

УДК 512.772.1+514.756.44

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов

**Поверхности с  $DIF \neq DEF$  вещественными структурами**

Исследованы вещественные поверхности Кампеделли с точностью до вещественных деформаций и указан ряд примеров таких поверхностей, которые являются эквивариантно диффеоморфными, но не эквивалентными друг другу относительно вещественных деформаций ( $DIF \neq DEF$ ).

Библиография: 23 наименования.

**Введение**

Вещественная проблема  $DIF=DEF$  ничуть не моложе комплексной. В ней, как и в комплексной проблеме  $DIF=DEF$ , речь идет о взаимодействии между двумя основными отношениями эквивалентности: диффеоморфизмами вещественных структур и деформациями многообразий вместе с вещественными структурами.

*Вещественная структура* на комплексной поверхности  $X$  – это антиголоморфная инволюция  $X \rightarrow X$ . Комплексная поверхность, снабженная некоторой вещественной структурой, называется *вещественной поверхностью*. *Деформация* поверхностей – это собственная голоморфная субмерсия  $p: Z \rightarrow D$ , где  $Z$  – трехмерное комплексное многообразие, а  $D \subset \mathbb{C}$  – единичный диск. Если  $Z$  – вещественное многообразие и  $p$  – эквивариантное отображение, то деформация называется *вещественной*. Две вещественные поверхности  $X'$  и  $X''$  называются *деформационно эквивалентными*, если они могут быть включены в последовательность вещественных поверхностей  $X' = X_0, \dots, X_k = X''$  так, что  $X_i$  и  $X_{i-1}$  изоморфны вещественным слоям вещественной деформации.

При этих определениях вещественная структура с точностью до диффеоморфизма сохраняется при деформации. Таким образом, в вещественной проблеме  $DIF=DEF$  спрашивается: до какой степени диффеоморфный тип вещественной структуры определяет ее деформационный тип? В действительности диффеоморфизмы, полученные с помощью деформаций, сохраняют каноническую ориентацию и канонический класс. Однако, следуя традиции, мы включаем в формулировку вещественной проблемы  $DIF=DEF$  только предположение о сохранении ориентации.

Именно, назовем вещественную поверхность  $X$  *квазипростой*, если она деформационно эквивалентна любой другой вещественной поверхности  $X'$  такой, что, во-первых,  $X'$  и  $X$  являются деформационно эквивалентными как комплексные поверхности и, во-вторых, вещественная структура поверхности  $X'$  диффеоморфна вещественной структуре поверхности  $X$  при некотором сохраняющем ориентацию диффеоморфизме. Таким образом, в нашем понимании

---

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00455), RUM1-2692MO-05 и NWO-RFBR-047.011.2004.026 (РФФИ 05-02-89000-НВО\_а). Второй автор является членом Research Training Network RAAG CT-2001-00271.

вещественная проблема  $DIF=DEF$  – это вопрос: *существуют ли неквази-простые вещественные поверхности?* (Заметим, что в случае кривых ответ на аналогичный вопрос является отрицательным: *любая вещественная кривая является квазипростой.* В этом и во многих других результатах о квазипростоте предположение о сохранении ориентации может быть опущено.)

Первый результат о квазипростоте принадлежит Ф. Клейну и Л. Шлефли [13] и относится к вещественным кубикам в проективном трехмерном пространстве. Фактически квазипростота имеет место для многих специальных классов поверхностей. Свойство квазипростоты доказано для рациональных поверхностей [9], для вещественных абелевых поверхностей [4], для вещественных геометрически линейчатых поверхностей [22], для вещественных гиперэллиптических поверхностей [3], для вещественных КЗ-поверхностей [20] и для вещественных поверхностей Энриквеса [8] (полный список деформационных классов вещественных поверхностей Энриквеса был получен в [6]; отметим также, что квазипростота гиперэллиптических поверхностей и поверхностей Энриквеса распространяется на факторповерхности абелевых и КЗ-поверхностей по действию некоторых конечных групп [7]).

Вопрос о том, являются ли эллиптические и иррациональные линейчатые поверхности квазипростыми, насколько нам известно, все еще является открытым.

Естественно было ожидать, что такое простое поведение не будет иметь место для более сложных поверхностей, например для поверхностей общего типа. Однако, вероятно из-за отсутствия удобных деформационных инвариантов, выходящих за пределы дифференциальной топологии вещественных структур, до сих пор не было известно ни одного примера неквазипростой вещественной поверхности (или многообразия большей размерности). Основным результатом настоящей статьи являются примеры таких поверхностей. Именно, мы доказываем, что поверхности Кампеделли (см. определение в п. 1.1) не являются квазипростыми: существуют вещественные поверхности Кампеделли, которые имеют диффеоморфные вещественные структуры и в то же время не являются деформационно эквивалентными. В этих примерах диффеоморфизмы вещественных структур сохраняют не только ориентацию, но также и канонический класс. (Заметим, что для канонической ориентации форма пересечения на поверхностях Кампеделли имеет сигнатуру  $(1, n)$ ,  $n = 7 > 1$ , поэтому каждый диффеоморфизм поверхностей Кампеделли сохраняет каноническую ориентацию.)

Отметим, что существование неквазипростых семейств поверхностей общего типа не препятствует существованию некоторых частных классов поверхностей общего типа, которые являются квазипростыми. И такие примеры квазипростых вещественных поверхностей общего типа действительно существуют. Одним из таких примеров являются поверхности Богомолова–Миаоки–Яу, т. е. поверхности, накрываемые лежащим в  $\mathbb{C}^2$  шаром (см. [14]). В работе [14] также показано, что существуют диффеоморфные (на самом деле комплексно-сопряженные) поверхности Богомолова–Миаоки–Яу, которые не являются вещественными и поэтому, будучи жесткими, не являются деформационно эквивалентными. Эти примеры являются контрпримерами к проблеме  $DIF=DEF$  в комплексной геометрии. (Отметим, что в этих примерах диффеоморфизмы меняют знак канонического класса.)

Первые контрпримеры к гипотезе  $DIF=DEF$  в комплексной геометрии поверхностей принадлежат М. Манетти [18]. Они не затрагивают комплексное

сопряжение. Уже их существование объясняет, почему нам нужно фиксировать класс комплексной деформации в определении квазипростых вещественных многообразий. Более того, наши примеры диффеоморфных, но деформационно неэквивалентных вещественных структур близки к примерам Манетти. Фактически, чтобы установить диффеоморфизм, мы применяем подход Манетти, а для изучения деформационной эквивалентности мы используем полное описание поверхностей Кампеделли, данное Миаокой [19].

Статья организована следующим образом. В § 1 мы приводим в основном известные результаты о комплексных поверхностях Кампеделли, приспособивая их к нашим нуждам, сосредоточившись на представлениях поверхностей Кампеделли как накрытий Галуа проективной плоскости  $\mathbb{P}^2$ . В § 2 исследуются вещественные структуры на поверхностях Кампеделли и проведена своего рода классификация вещественных структур на таких поверхностях. В § 3 изучаются вещественные структуры с точностью до диффеоморфизма и с точностью до деформации. В § 4 мы применяем разработанную выше технику для построения вещественных поверхностей, которые имеют диффеоморфные вещественные структуры, но не являются вещественно деформационно эквивалентными. Несколько замечаний, относящихся к данной теме, приведены в § 5.

## § 1. Пространство модулей поверхностей Кампеделли

**1.1. Поверхности Кампеделли как разветвленные накрытия Галуа проективной плоскости.** Пусть  $X$  – поверхность Кампеделли, т. е.  $X$  – минимальная поверхность общего типа с  $p_g = q = 0$ ,  $K_X^2 = 2$  и  $\pi_1(X) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Обозначим через

$$X_{\text{can}} = \text{Proj} \left( \sum_m H^0(X; mK) \right)$$

каноническую модель поверхности  $X$ , через  $\tilde{X}$  – универсальное накрытие поверхности  $X$ , через  $G_{\text{un}}$  – группу Галуа этого универсального накрытия и через  $\tilde{X}_{\text{can}}$  – каноническую модель поверхности  $\tilde{X}$ . Отметим, что  $\tilde{X}_{\text{can}}$  и  $X_{\text{can}}$  имеют только канонические особенности (простые двойные точки) в качестве своих особых точек, так что  $\tilde{X}_{\text{can}}$  является универсальным накрытием поверхности  $X_{\text{can}}$ . Универсальные накрытия  $\tilde{X} \rightarrow X$  и  $\tilde{X}_{\text{can}} \rightarrow X_{\text{can}}$  имеют одну и ту же группу Галуа, так что  $X_{\text{can}} = \tilde{X}_{\text{can}}/G_{\text{un}}$ .

Согласно [19, теорема 9] имеет место следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 1.** *Каноническое отображение вкладывает  $\tilde{X}_{\text{can}}$  в  $\mathbb{P}^6$ . Относительно подходящей однородной системы координат  $w_0, \dots, w_6$  в  $\mathbb{P}^6$  этот образ поверхности  $\tilde{X}_{\text{can}}$  задается уравнениями*

$$w_i^2 = a_i w_0^2 + b_i w_1^2 + c_i w_2^2, \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 3, 4, 5, 6, \quad (1)$$

а группа  $G_{\text{un}} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  действует на  $\tilde{X}_{\text{can}}$  диагональными проективными преобразованиями:  $g^*(w_j) = \pm w_j$  для каждого  $g \in G_{\text{un}}$ .

Из уравнений (1) и теоремы 1 следует, что полная группа  $\tilde{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6 \subset \text{PGL}(6, \mathbb{C})$  диагональных инволюций ( $g^*(w_j) = \pm w_j$  для каждого  $g \in \tilde{G}$ ) действует на  $\tilde{X}_{\text{can}}$  и имеет место следующее утверждение.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Факторпространство  $\tilde{X}_{\text{can}}/\tilde{G}$  изоморфно  $\mathbb{P}^2$ , и отображение факторизации  $\tilde{X}_{\text{can}} \rightarrow \tilde{X}_{\text{can}}/\tilde{G}$  является накрытием Галуа плоскости  $\mathbb{P}^2$*

с группой Галуа  $\tilde{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ , разветвленным вдоль семи прямых, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} z_i &= 0, & i &= 0, 1, 2, \\ a_i z_0 + b_i z_1 + c_i z_2 &= 0, & i &= 3, 4, 5, 6, \end{aligned}$$

где  $z_0, z_1, z_2$  – однородные координаты в  $\mathbb{P}^2 = \tilde{X}_{\text{can}}/\tilde{G}$ .

Каноническая модель  $X_{\text{can}}$  поверхности  $X$  является накрытием Галуа плоскости  $\mathbb{P}^2$  с группой Галуа  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , разветвленным вдоль тех же прямых.

Заметим, что в приведенных выше утверждениях выбор уравнений и накрытия не являются произвольным.

