Faisceaux pervers et localisation hyperbolique

X variété algébrique $/\mathbb{C}$

R anneau de coefficients ($R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$)

$D^b_c(X, R)$ catégorie dérivée constructible de X à coefficients dans R.

$$\| $$

$D^b(\underbrace{Sh_c(X,R)}_{\text{faisceaux constructibles à coefficients dans } R})$

$= \{ \mathcal{F}$ faisceau de R-modules sur X t.q.

$\exists \; X = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} X_s$ stratification finie de X,

$\mathcal{F}|_{X_i}$ est faisceau localement constant

et $\mathcal{F}_x$ est un R-module de type fini $(\forall x \in X)$. $\}$

$Sh_{\mathcal{S}}(X, R)$ = faisceaux constructibles avec stratification $\mathcal{S}$ fixée

$D^b_{\mathcal{S}}(X, R)$

catégories abéliennes.

Objets de $D^b_c(X,R)$: complexes

$$\mathcal{F}^\bullet = \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

$$d \circ d = 0$$

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0 \quad i << 0 \text{ ou } i \geqslant 0.$$

morphismes : • morphismes de complexes

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}^i \arrow[r] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\ & \mathcal{G}^i \arrow[r] & \mathcal{G}^{i+1} & \end{tikzcd}$$

• localisation par rapport aux quasi-isomorphismes :

$(f^\bullet) : \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ induisant $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{G}^\bullet)$.

$D^b_c(X,R)$ est une catégorie triangulée : ensemble de triangles distingués $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{H}^\bullet \xrightarrow{[1]}$ satisfaisant certains axiomes.

Formalisme des six foncteurs et dualité de Verdier

$f^*, f_*, f^!, f_!, - \otimes -, R\mathcal{H}om(-,-)$ — tous ces foncteurs sont implicitement dérivés

* f^* est exact → passe à $D^b_c(X)$ immédiatement
* f_* est exact à gauche → il a un foncteur dérivé à droite Rf_*

* $f_!$ = sections à supports compacts :

$f : X \to Y$

$\mathcal{F} \in Sh_c(X) \qquad U \subset Y$

$f_! \mathcal{F}(U) = \{ s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \mid f|_{supp(s)} : supp(s) \to Y$ est propre $\}$

exact à droite.

⇝ foncteur dérivé à gauche $Lf_!$

* $Lf_!$ admet un adjoint à droite $f^!$; ce n'est pas le foncteur dérivé d'un foncteur $Sh_c(Y) \to Sh_c(X)$!

"exceptional pull-back".

* $\mathcal{H}om(-,-)$ bifoncteur, exact à gauche en chacune des variables.

⇝ $R\mathcal{H}om$ foncteur dérivé à droite

* $\otimes$ Adjoint à gauche de $\mathcal{H}om$

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G},\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{H}))$$

$\rightsquigarrow$ $\otimes$ est exact à droite

$\otimes^L$ foncteur dérivé à gauche.

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G},\mathcal{H}) \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, R\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{H})).$$

* dualité de Verdier:

$\mathbb{D}$: anti-endofoncteur $D^b_c(X) \to D^b_c(X)$

$X \xrightarrow{p} pt$, $\omega_X = p^! \underline{\mathbb{Q}}_X$

$\mathbb{D}\circ\mathbb{D} \simeq Id$.

$\mathbb{D} = \mathcal{H}om(-,\omega_X)$

Les existences de $\mathbb{D}$ et de $f^!$ ($\forall f$) sont équivalentes.

adjoint à droite de $f_!$

- $\mathbb{D}f_! = f_*\mathbb{D}$
- $\mathbb{D}f^* = f^!\mathbb{D}$
- $\mathbb{D}\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G} \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$

dualité contravariante telle que

$\mathbb{D}p_! = p_*\mathbb{D}$ "Poincaré dualitey".

* Si $\mathbb{D}$ existe, on définit $f^! = \mathbb{D}f^*\mathbb{D}$.

