 1$, $\int_{\widehat{G}} \langle \xi, x \rangle \mathrm{d}\xi = \mathbb{1}_{\{0\}}(x) = g(x)$, per cui questa $\mathrm{d}\xi$ è la misura duale della misura contapunti.

2. Se G è compatto, sia $g \equiv 1$. $g * g = g$, quindi $g \in \mathcal{B}^1$. Allora per il Lemma 2.6, $\widehat{g}(\xi) = \int_G \overline{\langle \xi, x \rangle} \mathrm{d}x = \mathbb{1}_{\{1\}}$. Quindi se mettiamo su $\widehat{G}$ la misura contapunti, $\sum_{\xi \in \widehat{G}} \langle \xi, x \rangle \widehat{g}(\xi) = 1 = g(x)$, quindi vale la formula di inversione per g, quindi la misura duale di $\mathrm{d}x$ è la misura contapunti.

$\square$

Da adesso in poi, quando non specificato, metteremo su un gruppo discreto la misura contapunti e su un gruppo compatto la misura tale che $|G| = 1$.

Esempio 2.27. Consideriamo $\mathbb{Z}$ con la misura contapunti. Sul duale S^1, per l'ultima Proposizione la misura duale è $\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. La formula di inversione per funzioni in S^1 si legge in questo modo:

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \qquad f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta}$$

Analogamente, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la formula di inversione sarà:

$$\widehat{g}(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g(n) e^{-in\theta} \qquad g(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{g}(\theta) e^{in\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

Esempio 2.28. Se $\mathbb{Z}_k$ è il gruppo ciclico di k elementi, allora la misura duale della misura contapunti $\#$ è $\frac{\#}{k}$ (e la misura autoduale è $\frac{\#}{\sqrt{k}}$). La formula di inversione si legge:

$$\widehat{f}(m) = \sum_{n=0}^{k} f(n) e^{-\frac{2\pi i m n}{k}} \qquad f(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k} \widehat{f}(m) e^{\frac{2\pi i m n}{k}}$$

Esempio 2.29. Sia $G = \mathbb{R}$. Abbiamo già visto che $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, quindi ci chiediamo quale sia la misura duale della solita misura di Lebesgue. Consideriamo la funzione $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Vale che $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x - \frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$, quindi $\widehat{g}(0) = \sqrt{2\pi}$. Inoltre, derivando sotto il segno di integrale e poi integrando per parti si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \left(-ixe^{-\frac{x^2}{2}}\right) e^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} -ie^{-\frac{x^2}{2}} \left(-i\xi e^{-i\xi x}\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} -\xi e^{-i\xi x - \frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

da cui $\widehat{g}$ soddisfa

$$\begin{cases} \widehat{g}'(\xi) = -\xi\widehat{g}(\xi) \\ \widehat{g}(0) = \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

ed è facile verificare che $\frac{g}{\sqrt{2\pi}}$ soddisfa il sistema, quindi $\widehat{g} = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}$. Inoltre $\widehat{g}$ è pari, quindi vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi = \frac{g(x)}{2\pi}$$

da cui la misura duale della misura di Lebesgue è $\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ e la misura $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$ è autoduale.

Teorema 2.30 (Plancherel)**.** *Se si mette su $\widehat{G}$ la misura duale della misura di Haar su G, allora la trasformata di Fourier su $L^1 \cap L^2$ si estende ad un isomorfismo unitario fra $L^2(G)$ e $L^2(\widehat{G})$*

Dimostrazione. Se $f \in L^1 \cap L^2$. Allora per il Lemma 1.26, $f * f^* \in \mathcal{P} \cap L^1$ e $\widehat{f * f^*} = |\widehat{f}|^2$, quindi per la formula di inversione:

$$\int_G |f(x)|^2\mathrm{d}x = (f * f^*)(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f * f^*}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}|^2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

per cui la trasformata di Fourier è un'isometria in norma L^2 su $L^1 \cap L^2$, quindi poiché $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2, si estende a d'isometria $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$. Essendo un'isometria, $\mathcal{F}$ ha immagine chiusa. Per vedere che è suriettiva, sia ψ ortogonale a $\mathcal{F}(L^2(G))$. Quindi

$$0 = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi)\overline{\widehat{(L_x f)}}(\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle \xi, x\rangle \psi(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\mathrm{d}\xi \qquad \forall f \in L^1 \cap L^2$$

Ma $\psi\overline{\widehat{f}} \in L^1$ in quanto prodotto di funzioni L^2, quindi $\psi\overline{\widehat{f}} \in M(G)$ e $\phi_{\psi\overline{\widehat{f}}} = 0$. Quindi per la Proposizione 2.19 $\psi\overline{\widehat{f}} = 0$ quasi ovunque $\forall f \in L^1 \cap L^2$, e quindi per il Lemma 2.22 e la locale compattezza di $\widehat{G}$, $\psi = 0$ quasi ovunque. □

Corollario 2.31. *Se G è compatto e $|G| = 1$, allora $\widehat{G}$ è una base di Hilbert per $L^2(G)$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.6, $\widehat{G}$ è un sistema ortonormale per $L^2(G)$. Se $f \in L^2(G)$ è ortogonale ad ogni carattere, allora $0 = \int f\overline{\xi} = \widehat{f}(\xi)$, e quindi per il Teorema di Plancherel, $f = 0$, quindi $\widehat{G}$ è un sistema ortonormale completo. □

Proposizione 2.32. *Se $f, g \in L^2(G)$, allora $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$*

Dimostrazione. L'applicazione $* : L^2(\widehat{G}) \times L^2(\widehat{G}) \to L^\infty(G)$ tale che $(\phi, \psi) \to \phi * \psi$ è continua (in quanto $\|\phi * \psi\|_\infty \leqslant \|\phi\|_2 \|\psi\|_2$). Analogamente, la funzione $\cdot : L^2(G) \times L^2(G) \to L^1(G)$ tale che $(f, g) \to fg$ è continua (in quanto $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$). Se $\mathcal{F}$ è la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ la tesi è equivalente a $\mathcal{F}(\cdot(f,g)) = *(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))\ \forall f, g \in L^2(G)$. Poiché tutte le applicazioni sono continue, l'uguaglianza è vera su un insieme chiuso di $L^2(G) \times L^2(G)$. Ma sappiamo già che l'uguaglianza è vera per $f, g \in L^1(G)$, e $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2, quindi

$$\mathcal{F}(\cdot(f,g)) = *(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) \quad \forall (f,g) \in \overline{(L^1 \cap L^2) \times (L^1 \cap L^2)} = L^2 \times L^2$$

□

Lemma 2.33. *Siano ψ_U identità approssimate in G (definite nella Proposizione 1.21). Allora $g_U := \widehat{\psi_U} \to 1$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Per assurdo, assumendo falsa la tesi, $\exists \varepsilon > 0$ tale che

$$\{|g_U - 1| > \sqrt{2}\varepsilon \text{ frequentemente}\}$$

ha misura strettamente positiva. Questo implica che almeno uno fra

$$\{\Re(g_U - 1) > \varepsilon \text{ frequentemente}\}, \{\Re(1 - g_U) > \varepsilon \text{ frequentemente}\}$$

$$\{\Im(g_U) > \varepsilon \text{ frequentemente}\}, \{\Im(g_U) < -\varepsilon \text{ frequentemente}\}$$

ha misura strettamente positiva. Sia A contenuto in uno di questi insiemi di misura finita e strettamente positiva (esiste perché la misura di Haar ha la proprietà di regolarità interna). Quindi frequentemente vale (rispettivamente nei quattro casi):

$$\Re\left(\int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A g_U\right) \geqslant |A| + \varepsilon, \quad \Re\left(\int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A g_U\right) \leqslant |A| - \varepsilon$$

$$\Im\left(\int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A g_U\right) \geqslant \varepsilon, \quad \Im\left(\int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A g_U\right) \leqslant -\varepsilon$$

Ma $\mathbb{1}_A \in L^2(\widehat{G})$, quindi esiste $g \in L^2(G)$ tale che $\widehat{g} = \mathbb{1}_A$, quindi $\mathbb{1}_A g_U = \widehat{g * \psi_U} \to g$ in $L^2(\widehat{G})$, quindi $\mathbb{1}_A g_U \to \mathbb{1}_A$ in L^2, ma

$$\langle \mathbb{1}_A g_U, \mathbb{1}_A \rangle = \int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A g_U \nrightarrow |A| = \int_{\widehat{G}} \mathbb{1}_A = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A \rangle$$

per le disuguaglianze scritte sopra.

□

2.3 Dualità di Pontrjagin

In questa sezione, studiamo il gruppo $\widehat{\widehat{G}}$, ossia il gruppo duale di $\widehat{G}$. Per prima cosa, si nota che gli elementi di G sono caratteri di $\widehat{G}$. Più precisamente:

Lemma 2.34. *Se $x \in G$, vale che $\langle \cdot , x \rangle : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ è un carattere su $\widehat{G}$. Quindi si definisce $\Phi : G \to \widehat{\widehat{G}}$ con $\langle \Phi(x), \xi \rangle := \langle \xi, x \rangle$.*

Dimostrazione. Chiaramente $\xi \to \langle \xi, x \rangle$ è un omomorfismo da $\widehat{G}$ a S^1, ed è continuo perché con la topologia compatto-aperto le valutazioni sono continue. □

Vale anche il viceversa, che non dimostriamo: tutti gli elementi di $\widehat{\widehat{G}}$ sono valutazioni in un elemento di G:

Teorema 2.35 (Dualità di Pontrjagin)**.** *L'applicazione $\Phi : G \to \widehat{\widehat{G}}$ sopra definita è un isomorfismo di gruppi topologici.*

Il Teorema ci consente, nelle applicazioni successive, di identificare $\widehat{\widehat{G}}$ con G. Attraverso la dualità di Pontrjagin, si può generalizzare lievemente la formula di inversione nell'ipotesi in cui $f \in L^1(G)$ e $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$:

Teorema 2.36 (Formula di inversione)**.** *Se $f \in L^1(G)$ e $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, allora $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$ quasi ovunque, ossia*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\langle \xi, x \rangle \mathrm{d}\xi$$

per q. o. x. Se f è continua, l'uguaglianza vale ovunque.

Dimostrazione. Poiché

$$\widehat{f}(x) = \int_G \overline{\langle \xi, x \rangle} f(x)\mathrm{d}x = \int_G \langle \xi, -x \rangle f(x)\mathrm{d}x = \int_G \langle \xi, x \rangle f(-x)\mathrm{d}x$$

allora $\widehat{f} \in \mathcal{B}^1(\widehat{G})$ per il Lemma 2.20 applicato con G e $\widehat{G}$ invertiti (o più precisamente, applicato considerando come gruppo $\widehat{G}$ invece che G). Quindi per il Teorema 2.24, $f(-x) = \widehat{\widehat{f}}(x)$ quasi ovunque. Inoltre $\widehat{\widehat{f}}$ è continua, quindi se anche f lo è l'uguaglianza vale ovunque. □

Teorema 2.37 (Unicità)**.** *Se $\mu, \nu \in M(G)$ e $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, allora $\mu = \nu$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.19 applicata al gruppo $\widehat{G}$, la funzione che manda $M(G) \ni \mu \to \varphi_\mu(\xi) = \widehat{\mu}(\xi^{-1})$ è iniettiva. □

Proposizione 2.38. *G è discreto se e solo se $\widehat{G}$ è discreto. G è compatto se e solo se $\widehat{G}$ è discreto.*

Dimostrazione. Basta applicare la dualità di Pontrjagin alla Proposizione 2.7. □

La dualità di Pontrjagin induce anche una corrispondenza fra sottogruppi chiusi di $\widehat{G}$ e quozienti di G, analogamente a quanto succede su spazi di Banach riflessivi.