**1.2. Несколько основных фактов о накрытиях Галуа.** Напомним, что накрытие Галуа гладкого алгебраического многообразия  $Y$  – это конечный морфизм  $h: X \rightarrow Y$  нормального алгебраического многообразия  $X$  в  $Y$  такой, что вложение  $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(X)$  полей функций, индуцированное морфизмом  $h$ , является расширением Галуа. Как хорошо известно, конечный морфизм  $h: X \rightarrow Y$  является накрытием Галуа с группой Галуа  $G$  тогда и только тогда, когда  $G$  совпадает с группой покрывающих преобразований и последняя действует транзитивно на каждом слое морфизма  $h$ . Кроме того, конечное разветвленное накрытие является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда неразветвленная часть накрытия (т.е. ограничение накрытия на дополнения к ветвлению внизу и наверху) является накрытием Галуа. Разветвленное накрытие определяется однозначно с точностью до изоморфизма его неразветвленной частью. Более того, морфизм накрытий Галуа из неразветвленной части  $U_1 \rightarrow V_1$  одного из разветвленных накрытий  $h_1: X_1 \rightarrow Y_1$  (где  $U_1 \subset X_1$  и  $V_1 \subset Y_1$ ) в неразветвленную часть  $U_2 \rightarrow V_2$  другого накрытия  $h_2: X_2 \rightarrow Y_2$  (где  $U_2 \subset X_2$  и  $V_2 \subset Y_2$ ) индуцирует морфизм покрывающих многообразий  $X_1 \rightarrow X_2$ , если задано продолжение  $Y_1 \rightarrow Y_2$  морфизма подлежащих многообразий  $V_1 \rightarrow V_2$  на ветвление. Напомним также, что неразветвленное накрытие является накрытием Галуа с группой Галуа  $G$  тогда и только тогда, когда оно является накрытием, ассоциированным с эпиморфизмом из фундаментальной группы подлежащего многообразия в группу  $G$ , и, в частности, накрытия Галуа с абелевой группой Галуа  $G$  находятся во взаимно однозначном соответствии с эпиморфизмами в  $G$  из первой группы гомологий с целыми коэффициентами. Все эти результаты являются хорошо известными и их наиболее нетривиальная часть может быть получена, например, из теоремы существования Грауэрта–Реммерта [12].

Далее мы будем рассматривать накрытия Галуа с группой Галуа  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$  с точностью до изоморфизма. Два накрытия Галуа  $h_1: X_1 \rightarrow Y$  и  $h_2: X_2 \rightarrow Y$  с группами Галуа  $G_1$  и  $G_2$  являются эквивалентными, если существуют бирегулярное отображение  $f: X_1 \rightarrow X_2$  и изоморфизм  $F: G_1 \rightarrow G_2$  такие, что  $h_2 \circ f = h_1$  и  $F(g)f(x) = f(gx)$  для всех  $x \in X_1$  и  $g \in G_1$ .

**1.3. Накрытия Галуа плоскости  $\mathbb{P}^2$  с группой Галуа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ , разветвленные вдоль семи прямых.** Пусть  $\mathcal{L} = L_0 \cup \dots \cup L_6$  – конфигурация семи различных занумерованных прямых в  $\mathbb{P}^2$ . Простые петли  $\lambda_i$ ,  $0 \leq i \leq 6$ , вокруг прямых  $L_i$  порождают группу  $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^6$ . Они связаны соотношением

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_6 = 0.$$

Естественный эпиморфизм

$$\tilde{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$$

определяет некоторое накрытие Галуа плоскости  $\mathbb{P}^2$ , разветвленное в  $\mathcal{L}$ . Назовем его *универсальным* и обозначим через  $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Следующее утверждение, которое является непосредственным следствием общих результатов о разветвленных накрытиях, упомянутых в п. 1.2, уточняет, в частности, в каком смысле это накрытие является универсальным.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Накрытия Галуа с группой Галуа  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ , разветвленные вдоль  $\mathcal{L}$ , существуют тогда и только тогда, когда  $k \leq 6$ . Их классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с эпиморфизмами  $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}) \rightarrow G$ , рассматриваемыми с точностью до автоморфизмов группы  $G$ . Если  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$  является накрытием Галуа с группой Галуа  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ , разветвленным вдоль  $\mathcal{L}$ , то существует такое накрытие Галуа  $h: \tilde{Y} \rightarrow Y$ , что  $\tilde{g} = g \circ h$ .*

Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что универсальное накрытие Галуа  $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$  ассоциировано с эпиморфизмом  $\tilde{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ , отображающим  $\lambda_0$  в  $(1, \dots, 1)$  и отображающим  $\lambda_i$  при  $1 \leq i \leq 6$  в  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте.

Пусть  $(v_1, v_2)$  – аффинные координаты в  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_0$  и  $l_i(v_1, v_2) = 0$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , – линейные уравнения прямых  $L_i \cap \mathbb{C}^2$ . Поле функций  $K_u = \mathbb{C}(\tilde{Y})$  многообразия  $\tilde{Y}$  является абелевым расширением  $\mathbb{C}(\tilde{Y}) = \mathbb{C}(v_1, v_2, w_1, \dots, w_6)$  степени  $2^6$  поля функций  $K = \mathbb{C}(v_1, v_2)$  плоскости  $\mathbb{P}^2$ , заданным соотношениями  $w_i^2 = l_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . (Другими словами, прообраз многообразия  $\mathbb{P}^2 \setminus L_0$  в  $\tilde{Y}$  естественным образом изоморфен аффинному подмногообразию в  $\mathbb{C}^8$ , заданному в аффинных координатах  $v_1, v_2, w_1, \dots, w_6$  уравнениями  $w_1^2 = l_1, \dots, w_6^2 = l_6$ .)

Действие элемента  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_6) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  на  $K_u$  задается формулой

$$\gamma(w^a) = (-1)^{(\gamma, a)} w^a,$$

где

$$w^a = \prod_{i=1}^6 w_i^{a_i}$$

для каждого мультииндекса  $a = (a_1, \dots, a_6)$ ,  $0 \leq a_i \leq 1$ . Следовательно,  $\text{Gal}(K_u/\mathbb{C}(v_1, v_2)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  и

$$K_u = \bigoplus_{0 \leq a_i \leq 1} \mathbb{C}(v_1, v_2) w^a$$

является разложением векторного пространства  $K_u$  над  $\mathbb{C}(v_1, v_2)$  в конечную прямую сумму представлений группы  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  степени 1.

Пусть  $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$  – эпиморфизм, заданный формулами  $\varphi(\lambda_i) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k})$ , где  $a_{0,j} + \dots + a_{6,j} \equiv 0 \pmod{2}$  для всех  $j = 1, \dots, k$ , и пусть  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$  – накрытие Галуа, ассоциированное с  $\varphi$ . Это накрытие разветвлено в объединении  $\mathcal{L}^\varphi$  прямых  $L_i \subset \mathcal{L}$  с  $\varphi(\lambda_i) \neq 0$ . Эпиморфизм  $\varphi$  пропускается через однозначно определенный эпиморфизм  $\psi: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ , так что согласно предложению 1 накрытие  $g$  пропускается через однозначно определенное накрытие Галуа  $h: \tilde{Y} \rightarrow Y$ . Отсюда имеем вложение  $h^*: \mathbb{C}(Y) \rightarrow K_u$  поля функций  $\mathbb{C}(Y)$  многообразия  $Y$  в поле функций  $K_u = \mathbb{C}(\tilde{Y})$ . Ясно,

что  $\text{Gal}(K_u/h^*(\mathbb{C}(Y))) = \ker \psi$ , поле  $h^*(\mathbb{C}(Y))$  совпадает с подполем  $K_\varphi = \mathbb{C}(v_1, v_2, u_1, \dots, u_k)$  поля  $K_u$ , где

$$u_j = w_1^{a_{1,j}} \cdot \dots \cdot w_6^{a_{6,j}}, \tag{2}$$

$$\text{Gal}(K_u/K_\varphi) = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_6) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6 \mid \sum_{i=1}^6 a_{i,j} \gamma_i \equiv 0 \pmod{2}, 1 \leq j \leq k \right\}.$$

**1.4. Разрешение особенностей многообразия  $Y$ .** По построению  $Y$  является нормальной поверхностью с изолированными особенностями. Особые точки поверхности  $Y$  могут появляться только над  $r$ -кратными точками конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi$  с  $r \geq 2$ , т. е. над точками, принадлежащими в точности  $r$  прямым  $L_{i_1}, \dots, L_{i_r} \in \mathcal{L}$  с  $\varphi(\lambda_{i_k}) \neq 0, 1 \leq k \leq r$ .

ЛЕММА 1 (см., например, [15]). *Если  $p = L_{i_1} \cap L_{i_2}$  является двукратной точкой конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi$  и  $\varphi(\lambda_{i_1}) \neq \varphi(\lambda_{i_2})$ , то  $Y$  неособа в каждой точке прообраза  $g^{-1}(p)$ .*

Скажем, что  $r$ -кратная точка  $p_{i_1, \dots, i_r}$  конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi$  не является *точкой ветвления относительно  $\varphi$* , если  $\sum_{j=1}^r \varphi(\lambda_{i_j}) = 0$ .

Чтобы разрешить особые точки поверхности  $Y$ , сделаем вначале подходящее раздутие плоскости  $\mathbb{P}^2$ . Во-первых, раздую все двукратные точки, которые не являются точками ветвления, и все  $r$ -кратные точки конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi$  при  $r \geq 3$ . Во-вторых, для каждой пары  $(p_{i_1, \dots, i_r}, k)$  такой, что  $p_{i_1, \dots, i_r}$  является  $r$ -кратной точкой конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi, 1 \leq k \leq r$  и  $\sum_{j=1}^r \varphi(\lambda_{i_j}) = \varphi(\lambda_{i_k})$ , осуществим раздутие с центром в точке пересечения собственного прообраза прямой  $L_{i_k}$  с исключительным дивизором  $E_{i_1, \dots, i_r}$  раздутия точки  $p_{i_1, \dots, i_r}$ , произведенного в первой серии раздутий. Обозначим через  $\sigma: \widehat{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$  композицию описанных выше раздутий.

Через  $L'_i \subset \widehat{\mathbb{P}^2}$  обозначим собственный прообраз прямой  $L_i$ , через  $E'_p$  для  $p = p_{i_1, \dots, i_r}$  – собственный прообраз исключительной кривой  $E_{i_1, \dots, i_r}$ , через  $E_{p, i_k}$  – исключительные кривые второй серии раздутий и через  $\varepsilon_p, \varepsilon_{p, i_k} \in H_1(\widehat{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(\mathcal{L}^\varphi), \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}^\varphi, \mathbb{Z})$  – простые петли вокруг кривых  $E'_p$  и  $E_{p, i_k}$  соответственно.

Отождествление  $H_1(\widehat{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(\mathcal{L}^\varphi), \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}^\varphi, \mathbb{Z})$  и эпиморфизм  $\varphi$  задают эпиморфизм  $\widehat{\varphi}: H_1(\widehat{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(\mathcal{L}^\varphi), \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ . Рассмотрим ассоциированное с ним накрытие Галуа  $f: X \rightarrow \widehat{\mathbb{P}^2}$ .

ЛЕММА 2 [15]. *Пусть  $p = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$  –  $r$ -кратная точка конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi, r \geq 2$ . Тогда:*

- (i)  $\varepsilon_p = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}$ ;
- (ii)  $\varepsilon_{p, i_k} = \lambda_{i_k} + \sum_{j=1}^r \lambda_{i_j}$ ;
- (iii)  $\varphi(\varepsilon_{p, i_k}) = 0$ .

Следующая теорема является прямым следствием лемм 1 и 2.

ТЕОРЕМА 2. *Накрытия Галуа  $f$  и  $g$  могут быть включены в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\nu} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \widehat{\mathbb{P}^2} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

в которой  $\nu: X \rightarrow Y$  является разрешением особенностей многообразия  $Y$ .

ЛЕММА 3. *Предположим, что группа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  является группой Галуа накрытия  $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Тогда точка  $q \in Y$ , лежащая над  $r$ -кратной точкой  $p = p_{i_1, \dots, i_r} = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$  конфигурации  $\mathcal{L}^\varphi$ , не является канонической особой точкой (т. е.  $q$  не является  $A$ - $D$ - $E$ -особенностью) тогда и только тогда, когда либо  $r > 3$ , либо  $r = 3$  и  $p$  не является точкой ветвления эпиморфизма  $\varphi$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим тип особой точки по ее разрешению, данному морфизмом  $\nu: X \rightarrow Y$  (см. теорему 2).