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathbb{D}f^*\mathbb{D}\mathcal{G}) \simeq R\mathcal{H}om(f^*\mathbb{D}\mathcal{G},\mathbb{D}\mathcal{F})$$

$$\simeq R\mathcal{H}om(\mathbb{D}\mathcal{G}, f_* \mathbb{D}\mathcal{F})$$

$$\simeq \mathcal{H}om(\underbrace{\mathbb{D} f_* \mathbb{D}}_{f_!}\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

$\checkmark$

* si $f^!$ existe, $\mathbb{D} = R\mathcal{H}om(-, \omega_X)$. $\omega_X = p_X^! \mathbb{Q}$.

$$\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathbb{D} f^* \mathbb{D} \mathcal{F})$$

adjoint à droite.

$$\simeq \mathcal{H}om(f^* \mathbb{D}\mathcal{F}, \mathbb{D}\mathcal{G})$$

$$\simeq \mathcal{H}om(\mathbb{D}\mathcal{F}, f_* \mathbb{D}\mathcal{G})$$

$$\simeq \mathcal{H}om(f_! \mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

---

* Si X est lisse, $\mathbb{D}\mathbb{Q}_X = \mathbb{Q}_X[2n]$.
  of dim n

* morphismes : $f_! \to f_*$, iso if f propre.
  $j^! = j^*$ pour j immersion ouverte

* triangles ouverts-fermés : $X = U \sqcup Z$, U ouvert, Z fermé

$$i_! i^! \to id \to j_* j^* \to \quad ; \quad j_! j^! \to id \to i_* i^* \to$$

$\ast$ Proper base change :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y' \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$ cartésien.

$$f^* \circ g_! \simeq g'_! \circ (f')^*.$$ → dérivations si g est propre, f lisse, ...

$\ast$ $f : X \to Y$ lisse, dim. relative $d \Rightarrow f^! \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[2d]$.

Un peu plus sur $f^!$

- Si $Z \overset{f}{\hookrightarrow} X$ inclusion de Z localement fermé,

  $V \subset Z$ ouvert

  $U \subset X$ ouvert t.q $U \cap Z = V$.

  Pour $\mathcal{F} \in Sh_c(X)$,

  $$(f^! \mathcal{F})(V) := \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid supp(s) \subset V \}.$$

  adjoint à droite de $f_!$ at the underived level.

- Si $f : X \to Y$ morphisme arbitraire, X lisse

  $$X \xrightarrow{a} X \times Y \xrightarrow{b} Y$$ En supposant
  $x \longmapsto (x, f(x))$
  $(x,y) \longmapsto$

  $b^! := b^*[2d]$ et a immersion donc OK.
  $d = \dim X$.

Si X n'est pas lisse,

$$\begin{tikzcd} & X' \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

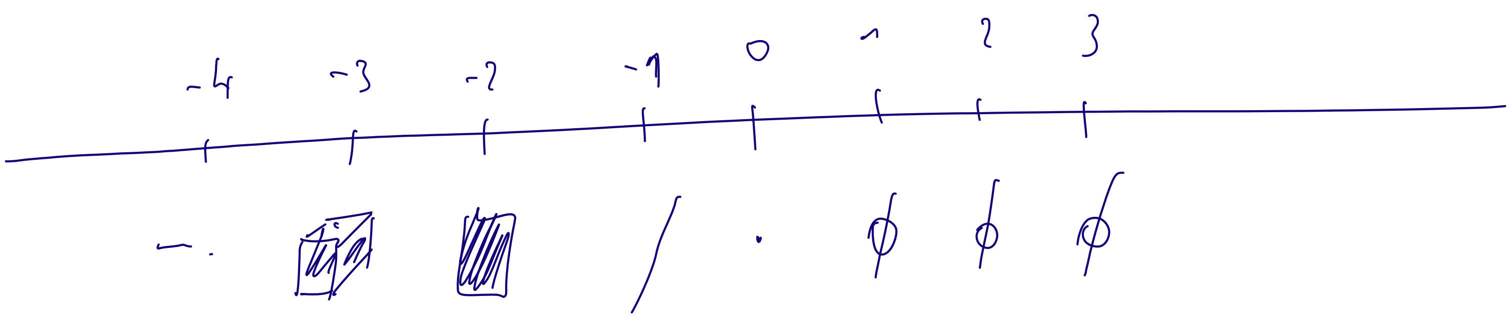
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \text{ lisse} \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "pr_2"] \\ Y \end{tikzcd}$$