Definizione 2.39. *Sia $\Gamma < G$ un sottogruppo. L'*annullatore *di H è $H^{\perp} := \{\xi \in \widehat{G} : \langle \xi, x \rangle = 1 \ \forall x \in H\}$.*

$H^{\perp}$ è chiaramente chiuso, per cui vale che:

Proposizione 2.40. *Se $H \leqslant \widehat{G}$, allora $H^{\perp\perp} = \overline{H}$*

Dimostrazione. Chiaramente $H \subseteq H^{\perp\perp}$. Inoltre $H^{\perp\perp}$ è chiuso, per cui $\overline{H} \subseteq H^{\perp\perp}$. Sia adesso $x_0 \notin \overline{H}$ e sia $\pi : G \to G/\overline{H}$ la proiezione canonica. Poiché i caratteri separano i punti, esiste un carattere $\zeta \in \widehat{G/H}$ tale che $\zeta(\pi(x_0)) \neq 1$. Ma $\zeta \circ \pi \in H^{\perp}$, per cui $x_0 \notin H^{\perp\perp}$. □

Lemma 2.41. *Se π è la proiezione $\pi : G \to G/H$ e $F \subseteq G/H$ è compatto, allora esiste un compatto $K \subseteq G$ tale che $\pi(K) = F$.*

Dimostrazione. Sia $V \subseteq G$ un intorno di 0 a chiusura compatta. Poiché π è una mappa aperta, $\{\pi(x + V) | x \in F\}$ è un ricoprimento aperto di F, e quindi esistono $x_1, \dots, x_n$ tali che $F \subseteq \bigcup \pi(x_i + V)$. Di conseguenza, $\pi(\bigcup x_i + \overline{V}) \supseteq F$, e quindi ponendo $K := \pi^{-1}(F) \cap \bigcup x_i + \overline{V}$, $\pi(K) = F$ e K è l'intersezione del chiuso $\pi^{-1}(F)$ e del compatto $\bigcup x_i + \overline{V}$, quindi è compatto. □

Proposizione 2.42. *Sia $H < G$ chiuso. Le funzioni $\Phi : \widehat{G/H} \to H^{\perp}$ e $\Psi : \widehat{G}/H^{\perp} \to \widehat{H}$ definite da:*

$$\Phi(\eta) = \zeta \circ \pi \qquad \Psi\left(\xi H^{\perp}\right) = \xi|_H$$

sono degli isomorfismi di gruppi topologici.

Dimostrazione. Φ è chiaramente un isomorfismo di gruppi, quindi l'unica cosa da verificare è la continuità di Φ e di Φ^{-1}. Sia $\zeta_\alpha \to \zeta$ in $\widehat{G/H}$ e $K \subseteq G$ compatto, allora $\zeta_\alpha \to \zeta$ uniformemente su $\pi(K)$, quindi $\zeta_\alpha \circ \pi \to \zeta \circ \pi$ uniformemente su K, e quindi $\Phi(\zeta_\alpha) \to \zeta$ in $\widehat{G}$. Siano invece ζ_α, ζ tali che $\Phi(\zeta_\alpha) \to \Phi(\zeta)$ in $\widehat{H}$. Sia $F \subseteq G/H$ compatto e sia $K \subseteq G$ compatto come nel Lemma 2.41. Poiché $\zeta_\alpha \circ \pi \to \zeta \circ \pi$ uniformemente su K, $\zeta_\alpha \to \zeta$ uniformemente su F, quindi $\zeta_\alpha \to \zeta$ in $\widehat{G/H}$. Quindi Ψ è effetivamente un omeomorfismo.

Sostituendo G con $\widehat{G}$ e H con $H^{\perp}$, per la Proposizione 2.40 abbiamo che $\widehat{\widehat{G}/H^{\perp}} \cong (H^{\perp})^{\perp} = H$, con la corrispondenza data da $H^{\perp\perp} \ni x \to \zeta$ con $\langle x, \xi \rangle = \langle \zeta, \xi H^{\perp} \rangle$.

La dualità di Pontrjagin dà un isomorfismo $\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{\widehat{\widehat{G}/H^{\perp}}} \cong \widehat{H}$, che per quanto appena visto è proprio la mappa di restrizione Ψ. □

Corollario 2.43. *Se $H < G$ chiuso, allora ogni carattere su H si estende ad un carattere su G.*

Definizione 2.44. *Sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi topologici. Allora la mappa* trasposta *è $\varphi^T : \widehat{H} \to \widehat{G}$ definita da $\langle \varphi^T(\zeta), g \rangle = \langle \zeta, \varphi(g) \rangle$ $\forall \zeta \in \widehat{H}$, $g \in G$.*

Lemma 2.45.

1. *φ^T è continua.*

2. *Identificando $\widehat{\widehat{G}}$ con G, $(\varphi^T)^T = \varphi$.*

Dimostrazione.

1. Basta verificare la continuità in 1. Sia $\zeta_\alpha \to 1$ uniformante sui compatti di H. Sia K un compatto di G. Allora $\zeta_\alpha \to 1$ uniformemente su $\varphi(K)$, e quindi $\langle \varphi^T(\zeta_\alpha), g \rangle = \langle \zeta_\alpha, \varphi(g) \rangle \to 1$ uniformemente su K, quindi $\varphi^T(\zeta_\alpha) \to 1$ in $\widehat{G}$.

2. Sia $g \in G$. Allora:

$$\langle (\varphi^T)^T(g), \zeta \rangle = \langle g, \varphi^T(\zeta) \rangle = \langle \varphi(g), \zeta \rangle \qquad \forall \zeta \in \widehat{H}$$

   e poiché i caratteri separano i punti, questo implica $(\varphi^T)^T(g) = \varphi(g)$.

□

Capitolo 3

Estensioni olomorfe della trasformata di Fourier

3.1 Teorema di Paley - Wiener su $\mathbb{R}^n$

Su R^n, come già visto, vale che $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$ con l'isomorfismo dato da $\xi \to e^{i\langle \xi, \cdot \rangle}$. Questo semplifica molto lo studio della trasformata di Fourier, e in alcuni casi ne rende naturale l'estensione a un gruppo più grande. Infatti, vale che $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^n$ con l'isomorfismo $z \to e^{i\langle z, \cdot \rangle}$ Quindi, per una certa classe di funzioni buone, si può estendere la trasformata di Fourier a $\mathbb{C}$ in questo modo:

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle z, x\rangle} \mathrm{d}x$$

.

Lemma 3.1. *Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è un compatto, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a supporto in K, allora $\hat{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ come sopra è olomorfa.*

Dimostrazione. Sia z_i la i-esima coordinata di z e sia u_i il versore corrispondente. Vale che $\langle u_i, \cdot \rangle \in L^\infty(K)$, quindi

$$-i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle u_i, x\rangle e^{-i\langle z, x\rangle} \mathrm{d}x = \partial_{z_i} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle z, x\rangle} \right)$$

per il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. □

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a supporto in K, vale una stima puntuale della trasformata di Fourier:

$$|\hat{f}(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle z, x\rangle} \right| \leqslant \|f\|_1 e^{\sup_{x \in K} \langle \Im(z), x\rangle} \tag{3.1}$$

Chiaramente si può sostituire $\sup_{x \in K} \langle \Im(z), x\rangle$ con $\sup\{\langle \Im(z), x\rangle |\, x$ è un punto di densità di $K\}$.

Lemma 3.2. *Fissato $z \in \mathbb{C}^n$, vale che*

$$\sup\left\{ \log\left(\frac{|\hat{f}(z)|}{\|f\|_1}\right) \middle| \, f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ con supporto in } K \right\} =$$

$$\sup\{\langle \Im(z), x\rangle | \, x \text{ è un punto di densità di } K\}.$$

e cioè la stima 3.1 non si può migliorare.

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$, x punto di densità di K. Siano

$$g_n = \frac{1}{|K \cap B(x, \frac{1}{n})|} \mathbb{1}_{K \cap B(x, \frac{1}{n})}.$$

L'insieme $K \cap B(x, \frac{1}{n})$ ha misura strettamente positiva poiché x è un punto di densità per K. Vale che $g_n \to \delta_x$ (debole* in C_0'), quindi $\hat{g}_n \to e^{-i\langle z,x\rangle}$ puntualmente quasi ovunque. Poiché $\|g_n\|_1 = 1$, la stima per $|\hat{f}(z)|$ non può essere migliorata. □

E quindi definiamo:

Definizione 3.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La* funzione supporto *di A è $\omega_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $\omega_K(\xi) := \sup_{x \in A}\langle \xi, x\rangle$*

Per cui vale che per $f \in L^1$ con supporto in K, $|\hat{f}(z)| \leqslant e^{\omega_K(\Im(z))}$.
Poiché la stima su $|\hat{f}(z)|$ è la migliore possibile, sorge naturale la domanda su quali insieme abbiano la stessa funzione supporto, ossia chi sia l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle \xi, x\rangle \leqslant \omega_A(\xi)\}$. Risulta che:

Proposizione 3.4. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, allora $\mathrm{Co}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle \xi, x\rangle \leqslant \omega_A(\xi)\}$ è l'inviluppo convesso chiuso di A (o equivalentemente, il minimo convesso chiuso che contiene A).*

Dimostrazione. $\mathrm{Co}(A)$ è chiaramente chiuso. Inoltre è convesso: se $x, y \in \mathrm{Co}(A)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$, allora $\langle \xi, tx + (1-t)y\rangle = t\langle \xi, x\rangle + (1-t)\langle \xi, y\rangle \leqslant t\omega_A(\xi) + (1-t)\omega_A(\xi) = \omega_A(\xi)$, da cui $\mathrm{Co}(A)$ è contenuto nell'inviluppo convesso chiuso di A. Sia adesso $y \notin \mathrm{Co}(A)$. Poiché $\mathrm{Co}(A)$ è convesso chiuso, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ tali che $\langle \xi, x\rangle < c$ $\forall x \in \mathrm{Co}(A)$ e $\langle \xi, y\rangle > c$. Poiché $A \subseteq \mathrm{Co}(A)$, questo implica che $\omega_A(\xi) \leqslant c$, e quindi $\langle \xi, y\rangle > \omega_A(\xi)$, quindi $y \notin \mathrm{Co}(A)$. □

Corollario 3.5. *Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto, allora $\mathrm{Co}(K)$ è compatto*

Dimostrazione. Se K è compatto, allora K è limitato, quindi $\exists R$ tale che $K \subseteq \overline{B(0,R)}$. Ma $\overline{B(0,R)}$ è convesso chiuso, quindi $\mathrm{Co}(K) \subseteq \overline{B(0,R)}$, quindi $\mathrm{Co}(K)$ è limitato, quindi poiché è chiuso, $\mathrm{Co}(K)$ è compatto. □