Если  $r = 2$  и  $\varphi(\lambda_1) \neq \varphi(\lambda_2)$ , то согласно лемме 1 каждая точка  $q \in g^{-1}(p)$  является неособой точкой многообразия  $Y$ . Если, с другой стороны,  $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2)$ , то накрытие  $f: X \rightarrow \widehat{\mathbb{P}^2}$  не ветвится в  $E'_p$  и над  $E'_p$  распадается на четыре копии двойных накрытий Галуа прямой  $\mathbb{P}^1$ , разветвленных в двух точках, поэтому каждая из четырех точек  $q \in g^{-1}(p)$  заменяется в разрешении на рациональную кривую с индексом самопересечения  $\frac{(-1) \cdot 8}{4} = -2$ . Следовательно, в этом случае все эти четыре точки являются особыми точками типа  $A_1$ .

Если  $r = 3$  и  $p$  не является точкой ветвления, то с точностью до замены координат в  $G$  имеем  $\varphi(\lambda_{i_1}) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_{i_2}) = (0, 1, 0)$  и  $\varphi(\lambda_{i_3}) = (1, 1, 0)$ . Поэтому  $f^{-1}(E'_p)$  является несвязным объединением двух рациональных кривых  $C_1$  и  $C_2$  с индексами самопересечений  $\frac{(-1) \cdot 8}{2} = -4$ . Следовательно, особые точки  $q \in g^{-1}(p)$  не являются каноническими.

Теперь предположим, что  $r = 3$ ,  $p$  является точкой ветвления и  $\varphi(\lambda_{i_1})$ ,  $\varphi(\lambda_{i_2})$ ,  $\varphi(\lambda_{i_3})$  попарно различны. (Отметим, что для точки ветвления последнее предположение эквивалентно условию

$$\sum_{j=1}^3 \varphi(\lambda_{i_j}) \neq \varphi(\lambda_{i_k})$$

для  $1 \leq k \leq 3$ .) В этом случае после замены координат в  $G$  мы можем предполагать, что  $\varphi(\lambda_{i_1}) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_{i_2}) = (0, 1, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_{i_3}) = (0, 0, 1)$ . Поэтому для  $E'_p$  имеем накрытие Галуа над  $E'_p = \mathbb{P}^1$  с группой Галуа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  и с тремя точками ветвления. Таким образом,  $f^{-1}(E'_p)$  является рациональной кривой с индексом самопересечения  $\frac{(-1) \cdot 8}{4} = -2$ . Следовательно, точка  $q = g^{-1}(p)$  является особой точкой типа  $A_1$ .

Исследуем случай, когда  $r \geq 3$  и существует по крайней мере одно  $k$  такое, что  $\sum_{j=1}^r \varphi(\lambda_{i_j}) = \varphi(\lambda_{i_k})$ . В этом случае имеем:  $p$  является точкой ветвления,  $\sigma^{-1}(p) = E'_p + \sum_{j=1}^s E'_{p,k_j}$ , где  $(E'_p)^2 = -(s+1)$  и  $(E'_{p,k_1})^2 = \dots = (E'_{p,k_s})^2 = -1$ ,  $E'_p$  является кривой ветвления морфизма  $f$ , а  $E'_{p,k_1}, \dots, E'_{p,k_s}$  не являются кривыми ветвления морфизма  $f$ . Следовательно, каждый прообраз  $f^{-1}(E_{p,k_j})$ ,  $1 \leq j \leq s$ , распадается в несвязное объединение четырех  $(-2)$ -кривых, в то время как  $f^*(E'_p) = 2C_1 + \dots + 2C_{2^n}$ , где  $2^n$  – индекс в  $G$  подгруппы  $G_{i_1, \dots, i_r}$ , порожденной элементами  $\varphi(\lambda_{i_1}), \dots, \varphi(\lambda_{i_r})$ , а  $C_1, \dots, C_{2^n}$  – копии накрытий Галуа кривой  $E'_p$  степени  $2^{2^n}$  (напомним, что  $\text{deg } f = 8$ ), разветвленных в  $r-s$  точках. Таким образом, для каждого  $i = 1, \dots, 2^n$  имеем

$$(C_i^2)_X = -2^{1-n}(s+1),$$

$$g(C_i) = 2^{-n}(r-s) - 2^{2-n} + 1 = 2^{-n}(r-s-4) + 1,$$

где  $0 \leq n \leq 2$ . Если прообраз  $g^{-1}(p)$  состоит из канонических особенностей, то  $(C_i^2)_X = -2$  и  $g(C_i) = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} 2^{1-n}(s+1) &= 2, \\ 2^{-n}(r-s-4) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Решениями этой системы являются только  $n = 1, s = 1, r = 3$  и  $n = 2, s = 3, r = 3$ . В первом случае  $g^{-1}(p)$  распадается на две особые точки типа  $A_3$ , а во втором случае прообраз распадается на четыре особые точки типа  $D_4$ .

В последнем неразобранном случае, когда  $r \geq 4$  и  $\sum_{j=1}^r \varphi(\lambda_{i_j}) \neq \varphi(\lambda_{i_k})$  при  $1 \leq k \leq r$ , прообраз  $f^{-1}(E'_p)$  распадается на несколько копий  $2^m$ -листного накрытия Галуа  $C \rightarrow \mathbb{P}^1 = E'_p$ , разветвленного в  $r$  точках, где  $m \geq 1$ . Согласно формуле Гурвица имеем

$$g(C) = 2^{m-2}r - 2^m + 1 \geq 1.$$

Следовательно, особые точки  $q \in g^{-1}(p)$  не являются каноническими.

**ЛЕММА 4.** *Предположим, что группа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  является группой Галуа накрытия  $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$  и что конфигурация прямых  $\mathcal{L} = L_0 \cup \dots \cup L_6$  не имеет  $r$ -кратных особых точек при  $r \geq 4$ . Если  $\varphi(\lambda_i) \neq 0$  для  $0 \leq i \leq 6$  и имеются две не совпадающие друг с другом прямые  $L_{i_1}$  и  $L_{i_2}$ , для которых  $\varphi(\lambda_{i_1}) = \varphi(\lambda_{i_2})$ , то  $p_g(X) \neq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из равенства (2) следует, что поверхность  $Y$  может быть задана уравнениями

$$u_j^2 = \prod_{i=0}^6 l_i(v_1, v_2)^{a_{i,j}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}) = \varphi(\lambda_i)$ . Поскольку  $\varphi$  является эпиморфизмом в  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , то найдется не более четырех прямых с равными значениями эпиморфизма  $\varphi$ . Следовательно, с точностью до перенумерации прямых и “подкручивания” эпиморфизма  $\varphi$  на автоморфизм группы  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  имеют место четыре случая:

1) четыре равных значения:  $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_3) = \varphi(\lambda_4) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_5) = (0, 1, 0)$  и  $\varphi(\lambda_6) = (0, 0, 1)$ ;

2) три равных значения:  $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_3) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_4) = (0, 1, 0)$  и  $\varphi(\lambda_5) = (0, 0, 1)$ ;

3) две пары равных значений:  $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_3) = \varphi(\lambda_4) = (0, 1, 0)$  и  $\varphi(\lambda_5) = (0, 0, 1)$ ;

4) одна пара равных значений:  $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_3) = (0, 1, 0)$ ,  $\varphi(\lambda_4) = (0, 0, 1)$ , в то время как  $\varphi(\lambda_i)$  при  $i \in \{0, 5, 6\}$  не равны друг другу и не равны  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

В первых трех случаях функция  $u = u_1 u_2 u_3 \in \mathbb{C}(Y)$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$u^2 = l_1(v_1, v_2) \dots l_5(v_1, v_2) l_6(v_1, v_2)^a, \quad (3)$$

где  $a = 0$  или  $a = 1$  (в первом случае  $a = 1$ ). Это уравнение определяет двойное накрытие  $Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ , разветвленное в шести прямых  $(L_1, \dots, L_6)$ , если  $a = 1$ ,



и  $L_1, \dots, L_5, L_0$ , если  $a = 0$ ). Поскольку линейная конфигурация не имеет  $r$ -кратных точек при  $r \geq 4$ , то  $Z$  имеет только канонические особенности и, следовательно, эта поверхность является КЗ-поверхностью, а значит, ее геометрический род  $p_g(Z) = 1$ . Теперь неравенство  $p_g(X) \geq 1$  следует из существования рационального доминантного отображения из  $X$  в  $Z$ .

Для завершения доказательства заметим, что четвертый случай не возможен. Действительно, никакие три различных элемента из множества  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 1)$  не удовлетворяют соотношению  $\varphi(\lambda_0) + \varphi(\lambda_5) + \varphi(\lambda_6) = (0, 1, 1)$ .

**1.5. Поверхности Кампеделли как накрытия Галуа, разветвленные над конфигурациями Кампеделли.** Пусть  $\mathcal{L}$  – конфигурация прямых в  $\mathbb{P}^2$ , состоящая из семи различных прямых  $L_\alpha$ , занумерованных ненулевыми элементами  $\alpha \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Назовем такую занумерованную конфигурацию  $\mathcal{L}$  *конфигурацией Кампеделли*, если она не имеет ни  $r$ -кратных точек при  $r \geq 4$ , ни тройных точек  $p_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = L_{\alpha_1} \cap L_{\alpha_2} \cap L_{\alpha_3}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ . Скажем, что конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L} = \sum L_\alpha$  получена из конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}' = \sum L'_\alpha$  с помощью *перенумерации*, если существует такой автоморфизм  $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , что  $L_\alpha = L'_{\tau(\alpha)}$  для всех  $\alpha \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \setminus \{0\}$ .

Если конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  задана, то можно рассмотреть накрытие Галуа  $Y(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{P}^2$  с группой Галуа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , разветвленное в  $\mathcal{L}$  и определяемое эпиморфизмом  $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , заданным формулой  $\varphi(\lambda_\alpha) = \alpha$ . Назовем это накрытие *накрытием Галуа, разветвленным над конфигурацией Кампеделли  $\mathcal{L}$* . Очевидно, что перенумерация прямых конфигурации Кампеделли определяет эквивалентное накрытие.

**ТЕОРЕМА 3.** *Для любой поверхности Кампеделли  $X$  существует конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  такая, что  $X_{\text{can}} = Y(\mathcal{L})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно следствию 1 для заданной поверхности Кампеделли  $X$  существует конфигурация  $\mathcal{L}$ , состоящая из семи прямых в  $\mathbb{P}^2$  и такая, что  $X_{\text{can}}$  является  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ -накрытием Галуа плоскости  $\mathbb{P}^2$ , разветвленным в  $\mathcal{L}$ . Поскольку  $X_{\text{can}}$  имеет только канонические особенности, то из леммы 3 следует, что  $\mathcal{L}$  не имеет ни  $r$ -кратных точек при  $r \geq 4$ , ни трехкратных точек, которые не являются точками ветвления. Теперь, применяя лемму 4, получаем, что  $\mathcal{L}$  является конфигурацией Кампеделли.

Следующее обратное утверждение доказано в работе [17].