Faisceaux pervers : sous-catégorie abélienne de $D^b_c(X,R)$, $\mathrm{Perv}(X,R)$.

Si $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X,R)$, $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \in \mathrm{Sh}_c(X,R)$.

$$D^{b,\leq 0}_c(X,R) = \{\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X,R) \mid \forall i,\ \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \leq -i\}$$



$$D^{b,\geq 0}_c(X,R) = \{\mathcal{F}^\bullet \mid \mathbb{D}\mathcal{F}^\bullet \in D^{b,\leq 0}_c(X,R)\}$$

$$\mathrm{Perv}(X,R) = D^{b,\leq 0}_c(X,R) \cap D^{b,\geq 0}(X,R).$$

(perversité moitié)

- catégorie abélienne
- s.e.c. dans $\mathrm{Perv}(X,R)$ viennent des triangles distingués
  $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to$ de $D^b_c(X,R)$ dont

les objets sont dans $\mathrm{Perv}(X, R)$. (Sous-catégorie abélienne admissible)

- longueur finie (filtr de JH)
- objets simples : $Y \overset{j}{\subset} X$; $\mathcal{L}$ système local sur Y
lisse irréductible
loc fermé

$\rightsquigarrow$ $IC(\bar{Y}, \mathcal{L}) = j_{!*} \mathcal{L}[\dim Y]$

ce sont tous les objets simples.

<u>Exemple</u> : $\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{C} \overset{j}{\hookleftarrow} \mathbb{C}^*$

(i_* exact i^*, $i_* = i_!$, $i^!$ ok for inclusions
$j_!$, $j^! = j^*$, j_*)

$j_! j^! \to id \to i_* i^* \to$ appliqué à $\mathbb{Q}[1]$:

$j_! \mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1] \longrightarrow \mathbb{Q}[1] \longrightarrow \mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \longrightarrow$

pervers

rotation $\mathbb{Q}_{\{0\}} \longrightarrow j_! \mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1] \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] \longrightarrow 0$

pervers simple ... pervers simple

$\Rightarrow j_! \mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1]$ pervers, non simple

$$\overset{i_*}{\overset{\|}{i_!}}\, i^! \to id \to j_* j^* \to \quad \text{appliqué à } \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1]$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \to \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] \to j_* \mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1] \to$$

$$i^! \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] = \mathbb{D} i^* \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] = \mathbb{D}\mathbb{Q}_{\{0\}}[1]$$
$$= \mathbb{Q}_{\{0\}}[-1]$$

rotation :

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] \to j_* \mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1] \to \mathbb{Q}_{\{0\}} \to$$

Cohomology perverse obtenue à partir du formalisme des t-structures.

$D_c^{b,\leq 0}(X) \hookrightarrow D_c^b(X)$ a un adjoint à droite, $\tau^{\leq 0}$

$D_c^{b,\geq 0}(X) \hookrightarrow D_c^b(X)$ a un adjoint à gauche $\tau^{\geq 0}$

$$D_c^b(X) \longrightarrow \mathrm{Perv}(X)$$
$$\mathcal{F}^\bullet \longmapsto \tau^{\leq 0}\tau^{\geq 0}\mathcal{F}^\bullet \quad \text{bien défini}$$
$$\| $$
$$^p\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet)$$

$$^p\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) := {}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet[i])$$

Théorème de décomposition

- Sommet de la théorie des faisceaux pervers

- Complexes semi-simples :

$\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$

$$\mathcal{F}^\bullet \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$$

et chaque ${}^p\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$ est un faisceau pervers semisimple.