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier, vale in un certo senso il risultato migliore possibile:

Teorema 3.6 (Paley-Wiener)**.** *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto convesso, e sia $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che la restrizione a $\mathbb{R}^n$ $u(\,\cdot\,) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e esiste $C > 0$ tale che $|u(z)| \leqslant Ce^{\omega_K(\Im(z))}$. Allora esiste $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con supporto in K tale che $u = \widehat{f}$.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u(z)| \leqslant \frac{C_n}{1+|z|^n} e^{\omega_K(\Im(z))}$. In questo caso, vale che $u(\,\cdot\, + i\eta) \in L^1$ $\forall p \geqslant 1$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$, quindi per la formula di inversione, $u(\,\cdot\, + i\eta) = \widehat{f}_y$ con

$$f_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi + i\eta) e^{i\langle \xi, x\rangle} \mathrm{d}\xi$$

Inoltre, per i teoremi di differenziazione sotto il segno di integrale, vale che

$$D_\eta\left(f_\eta(x)e^{-\langle \eta,x\rangle}\right) = D_\eta\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(\xi + i\eta)e^{i\langle \xi,x\rangle - \langle \eta,x\rangle}\mathrm{d}\xi\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} D_\eta\left(u(\xi + i\eta)e^{i\langle \xi + i\eta,x\rangle}\mathrm{d}\xi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} iD_\xi\left(u(\xi + i\eta)e^{i\langle \xi + i\eta,x\rangle}\mathrm{d}\xi\right) = 0$$

per l'olomorfia di $u(z)e^{i\langle z,x\rangle}$ e perché l'integrale di una derivata di una funzione infinitesima a $\pm\infty$ è 0. Quindi $f_\eta(x)e^{-\langle \eta,x\rangle} = f_0(x) =: f(x)$.
Inoltre f ha supporto in K:

$$|f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\xi + it\eta)e^{i\langle \xi,x\rangle - t\langle \eta,x\rangle}\mathrm{d}\xi\right| \leqslant C_n e^{t(\omega_K(\eta) - \langle \eta,x\rangle)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

Mandando $t \to +\infty$, si ottiene che

$$\operatorname{supp} f \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \langle \eta, x\rangle \leqslant \omega_K(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n\} = K$$

per la Proposizione 3.4.
Per il caso generale, sia u come nelle ipotesi. Vale che $u(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, con $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sia φ una funzione in C_0^∞ con supporto nella palla unitaria e $\int \varphi \mathrm{d}x = 1$. Siano $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(\frac{x}{\delta})$. La trasformata di Fourier di $f * \varphi_\delta$ è $\widehat{u\varphi_\delta}$ che ammette un'estensione analitica a tutto $\mathbb{C}$ tale che

$$|u(z)\widehat{\varphi_\delta}(z)| = \frac{C_{n,\delta}}{1+|z|^n} e^{\omega_K(\Im(z)) + \delta|\Im(z)|}$$

di conseguenza, per la parte prima, $u\widehat{\varphi_\delta}(z) = \widehat{f}_\delta$, con f_δ a supporto in $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle \eta, x\rangle \leqslant \omega_K(\eta) + \delta|\eta|\}$. Ma deve valere $f_\delta = f * \varphi_\delta$ per unicità della trasformata di Fourier, e quindi $f_\delta \to f$ in L^2. Ma quindi deve valere che $\operatorname{supp} f \subseteq \lim_{\delta\to 0} K_\delta = K$. □

In modo analogo, oppure come corollario del Teorema 3.38 si dimostra il seguente:

Teorema 3.7. *Se $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che esiste $C > 0$ tale che $\|u(\,\cdot\, + i\eta)\|_2 \leqslant Ce^{\omega_K(\eta)}$, allora f è la trasformata di Fourier di una funzione in $L^2(\mathbb{R}^n)$ con supporto in K.*

La cosa interessante di questo è che è effettivamente un'equivalenza: se $f \in L^2(K)$, allora poiché K ha misura finita, $f \in L^1(K)$, quindi $\widehat{f}$ è olomorfa. Inoltre $\|\widehat{f}(\,\cdot\, + i\eta)\|_2 = \|fe^{\langle \eta, \cdot \rangle}\|_2 \leqslant \|f\|_2 e^{\omega_K(\eta)}$.
In realtà, approcciando il problema dell'olomorfia della trasformata di Fourier, si possono ottenere risultati molto più raffinati di questi due. Un tipo di risultati parte dal considerare supporti non necessariamente compatti: in questo caso, la trasformata di Fourier non potrà avere buone proprietà di analiticità su tutto $\mathbb{C}^n$, ma solo su un sottoinsieme aperto. Siccome sia le tecniche che i risultati di questo tipo sono molto simili su $\mathbb{R}^n$ e sui gruppi in generale, questo caso sarà trattato nel dettaglio e nel pieno della sua generalità nella sezione 3. Un altro approccio consiste nel considerare la trasformata di Fourier non su L^2, ma sullo spazio di Schwartz S e sul suo duale $\mathcal{S}'$. Per evitare di addentrarsi in tecnicismi sulle distribuzioni, questo caso qui non sarà trattato. Comunque, sostituendo $\mathcal{S}'$ a L^2 nella dimostrazione del Teorema prima, si ottiene il seguente risultato:

Teorema 3.8 (Paley-Wiener-Schwartz [2, Theorem 7.3.1])**.** *Sia K un compatto convesso di $\mathbb{R}^n$. Se τ è una distribuzione di ordine N con supporto in K, allora $\widehat{\tau}(z)$ è olomorfa e*

$$\widehat{\tau}(z) \leqslant C(1 + |z|^N) e^{\omega_K(\Im z)}.$$

Viceversa, ogni funzione analitica u che soddisfa una stima di questa forma è la trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in K.

3.2 Lo spazio G^*

Per estendere i risultati della sezione 1 a casi più generali di gruppi localmente compatti, la cosa più naturale da provare sarebbe considerare $\mathbb{C}$ come gruppo topologico con il prodotto di $\mathbb{C}$ e estendere la trasformata di Fourier su $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}(G, S^1) \times \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Questo spazio va considerato, ma non è chiaro cosa voglia dire "funzione olomorfa" su $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Lo spazio su cui si riesce a definire opportunamente "funzione olomorfa" è invece $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ (con $\mathbb{C}$ inteso come gruppo con l'addizione), che come vedremo ha una struttura naturale di spazio vettoriale complesso. In questa sezione faremo uso di questo teorema, che non dimostriamo:

Teorema 3.9 (Struttura dei gruppi abeliani localmente compatti, [4, Theorem 2.4.1])**.** *Sia G un gruppo abeliano localmente compatto. Allora esiste $G_0 < G$ aperto (e quindi clopen) tale che $G_0 \cong K \times \mathbb{R}^n$, dove K è un gruppo compatto e $n \in \mathbb{N}$.*

Studieremo principalmente il seguente spazio:

Definizione 3.10. *Definiamo $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, cioè quella in cui un sistema fondamentale di intorni di 0 è:*

$$U_{K,\varepsilon} = \{\rho \in G^* : |\langle \rho, x \rangle| < \varepsilon \quad \forall x \in G^*\} \qquad K \text{ compatto, } \varepsilon > 0, \rho \in G^*,$$

G^* è uno spazio vettoriale topologico completo. Per $\rho \in G^*$, si indica $\langle \rho, x \rangle := \rho(x)$.

In realtà, a seconda del gruppo, G^* e $\widehat{G}$ possono essere molto simili. Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo già visto che sono isomorfi. In generale, valgono questi due risultati:

Lemma 3.11. *L'applicazione* $\exp_* : \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(G, S^1) = \widehat{G}$ *definita da* $\langle \exp_*(\rho), x \rangle = e^{i\langle \rho, x \rangle}$ *è un omomorfismo di gruppi topologici. Vale che* $\ker(\exp_*) = \mathrm{Hom}(G, 2\pi\mathbb{Z})$

Dimostrazione. $\exp_*$ è chiaramente un omomorfismo di gruppi, quindi perché sia continuo è sufficiente che sia continuo in 0. Sia $V_{K,\varepsilon} = \{\xi : |\langle \xi, x \rangle - 1| < \varepsilon \ \forall x \in U\}$ un intorno di $1 \in \widehat{G}$ con K compatto. Sia δ tale che $\forall |t| < \delta$, $|e^{it} - 1| < \varepsilon$. Allora vale che $\exp_*(U_{K,\delta}) \subseteq V_{K,\varepsilon}$:

$$\rho \in U_{K,\delta} \Rightarrow |\langle \rho, x \rangle| < \delta \Rightarrow |\langle \exp_*(\rho), x \rangle - 1| = |e^{i\langle \rho, x \rangle} - 1| < \varepsilon \Rightarrow \exp_*(\rho) \in V_{K,\varepsilon}.$$

Quindi $\exp_*$ è continuo in 0. Inoltre chiaramente:

$$\rho \in \ker(\exp_*) \iff e^{i\langle \rho, x \rangle} = 0 \quad \forall x \in G \iff \langle \rho, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \rho(G) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}.$$

□

Proposizione 3.12. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$\widehat{G}$ connesso.*
2. *$\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $G \cong D \times \mathbb{R}^n$, con D gruppo discreto senza torsione (cioè senza elementi di ordine finito).*
3. *G^* separa i punti.*
4. *$\exp_*(G^*)$ è denso in $\widehat{G}$.*
5. *G non ha sottogruppi compatti diversi da $\{0\}$.*

Dimostrazione.

1. $\Rightarrow$ 2. Per il Teorema di Struttura 3.9, $\exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists K$ gruppo compatto tale che $\widehat{G} \cong \mathbb{R}^n \times K$. Ma allora $G \cong \widehat{\widehat{G}} \cong \widehat{\mathbb{R}^n} \times \widehat{K} \cong \mathbb{R}^n \times \widehat{K}$. $\widehat{K}$ è discreto, quindi pongo $D = \widehat{K}$. Vale che D non ha elementi di ordine finito: se $d^m = 0$, allora $H := \langle d \rangle < G$ è un sottogruppo compatto, quindi $\widehat{H} \cong \widehat{G}/H^\perp$ è discreto. Quindi $H^\perp$ è un clopen, quindi $H^\perp = \widehat{G}$, da cui $H = \{0\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Vale che $(D \times \mathbb{R}^n)^* \cong D^* \times (\mathbb{R}^n)^*$, quindi basta dimostrare che se D è discreto, allora D^* separa i punti. Per farlo, è sufficiente che $\forall d \in D$, $d \neq 0$, $\exists \rho \in G^*$ tale che $\rho(d) \neq 0$. Sia $d \in D$, $d \neq 0$. Considero l'unico omomorfismo $\varphi : \langle d \rangle \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(d) = 1$. E' una facile applicazione del Lemma di Zorn che $\exists$ un'estensione $\tilde{\varphi}$ tale che $\tilde{\varphi}(d) = 1$.