**ТЕОРЕМА 4 [17].** *Для каждой конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  поверхность  $Y(\mathcal{L})$  изоморфна канонической модели некоторой поверхности Кампеделли.*

Если конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек, то согласно лемме 1 поверхность  $Y(\mathcal{L})$  неособа (тем самым она сама является поверхностью Кампеделли,  $X = X_{\text{can}}$ ) и может быть вложена во взвешенное проективное пространство

$$\mathbb{P}_w^9 = \mathbb{P}^9(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

с тремя координатами  $z_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , веса один и семью координатами  $u_\alpha$ ,  $\alpha \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \setminus \{0\}$ , веса два. Именно, согласно результатам п. 1.3 поверх-

ность  $Y(\mathcal{L})$  изоморфна каждой из шестнадцати неприводимых компонент поверхности в  $\mathbb{P}_w^9$ , заданной уравнениями

$$\begin{aligned}
 u_{(1,0,0)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(1,1,0)}l_{(1,0,1)}l_{(1,1,1)}, \\
 u_{(0,1,0)}^2 &= l_{(0,1,0)}l_{(1,1,0)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}, \\
 u_{(0,0,1)}^2 &= l_{(0,0,1)}l_{(0,1,1)}l_{(1,0,1)}l_{(1,1,1)}, \\
 u_{(1,1,0)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(0,1,0)}l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)}, \\
 u_{(1,0,1)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(0,0,1)}l_{(1,1,0)}l_{(0,1,1)}, \\
 u_{(0,1,1)}^2 &= l_{(0,1,0)}l_{(0,0,1)}l_{(1,0,1)}l_{(1,1,0)}, \\
 u_{(1,1,1)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(0,1,0)}l_{(0,0,1)}l_{(1,1,1)},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $l_\alpha(z_0, z_1, z_2) = 0$  – линейные уравнения прямых  $L_\alpha \subset \mathcal{L}$  в  $\mathbb{P}^2$ . Чтобы выбрать одну из компонент, добавим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 u_{(1,1,0)} &= \frac{u_{(1,0,0)}u_{(0,1,0)}}{l_{(1,1,0)}l_{(1,1,1)}}, & u_{(1,0,1)} &= \frac{u_{(1,0,0)}u_{(0,0,1)}}{l_{(1,0,1)}l_{(1,1,1)}}, \\
 u_{(0,1,1)} &= \frac{u_{(0,1,0)}u_{(0,0,1)}}{l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}}, & u_{(1,1,1)} &= \frac{u_{(1,0,0)}u_{(0,1,0)}u_{(0,0,1)}}{l_{(1,1,0)}l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

(чтобы иметь более удобный для дальнейших исследований вид, эти уравнения записаны не в полиномиальной форме).

Отметим также, что если  $\mathcal{L}'$  получена из  $\mathcal{L}$  с помощью перенумерации прямых конфигурации  $\mathcal{L}$ , заданной автоморфизмом  $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , то эта перенумерация (для того чтобы сохранить вид уравнений (4) и (5)) определяет перенумерацию функций  $u_\alpha$  с помощью автоморфизма  $\tau^{-1}$ .

**1.6. Пространство модулей поверхностей Кампеделли.** Отождествим пространство модулей поверхностей Кампеделли с пространством модулей конфигураций Кампеделли. Здесь и далее мы применяем к поверхностям Кампеделли следующее общее свойство поверхностей общего типа: изоморфизмы между ними (соответственно, их автоморфизмы) находятся во взаимно однозначном соответствии с изоморфизмами (соответственно, автоморфизмами) их канонических моделей.

Как и выше, пусть накрытие Галуа  $g: Y(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{P}^2$  с группой Галуа  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  разветвлено вдоль конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L} = \sum L_\alpha$ , где сумма взята по всем  $\alpha \in G$ ,  $\alpha \neq 0$ , и определяется эпиморфизмом  $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G$  таким, что  $\varphi(\lambda_\alpha) = \alpha$ . Обозначим через  $X = X(\mathcal{L})$  минимальную модель поверхности  $Y(\mathcal{L})$ , построенную в п. 1.4. Поскольку  $\mathcal{L}$  не имеет ни  $r$ -кратных точек при  $r \geq 4$ , ни тройных точек  $p_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = L_{\alpha_1} \cap L_{\alpha_2} \cap L_{\alpha_3}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ , то построение сводится к композиции  $\sigma: \widehat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  раздутий с центрами во всех тройных точках конфигурации  $\mathcal{L}$  с последующим накрытием  $f: X(\mathcal{L}) \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$ , индуцированным подъемом  $\widehat{\varphi}$  эпиморфизма  $\varphi$ .

Обозначим через  $f_\sigma$  композицию  $f_\sigma = \sigma \circ f: X(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

**ЛЕММА 5 [17].** *Биканоническая система  $|2K_X|$  поверхности  $X = X(\mathcal{L})$  совпадает с  $|f_\sigma^*L|$ , где  $L \subset \mathbb{P}^2$  – некоторая прямая в  $\mathbb{P}^2$ .*

Следующая лемма является прямым следствием предложения 1.

ЛЕММА 6. Пусть  $\mathcal{L}_1 = \sum_{i=1}^7 L_{1,\alpha_i}$  и  $\mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^7 L_{2,\beta_i}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ,  $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ , – две конфигурации Кампеделли в  $\mathbb{P}^2$  такие, что  $L_{1,\alpha_i} = L_{2,\beta_i}$  для  $i = 1, \dots, 7$ . Накрытия Галуа  $Y(\mathcal{L}_1) \rightarrow \mathbb{P}^2$  и  $Y(\mathcal{L}_2) \rightarrow \mathbb{P}^2$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\mathcal{L}_1$  может быть получена из  $\mathcal{L}_2$  с помощью перенумерации прямых.

ТЕОРЕМА 5. Пусть  $X_{1,\text{can}} = Y(\mathcal{L}_1)$  и  $X_{2,\text{can}} = Y(\mathcal{L}_2)$  – два накрытия Галуа  $g_i: X_{i,\text{can}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ , разветвленные вдоль конфигураций Кампеделли  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . Если  $X_{1,\text{can}}$  и  $X_{2,\text{can}}$  изоморфны, то любой изоморфизм  $\nu: X_{1,\text{can}} \rightarrow X_{2,\text{can}}$  может быть включен в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_{1,\text{can}} & \xrightarrow{\nu} & X_{2,\text{can}} \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разрешения  $X_i = X(\mathcal{L}_i)$  особенностей многообразий  $X_{i,\text{can}} = Y(\mathcal{L}_i)$ , соответствующие морфизмы  $f_i: X_i \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$  и композиции морфизмов  $f_{\sigma,i} = \sigma \circ f_i: X_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Как было упомянуто выше, поскольку  $X_i$  являются поверхностями общего типа, любой изоморфизм  $X_{1,\text{can}} \rightarrow X_{2,\text{can}}$  между их каноническими моделями поднимается до изоморфизма  $X_1 \rightarrow X_2$ ; верно и обратное утверждение. Таким образом, для заданного изоморфизма  $\nu: X_1 \rightarrow X_2$  достаточно найти проективное преобразование  $\psi$  такое, что  $\psi \circ f_{\sigma,1} = f_{\sigma,2} \circ \nu$ . Более того, последнее соотношение будет следовать из соответствующего соотношения между индуцированными отображениями полей функций:  $\nu^* \circ f_{\sigma,2}^* = f_{\sigma,1}^* \circ \psi^*$ .

Как и для произвольной поверхности Кампеделли, подгруппа кручения  $\text{Tors}(X_i)$  группы  $H^2(X_i, \mathbb{Z})$  является 2-периодической и изоморфна группе  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Для любого заданного элемента  $\alpha \in \text{Tors}(X_i)$ ,  $\alpha \neq 0$ , из двойственности Серра

$$\dim H^2(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(K_{X_i} + \alpha)) = \dim H^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(\alpha)) = 0$$

и теоремы Римана–Роха следует, что линейная система  $|K_{X_i} + \alpha|$  не пуста. Следовательно, найдется по крайней мере один эффективный дивизор  $D_\alpha \in |K_{X_i} + \alpha|$  такой, что  $2D_\alpha \in |2K_{X_i}|$ . Поскольку  $X_i$  – минимальные модели поверхностей общего типа, то

$$\dim H^0(X_i, \mathcal{O}(2K_{X_i})) = K_{X_i}^2 + 1 = 3.$$

С другой стороны,  $\dim H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(L)) = 3$ , где  $L$  – некоторая прямая в  $\mathbb{P}^2$ . Применяя лемму 5, имеем  $|2K_{X_i}| = |f_\sigma^*(L)|$ . Окончательно,  $|2K_{X_i}| = f_{\sigma,i}^*(|L|)$  и  $D \in |K_{X_i} + \alpha|$  для некоторого  $\alpha \in \text{Tors}(X_i)$  тогда и только тогда, когда  $2D = f_{\sigma,i}^*(\tilde{L})$  для некоторой прямой  $\tilde{L} \in |L|$ .

Прямые  $\tilde{L} \in |L|$ , для которых дивизоры  $f_{\sigma,i}^*(\tilde{L})$  делятся на 2, – это в точности семь прямых ветвления, принадлежащих конфигурации  $\mathcal{L}_i$ . Следовательно, они дают все различные элементы кручения и могут быть перенумерованы этими элементами кручения так, что  $\mathcal{L}_i = \sum L_{i,\alpha}$ , где сумма берется по всем ненулевым элементам кручения, и  $\frac{1}{2}f_{\sigma,i}^*(L_{i,\alpha}) = D_{i,\alpha} \in |K_{X_i} + \alpha|$ . (Отметим, что эта нумерация прямых может не совпадать с первоначальной нумерацией.)

Пусть  $\nu: X_1 \rightarrow X_2$  является изоморфизмом. Он индуцирует изоморфизм групп кручения  $\nu^*: \text{Tors}(X_2) \rightarrow \text{Tors}(X_1)$  и изоморфизмы линейных систем

$$\nu^*: H^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(K_{X_2} + \alpha)) \rightarrow H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(K_{X_1} + \nu^*(\alpha)))$$

для каждого  $\alpha \in \text{Tors}(X_2)$ . Следовательно,  $\nu^*(D_{2,\alpha}) = D_{1,\nu^*(\alpha)}$  для любого  $\alpha \in \text{Tors}(X_2)$ ,  $\alpha \neq 0$ , и мы получаем, что

$$\begin{aligned} \nu^*(f_{\sigma,2}^*(L_{2,\alpha_1} - L_{2,\alpha_2})) &= \nu^*(2D_{2,\alpha_1} - 2D_{2,\alpha_2}) \\ &= 2D_{1,\nu^*(\alpha_1)} - 2D_{1,\nu^*(\alpha_2)} = f_{\sigma,1}^*(L_{1,\nu^*(\alpha_1)} - L_{1,\nu^*(\alpha_2)}) \end{aligned}$$

для всех ненулевых элементов  $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Tors}(X_2)$ . Поскольку любая рациональная функция определяется однозначно с точностью до умножения на константу своим дивизором нулей и полюсов, то существует такая система констант  $c_{\alpha_1, \alpha_2}$ , что

$$\nu^* \left( f_{\sigma,2}^* \left( \frac{l_{2,\alpha_1}(v_1, v_2)}{l_{2,\alpha_2}(v_1, v_2)} \right) \right) = c_{\alpha_1, \alpha_2} f_{\sigma,1}^* \left( \frac{l_{1,\nu^*(\alpha_1)}(v_1, v_2)}{l_{1,\nu^*(\alpha_2)}(v_1, v_2)} \right), \quad (6)$$

где  $v_1, v_2$  – аффинные координаты в  $\mathbb{P}^2$  и  $l_{2,\alpha}, l_{1,\beta}$  – линейные уравнения соответствующих прямых. Так как функции  $f_{\sigma,i}^* \left( \frac{l_{i,\alpha_1}(v_1, v_2)}{l_{i,\alpha_2}(v_1, v_2)} \right)$  порождают подполя  $f_{\sigma,i}^*(\mathbb{C}(\mathbb{P}^2))$  полей  $\mathbb{C}(X_i)$ , то соотношения (6) влекут существование проективного преобразования  $\psi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  такого, что  $f_{\sigma,1}^* \circ \psi^* = \nu^* \circ f_{\sigma,2}^*$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Если  $X = X(\mathcal{L})$ , где  $\mathcal{L}$  – общая конфигурация Кампеделли, то  $\text{Aut}(X) = \text{Gal}(Y(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{P}^2) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ .

Обозначим через  $\mathcal{P} = \mathbb{P}^2 \times \dots \times \mathbb{P}^2$  произведение семи копий проективной плоскости. Мы будем рассматривать каждый множитель этого произведения как двойственную проективную плоскость, так что элементы каждого множителя соответствуют прямым проективной плоскости  $\mathbb{P}^2$ . Кроме того, занумеруем множители произведения  $\mathcal{P}$  ненулевыми элементами  $\alpha \in G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Пусть  $D$  – объединение всех диагоналей в  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} T_3 &= \{ \mathcal{L} \in \mathcal{P} \mid \exists \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3} \text{ такие, что} \\ &\quad \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} = 0 \text{ и } L_{\alpha_{i_1}} \cap L_{\alpha_{i_2}} \cap L_{\alpha_{i_3}} \neq \emptyset \}, \\ T_4 &= \{ \mathcal{L} \in \mathcal{P} \mid \exists \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4} \text{ такие, что} \\ &\quad L_{\alpha_{i_1}} \cap L_{\alpha_{i_2}} \cap L_{\alpha_{i_3}} \cap L_{\alpha_{i_4}} \neq \emptyset \}. \end{aligned}$$

Группа  $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{Aut } G$  действует на  $\mathcal{P} \setminus (D \cup T_3 \cup T_4)$  следующим образом:  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  действует естественным образом на каждом множителе произведения  $\mathcal{P}$ , а элементы  $h$  группы  $\text{Aut } G$  переставляют множители,  $h: \mathbb{P}^2_\alpha \rightarrow \mathbb{P}^2_{h(\alpha)}$ .

Следующая теорема является следствием из леммы 6 и теорем 3–5.

**ТЕОРЕМА 6.** Пространство модулей  $\mathcal{M}$  поверхностей Кампеделли изоморфно факторпространству

$$(\mathcal{P} \setminus (D \cup T_3 \cup T_4)) / (\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{Aut } G).$$

Отметим, что в качестве следствия мы получаем, что все поверхности Кампеделли являются деформационно эквивалентными.

## § 2. Вещественные поверхности Кампеделли

**2.1. Расширение группы автоморфизмов.** Для произвольного комплексного пространства  $X$  обозначим через  $\text{Kl} = \text{Kl}(X)$  группу всех голоморфных и антиголоморфных биекций  $X \rightarrow X$ . Напомним, что согласно определению антиголоморфное отображение  $X \rightarrow X$  можно рассматривать как голоморфное отображение  $X \rightarrow \bar{X}$ , где  $\bar{X}$  – комплексно-сопряженное с  $X$  пространство.

Отметим (ср. с п. 1.6), что для любой минимальной поверхности  $X$  общего типа группы  $\text{Kl}(X)$  и  $\text{Kl}(X_{\text{can}})$  естественным образом изоморфны друг другу. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять их, если это не будет приводить к недоразумениям.

Ясно, что если  $\text{Kl}$  содержит по крайней мере один антиголоморфный элемент, то голоморфные элементы образуют в  $\text{Kl}$  подгруппу  $\text{Aut} = \text{Aut}(X)$  индекса 2. Другими словами, существует короткая точная последовательность  $1 \rightarrow \text{Aut} \rightarrow \text{Kl} \rightarrow H \rightarrow 1$ , где  $H$  изоморфно либо группе  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , либо тривиальной группе. Обозначим через  $\text{kl}: \text{Kl} \rightarrow H$  гомоморфизм в этой последовательности.

Вещественные структуры на  $X$  – это элементы  $c \in \text{Kl}(X)$  такие, что  $\text{kl}(c) \neq 1$  и  $c^2 = \text{id}$ . Две вещественные структуры  $c_1$  и  $c_2$  называются *эквивалентными* (или *изоморфными*), если существует  $h \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $h \circ c_2 = c_1 \circ h$ . Напомним, что на проективной плоскости  $\mathbb{P}^2$  (как и на любом проективном пространстве четной размерности) любые две вещественные структуры эквивалентны посредством некоторого проективного преобразования.

**2.2. Критерий существования вещественных структур на поверхностях Кампеделли.** Для заданной поверхности Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$ , ассоциированной с конфигурацией Кампеделли  $\mathcal{L}$ , рассмотрим композицию отображений  $f_\sigma = \sigma \circ f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  и скажем, что элемент  $c_X \in \text{Kl}(X)$  *поднят* с  $\mathbb{P}^2$ , если существует такой элемент  $c_P \in \text{Kl}(\mathbb{P}^2)$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_X} & X \\ \downarrow f_\sigma & & \downarrow f_\sigma \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{c_P} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

является коммутативной.

**ТЕОРЕМА 7.** *Для любой конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  каждый элемент  $c_X \in \text{Kl}(X)$  является поднятым с  $\mathbb{P}^2$ . В частности, если  $X$  имеет вещественную структуру  $c_X$ , то существует такая вещественная структура  $c_P$  на  $\mathbb{P}^2$ , что  $c_P \circ f_\sigma = f_\sigma \circ c_X$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $c_X \in \text{Aut}(X)$ , то элемент  $c_X$  поднят с  $\mathbb{P}^2$  согласно теореме 5. Пусть  $c_X \in \text{Kl}(X)$  и  $c_X \notin \text{Aut}(X)$ . Тогда  $c_X: X \rightarrow \bar{X}$  является голоморфным изоморфизмом. Рассмотрим комплексно-сопряженное накрытие  $\bar{f}_\sigma: \bar{X} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^2$ . Согласно теореме 5 существует голоморфный изоморфизм

$c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{P}^2}$ , делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_X} & \overline{X} \\ \downarrow f_\sigma & & \downarrow \bar{f}_\sigma \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{c_P} & \overline{\mathbb{P}^2} \end{array}$$

Чтобы получить последнее утверждение, достаточно заметить, что  $c_P^2 = \text{id}$ , если  $c_X^2 = \text{id}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.** *Для любой конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2$  поверхность Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$  допускает вещественную структуру тогда и только тогда, когда для подходяще выбранной вещественной структуры  $c_P$  на  $\mathbb{P}^2$  (занумерованная) конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  является вещественной, т. е. существует такой автоморфизм (перенумерация)  $\tau: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , что  $c_P(L_\alpha) = L_{\tau(\alpha)}$  для каждого  $\alpha \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ,  $\alpha \neq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В случае вещественной конфигурации, чтобы поднять  $c_P$ , достаточно заметить, что  $c_P$  (как любая вещественная структура на  $\mathbb{P}^2$ ) имеет целую вещественную плоскость неподвижных точек, затем зафиксировать некоторую неподвижную точку в дополнении к конфигурации и отождествить точки поверхности  $X_{\text{can}}$ , не являющиеся точками ветвления, с классами путей, начинающихся в выбранной точке. В результате структура  $c_P$  и это отождествление определяют собственное действие  $c$  на  $X_{\text{can}}$ . Перенумерация, индуцированная преобразованием плоскости  $\mathbb{P}^2$ , является гомоморфизмом, так как она пропускается через действие на  $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z})$ , индуцированное этим преобразованием.

**2.3. Вещественные конфигурации Кампеделли.** Группа Галуа  $G = \text{Gal}(X/\widehat{\mathbb{P}^2}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  является подгруппой в  $\text{Aut}(X)$ . Из теоремы 7 следует, что  $G$  является нормальной подгруппой группы  $\text{Kl}(X)$  и, кроме того, согласно следствию 3  $c(L_\alpha) = L_{c\alpha c^{-1}}$  для любых  $\alpha \in G$  и  $c \in \text{Kl}(X)$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Пусть  $\mathcal{L}$  – конфигурация Кампеделли, являющаяся вещественной конфигурацией прямых относительно некоторой вещественной структуры  $c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Тогда  $\mathcal{L}$  состоит либо из семи вещественных прямых, либо из трех вещественных прямых и двух пар комплексно-сопряженных прямых. Соответственно, действие  $c_P$  на нумерации конфигурации  $\mathcal{L}$  является либо тождественным, либо не тождественным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Гомоморфизм  $\alpha \in G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \mapsto c\alpha c^{-1} \in G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , где  $c$  – вещественная структура на  $X$ , является инволюцией, и, как любая инволюция на векторном пространстве над  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , она распадается на неприводимые 1- и 2-мерные компоненты. В размерности 3 имеется только две возможности: либо инволюция является тривиальной, либо она содержит двумерную неприводимую компоненту, т. е. эта инволюция переставляет два порождающих элемента. В первом случае все  $\alpha$  являются неподвижными и, следовательно, все прямые являются вещественными. Во втором случае имеется только три неподвижных элемента и, следовательно, имеется только три вещественных прямых.

Назовем конфигурацию Кампеделли  $\mathcal{L}$  *чисто вещественной*, если она состоит из семи вещественных прямых, и *смешанно-вещественной*, если она состоит из трех вещественных прямых и двух пар комплексно-сопряженных прямых.

Для данной вещественной структуры  $c_X$  обозначим через  $\text{Kl}(X, c_X)$  подгруппу группы  $\text{Kl}(X)$ , порожденную элементами из  $G$  и элементом  $c_X$ . Если  $X = X(\mathcal{L})$  и  $\mathcal{L}$  является вещественной конфигурацией относительно вещественной структуры  $c_P$  на  $\mathbb{P}^2$ , то подгруппа  $\text{Kl}(X, c_X)$  не зависит от выбора поднятия  $c_X$  инволюции  $c_P$ , поэтому мы будем обозначать эту подгруппу через  $\text{Kl}(X, c_P)$ . Отметим, что для общей вещественной конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  имеет место  $\text{Aut } X(\mathcal{L}) = G$ , поэтому  $\text{Kl}(X) = \text{Kl}(X, c_X)$  для любой инволюции  $c_X$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Пусть  $X = X(\mathcal{L})$  – поверхность Кампеделли, ассоциированная с некоторой конфигурацией Кампеделли  $\mathcal{L}$ , являющейся вещественной относительно некоторой вещественной структуры  $c_P$ . Тогда:

(i) если  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией прямых, то  $\text{Kl}(X, c_P) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ , и если  $\mathcal{L}$  является общей чисто вещественной конфигурацией прямых, то на  $X$  существует ровно восемь различных вещественных структур;

(ii) если  $\mathcal{L}$  является смешанно-вещественной конфигурацией прямых, то  $\text{Kl}(X, c_P) \simeq D_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , где  $D_4$  – группа диэдра восьмого порядка, и если  $\mathcal{L}$  является общей смешанно-вещественной конфигурацией прямых, то на  $X$  существует ровно четыре различные вещественные структуры.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем вещественную точку  $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}$  и рассмотрим вещественную структуру  $c \in \text{Kl}(X)$ , являющуюся подъемом структуры  $c_P$  с  $\mathbb{P}^2$  на  $X$  и имеющую неподвижные точки над  $p$ . Если все прямые являются вещественными, то  $c\alpha c^{-1} = \alpha$  для любого  $\alpha \in G$  (действительно, так как  $c = \text{id}$  в каждой точке  $G$ -орбиты над точкой  $p$ , то соотношение  $c\alpha c^{-1} = \alpha$  выполнено во всех точках этой  $G$ -орбиты и, следовательно, оно выполнено всюду).

Если имеется только три вещественные прямые у рассматриваемой конфигурации, то в подходящем базисе  $e_1, e_2, e_3$  группы  $G$  (перенумерующая) инволюция  $\alpha \mapsto c\alpha c^{-1}$  действует по следующему правилу:  $e_1 \mapsto e_2$  и  $e_3 \mapsto e_3$ . Следовательно, в этом случае  $\text{Kl}(X, c_P)$  распадается в прямую сумму группы  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , порожденной элементом  $e_3$ , с некоммутативной группой порядка 8, порожденной элементами  $e_1, e_2$  и  $c$ .