Thm (de décomposition)

$f : X \to Y$ propre

$\mathcal{F}$ faisceau pervers semisimple sur X

Alors $f_* \mathcal{F}$ est un faisceau pervers semisimple sur Y.

<u>Petitesse</u> : $f : X \to Y$ propre, surjectif (quitte à restreindre à l'image)

Condition qui fait que $f_* \underline{\mathbb{Q}}_X$ est un faisceau pervers sur Y.

<u>Semismall</u> :

$$\boxed{\forall k \geq 0 \ \dim \{ y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq k \} + 2k \overset{(*)}{\leq} \dim X.} \quad (1)$$

<u>Small</u> : $\forall k \geq 1$, inégalité stricte

$\Rightarrow$ les f.p apparaissant dans $f_* \underline{\mathbb{Q}}_X$ sont supporté sur Y tout entier.

If $Y = \bigsqcup_\alpha Y_\alpha$ strat. f fibration over each of the strata, of rel dim d_α

(1) se réécrit $\dim S_\alpha + 2d_\alpha \leq \dim X \quad (\forall \alpha)$

relevant strata : egalité.

- Chaque fp simple de $f_* \underline{\mathbb{Q}}$ est supporté sur une relevant strata.

- Résolutions symplectiques sont semismall (Kaledin)

Localisation hyperbolique

- Braden 2003
- asserte qu'un certain morphisme naturel de foncteurs est un isomorphisme sur une sous-catégorie.

X $\mathbb{C}$-variété

$\mathbb{G}_m \circlearrowright X$ acts on X

$$\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$$

$X^{\mathbb{G}_m}$ - fixed points

$$X^+ = \text{lieu attractif} = \bigsqcup_{F \in \pi_0(X^{\mathbb{G}_m})} X_F^+$$

$$X^- = \text{lieu répulsif} = \bigsqcup_{F \in \pi_0(X^{\mathbb{G}_m})} X_F^-$$

$$X_F^{\pm} = \left\{ x \in X \,/\, \lim_{t \to \substack{0 \\ \infty}} t \cdot x \in F \right\}$$

$\mathbb{G}_m \circlearrowright \mathbb{P}^1$, $(\mathbb{P}^1)^{\mathbb{G}_m} = \{0, \infty\}$

$$\mathbb{P}^{1+}_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \qquad (\mathbb{P}^1)^+ = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \sqcup \{\infty\}$$
$$\mathbb{P}^{1+}_\infty = \{\infty\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X^+ \arrow[dl, "g^+"'] \arrow[dr, shift left, "\pi^+"] & \\
X & & X^{\mathbb{G}_m} \arrow[ul, shift left, "f^+"] \arrow[dl, shift left, "f^-"] \\
 & X^- \arrow[ul, "g^-"] \arrow[ur, shift left, "\pi^-"] &
\end{tikzcd}$$

$$D^b_c(X) \longrightarrow D^b_c(X^{\mathbb{G}_m})$$

$(f^+)^! \circ (g^+)^*$ et $(f^-)^* \circ (g^-)^!$ qu'on cherche à comparer

(on peut échanger + et − pour obtenir un autre résultat)

Morphisme de foncteurs $(f^-)^*(g^-)^! \to (f^+)^!(g^+)^*$ obtenu comme suit

(si $X^{\mathbb{G}_m}$ a une seule composante connexe)

$\cdot$ $(\pi^-)_* \to (f^-)^*$ adjonction

$\pi^- f^- = \mathrm{id}$; $(\pi^-)_*\left(\mathrm{id} \longrightarrow (f^-)_*(f^-)^*\right)$ gives this morphism.

$\cdot$ $(f^+)^! \longrightarrow (\pi^+)_!$ Verdier dual.