3. $\Rightarrow$ 4. Vale che $\overline{\exp_*(G^*)} = (\exp_*(G^*)^\perp)^\perp$, quindi $\exp_*(G^*)$ è denso se e solo se $\exp_*(G^*)^\perp = \{0\}$. Vale che

$$\exp_*(G^*)^\perp = \{x \in G | e^{i\langle \rho, x\rangle} = 1 \quad \forall \rho \in G^*\} = \{x \in G | \langle \rho, x\rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \rho \in G^*\}$$

Ma G^* è uno spazio vettoriale, quindi

$$\langle \rho, x\rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \rho \ \in G^* \iff$$

$$\langle t\rho, x\rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \rho \ \in G^*, t \in \mathbb{R} \iff \langle \rho, x\rangle \in \frac{2\pi}{t}\mathbb{Z} \quad \forall \rho \ \in G^*, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \langle \rho, x\rangle = 0 \quad \forall \rho \in G^* \iff x = 0$$

in quanto G^* separa i punti.

4. $\Rightarrow$ 1. G^* è uno spazio vettoriale topologico, quindi è connesso. $\exp_*$ è un'applicazione continua, quindi $\exp_*(G^*)$ è connesso. Ma se un insieme è connesso allora anche la sua chiusura lo è, quindi $\widehat{G}$ è connesso.

1. $\Rightarrow$ 5. Se $H < G$ compatto, allora $\widehat{H} \cong \widehat{G}/H^\perp$ è discreto, quindi per connessione si deve avere $H^\perp = \widehat{G}$, da cui $H = \widehat{G}^\perp = \{0\}$.

5. $\Rightarrow$ 3. Sia G_0 come nel Teorema di struttura. Poiché G non ha sottogruppi compatti non banali, allora $G_0 \cong \mathbb{R}^n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $D := G/G_0$ e $\pi : G \to D$ la proiezione canonica. Vale che D è senza torsione: se $m \cdot [d] = 0$, allora $[m \cdot d] = 0$, cioè $\exists t \in \mathbb{R}^n$ tale che $m \cdot d = t$, quindi $m \cdot \left(d - \frac{t}{m}\right) = 0$. Ma quindi $\langle d - \frac{t}{m}\rangle$ è un sottogruppo compatto di G, per cui $d - \frac{t}{m} = 0$, quindi $d \in G_0$, quindi $[d] = 0$.
Abbiamo già dimostrato che D^* separa i punti di D, quindi se $x \notin G_0$ e $\langle \rho, [x]\rangle \neq 0$, allora $\langle \rho \circ \pi, x\rangle = \langle \rho, [x]\rangle \neq 0$. Se invece $0 \neq x \in G_0$, esiste $\rho \in G_0^*$ tale che $\langle \rho, x\rangle \neq 0$. Come prima, è una facile applicazione del Lemma di Zorn che ρ si estende ad un omomorfismo continuo $\tilde{\rho}$ definito su tutto G.

□

Purtroppo, non si può ottenere più della densità di $\exp_*(G)$ in $\widehat{G}$. Infatti $\exp_*$ fallisce nell'essere suriettiva in molti casi:

Esempio 3.13. Consideriamo $\mathbb{Q}$ con la topologia discreta.
Si vede facilmente che l'applicazione $\rho \to \langle \rho, 1\rangle$ è bigettiva fra $\mathbb{Q}^*$ e $\mathbb{R}$:
La suriettività è ovvia. Per quanto riguarda l'iniettività: se $\langle \rho, 1\rangle = \langle \eta, 1\rangle$, allora

$$q\langle \rho, \frac{p}{q}\rangle = \langle \rho, p\rangle = p\langle \rho, 1\rangle = p\langle \eta, 1\rangle = \langle \eta, p\rangle = q\langle \eta, \frac{p}{q}\rangle.$$

Da cui $\langle \rho, \frac{p}{q}\rangle = \langle \eta, \frac{p}{q}\rangle$.
Al contrario, il suo duale $\widehat{\mathbb{Q}}$ è molto più complicato. Una sua descrizione segue

dalla seguente costruzione: si definisce la funzione $\varphi : \widehat{\mathbb{Q}} \to \prod_{n\in\mathbb{N}} S^1$ data dalle valutazioni:

$$\varphi(\xi) = \left(\langle \xi, 1\rangle, \langle \xi, \frac{1}{2!}\rangle, \dots, \langle \xi, \frac{1}{n!}\rangle, \dots\right).$$

Questo è chiaramente un omomorfismo di gruppi, ed è continua perché le proiezioni sono continue (essendo valutazioni in un punto). E' iniettiva in quanto $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\mathbb{Z}$. Poiché $\widehat{\mathbb{Q}}$ è compatto T_2, questo implica che $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \varphi(\widehat{\mathbb{Q}})$ come gruppi topologici. Vale che

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \varphi(\widehat{\mathbb{Q}}) = \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} S^1 \,\middle|\, (z_{n+1})^{n+1} = z_n \right\} =$$

$$= \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} S^1 \,\middle|\, (z_m)^{\frac{m!}{n!}} = z_n \right\}.$$

L'inclusione $\subseteq$ segue direttamente dalla definizione di φ. Per quanto riguarda l'altra inclusione, sia (z_n) come sopra. Allora se si definisce $\xi(\frac{p}{q!}) = (z_q)^p$, questa è una buona definizione: se $q < s$ e $\frac{p}{q!} = \frac{r}{s!}$, allora

$$(z_s)^r = (z_q)^{\frac{s!}{q!}r} = (z_q)^{\frac{p}{r}r} = (z_q)^r.$$

Vale che $\varphi(\exp_*(\mathbb{Q}^*)) = \left\{ \left(e^{i\frac{\lambda}{n!}}\right)_n | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Questo non è tutto $\varphi(\widehat{\mathbb{Q}})$: se $\theta_n \in [-\pi, \pi]$, (k_n) a valori interi e $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{n+1} + \frac{2k_n\pi}{n+1}$, è facile controllare che $(e^{i\theta_n}) \in \varphi(\widehat{\mathbb{Q}})$ e che la mappa che manda le successioni di θ_n in $\varphi(\widehat{\mathbb{Q}})$ è bigettiva. Poiché se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\lambda}{n!}\right| < \pi$ definitivamente, vale che su $\varphi(\exp_*(\mathbb{Q}^*))$ $k_n = 0$ definitivamente, quindi $\exp_*$ non può essere suriettiva.

Un fenomeno del genere avviene molto spesso. In generale, se $D_0 < D$ discreto, vale che le mappe di restrizione $\widehat{D} \to \widehat{D_0}$ e $D^* \to D_0^*$ sono suriettive (in generale, l'estensione di una mappa definita su D_0 a una definita su tutto D con immagine in un gruppo divisibile è una facile applicazione del Lemma di Zorn). Di conseguenza, poiché $\exp_*$ commuta con la restrizione, se $\exp_*$ è suriettiva su $\widehat{D}$ lo è anche su $\widehat{D_0}$. Quindi, per avere un fenomeno simile a quello che succede su $\mathbb{Q}$, è sufficiente che esista un elemento $x \in D_0$ tale che l'insieme $D_x = \{y \in D | \exists n \in \mathbb{N} : x = ny\}$ sia infinito (poiché il gruppo è senza torsione, se $ny = x = ny'$ allora $y = y'$, quindi quando esiste è ben definito $\frac{x}{n}$). In questo caso, prendendo $D_0 = \langle D_x \rangle = \{m\frac{x}{n} : m \in \mathbb{N}$ e esiste $\frac{x}{n}\}$, si ha che come su $\mathbb{Q}$, $D_0^* \cong \mathbb{R}$ con la mappa $\rho \to \langle \rho, x\rangle$. Invece, $\widehat{D_0}$ è compatto e $\ker(\exp_*) = \mathrm{Hom}(D_0, 2\pi\mathbb{Z}) = \{0\}$, in quanto deve valere $\langle \rho, \frac{x}{n}\rangle = \frac{\langle \rho, x\rangle}{n}$ e nessun numero intero ha infiniti divisori interi. Quindi se per assurdo $\exp_*$ suriettiva, vale che $\exp_*$ è una bigezione continua fra $\mathbb{R}$ e un gruppo topologico T_2 compatto. Questo è un assurdo per il Lemma:

Lemma 3.14. *Non esiste una topologia τ su $\mathbb{R}$ più debole della topologia euclidea tale che $\mathbb{R}_c = (\mathbb{R}, \tau)$ sia un gruppo topologico T_2 compatto.*

Dimostrazione. Sia μ la misura di Haar di $\mathbb{R}_c$. Se $\mu([0,1]) > 0$, allora $\mu(\mathbb{R}_c) \geqslant \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n, 2n+1]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([0,1]) = +\infty$, quindi $\mu(\mathbb{R}_c) = +\infty$, assurdo. Se invece $\mu([0,1]) = 0$, vale che $\mu(\mathbb{R}_d) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1]) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([n, n+1]) = 0$, assurdo. $\square$

Il resto della sezione sarà dedicato a recuperare il senso di inviluppo convesso nel caso generale dei gruppi abeliani localmente compatti. Il modo per farlo è analogamente al caso di $\mathbb{R}^n$, quello di ricorrere alla funzione supporto. Poiché però in questo caso non è vero che dato un compatto K, l'insieme $\{x \in G|\langle\rho, x\rangle \leqslant \sup_{y\in K}\langle\rho, y\rangle\}$ è compatto, ha senso considerare direttamente il caso generale in cui gli inviluppi convessi non si fanno prendendo tutto il duale G^*, bensì un sottoinsieme generico.

Definizione 3.15. *Sia* $\Gamma \subseteq G^*$. *Per* $E \subseteq G$, *definiamo* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) := \{x \in G|\langle\rho, x\rangle \leqslant \sup_{y\in E}\langle\rho, y\rangle \ \forall\rho \in \Gamma\}$. *Se* $\Gamma = G^*$, *indichiamo* $\mathrm{Hull}(E) := \mathrm{Hull}_{G^*}(E)$

E' una facile verifica che dato un insieme qualsiasi $\Gamma \subseteq G^*$, il cono convesso chiuso Γ^* generato da Γ (cioè un insieme chiuso per somma e moltiplicazione per scalari positivi) restituisce gli stessi Hull, ossia $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) = \mathrm{Hull}_{\Gamma^*}(E)$ per ogni $E \subseteq G$. Quindi per semplicità, da adesso in poi Γ sarà un cono convesso. Non lo prendiamo necessariamente chiuso perché i teoremi della prossima sezione valgono anche per coni non chiusi.

Definizione 3.16. *Sia* $E \subseteq G$. *Se* $\omega : \Gamma \to [0, +\infty]$ *definita da* $\omega(\rho) := \sup_{y\in E}\langle\rho, y\rangle$, *vale che* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) := \{x \in G : \langle\rho, x\rangle \leqslant \omega(\rho) \ \forall\rho \in \Gamma\}$. *Chiamiamo* ω *la* funzione supporto *di* E. *A seconda che siano o meno chiari dal contesto il cono convesso* Γ *e l'insieme* E, *indicheremo la funzione supporto di* E *rispetto ad* Γ *con* ω, ω_E, ω_Γ *o* $\omega_{E,\Gamma}$.

Valgono le seguenti proprietà che estendono quelle dell'inviluppo convesso e della funzione supporto su $\mathbb{R}^n$:

Lemma 3.17.

1. $\mathrm{Hull}_\Gamma : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ *è idempotente.*

2. *Se* ω_Γ *è la funzione supporto di* $E \subseteq G$, *allora* ω_Γ *è subadditiva e omogenea di grado 1.*

Dimostrazione.