Поскольку для общей конфигурации имеет место равенство  $\text{Kl}(X) = \text{Kl}(X, c_X)$ , то утверждения, касающиеся общего случая, следуют теперь из прямого перечисления антиголоморфных инволюций в группе  $\text{Kl}(X, c_P) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  и, соответственно, в  $\text{Kl}(X, c_P) \simeq D_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

**2.4. Чисто вещественные конфигурации Кампеделли.** Пусть  $\mathcal{L} = \cup L_\alpha$  – конфигурация Кампеделли, являющаяся чисто вещественной относительно вещественной структуры  $c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Выберем однородные координаты  $(z_0, z_1, z_2)$  в  $\mathbb{P}^2$  такие, что  $c_P$  в этих координатах становится стандартным комплексным сопряжением

$$c_P(z_0, z_1, z_2) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

Тогда каждая из прямых  $L_\alpha \in \mathcal{L}$ ,  $\alpha \in G \setminus \{0\}$ , задается уравнением

$$a_{\alpha,0}z_0 + a_{\alpha,1}z_1 + a_{\alpha,2}z_2 = 0$$

с вещественными коэффициентами,  $a_{\alpha,i} \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \{(z_0, z_1, z_2) \mid z_i \in \mathbb{R}\}$  вещественных точек плоскости  $\mathbb{P}^2$ . Если  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек, то  $\mathcal{L}$  делит  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  на двадцать

два многоугольника  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 22$ . Набор  $(m_3, \dots, m_7)$ , где  $m_n$  – число  $n$ -угольников  $P_i$ , называется *типом* конфигурации  $\mathcal{L}$ .

Следующее описание топологии прообраза  $n$ -угольника  $P_i$  на ассоциированной поверхности Кампеделли  $X(\mathcal{L})$  является прямым следствием построения разветвленных накрытий.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** *Для любого многоугольника  $P_i$  чисто вещественной конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  без тройных точек ее прообраз  $f^{-1}(P_i) \subset X(\mathcal{L})$  является двумерным многообразием, гомеоморфным следующему факторпространству произведения  $P_i \times G$ ,  $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ : точки  $(a, \beta)$  и  $(b, \gamma)$  отождествляются, если  $a = b \in L_\alpha$ , где  $\gamma = \beta + \alpha$ .*

Будем говорить, что треугольник  $P_i$ , ограниченный прямыми  $L_{\alpha_1}$ ,  $L_{\alpha_2}$  и  $L_{\alpha_3}$ , имеет *линейно зависимые (независимые) стороны*, если  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  линейно зависимы (независимы).

**СЛЕДСТВИЕ 4.** *Для любого  $n$ -угольника  $P_i$  чисто вещественной конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  без тройных точек:*

- (i) *эйлерова характеристика прообраза  $f^{-1}(P_i)$  равна  $8 - 2n$ ;*
- (ii)  *$f^{-1}(P_i)$  является несвязным объединением двух копий вещественной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , если  $n = 3$  и треугольник  $P_i$  имеет линейно зависимые стороны;*
- (iii)  *$f^{-1}(P_i)$  является двумерной сферой, если  $n = 3$  и треугольник  $P_i$  имеет линейно независимые стороны;*
- (iv)  *$f^{-1}(P_i)$  является связной поверхностью, если  $n = 4$ , и она является ориентируемой тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 + \dots + \alpha_4 = 0$ , где  $\alpha_j$  – номер стороны  $L_{\alpha_j}$  четырехугольника  $P_i$ ;*
- (v)  *$f^{-1}(P_i)$  является связной неориентируемой двумерной поверхностью, если  $n \geq 5$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Эйлерова характеристика  $e(f^{-1}(P_i))$  имеет вид

$$e(f^{-1}(P_i)) = 8 - 4n + 2n = 8 - 2n$$

в соответствии с клеточным разложением, описанным в предложении 4.

Пусть прямые  $L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_n}$  являются сторонами многоугольника  $P_i$ . Рассмотрим подгруппу  $G_{P_i} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  группы  $G$ , порожденную элементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Из предложения 4 следует, что число связных компонент прообраза  $f^{-1}(P_i)$  совпадает с индексом группы  $G_{P_i}$  в  $G$ . С другой стороны, так как  $n > 2$ , то либо  $G_{P_i}$  совпадает с  $G$ , либо она является подгруппой индекса 2, и в последнем случае  $P_i$  является треугольником с линейно зависимыми сторонами. Следовательно, прообраз  $f^{-1}(P_i)$  всегда связан, за исключением случая треугольников с линейно зависимыми сторонами, и, более того, если  $P_i$  является треугольником с линейно зависимыми сторонами, то  $f^{-1}(P_i)$  состоит из двух связных компонент.

Если  $n = 3$ , то  $e(f^{-1}(P_i)) = 2$ . Следовательно, если  $P_i$  – треугольник с линейно независимыми сторонами, то  $f^{-1}(P_i)$  является двумерной сферой, и если  $P_i$  – треугольник с линейно зависимыми сторонами, то  $f^{-1}(P_i)$  является несвязным объединением двух копий вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ .

Пусть  $n \geq 4$ . Тогда  $P_i$  имеет три последовательные стороны с линейно независимыми индексами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . После перенумерации мы можем предполагать, что  $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 0)$  и  $\alpha_3 = (0, 0, 1)$ . В соответствии с предложением 4 осуществим частичное склеивание восьми копий  $P_\beta = (P_i, \beta)$



многоугольника  $P_i$  так, как это изображено на рис. 1 (где мы обозначили объединение сторон  $L_{\alpha_4} \cup \dots \cup L_{\alpha_n}$  через  $\tilde{L}_\alpha$ ).

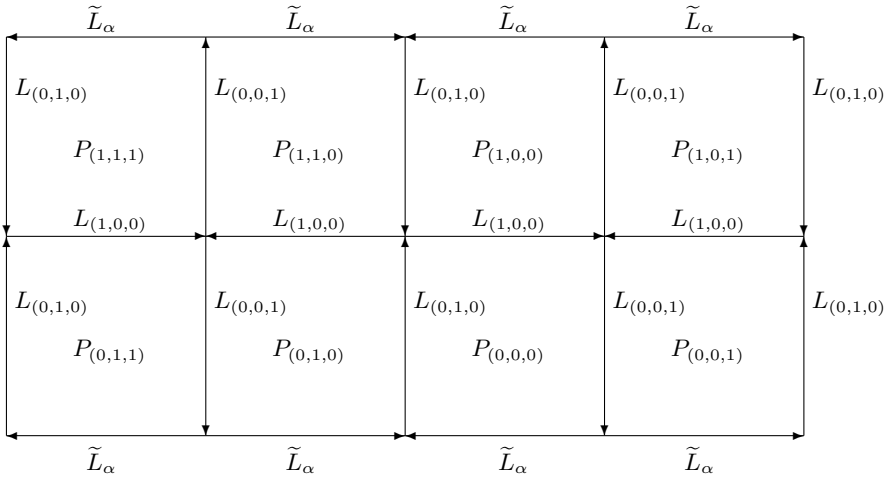


Рис. 1

Пусть  $n = 4$ . Тогда для  $\tilde{L}_\alpha = L_{\alpha_4}$  имеется четыре возможности: либо  $\alpha_4 = (1, 1, 0)$ , либо  $\alpha_4 = (1, 0, 1)$ , либо  $\alpha_4 = (0, 1, 1)$ , либо  $\alpha_4 = (1, 1, 1)$ . Из рис. 1 легко видеть, что прообраз  $f^{-1}(P)$  неориентируем в первых трех случаях и является ориентируемым в последнем случае.

Пусть, наконец,  $n \geq 5$ . Тогда  $\tilde{L}_\alpha = L_{\alpha_4} \cup \dots \cup L_{\alpha_n}$  и по крайней мере один из элементов  $\alpha_4, \dots, \alpha_n$ , скажем  $\alpha_j$ , должен быть равен либо  $(1, 1, 0)$ , либо  $(1, 0, 1)$ , либо  $(0, 1, 1)$ . Следовательно, склейка  $P_{(0,0,0)}$  и  $P_{\alpha_j}$  вдоль  $L_{\alpha_j}$  приводит к неориентируемости прообраза  $f^{-1}(P)$ .

Рассмотрим вещественную структуру  $c_X: X(\mathcal{L}) \rightarrow X(\mathcal{L})$ , являющуюся подъемом структуры  $c_P$ . Согласно предложению 3 инволюция  $c_X$  коммутирует с любым элементом из  $G$ . Следовательно, для любого  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$ , существует один и только один элемент  $g_i \in G$  такой, что  $c_X(x) = g_i(x)$  для всех  $x \in X$ , для которых  $f_\sigma(x) \in P_i$ . Используя то же самое отождествление группы  $G$  с  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , которое мы уже зафиксировали, введя нумерацию прямых конфигурации  $\mathcal{L}$  с помощью эпиморфизма  $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , положим

$$g_i = (g_{i,1}, g_{i,2}, g_{i,3})$$

и для каждого  $P_i$  определим тройки знаков

$$\text{Sign}(P_i) = \text{Sign}_i = (\text{sign}_{i,1}, \text{sign}_{i,2}, \text{sign}_{i,3}),$$

где по определению  $\text{sign}_{i,k} = (-1)^{g_{i,k}}$ ,  $1 \leq k \leq 3$ . Когда мы перенумеровываем прямые из  $\mathcal{L}$  с помощью автоморфизма  $h: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , метки  $g_i$  многоугольников  $P_i$  преобразуются в  $h(g_i)$ ; в частности, знаки многоугольников  $P_i$ , равные  $\text{Sign}_i = (+, +, +)$  (они соответствуют элементу  $g_i = 0$ ), остаются неизменными при любой перенумерации. Назовем *положительным* многоугольник  $P_i$ , если его знаки равны  $\text{Sign}_i = (+, +, +)$ .

Знаки  $\text{Sign}_i$  преобразуются по следующему правилу:

$$\text{sign}_{i,k} = (-1)^{a_k} \text{sign}_{j,k}, \tag{7}$$

если  $P_i$  и  $P_j$  имеют общую сторону вдоль  $L_\alpha$ ,  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ . В частности, если задана одна из  $\text{Sign}_i$ , то она определяет все остальные тройки знаков.

Отметим, что мы переходим от  $g_i$  к знакам  $\text{Sign}_i$  по двум причинам: во-первых, это позволяет нам более легко отличать (скажем, на рисунках) метки прямых  $L_\alpha \mapsto \alpha$  от меток  $g_i$  многоугольников  $P_i$ ; во-вторых, эти знаки имеют естественное значение, которое будет описано ниже (и которое удобно для дальнейшего).

Чтобы дать эквивалентное описание приведенных выше меток с помощью знаков, рассмотрим вложение многообразия  $Y(\mathcal{L})$  в  $\mathbb{P}_w^9$ , заданное уравнениями (4), (5), и произведения

$$\begin{aligned} & l_{(1,0,0)}l_{(1,1,0)}l_{(1,0,1)}l_{(1,1,1)}, \\ & l_{(0,1,0)}l_{(1,1,0)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}, \\ & l_{(0,0,1)}l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

входящие в первые три уравнения (см. обозначения, относящиеся к  $\mathbb{P}_w^9$  в п. 1.5). Как и любые однородные формы четной степени с вещественными коэффициентами, каждое из этих произведений имеет однозначно определенный знак в каждой точке вещественной плоскости  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , в которой это произведение не равно нулю. В частности, все эти три произведения имеют однозначно определенные знаки во внутренности каждого из многоугольников  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$ . Очевидно, что для каждого  $P_i$  эта тройка знаков, упорядоченная в соответствии с порядком появления произведений в (8), совпадает с тройкой  $\text{Sign}(P_i)$ , определяемой вещественной структурой, индуцированной на  $Y(\mathcal{L})$  стандартным комплексным сопряжением в  $\mathbb{P}_w^9$ ,  $z_k \mapsto \bar{z}_k$  и  $u_\alpha \mapsto \bar{u}_\alpha$ . (Любая вещественная структура на  $Y(\mathcal{L})$  поднимается до вещественной структуры на  $X(\mathcal{L})$  и такой подъем единствен; см. п. 2.1.)