Complexes faiblement équivariants

$\mu : \mathbb{G}_m \times X \to X$ action

$\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ t.q. $\mu^* \mathcal{F}^\bullet \simeq L \boxtimes \mathcal{F}^\bullet$, L localement constant sur $\mathbb{G}_m$.

Fact (#) sont des isomorphismes lorsque appliqué à des complexes faiblement équivariants.

$$\begin{tikzcd} X^{\mathbb{G}_m} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X^- \arrow[d] \\ X^+ \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$ cartésien

$\mathrm{id} \to (g^+)_*(g^+)^*$ adjonction, on applique $(f^-)^*(g^-)^!$

$$(f^-)^* \underbrace{(g^-)^! (g^+)_*}(g^+)^* \simeq \underbrace{(f^-)^*(f^-)_*}_{\underset{\mathrm{id}}{\wr\!\wr}\ \text{since } f^- \text{ is closed immersion.}} (f^+)^!(g^+)^*$$

$\simeq (f^+)^!(g^+)^*$

$$(f^-)^*(g^-)^!$$

Dernière chose : · pureté.

· Si $\mathcal{F}$ est faiblement équivariant et pure, alors sa restriction hyperbolique à $X^{\mathbb{G}_m}$ est pure.

Exemple : $\mathbb{P}^1 \circlearrowleft \mathbb{G}_m$ fixed points $\{0,\infty\}$

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{P}^1\setminus\{0\})\sqcup\{0\} \arrow[dl, "g^+"'] \arrow[dr, shift left, "f^+"] & \\
\mathbb{P}^1 & & \{0,\infty\} \arrow[ul, shift left, "\pi_+"] \arrow[dl, shift left, "\pi^-"] \\
 & (\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\})\sqcup\{\infty\} \arrow[ul, "g^-"] \arrow[ur, shift left, "f^-"] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{P}^1}[1], \quad (f^+)^!(g^+)^*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{P}^1}[1] = (f^+)^!\left(\mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \oplus \mathbb{Q}_{\mathbb{P}^1\setminus\{0\}}[1]\right)$$

$$= \mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \oplus \mathbb{Q}_{\{\infty\}}[-1]$$

$$(f^-)^*(g^-)^!\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{P}^1}[1] = (f^-)^*\left(\mathbb{Q}_{\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}}[1] \oplus \mathbb{Q}_{\{\infty\}}[-1]\right)$$

$$= \mathcal{Q}_{\{\infty\}}[1] \oplus \mathcal{Q}_{\{\infty\}}[-1].$$

Nakajima; Kamnitzer

attracting set

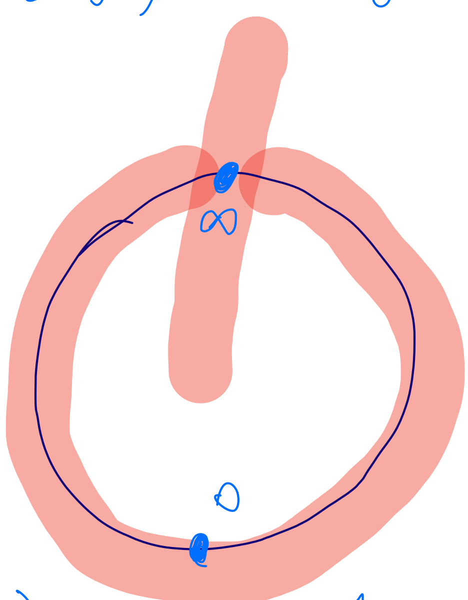
repelling

$$X^T \underset{i_-}{\overset{p_-}{\leftrightarrows}} \mathcal{R}_X \xrightarrow{j_-} X$$

$X = T^*\mathbb{P}^1$ $\quad\mathbb{G}_m \circlearrowright \mathbb{P}^1$ induces action on $T^*\mathbb{P}^1$.

$$(T^*\mathbb{P}^1)^{\mathbb{G}_m} = \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1 \subset T^*\mathbb{P}^1.$$

$$(T^*\mathbb{P}^1)^+ = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \sqcup T^*_{\{\infty\}}\mathbb{P}^1$$



$$(T^*\mathbb{P}^1)^- = (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \sqcup T^*_{\{0\}}\mathbb{P}^1$$

Can take $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_{\mathbb{P}^1}[1]$ on the zero-section of $T^*\mathbb{P}^1$.
and we are reduced to the previous situation.