1. Per la definizione, basta dimostrare che $\omega_E = \omega_{\mathrm{Hull}_\Gamma(E)}$. Poiché $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) \supseteq E$, $\omega_E \leqslant \omega_{\mathrm{Hull}_\Gamma(E)}$. Inoltre se $x \in \mathrm{Hull}_\Gamma(E)$, $\langle\rho, x\rangle \leqslant \omega_E(\rho)$, quindi passando al sup, vale $\omega_E \leqslant \omega_{\mathrm{Hull}_\Gamma(E)}$.

2. Sono una diretta conseguenza delle analoghe proprietà del sup.

$\square$

In realtà, l'operazione di Hull su G e quella di inviluppo convesso fatta su uno spazio vettoriale sono molto collegate. Per descrivere questo collegamento, serve qualche preliminare riguardo il duale topologico di G^* e più in generale di un suo sottospazio chiuso X.

Definizione 3.18. *Se X è un sottospazio vettoriale chiuso di G^*, dotiamo X^* della topologia di spazio vettoriale topologico in cui un sistema fondamentale di intorni di* 0 *è*

$$V_{K,\varepsilon} = \{\alpha \in X^* : |\langle \alpha, \rho \rangle| \leqslant \omega_K(\rho)\ \forall \rho \in U_{K,\varepsilon}\}$$

al variare di K compatto, $K = \overline{V}$, con V aperto in G.

Lemma 3.19. *La topologia compatto - aperto definisce su X la topologia di limite proiettivo degli spazi di Banach $X|_K := \{\rho|_K : \rho \in X\}$ con la topologia della convergenza uniforme su K. Poiché i compatti di G sono un insieme filtrante e le mappe di restrizione sono coerenti con l'ordinamento, si può definire su X^* la topologia di limite iniettivo di $(X|_K)^*$. Questa è esattamente la topologia della Definizione 3.18.*

Corollario 3.20. *Esiste una topologia su X^{**} che lo rende il limite proiettivo degli spazi di Banach $((X|_K)^*)^*$.*

Lemma 3.21. *Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio chiuso. Allora la mappa di restrizione definisce un isomorfismo di spazi vettoriali topologici $r : X^*/Y^\perp \to Y^*$. La stessa cosa accade se $Z \subseteq X^*$ sottospazio chiuso: la mappa restrizione induce un isomorfismo $r : X^{**}/Z^\perp \to Z^*$.*

Dimostrazione. E' chiaro che la mappa di restrizione è suriettiva e ha nucleo $Y^\perp$, quindi l'unica cosa da verificare è che la mappa r sia aperta. Questo segue direttamente dal teorema della mappa aperta applicato alle funzioni di restrizione $r_K : (X|_K)^* \to (Y|_K)^*$ e $r_K : ((X|_K)^*)^* \to (Z \cap (X|_K)^*)^*$ e dalle definizioni di limite iniettivo e proiettivo. □

Lemma 3.22. *Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio chiuso. Allora la bigezione naturale $p : (X/Y)^* \to Y^\perp$ è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici. Analogamente se $Y \subseteq X^*$ sottospazio chiuso: $(X^*/Y)^* \cong Y^\perp$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla precedente. □

Lemma 3.23. *Se $Y \subseteq X$ sottospazio chiuso, allora ${}^\perp(Y^\perp) = Y$*

Dimostrazione. Segue dall'analoga proprietà per gli spazi di Banach $X|_K$. □

Lemma 3.24. *Sia $j : X \to X^{**}$ l'immersione canonica data da $\langle j(x), y \rangle = \langle y, x \rangle$. Sia $Y \subseteq X$ chiuso. Allora $Y^{\perp\perp} \cap j(X) = j(Y)$*

Dimostrazione.

$$Y^{\perp\perp} \cap j(X) = \{j(\rho) | \langle \alpha, \rho \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in Y^\perp\} = \{j(\rho) | \langle \alpha, \rho \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in Y^\perp\}$$
$$= \{j(\rho) | \rho \in {}^\perp(Y^\perp)\} = \{j(\rho) | \rho \in Y\} = j(Y)$$

per il Lemma 3.23. □

Lemma 3.25. *Se $X \subseteq G^*$ sottospazio vettoriale, allora $i : G \to X^*$ definita da $\langle i(g), \rho \rangle = \langle g, \rho \rangle$ è un omomorfismo continuo. E' iniettivo se e solo se X separa i punti.*

Dimostrazione. L'iniettività è facile:

$$\ker i = \{g \in G | \langle i(g), x \rangle = 0 \quad \forall x \in X\} =$$

$$= \{g \in G | \langle g, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X\}$$

che è banale se e solo se X separa i punti.
Per quanto riguarda la continuità, basta che i sia continuo in 0. Ma $i(K) \subseteq V_{K,\varepsilon}$ per definizione. □

Quindi quando X separa i punti, in un certo senso vale "$G \subseteq X^*$", per cui dato $E \subseteq G$, ci si può chiedere quale sia il suo inviluppo convesso chiuso in X^* e quale sia l'intersezione di questo con G. Risulta che questo insieme è proprio $\mathrm{Hull}_X(E)$. Più precisamente:

Teorema 3.26. *Se $E \subseteq G$, allora $i(\mathrm{Hull}_X(E)) = \mathrm{Co}(i(E)) \cap i(G)$, dove Co è l'inviluppo convesso chiuso.*

Prima di dimostrare questo teorema, servono due lemmi:

Lemma 3.27. *Sia $Y = \overline{\mathrm{Span}(i(G))}$. Allora gli elementi λ di Y^* sono tutte e sole le valutazioni in un elemento ρ di X, ossia $\forall \alpha \in Y^* \ \exists \rho \in X$ tale che $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \alpha, \rho \rangle$.*

Dimostrazione. Chiaramente tutte le valutazioni sono elementi di Y^*, quindi dimostriamo che tutti gli elementi di Y^* si scrivono in questa forma.
Per i lemmi 3.21 e 3.22, $Y^* \cong X^{**}/Y^\perp \cong X^{\perp\perp}/Y^\perp$.
Sia $\lambda \in Y^*$. Allora $\lambda \circ i : G \to \mathbb{R}$ è continua, quindi esiste $\rho \in G^*$ tale che $\langle \lambda, g \rangle = \langle \rho, g \rangle \ \forall g \in G$. Poiché $\mathrm{Span}\, i(G)$ è denso in Y, questa relazione definisce completamente λ. Quindi esiste un'immersione naturale $k : Y^* \subseteq j(G^*)$, per cui $Y^* \cong (X^{\perp\perp} \cap j(G^*))/Y^\perp = j(X)/Y^\perp$ per il lemma 3.23. Inoltre $j(X) \cap Y^\perp = \{0\}$ in quanto $Y \supseteq i(G)$, quindi $Y^* \cong j(X)$.

□

Lemma 3.28 ([5, Theorem 3.4])**.** *Supponiamo che B sia un insieme convesso chiuso in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso X. Sia $x_0 \in X$, $x_0 \notin B$. Allora esistono $\lambda \in X^*$, $c \in \mathbb{R}$ tali che $\langle \lambda, x \rangle \leqslant c$ per ogni $x \in B$, ma $\langle \lambda, x_0 \rangle > c$.*

Dimostrazione Teorema 3.26. Sia $Y = \overline{\mathrm{Span}(i(G))}$. Consideriamo l'insieme $C = \{\alpha \in Y | \langle \alpha, \rho \rangle \leqslant \omega_E(\rho) \forall \rho \in X\}$. Dimostriamo che $C = \mathrm{Co}(i(E))$. Chiaramente $C \cap i(G) = i(\mathrm{Hull}_X(E))$, quindi questo conclude. Le valutazioni sono continue, C è chiuso, è facile verificare che è convesso e contiene $i(E)$ per definizione. Quindi $C \supseteq \mathrm{Co}(i(E))$.
Dimostriamo adesso che $X^* \backslash C \supseteq X^* \backslash \mathrm{Co}(i(E))$. Sia $\alpha \in X^* \backslash \mathrm{Co}(i(E))$. Poiché $C, \mathrm{Co}(i(E)) \subseteq Y$, possiamo supporre $\alpha \in Y$. Siano $\lambda \in Y^*$, $c \in \mathbb{R}$ come nel

Lemma 3.28 che separa il convesso chiuso $\mathrm{Co}(i(E))$ da α. Per il Lemma 3.27, λ è la valutazione in $\rho \in X$, ossia esiste $\rho \in X$ tale che $\langle \rho, x \rangle \leqslant c$ per ogni $x \in \mathrm{Co}(i(E))$ e $\langle \rho, \alpha \rangle > c$. Ma poiché $\mathrm{Co}(i(E)) \supseteq i(E)$, questo implica che per ogni $g \in E$, $\langle \rho, g \rangle \leqslant c$, quindi $\omega_E(\rho) \leqslant c$. Ma quindi $\langle \rho, \alpha \rangle > \omega_E(\rho)$, quindi $\alpha \notin C$. □

3.3 Generalizzazioni del Teorema di Paley-Wiener

In questa sezione, consideriamo gli spazi

$$\widehat{G}_{\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}(G, S^1) \times \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) = \widehat{G} \times G^*$$

$$G^* + iG^* = G^*_{\mathbb{C}} \text{ (il complessificato di } G^*\text{)}.$$

L'applicazione $\exp_*$ si può estendere a $G^*_{\mathbb{C}} \to \widehat{G}_{\mathbb{C}}$ in modo naturale con

$$\exp_*(\rho + i\eta) := (\exp_*(\rho), \eta).$$

Definizione 3.29. *Sia $\Gamma \subseteq G^*$ un cono convesso. Sia $u : \widehat{G} \times \Gamma \subseteq \widehat{G}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile su $\widehat{G} \times \{\rho\}$ al variare di ρ in Γ. Dico che u è* olomorfa *su $\widehat{G} \times \Gamma$ se*

$$u_{\xi,\rho,\eta} : \{\Im(z) > 0\} \to \mathbb{C} \textit{ definita da } u_{\xi,\rho,\eta}(z) := u\left(\xi \exp_*(-i\rho - z\eta)\right)$$

è olomorfa $\forall \xi \in \widehat{G}$ e $\forall \rho, \eta \in \Gamma$.