Согласно предложению 3 существует восемь и только восемь различных вещественных структур  $c_X$ , которые являются подъемами структуры  $c_P$ . Покажем, что каждая из них может быть индуцирована подходящей диагональной вещественной структурой на  $\mathbb{P}_w^9$  – вещественной структурой, заданной формулами  $z_k \mapsto \bar{z}_k$  и  $u_\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha \bar{u}_\alpha$ ,  $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ . Отметим, что такая структура  $c_\varepsilon$  оставляет поверхность  $Y(\mathcal{L})$  инвариантной тогда и только тогда, когда каждое из уравнений (5) инвариантно относительно действия  $c_\varepsilon$ . В частности, имеется восемь и только восемь вещественных диагональных структур, которые сохраняют  $Y(\mathcal{L})$ , и все они определяются произвольным выбором знаков  $\varepsilon_\alpha$  для  $\alpha = (1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ . Обозначим через

$$c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}} : X(\mathcal{L}) \rightarrow X(\mathcal{L})$$

полученные таким образом вещественные структуры. Каждая из них является подъемом структуры  $c_P$ , так как все они преобразуют  $z_k$  в  $\bar{z}_k$ .

Легко проверить, что тройки знаков  $\text{Sign}'_i = (\text{sign}'_{i,1}, \text{sign}'_{i,2}, \text{sign}'_{i,3})$  многоугольников  $P_i$ , определенные структурой  $c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}}$ , равны  $(\varepsilon_1 \text{sign}_{i,1}, \varepsilon_2 \text{sign}_{i,2}, \varepsilon_3 \text{sign}_{i,3})$ , которые совпадают с тройками знаков однородных форм

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{(1,0,0)}l_{(1,0,0)}l_{(1,1,0)}l_{(1,0,1)}l_{(1,1,1)}, \\ & \varepsilon_{(0,1,0)}l_{(0,1,0)}l_{(1,1,0)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}, \\ & \varepsilon_{(0,0,1)}l_{(0,0,1)}l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)}l_{(1,1,1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее конфигурацию прямых  $\mathcal{L}$ , снабженную одним из этих восьми маркировок знаками, будем называть *конфигурацией, оснащенной (знаками)*.

Как показывает следующее предложение, оснащение знаками (занумерованной) чисто вещественной конфигурации Кампеделли содержит полную информацию о вещественной структуре.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Пусть конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  являются чисто вещественными относительно вещественных структур  $c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  и  $c'_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Вещественная структура  $c: X(\mathcal{L}) \rightarrow X(\mathcal{L})$ , являющаяся подъемом структуры  $c_P$ , и вещественная структура  $c': X(\mathcal{L}') \rightarrow X(\mathcal{L}')$ , являющаяся подъемом структуры  $c'_P$ , эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют гомоморфизм  $h: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  и проективное преобразование  $H: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  такие, что

$$c'_P \circ H = H \circ c_P, \quad \phi' \circ H_* = h \circ \phi$$

(здесь  $\phi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}; \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  и  $\phi': H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}'; \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  – нумерации, участвующие в определении конфигураций Кампеделли  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$ ) и

$$\text{Sign}'(H(P_i)) = (-1)^{h(g_i)},$$

где  $(-1)^{g_i} = \text{Sign } P_i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** следует из теоремы 5 и определения троек знаков (напомним, что одна из троек знаков определяет все остальные тройки).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** Восемь вещественных структур  $c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}}$  являются различными. Если  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек, то только эти восемь структур являются вещественными структурами на  $X(\mathcal{L})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** На поверхности  $Y(\mathcal{L})$  найдется такая точка, у которой все три координаты  $z_0, z_1, z_2$  являются вещественными и все три координаты  $u_{(1,0,0)}, u_{(0,1,0)}, u_{(0,0,1)}$  не обращаются в нуль. Вещественные структуры  $c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}}$  с разными  $(\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)})$  действуют по разному на такую точку. Отсюда следует первое утверждение.

Теперь предположим, что  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек, и рассмотрим две вещественные структуры,  $c: X(\mathcal{L}) \rightarrow X(\mathcal{L})$ , являющуюся подъемом структуры  $c_P$ , и  $c': X(\mathcal{L}) \rightarrow X(\mathcal{L})$ , являющуюся подъемом структуры  $c'_P$ . Предположим, что  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией относительно  $c_P$ .

Покажем сначала, что  $\mathcal{L}$  также является чисто вещественной конфигурацией относительно  $c'_P$ . Действительно, предположим, что  $\mathcal{L}$  является смешанно-вещественной конфигурацией относительно  $c'_P$ . Тогда  $c'_P$  оставляет неподвижными три прямые конфигурации  $\mathcal{L}$  и две точки, являющиеся точками пересечения сопряженных прямых конфигурации  $\mathcal{L}$ . С другой стороны,  $c_P$  оставляет неподвижными все прямые конфигурации  $\mathcal{L}$ . Следовательно,  $c_P \circ c'_P$  действует тривиально на трех прямых, находящихся в общем положении, и двух точках, не лежащих на этих прямых. Поэтому  $c_P \circ c'_P = \text{id}$ , таким образом,  $c_P = c'_P$ . Противоречие.

Если  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией относительно обеих структур  $c'_P$  и  $c_P$ , то те же самые аргументы влекут равенство  $c_P = c'_P$ . Следовательно,  $c$  и  $c'$  отличаются на автоморфизм Галуа.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Из предложений 5 и 6 следует, что если  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией Кампеделли, не имеющей нетривиальных проективных автоморфизмов, то восемь вещественных структур  $c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}}$  не эквивалентны друг другу и представляют все вещественные структуры на  $X(\mathcal{L})$ .

ЛЕММА 7. Для любого выбора знаков  $\varepsilon_\alpha$  при  $\alpha = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  множество вещественных точек  $X_{\mathbb{R}} = \text{Fix } c$  для  $c = c_{\varepsilon(1,0,0), \varepsilon(0,1,0), \varepsilon(0,0,1)}$  имеет вид

$$X_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\text{Sign}_i = (+, +, +)} f^{-1}(P_i),$$

где  $\text{Sign}_i$  – это тройки знаков, определяемые структурой  $c$ .

Предположим, что  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек (на самом деле, можно аналогично исследовать вырожденные случаи, но для дальнейшего нам это не будет нужно). Пусть  $P_{i_0}$  является  $n$ -угольником. Для каждой его стороны и, соответственно, для каждой его вершины существует только один многоугольник  $P_i$ ,  $i \neq i_0$ , пересекающий  $P_{i_0}$  вдоль этой стороны, соответственно, только в этой вершине. Рассматривая стороны и вершины, двигаясь вдоль границы многоугольника  $P_{i_0}$ , мы получаем последовательность многоугольников

$$(P_{i_1}, P'_{i_2}, \dots, P_{i_{2n-1}}, P'_{i_{2n}}),$$

где  $P'_{i_j}$  – это многоугольники, смежные с  $P_{i_0}$  только в вершинах. Свяжем с многоугольником  $P_{i_0}$  последовательность целых чисел

$$A_{i_0} = (n_{i_1}, n'_{i_2}, \dots, n_{i_{2n-1}}, n'_{i_{2n}}),$$

где  $n_{i_j}$  и  $n'_{i_{j+1}}$  – количества сторон многоугольников  $P_{i_j}$  и  $P'_{i_{j+1}}$  соответственно. Назовем последовательность  $A_{i_0}$  *типом примыкания* многоугольника  $P_{i_0}$ . Тип примыкания определен однозначно с точностью до циклической перестановки и обращения порядка.

Пусть, наконец,  $\mathcal{L}$  – оснащенная знаками конфигурация, и пусть  $\{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\}$  – множество ее положительных многоугольников. Неупорядоченный набор  $A(\mathcal{L}) = (A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ , где  $A_{i_j}$  – тип примыкания многоугольника  $P_{i_j}$ , называется *типом примыкания положительных многоугольников*.

ЛЕММА 8. Если  $\mathcal{L}$  – чисто вещественная конфигурация Кампеделли без тройных точек, то каждое из ее оснащений знаками содержит по крайней мере семь различных меток  $\text{Sign}_i$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конфигурация  $\mathcal{L}$ , как и любая конфигурация прямых без тройных точек, состоящая из не менее пяти прямых, имеет по крайней мере пять треугольников  $P_i$ . Простое вычисление числа ребер и двумерных клеток показывает, что в случае семи прямых найдется  $n$ -угольник  $P_i$  с  $n \geq 5$ .

Если число сторон многоугольника  $P_i$  больше или равно 6, то, как следует из правила пересчета (7),  $P_i$  и шесть многоугольников, имеющих общие стороны с  $P_i$ , имеют различные тройки знаков.

Пусть  $P_i$  является пятиугольником, ограниченным прямыми  $L_{i_1}, L_{i_3}, L_{i_5}, L_{i_7}$  и  $L_{i_9}$ , и пусть  $(P_{i_1}, P'_{i_2}, \dots, P_{i_9}, P'_{i_{10}})$  – его последовательность примыкающих многоугольников. Как и в доказательстве следствия 3, предположим (возможно, после перенумерации прямых и циклической перестановки примыкающих многоугольников; заметим также, что перенумерация может изменить оснащение знаками, но сохраняет различными различные тройки знаков), что  $\alpha_{i_1} = (1, 0, 0)$ ,  $\alpha_{i_3} = (0, 1, 0)$ ,  $\alpha_{i_5} = (0, 0, 1)$  и  $\alpha_{i_7}, \alpha_{i_9} \in \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ .

Из правила пересчета (7) следует, что тройки знаков многоугольника  $P_i$  и смежных с ним многоугольников образуют множество  $\{(-1)^a \text{Sign}_i, a \in A\}$ , где

$A = \{0, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_5}, \alpha_{i_7}, \alpha_{i_9}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_3}, \alpha_{i_3} + \alpha_{i_5}, \alpha_{i_5} + \alpha_{i_7}, \alpha_{i_7} + \alpha_{i_9}, \alpha_{i_9} + \alpha_{i_1}\}$ .

Имеем

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1) \in A,$$

т. е.  $A$  состоит по крайней мере из шести элементов. Если  $\alpha_{i_7}$  или  $\alpha_{i_9}$  равен  $(1, 0, 1)$  или  $(1, 1, 1)$ , то  $A$  состоит по крайней мере из семи элементов. В противном случае, если  $\{\alpha_{i_7}, \alpha_{i_9}\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ , то  $A$  снова состоит по крайней мере из семи элементов, так как в этом случае  $(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 0, 1) \in A$ .

Следующее предложение следует из лемм 7 и 8.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.** Пусть  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией Кампеделли без тройных точек. Для каждой вещественной структуры  $c_{\varepsilon_{(1,0,0)}, \varepsilon_{(0,1,0)}, \varepsilon_{(0,0,1)}}$  на  $X = X(\mathcal{L})$ , за исключением, возможно, одной из них, множество ее вещественных точек не пусто.

**2.5. Смешанно-вещественные конфигурации Кампеделли.** Пусть  $\mathcal{L} = \cup L_\alpha$  – конфигурация Кампеделли, являющаяся смешанно-вещественной относительно вещественной структуры  $c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Выберем однородные координаты  $(z_0, z_1, z_2)$  на  $\mathbb{P}^2$  так, чтобы  $c_P$  превращалась в  $c_P(z_0, z_1, z_2) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ . Тогда с точностью до перенумерации прямых и проективного преобразования прямые  $L_{(1,1,0)}$ ,  $L_{(1,1,1)}$  и  $L_{(0,0,1)}$  задаются уравнениями  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 0$ , а прямые  $L_{(1,0,0)}$ ,  $L_{(0,1,0)}$ ,  $L_{(1,0,1)}$  и  $L_{(0,1,1)}$  – уравнениями

$$a_{\alpha,0}z_0 + a_{\alpha,1}z_1 + a_{\alpha,2}z_2 = 0,$$

где  $a_{(1,0,0),j} = \bar{a}_{(0,1,0),j}$  и  $a_{(1,0,1),j} = \bar{a}_{(0,1,1),j}$  для любого  $j = 0, 1, 2$  (см. доказательство предложения 3).