$\mathcal{F} = \mathbb{Q}_{T^*\mathbb{P}^1}[2]$
perverse

$\{0\} \xrightarrow{g} (\mathbb{C}\times\{0\}) \cup (\{0\}\times\mathbb{C})$

$j^*\mathbb{Q}$

$\mathbb{D}\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}_1}[1] \oplus \mathbb{Q}_{\mathbb{C}_2}[1]$

$(g^+)^*\mathcal{F} = \mathbb{Q}_{(T^*\mathbb{P}^1)^+}[2]$

$(f^+)^!(g^+)^*\mathcal{F} = \mathbb{Q}_{\{\infty\}} \oplus$

$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \to \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] \to j_*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}[1] \to$

$\mathbb{D}\mathbb{D}$ $\underbrace{i^!}\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1]$

$i^*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1]$

$\rightsquigarrow \quad i^*$

$\mathbb{Q}_+[2]$

$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \to \mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \to i_0^* j_*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}[1]$

$i_! i^! \mathbb{Q}_+ \to id \to j_* j^* \to$

$j_*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}_1\setminus\{0\}}[2] \oplus j_*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}_2\setminus\{0\}}[2]$

$j_! j^! \to id \to i_* i^* \to$

$$j_! \mathbb{Q}_{-|-}[1] \to \mathbb{Q}_+[1] \longrightarrow \mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \longrightarrow$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{Q}_+[1]) \longrightarrow j_* \mathbb{Q}_{-|-}[1] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{Q}_+[1] \longrightarrow j_* \mathbb{Q}_{-|-}[1] \longrightarrow$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Q}_{\{0\}}^{\oplus 2}[1]$$

$$\|$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \longrightarrow \mathbb{D}\, i^! \mathbb{Q}_+[1] \longrightarrow i^* j_* \mathbb{Q}_{-|-}[1] \to 0 .$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{C}\times\{0\}}[1] \longrightarrow j_* \mathbb{Q}_{(\mathbb{C}\times\{0\})\setminus\{0\}}[1] \to$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[-1] \to \mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \longrightarrow i^* \text{ - - - - } \longrightarrow$$

$$+ \xrightarrow{f} pt$$

$$f^! \mathbb{Q}_{pt}$$

$$\mathbb{Q}_1[1] \longrightarrow \gamma_* \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}[1] + \mathbb{Q}_{\{0\}} \to$$

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}[1] \to j_*\mathbb{Q}_{\mathbb{C}^*}[1] \to \mathbb{Q}_{\{0\}} \to$$

$$\mathbb{Q}_{\{0\}}[1] \to i^* \cdots \to \mathbb{Q}_{\{0\}}$$

$j_*\mathbb{Q}_{-|-}$ is perverse

direct sum of 2 sheaves

$$i^* j_* \mathbb{Q}_{-|-} = \mathbb{Q}[1] \oplus \mathbb{Q}$$

$$0 \to \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_| \oplus \mathbb{Q}_- \longrightarrow \mathbb{Q}_{\{0\}} \to 0$$

exact triangle

$$\mathbb{Q}_{\{0\}} \to \mathbb{Q}_+[1] \to \mathbb{Q}_|[1] \oplus \mathbb{Q}_-[1] \to$$

$\mathbb{D}$

$$\underbrace{\mathbb{Q}_|[1] \oplus \mathbb{Q}_-[1]}_{\text{pervers}} \to \underbrace{\mathbb{D}(\mathbb{Q}_+[1])}_{\text{pervers}} \to \underbrace{\mathbb{Q}_{\{0\}}}_{\text{pervers}} \to$$