Lemma 3.30. *Sia $E \subseteq G$, $f \in L^1(G)$ a supporto in $\overline{E}$. Sia $\Gamma = \{\rho \in G^* | \, \omega_E(\rho) < +\infty\}$. Allora per $\rho \in \Gamma$, definendo $\widehat{f}(\xi, \rho) := \widehat{f e^{\rho(\cdot)}}(\xi)$, la funzione $\widehat{f}$ è olomorfa su $\widehat{G} \times \Gamma$. Se inoltre f è in L^2 soddisfa $\|\widehat{f}(\cdot, \rho)\|_2 \leqslant \|f\|_2 e^{\omega(\rho)}$.*

Dimostrazione. Se $f \in L^1$,

$$\widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}(z) = \int_E f(x) \overline{\langle \xi, x \rangle} e^{\langle \rho, x \rangle - iz\langle \eta, x \rangle} \mathrm{d}x.$$

Poiché la funzione $\langle \eta, x \rangle e^{-iz\langle \eta, x \rangle}$ è limitata su E per $\Im z > 0$ (poiché η è superiormente limitata),

$$\frac{\partial}{\partial z} f_{\xi,\rho}(z) = \int_E \langle \eta, x \rangle f(x) \overline{\langle \xi, x \rangle} e^{\langle \rho, x \rangle - iz\langle \eta, x \rangle} \mathrm{d}x$$

per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale. La stima sulla norma 2 segue da:

$$\|\widehat{f}(\cdot, \rho)\|_2 = \|\widehat{f e^{\rho(\cdot)}}\|_2 = \|f e^{\rho(\cdot)}\|_2 = \int_E |f(x)|^2 e^{\langle \rho, x \rangle} \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |f(x)|^2 e^{\omega(\rho)} \mathrm{d}x = \|f\|_2 e^{-\omega(\rho)}.$$

□

Un risultato analogo al Lemma 3.30 vale anche per funzioni L^2, ma la dimostrazione è più tecnica. Faremo uso della seguente generalizzazione del Teorema di Morera (dimostrata da Rademacher nel 1919):

Teorema 3.31 ([3, pp. 173-174,Satz I]). *Per $u, v \in \mathbb{C}$, indichiamo con $R_{u,v}$ il rettangolo chiuso coi lati paralleli agli assi con vertici opposti u e v. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\forall u, v \in \Omega$, il rettangolo $R_{u,v}$ sia $\subseteq \Omega$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione in $L^1(K)$ per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ tale che valga la "proprietà dei rettangoli": per quasi ogni $u, v \in \Omega$, $\int_{\partial R_{u,v}} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Allora f è quasi ovunque uguale ad una funzione olomorfa.*

Traccia della dimostrazione. Per la proprietà dei rettangoli, se $u = (a, b)$ è tale che $f \in L^1(R_{u,v})$ per quasi ogni $v \in \Omega$, allora è ben definita quasi ovunque una funzione integrale $F(x + iy) = \int_a^x f(s + ib)\mathrm{d}s + i \int_b^y f(x + it)\mathrm{d}t$ e gode anche lei della proprietà dei rettangoli. Inoltre, all'interno di un rettangolo si riesce a dimostrare una stima su $|F|$ che dipende solo dal rettangolo e da $\|f\|_1$ al suo interno. A questo punto, la funzione integrale $\tilde{F}$ di F gode ancora della proprietà dei rettangoli ed è Lipschitziana quasi ovunque, quindi è quasi ovunque uguale ad una funzione Lipschitziana G. Quindi per continuità G gode della proprietà dei rettangoli ovunque, e quindi per il teorema di Morera classico è olomorfa. Di conseguenza, f è uguale quasi ovunque a G'', che è olomorfa. □

Lemma 3.32. *Sia $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione $\varphi \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia $g : \widehat{G} \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $\|g(\,\cdot\,, t, s)\|_2 \leqslant \varphi(t, s)$. Allora se K è un compatto di $\widehat{G}$ e H è un compatto di Ω, $g|_{K\times H} \in L^1(K \times H)$ e $\|g\|_{1,K\times H} \leqslant |H|\sqrt{|K|}\|\varphi\|_{\infty,H}$*

Dimostrazione. Vale che:

$$\int_{K\times H} |g|(\xi, t, s) = \int_H \int_K |g|(\xi, t, s)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}s \leqslant \int_H \sqrt{|K|}\left(\int_K |g(\xi, t, s)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|K|}\int_H \left(\int_{\widehat{G}} |g(\xi, t, s)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \leqslant |H|\sqrt{|K|}\|\varphi\|_{\infty,H} < +\infty.$$

□

Lemma 3.33. *Sia $E \subseteq G$, $f \in L^2(G)$ nulla quasi ovunque sul complementare di E. Sia $\Gamma = \{\rho \in G^* | \, \omega_E(\rho) < +\infty\}$. Allora $\forall \rho, \eta \in \Gamma$, la funzione $u_f : \widehat{G}\times\{\Im(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ data da $u_f(\xi, t, s) = \left(fe^{\rho(\,\cdot\,)+\Im(z)\eta(\,\cdot\,)}\right)^\wedge(\xi \exp_*(\Re(z)\eta)) =: \widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}(z)$ soddisfa la proprietà dei rettangoli $\forall \rho, \eta$ per quasi ogni ξ.*

Dimostrazione. Siano $\rho, \eta \in \Gamma$. Definiamo $\tilde{u}_f : \widehat{G} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come $\tilde{u}_f(\xi, z) = u_f(\xi \exp_*(-i\rho - z\eta))$. Vale che

$$\|\tilde{u}_f(\,\cdot\,, z)\|_2^2 = \int_{\widehat{G}} \left|\left(fe^{\rho(\,\cdot\,)+\Im(z)\eta(\,\cdot\,)}\right)^\wedge(\xi \exp_*(\Re(z)\eta))\right|^2 \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{\widehat{G}} \left|\left(fe^{\rho(\,\cdot\,)+\Im(z)\eta(\,\cdot\,)}\right)^\wedge(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_G |f(x)e^{\langle\rho,x\rangle+\Im(z)\langle\eta,x\rangle}|^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_2 e^{2(\omega(\rho)+\Im(z)\omega(\eta))} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\{\Im(z) > 0\}). \tag{3.2}$$

Sia f_n una successione in $L^1(G) \cap L^2(G)$ tale che $f_n \to f$ in $L^2(G)$. Siano $K \subseteq \widehat{G}$, $H \subseteq \{\Im(z) > 0\}$ compatti, con H tale che per ogni $u, v \in H$, il rettangolo $R_{u.v} \subseteq H$. Per il Lemma 3.32 segue che $\tilde{u}_{f_n} - \tilde{u}_f = \tilde{u}_{f_n - f} \to 0$ in $L^1(K \times H)$. A meno di sottosuccessioni, questo implica che per quasi ogni $\xi \in K$, $u_{f_n}(\xi, t + i\,\cdot\,) \to u_f(\xi, t + i\,\cdot\,)$ in $L^1(\mathbb{R}^+)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e analogamente $u_{f_n}(\xi, \cdot + is) \to u_f(\xi, t + is)$ in $L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $s \in \mathbb{R}^+$. Quindi per quasi ogni $u, v \in H$, $\int_{\partial R_{u,v}} (\widehat{f}_n)_{\xi,\rho,\eta}(z)\mathrm{d}z \to \int_{\partial R_{u,v}} \widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}(z)\mathrm{d}z$. Ma per il lemma 3.30 $(\widehat{f}_n)_{\xi,\rho,\eta}$ è olomorfa, quindi $\int_{\partial R_{u,v}} (\widehat{f}_n)_{\xi,\rho,\eta}(z)\mathrm{d}z = 0$, e quindi per quasi ogni u, v, $\int_{\partial R_{u,v}} \widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}(z)\mathrm{d}z = 0$. □

Definizione 3.34. *Diciamo che una funzione $u : \widehat{G} \times \Gamma \to \mathbb{C}$ è* olomorfa quasi ovunque *se è misurabile su $\widehat{G} \times \{\rho\}$ $\forall \rho \in \Gamma$ e $\forall \rho, \eta \in \Gamma$, per quasi ogni $\xi \in \widehat{G}$, $u_{\xi,\rho,\eta}(z)$ è quasi ovunque uguale ad una funzione olomorfa.*

Se u è olomorfa quasi ovunque e si modifica u a un certo livello $(\,\cdot\,, \rho_0)$, la funzione modificata resta olomorfa quasi ovunque. Chiaramente, se questa cosa la si fa per "troppi" livelli, la funzione cessa di essere olomorfa quasi ovunque. Pertanto, risulta utile una qualche definizione di "quasi ovunque" anche per sottoinsiemi di G^*.

Definizione 3.35. *Sia A un sottoinsieme di G^*. Diciamo che A è* trascurabile *se per ogni sottospazio $X \subseteq G^*$ di dimensione finita, $A \cap X$ è trascurabile rispetto alla misura di Lebesgue su X. Se $B \subseteq G^*$, diciamo che una certa proprietà vale per quasi ogni $\rho \in B$ se l'insieme su cui quella proprietà non vale è trascurabile.*

Teorema 3.36. *Se $f \in L^2(G)$ ha supporto in $\overline{E}$, allora la sua trasformata di Fourier estesa $\widehat{f} : \widehat{G} \times \Gamma \to \mathbb{C}$, data da $\widehat{f}(\xi, \rho) = \widehat{fe^{\rho(\,\cdot\,)}}$, è olomorfa quasi ovunque*

Dimostrazione. Per i Lemmi 3.32 e 3.33, $\forall \rho, \eta \in \Gamma$, per quasi ogni $\xi \in \widehat{G}$, la funzione $\widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.31 su $\Omega_n = \{\Im(z) > 0\} \cap B(0, n)$, e quindi per quasi ogni ξ, $\widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}|_{\Omega_n}$ è quasi ovunque uguale ad una funzione olomorfa. Di conseguenza, per quasi ogni ξ, la funzione $\widehat{f}_{\xi,\rho,\eta}$ è quasi ovunque uguale ad una funzione olomorfa. □

Come accade su $\mathbb{R}^n$, questo teorema si può invertire, in particolare valgono alcuni teoremi di tipo Paley - Wiener. Per prima cosa un risultato preliminare:

Proposizione 3.37. *Sia $\Gamma \subseteq G^*$ un cono convesso. Sia $E \subseteq G$ tale che* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) = E$. *Se*

- *u è olomorfa su $\widehat{G} \times \Gamma$,*
- $\|u(\,\cdot\,, \rho)\|_1 \leqslant Ce^{\omega(\rho)}$ $\forall \rho \in \Gamma$,
- *$\forall \rho \in \Gamma$, vale che $u(\,\cdot\,, \rho) \in L^2$,*

- $\exists \rho_0 \in \Gamma, \varepsilon, H > 0$ *tali che* $\|u(\,\cdot\,, t\rho_0)\|_2 \leqslant H$ *per* $t \in (0, \varepsilon)$,

allora $u = \widehat{f}(\xi, \rho)$, *con* $f \in L^2(G)$ *a supporto in* E *e* $\|f\|_2 \leqslant H$.

Dimostrazione. Sia $f_\rho(x) = e^{\langle \rho, x\rangle} \int_{\widehat{G}} u(\xi, \rho)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\xi$. Per la formula di inversione, vale che $\widehat{f_\rho e^{\rho(\,\cdot\,)}}(\xi) = u(\xi, \rho)$. Dimostriamo che $e^{\langle \rho, x\rangle} \int_{\widehat{G}} u(\xi, \rho)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\xi$ è costante in ρ. Infatti se $\rho, \eta \in \Gamma$

$$f_{\rho+s\eta}(x) = \int_{\widehat{G}} u(\xi, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle e^{\langle \rho+s\eta, x\rangle} \mathrm{d}\xi \overset{(\xi' = \xi e^{it\eta(\,\cdot\,)})}{=} \tag{3.3}$$

$$= \int_{\widehat{G}} u(\xi e^{-it\eta(\,\cdot\,)}, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle e^{\langle \rho - i(t+is)\eta, x\rangle} \mathrm{d}\xi$$

per l'invarianza per traslazioni della misura di Haar. Inoltre vale che, ponendo $z = t + is$,

$$g(z) := g(t + is) := \int_{\widehat{G}} u(\xi e^{-it\eta(\,\cdot\,)}, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle \mathrm{d}\xi = \int_{\widehat{G}} u_{\xi,\rho,\eta}(z)\mathrm{d}\xi$$

è olomorfa: per il Teorema di Morera, basta verificare che $g(z)dz$ sia chiusa. Sia γ un cammino chiuso sul semipiano superiore parametrizzato per lunghezza d'arco. Vale che:

$$\int_0^L \int_{\widehat{G}} |u_{\xi,\rho,\eta}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \leqslant \int_0^L Ce^{\Im(\gamma(t))\omega(\eta)+\omega(\rho)} \leqslant LCe^{\|\gamma\|_\infty \omega(\eta)+\omega(\rho)}$$

e quindi per il Teorema di Fubini-Tonelli

$$\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = \int_0^L \int_{\widehat{G}} u_{\xi,\rho,\eta}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}t = \int_{\widehat{G}} \int_0^L u_{\xi,\rho,\eta}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}t = 0$$

per la condizione di olomorfia di u. Di conseguenza vale che:

$$\frac{\partial}{\partial s}(f_{\rho+s\eta}(x)) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{\widehat{G}} u(\xi, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle e^{\langle \rho+s\eta, x\rangle} \mathrm{d}\xi\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{\widehat{G}} u(\xi e^{-it\eta(\,\cdot\,)}, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle e^{\langle \rho - i(t+is)\eta, x\rangle} \mathrm{d}\xi\right) = \frac{\partial}{\partial s} g(z) =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial t} g(z) = i\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\widehat{G}} u(\xi e^{-it\eta(\,\cdot\,)}, \rho + s\eta)\langle \xi, x\rangle e^{\langle \rho - i(t+is)\eta, x\rangle} \mathrm{d}\xi\right) = 0$$

per l'equazione 3.3. Quindi vale che $f_\rho = f_{\rho+\eta} = f_\eta =: f$.
Dimostriamo che $f(x) = 0\ \forall x \notin E$. Sia $x \notin E$. Per definizione esiste $\eta \in \Gamma$ tale che $-\langle \eta, x\rangle > \omega(\eta)$. Si ha che:

$$|f(x)| \leqslant e^{\langle t\eta, x\rangle} \int_{\widehat{G}} |u(\xi, t\eta)| \leqslant Ce^{\langle t\eta, x\rangle} e^{t\omega(\eta)} = Ce^{-t(-\langle \eta, x\rangle - \omega(\eta))}$$

Ma poiché $-\langle \eta, x\rangle > \omega(\eta)$, mandando t a $+\infty$ si ha che $f(x) = 0$.
L'ultima cosa da dimostrare è che $f \in L^2$. Per il Teorema di Banach-Alaoglu,

$\exists g \in L^2(G)$ punto limite debole* di $fe^{-t\rho_0}$ per $t \to 0$ e $\|g\|_2 \leqslant H$. Sia he^{ρ_0} una generica funzione continua a supporto compatto. Vale che $\exists t_n \to 0$ tale che

$$\int_G g(x)h(x)e^{\langle \rho_0, x\rangle} = \lim_{n\to\infty} \int_G e^{-t_n\langle \rho_0, x\rangle} f(x)h(x)e^{-\langle \rho_0, x\rangle} = \int_G f(x)h(x)e^{-\langle \rho_0, x\rangle}$$

per convergenza dominata da $|f||h|e^{\rho_0}(1+e^{-\sup |t_n|\rho_0})$. Per la seconda ipotesi, f è localmente limitata, in quanto è l'antitrasformata di una funzione L^1 moltiplicata per una funzione continua. Quindi questo implica $f = g$ quasi ovunque: per ogni compatto K, poiché le funzioni continue a supporto in K sono dense debole* in L^∞, $f|_K$ e $g|_K$ sono lo stesso elemento di $L^1(K)$. Quindi $f = g \in L^2$ e $\|f\|_2 \leqslant H$. □

Questa Proposizione può essere raffinata in due teoremi:

Teorema 3.38. *Sia $\Gamma \subseteq G^*$ un cono convesso. Sia $E \subseteq G$ tale che* $\mathrm{Hull}_\Gamma(E) =$ *E. Allora vale che se u è olomorfa su $\widehat{G} \times \Gamma$ e esiste $C > 0$ tale che $\|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2 \leqslant Ce^{\omega(\rho)}$ $\forall \rho \in \Gamma$, allora $u(\xi,\rho) = \widehat{f}(\xi,\rho)$, con $f \in L^2(G)$ a supporto in E e $\|f\|_2 \leqslant C$.*
Se u è olomorfa quasi ovunque e esiste $C > 0$ tale che per quasi ogni ρ, $\|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2 \leqslant Ce^{\omega(\rho)}$ $\forall \rho \in \Gamma$, allora $u(\,\cdot\,,\rho) = \widehat{f}(\,\cdot\,,\rho)$ per quasi ogni $\rho \in \Gamma$, con $f \in L^2(G)$ a supporto in E e $\|f\|_2 \leqslant C$.

Dimostrazione. Per prima cosa, supponiamo u olomorfa. Siano ψ_U identità approssimate in G con U aperti simmetrici, $g_U(\xi,\rho) := \widehat{\psi_U e^{\rho(\cdot)}}$. Poiché per $U \to 0$, $\rho \mathbb{1}_U \to 0$ uniformemente sui compatti (e quindi su U $\forall U$), anche $\psi_U e^{\rho(\cdot)}$ sono identità approssimate. Vale quindi che $u(\,\cdot\,,\rho)g_U(\,\cdot\,,\rho) \to u$ in L^2 e

$$\|u(\,\cdot\,,\rho)g_U(\,\cdot\,,\rho)\|_1 \leqslant \|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2\|g_U(\,\cdot\,,\rho)\|_2 =$$

$$= \|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2\|\psi_U e^\rho\|_2 \leqslant C\|\psi_U\|_2 e^{\omega_E(\rho)+\omega_U(\rho)}$$

e

$$\|u(\,\cdot\,,\rho)g_U(\,\cdot\,,\rho)\|_2 \leqslant \|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2\|g_U(\,\cdot\,,\rho)\|_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \|u(\,\cdot\,,\rho)\|_2\|\psi_U e^\rho\|_1 \leqslant Ce^{\omega_E(\rho)+\omega_U(\rho)}$$

Quindi per la Proposizione sopra $u\psi_U = \widehat{f}_U$, con $\operatorname{supp} f_U \subseteq E_U := \{x \in G | \langle \rho, x\rangle \leqslant \omega_E(\rho) + \omega_U(\rho)\ \forall \rho \in \Gamma\}$ e $\|f_U\|_2 \leqslant Ce^{\omega(U)}$. Sia f un punto limite debole * delle f_U per $U \to 0$. Deve valere che $\operatorname{supp} f \subseteq \limsup_{U\to 0} E_U = E$ e $\|f\|_2 \leqslant \limsup_{U\to 0} \|f_U\|_2 = C$. Vale che, per $h \in L^2(\widehat{G})$, $\exists U_n \to 0$ tali che

$$\langle \widehat{fe^\rho}, h\rangle = \langle fe^\rho, \check{h}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_{U_n} e^\rho, \check{h}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u(\,\cdot\,,\rho)g_{U_n}(\,\cdot\,,\rho), h\rangle = \langle u(\,\cdot\,,\rho), h\rangle$$

da cui $\widehat{fe^\rho}(\xi) = u(\xi,\rho)$.
Sia adesso u olomorfa quasi ovunque. Per $J \subseteq \Gamma$ insieme finito, sia Γ_J il cono convesso generato da J. Fissiamo una base su $X := \mathrm{Span}(J)$ e mettiamoci la metrica euclidea e la misura di Lebesgue rispetto a questa base. Γ_J è chiuso

in X per definizione. Sia u_J la restrizione di u a $\widehat{G} \times \Gamma_J$ (estesa a 0 sul resto di X). Siano Ψ_U identità approssimate su $\widehat{G}$, Ψ_V identità approssimate su X. Allora $\Psi_{U\times V}(\xi, \rho) := \Psi_U(\xi)\Psi_V(\rho)$ sono identità approssimate su $\widehat{G} \times X$. Allora $u_J * \Psi_{U\times V}$ è una funzione continua ed è quasi ovunque olomorfa su $\Gamma'_V := \{\rho \in \Gamma_J | \, \rho + V \subseteq \Gamma_J\}$. Sia $\rho_0 \in \Gamma'$. Allora $\rho_0 + \Gamma_J \subseteq \Gamma'$:

$$\{\eta | \rho_0 + \eta \in \Gamma'_V\} = \{\eta | \rho_0 + \eta + V \subseteq \Gamma_J\} \subseteq \{\eta | \eta + \Gamma_J \subseteq \Gamma_J\} \subseteq \Gamma_J.$$

Di conseguenza, se $v(\xi, \rho) := u_J * \Psi_{U\times V}(\xi, \rho + \rho_0)$, vale che v è olomorfa su $\widehat{G} \times \Gamma_J$ e soddisfa (per la disuguaglianza integrale di Minkowski):

$$\begin{aligned}
\|v(\,\cdot\,, \rho)\|_2 &= \|u_J * \Psi_{U\times V}(\,\cdot\,, \rho + \rho_0)\|_2 = \\
&= \sqrt{\int_{\widehat{G}} \left| \int_{\widehat{G}} \int_X u(\xi\overline{\zeta}, \rho + \rho_0 - \eta)\psi_{U\times V}(\zeta, \eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \right|^2 \mathrm{d}\xi} \leqslant \\
&\leqslant \int_{\widehat{G}} \int_X \sqrt{\int_{\widehat{G}} |u(\xi\overline{\zeta}, \rho + \rho_0 - \eta)|^2 |\psi_{U\times V}(\zeta, \eta)|^2 \mathrm{d}\xi} \, \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta = \\
&= \int_{\widehat{G}} \int_X \psi_{U\times V}(\zeta, \eta) \sqrt{\int_{\widehat{G}} |u(\xi\overline{\zeta}, \rho + \rho_0 - \eta)|^2 \mathrm{d}\xi} \, \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \leqslant \\
&\leqslant \int_{\widehat{G}} \int_X C\psi_{U\times V}(\zeta, \eta) e^{\omega(\rho+\rho_0-\eta)} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \leqslant \\
&\leqslant \left(C\|\psi_{U\times V}\|_1 \sup_{\eta\in V} e^{\omega(\rho_0-\eta)} \right) e^{\omega(\rho)} = \left(C \sup_{\eta\in V} e^{\omega(\rho_0-\eta)} \right) e^{\omega(\rho)}
\end{aligned}$$

quindi per la prima parte del teorema, esiste $f_{\rho_0,U,V}$ tale che $v(\,\cdot\,, \rho) = \widehat{f}_{\rho_0,U,V}(\,\cdot\,, \rho)$, $\|f_{\rho_0,U,V}\|_2 \leqslant C \sup_{\eta\in V} e^{\omega(\rho_0-\eta)}$ e

$$\operatorname{supp} f_{\rho_0,U,V} \subseteq E_J := \{x \in G | \, \langle \rho, x \rangle \leqslant \omega(\rho) \forall \rho \in \Gamma_J\}.$$

Facendo il limite per $U \times V \to \{1\} \times \{0\}$ su U, V tali che $\rho_0 \in \Gamma'_V$, si ottiene che $\forall \rho$, $v \to u(\,\cdot\,, \rho_0 + \rho)$ in $L^2(\widehat{G})$ e che, analogamente alla prima parte del teorema, se f_{ρ_0} è un punto limite debole* di $f_{\rho_0,U,V}$ per $U \times V \to \{1\} \times \{0\}$, $\|f_{\rho_0}\|_2 \leqslant Ce^{\omega(\rho_0)}$ e $\widehat{f_{\rho_0} e^{\rho}} = u(\xi, \rho + \rho_0)$ per quasi ogni $\xi, \rho \in \widehat{G} \times \Gamma_J$ (e quindi f_{ρ_0} è l'unico punto limite debole* di $f_{\rho_0,U,V}$ per $U \times V \to \{1\} \times \{0\}$). Analogamente, se f è un punto limite debole* di f_{ρ_0} per $\rho_0 \to 0$, $\|f\|_2 \leqslant C$ e $\widehat{fe^{\rho}} = u(\,\cdot\,, \rho)$ per quasi ogni $\xi, \rho \in \widehat{G} \times \Gamma_J$ (per la condizione di olomorfia quasi ovunque su u), e quindi questa f non dipende né da J, né dalla scelta del punto limite, né dalla scelta di $\{U\}$ e $\{V\}$, quindi

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} f \subseteq \bigcap_{J\subseteq\Gamma \text{ finito}} E_J &= \left\{ x \in G | \, \langle \rho, x \rangle \leqslant e^{\omega(\rho)} \; \forall \rho \in \bigcup_{J\subseteq\Gamma \text{ finito}} \Gamma_J \right\} = \\
&= \{x \in G | \, \langle \rho, x \rangle \leqslant e^{\omega(\rho)} \; \forall \rho \in \Gamma\} = \operatorname{Hull}_\Gamma(E) = E.
\end{aligned}$$

e $u(\,\cdot\,, \rho) = \widehat{fe^{\rho}}$ per quasi ogni $\rho \in \Gamma$. □

Esempio 3.39. Su $\mathbb{R}^n$ vale che $G^* \cong \mathbb{R}^n$ con l'applicazione $y \to \langle y, \cdot \rangle$, come già visto. Se Γ è un cono convesso in $\mathbb{R}^n$, si può definire il cono duale:

$$\Gamma^* := \{y \in \mathbb{R}^n | \sup_{x \in \Gamma} \langle -y, x \rangle \leqslant 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n | \sup_{x \in \Gamma} \langle -y, x \rangle < +\infty\}$$

e $\mathrm{Hull}_{\Gamma^*}(\Gamma) = \overline{\Gamma}$. Poiché se $y \in \Gamma^*$, $y \neq 0$, $e^{\langle y, \cdot \rangle} \in L^p(\Gamma)$ per ogni $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se $f \in L^2(\Gamma)$, $\widehat{f}$ è olomorfa su $\mathbb{R}^n + i\Gamma^*$ (con conti analoghi all'osservazione 3.21). Quindi il Teorema 3.23 dà una corrispondenza biunivoca fra $L^2(\Gamma)$ e le funzioni g olomorfe su $\mathbb{R}^n + i\Gamma^*$ tali che $\|g(\,\cdot\, + iy)\|_2$ è limitata al variare di $y \in \Gamma^*$.

Esempio 3.40. Con Γ e Γ^* come nell'esempio precedente, in realtà il risultato è un po' più generale. Infatti, se si mette su $\mathbb{R}^n$ la topologia discreta, poiché vale ancora che $\mathrm{Hull}_{\Gamma^*}(\Gamma) = \Gamma$, c'è esattamente la stessa corrispondenza: le funzioni L^2 a supporto in Γ corrispondono alle funzioni g olomorfe su $\widehat{\mathbb{R}^n_d} \times \Gamma^*$ tali che $\|g(\,\cdot\, + iy)\|_2$ è limitata al variare di $y \in \Gamma^*$.

Il secondo teorema ha un enunciato con più ipotesi del primo, però torna utile in quanto le ipotesi sono spesso verificabili avendo in mano soltanto G^* (anzi, un suo sottospazio vettoriale che separa i punti) e senza sapere niente su $\widehat{G}$, che spesso è più complicato:

Teorema 3.41. *Sia $X \subseteq G^*$ un sottospazio vettoriale che separa i punti di G. Sia $E \subseteq G$ tale che* $\mathrm{Hull}_X(E) = E$. *Vale che se*

- $u : \widehat{G} \times X \to \mathbb{C}$ *è continua,*
- $u_{\sigma,\rho}(z) := u(\exp_*(\sigma + z\rho)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è olomorfa* $\forall \sigma \in X_{\mathbb{C}}$ $\forall \rho \in X$,
- $|u(\xi, \rho)| \leqslant Ce^{\omega(\rho)}$ *(che è equivalente a* $u_\sigma(z) \leqslant Ce^{(\Im(z))\omega(-\Re(\sigma)) - \Re(z)\omega(-\Im(\sigma))}$*),*
- $u(\,\cdot\,, 0) \in L^2(\widehat{G})$,

allora $u(\xi, \rho) = \widehat{f}(\xi, \rho)$, *con* $f \in L^2(G)$ *a supporto in* E.

Dimostrazione. Per prima cosa, dimostriamo che con in ipotesi le $u_{\xi,\rho,\eta}$ della Definizione 3.29 sono olomorfe. A meno di cambi di segno, basta dimostrare che le $u_{\xi,-\rho,-\eta}(z) = u(\xi \exp_*(i\rho + z\eta))$ sono olomorfe in un intorno di 0. Sia $K = \exp_*\left(i\rho + \overline{B(0,1)}\eta\right)$ compatto. Vale che $u|_{\xi K}$ è uniformemente continua, quindi

$$u(\zeta_\alpha \exp_*(i\rho + z\eta)) \to u(\xi \exp_*(i\rho + z\eta)) \text{ uniformemente su } B(0,1) \text{ per } \zeta_\alpha \to \xi.$$

Ma poiché X separa i punti, per la Proposizione 3.12 esiste (ρ_α) a valori in X tale che $\exp_*(\rho_\alpha) \to \xi$. Quindi $u(\exp_*(\rho_\alpha + i\rho + z\eta)) \to u_{\xi,-\rho,-\eta}(z)$ uniformemente su $B(0,1)$, e limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo.
Adesso si considerino ψ_U identità approssimate, $g_U(\xi) = \widehat{\psi_U}(\xi)$. Vale che $|u(\xi,\rho)g_U(\xi)| \leqslant C|g_U(\xi)|e^{\omega(\rho)}$, da cui $\|u(\,\cdot\,,\rho)g_U\|_2 \leqslant C\|\psi_U\|_2 e^{\omega(\rho)}$. Quindi per il Teorema 3.38 $\exists f_U \in L^2(E_U)$ tali che $u(\xi,\rho)g_U(\xi) = \widehat{f_U e^\rho}(\xi)$. Inoltre,

poiché $u(\,\cdot\,,0) \in L^2(\widehat{G})$, esiste $f \in L^2(G)$ tale che $\widehat{f}(\xi) = u(\xi, 0)$. Ma per $U \to 0$, $u(\,\cdot\,,0)g_U \to u(\,\cdot\,,0)$ in $L^2(\widehat{G})$, quindi $f_U \to f$ in $L^2(G)$. Ma quindi $\operatorname{supp} f \subseteq \limsup_{U\to 0} E_U = E$. Inoltre $e^{\rho}|_{E_U}$ è limitata, quindi $f_U e^{\rho} \to f e^{\rho}$ in $L^2(G)$, quindi $\widehat{fe^{\rho}} = \lim_{U\to 0} u(\,\cdot\,,\rho)g_U$ in L^2, ma $u(\xi,\rho)g_U(\xi) \to u(\xi,\rho)$ quasi ovunque, quindi deve valere $\widehat{fe^{\rho}}(\xi) = u(\xi,\rho)$. □

Come si diceva sopra, le ipotesi sono verificabili senza conoscere esplicitamente $\widehat{G}$. Ad esempio, quando G è discreto, $\widehat{G}$ è compatto, quindi la quarta ipotesi del Teorema 3.41 è conseguenza diretta della terza. Inoltre vale che:

Lemma 3.42. *Sia $X \subseteq (G^*)$ che separa i punti e $v : X \to \mathbb{C}$. Se vale che*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \exists H \, \textit{compatto tali che}$$

$$|e^{i\langle \eta, x\rangle} - e^{i\langle \rho, x\rangle}| < \delta \quad \forall x \in H \Rightarrow |v(\eta) - v(\rho)| < \varepsilon$$

allora esiste u uniformemente continua su $\widehat{G}$ tale che $u \circ \exp_* = v$

Dimostrazione. Le ipotesi sono equivalenti alla buona definizione e all'uniforme continuità di $v \circ (\exp_*^{-1})$ su $\exp_*(G^*)$, e quindi $v \circ (\exp_*^{-1})$ si estende in modo unico su $\widehat{G}$. □

Esempio 3.43. Nello studio di equazioni differenziali ordinarie, talvolta si considerano le funzioni quasi periodiche su $\mathbb{R}$. Senza addentrarci nella teoria, sono quelle funzioni che si possono esprimere come $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{i\omega_n x}$, con ω_n un a qualsiasi famiglia numerabile di numeri reali e con opportune ipotesi sui coefficienti. Ad esempio, tutte le funzioni u con $\sum |a_n| < +\infty$ lo sono. Più precisamente, una funzione u è quasi periodica su $\mathbb{R}$ se esiste una funzione $\tilde{u} : \widehat{\mathbb{R}_d} \to \mathbb{C}$ continua tale che $\tilde{u}|_{\mathbb{R}} = u$. Se $\sum |a_n| < +\infty$, per una facile applicazione del Lemma 3.42, l'estensione $\sum a_n \langle \xi, \omega_n \rangle$ è continua, da cui segue la quasi-periodicità di $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{i\omega_n x}$.
Supponiamo che a_n sia tale che $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $v(z) := \sum a_n e^{i\omega_n z}$ sia olomorfa, quasi periodica su $\{\Im(z) = y\}$ $\forall y$ e $|v(z)| \leqslant Ce^{\delta \Im(z)}$. Allora $v(z)$ si estende a una funzione continua $\tilde{u} : \widehat{\mathbb{R}_d} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, quindi valgono le ipotesi del Teorema 3.41 con $E = [-\delta, \delta]$. Di conseguenza, vale il Lemma:

Lemma 3.44. *Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione quasi periodica che si estende a una funzione olomorfa $\tilde{u}$ tale che $|\tilde{u}(z)| \leqslant Ce^{\delta|\Im(z)|}$ e $u(\,\cdot\, + iy)$ è quasi periodica $\forall y \in \mathbb{R}$, allora u è la restrizione a $\mathbb{R}$ della trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}_d)$ a supporto in $[-\delta, \delta]$.*

Bibliografia

[1] G. B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, 1994.

[2] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, 2003.

[3] H. Rademacher. Bemerkungen zu den cauchy-riemannschen differentialgleichungen und zum moreraschen satz. *Mathematische Zeitschrift*, 4:177–185, 1919.

[4] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. New York, Interscience Publishers, 1962.

[5] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.