Как и выше, рассмотрим множество  $\mathbb{RP}^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_i \in \mathbb{R}\}$  вещественных точек плоскости  $\mathbb{P}^2$ . Смешанно-вещественная конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  пересекает  $\mathbb{RP}^2$  вдоль трех различных прямых  $L_{\alpha, \mathbb{R}} = L_\alpha \cap \mathbb{RP}^2$ ,  $\alpha = (0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  и в двух не совпадающих точках  $p_1 = L_{(1,0,0)} \cap L_{(0,1,0)}$  и  $p_2 = L_{(1,0,1)} \cap L_{(0,1,1)}$ . Назовем точки  $p_1$  и  $p_2$  вершинами конфигурации  $\mathcal{L}$ . Эти вершины не могут принадлежать прямой  $L_{1,1,0}$ , но может так случиться, что одна из них (или обе вместе) принадлежит  $L_{1,1,1} \cup L_{0,0,1}$ . Существует перенумерация, меняющая индексы точек  $p_1$  и  $p_2$ .

Обозначим через  $l_\alpha = a_{\alpha,0}z_0 + a_{\alpha,1}z_1 + a_{\alpha,2}z_2$ ,  $\alpha \in G \setminus \{0\}$ , упомянутые выше линейные формы, задающие прямые  $L_\alpha$  (в частности,  $z_0 = l_{(1,1,0)}$ ,  $z_1 = l_{(1,1,1)}$  и  $z_2 = l_{(0,0,1)}$ ). Положим  $q_1 = l_{(1,0,0)}l_{(0,1,0)}$  и  $q_2 = l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)}$ . Заметим, что формы  $q_1$  и  $q_2$  имеют вещественные коэффициенты. Более того,  $q_1 \geq 0$  и  $q_2 \geq 0$  в каждой точке плоскости  $\mathbb{RP}^2$ .

Поверхность Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$  задается в  $\mathbb{P}_w^9$  уравнениями

$$\begin{aligned} u_{(1,0,0)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(1,0,1)}z_0z_1, \\ u_{(0,1,0)}^2 &= l_{(0,1,0)}l_{(0,1,1)}z_0z_1, \\ u_{(0,0,1)}^2 &= q_2z_1z_2, \\ u_{(1,1,0)}^2 &= q_1q_2, \\ u_{(1,0,1)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(0,1,1)}z_0z_2, \\ u_{(0,1,1)}^2 &= l_{(0,1,0)}l_{(1,0,1)}z_0z_2, \\ u_{(1,1,1)}^2 &= q_1z_1z_2 \end{aligned} \tag{10}$$

и уравнениями (5). Она наследует вещественную структуру  $c_{++}: X \rightarrow X$  с вещественной структурой на  $\mathbb{P}_w^9$ , заданной формулами  $z_k \mapsto \bar{z}_k$  и  $u_{(i,j,k)} \mapsto \bar{u}_{(j,i,k)}$ .

В соответствии с предложением 3 существуют еще три другие вещественные структуры на  $X$  (только три, если конфигурация не имеет нетривиальных проективных автоморфизмов), которые получаются из  $c_{++}$  при помощи композиции с некоторым автоморфизмом Галуа:

$$c_{-+} = g_{(1,0,0)}c_{++}g_{(1,0,0)}, \quad c_{+-} = g_{(0,0,1)}c_{++}, \quad c_{--} = g_{(0,0,1)}c_{-+}, \quad (11)$$

где  $g_{(1,0,0)}, g_{(0,0,1)} \in \text{Gal}(X/\mathbb{P}^2)$  определены следующим образом:

$$g_{(1,0,0)}u_{(i,j,k)} = (-1)^i u_{(i,j,k)}, \quad g_{(0,0,1)}u_{(i,j,k)} = (-1)^k u_{(i,j,k)}.$$

В частности, можно заметить, что с точностью до сопряжения на автоморфизм поверхности  $X$  этот список из четырех вещественных структур сводится к двум классам сопряженности, представленных соответственно структурами  $c_+ = c_{++}$  и  $c_- = c_{+-}$ .

Мы будем разделять смешанно-вещественные конфигурации  $\mathcal{L}$ , не имеющие тройных точек, на следующие три типа. Прямые  $L_{\alpha, \mathbb{R}}$ ,  $\alpha = (0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$ , делят  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  на четыре треугольника  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , как это изображено на рис. 2, где ось  $x = 0$  — это прямая  $L_{(1,1,1), \mathbb{R}}$ , ось  $y = 0$  — это прямая  $L_{(0,0,1), \mathbb{R}}$ , а прямая  $L_{(1,1,0), \mathbb{R}}$  лежит в бесконечности. Используя перенумерацию, которая преобразует  $(1, 0, 0)$  в  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  в  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$  в  $(1, 1, 1)$ , вместе с линейными преобразованиями  $x \mapsto \pm x$ ,  $y \mapsto \pm y$ , мы можем и будем предполагать, что  $p_1 \in P_1$ , а  $p_2$  принадлежит либо  $P_1$  (тип I), либо  $P_2$  (тип II), либо  $P_3$  (тип III).

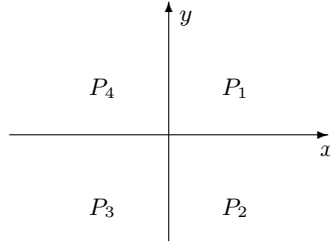


Рис. 2

Такая нормализация делает следующие два произведения  $l_{(1,1,0)}l_{(1,1,1)} = z_0z_1$  и  $l_{(1,1,0)}l_{(0,0,1)} = z_0z_2$  положительными на  $P_1$  (и на  $P_3$ ) и, в частности, фиксирует выбор вещественной структуры  $c_+$ . При этом соглашения структура  $c_-$  становится вещественной структурой, индуцированной отображением  $z_k \mapsto \bar{z}_k$  и  $u_{(i,j,k)} \mapsto \bar{u}_{(j,i,k)}$  на копии поверхности  $X$ , которая задается уравнениями

$$\begin{aligned} u_{(1,0,0)}^2 &= l_{(1,0,0)}l_{(1,0,1)}v_1, \\ u_{(0,1,0)}^2 &= l_{(0,1,0)}l_{(0,1,1)}v_1, \\ u_{(0,0,1)}^2 &= -q_2v_1v_2. \end{aligned} \quad (12)$$

**ЛЕММА 9.** Пусть  $\mathcal{L}$  — смешанно-вещественная конфигурация Кампеделли без тройных точек. Предположим, что  $P_i$  и  $c_{\pm}$  занумерованы так, как это описано выше. Тогда для любого  $i = 1, \dots, 4$ :

- (i)  $f^{-1}(P_i)$  является несвязным объединением  $P_{i,1} \cup P_{i,2}$  двух связных неориентируемых двумерных многообразий;
- (ii) эйлерова характеристика поверхности  $P_{i,j}$ ,  $j = 1, 2$ , равна  $1 - 2n$ , где  $n$  – число вершин  $\{p_1, p_2\}$  конфигурации, принадлежащих поверхности  $P_i$ ;
- (iii) множество вещественных точек  $X_{\mathbb{R}} = \text{Fix } c$ ,  $c = c_{\pm}$ , является объединением двух многообразий:

$$X_{\mathbb{R}} = P_{i,1} \cup P_{i+2,1},$$

где  $i = 1$ , если  $c = c_+$ , и  $i = 2$ , если  $c = c_-$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 4. Единственное отличие состоит в том, что здесь внутри треугольника  $P_i$  мы имеем вершины  $p_1, p_2$  конфигурации, которые являются (простыми) точками ветвления проекции  $\tilde{P}_{i,j} \rightarrow P_i$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конфигурация Кампеделли может быть чисто вещественной относительно одной вещественной структуры и смешанно-вещественной относительно другой структуры. Более точно, конфигурация Кампеделли  $\mathcal{L}$  одновременно является чисто вещественной и смешанно-вещественной тогда и только тогда, когда (возможно, после перенумерации прямых) существуют координаты  $(z_0, z_1, z_2)$  на  $\mathbb{P}^2$  такие, что  $z_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , является уравнением соответственно прямой  $L_{(1,1,0)}$ ,  $L_{(1,1,1)}$ ,  $L_{(0,0,1)}$ , прямые  $L_{(1,0,0)}$  и  $L_{(0,1,0)}$  задаются уравнениями  $a_1 z_1 + (a_0 z_0 \pm z_2) = 0$ , а прямые  $L_{(1,0,1)}$  и  $L_{(0,1,1)}$  – уравнениями  $b_1 z_1 + (b_0 z_0 \pm z_2) = 0$  при некоторых ненулевых  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ .

### § 3. Диффеоморфизмы и деформации вещественных поверхностей Кампеделли

**3.1. Деформации и сглаживание  $A_1$ -особенностей.** Под вещественным возмущением Морса–Лефшеца вещественной поверхности с  $A_1$ -особенностями мы понимаем комплексное трехмерное многообразие  $Z$ , снабженное вещественной структурой  $c: Z \rightarrow Z$  и собственным голоморфным отображением  $f$  из  $Z$  в единичный диск  $D \subset \mathbb{C}$ , согласованным с вещественными структурами на  $Z$  и на  $D \subset \mathbb{C}$  и таким, что все слои отображения  $f$  являются (компактными) неособыми поверхностями, за исключением слоя над точкой 0, слой над точкой 0 содержит только изолированные особые точки  $O_1, \dots, O_k$ , в которых квадратичная форма отображения  $f$  не вырождена.

Обозначим слои  $f^{-1}(t)$  через  $X_t$ , так что особый слой  $f^{-1}(0)$  – это  $X_0$ . Вещественная структура  $c: X_0 \rightarrow X_0$  однозначно поднимается до вещественной структуры  $c: \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_0$ , где  $\tilde{X}_0$  – минимальное разрешение особенностей поверхности  $X_0$ . В соответствии с определением деформационной эквивалентности вещественных поверхностей вещественные поверхности  $(X_t, c)$  принадлежат одному и тому же типу вещественных деформаций для всех  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ , имеющих один и тот же знак. Если  $O_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , является вещественной точкой, то можно выбрать небольшой шар (Милнора)  $B_j \subset Z$  с центром в  $O_j$  и для каждого малого вещественного  $t \neq 0$  рассмотреть локальную эйлерову характеристику множества  $X_{t,\mathbb{R}}$ , т.е. эйлерову характеристику пересечения вещественной части слоя  $X_t$  и шара  $B_j$ .

Такие возмущения Морса–Лефшеца будут возникать в результате выворачиваний треугольников вещественных конфигураций Кампеделли (см. п. 3.2).

ЛЕММА 10. Пусть  $(Z, f, c)$  – вещественное возмущение Морса–Лэфшеца вещественной поверхности с  $A_1$ -особенностями. Если для  $t' \neq 0$ , имеющих определенной знак, в каждой вещественной особой точке  $O_j \in X_0$  локальная эйлерова характеристика поверхности  $X_{t', \mathbb{R}}$  равна нулю, то поверхности  $(X_{t'}, c)$  с таким знаком параметра  $t'$  вещественно деформационно эквивалентны поверхности  $(\tilde{X}_0, c)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим вспомогательное вещественное однопараметрическое семейство, сделав замену базы с помощью подстановки  $u^2$  вместо  $t$ , если  $t'$  являются положительными, и  $-u^2$  вместо  $t$  в противном случае. Тотальное пространство этого семейства имеет  $A_1$ -особенности в  $O_1, \dots, O_k \in X_0$  и не имеет других особых точек. Раздутие тотального пространства с центрами в  $A_1$ -особенностях уважает вещественную структуру, заменяет каждую из этих особых точек квадратикой и разрешает одновременно как особые точки семейства, так и особые точки слоя  $X_0$ . В каждой вещественной точке  $O_j$  раздутая квадратика является вещественной и два семейства порождающих ее прямых являются вещественными тогда и только тогда, когда локальная эйлерова характеристика поверхности  $X_{t, \mathbb{R}}$  равна нулю при  $t = t'$ . Выберем одно из семейств вещественных прямых для каждой вещественной точки  $O_j$  и сопряженные семейства прямых для каждой пары сопряженных точек  $O_j$ . Как известно, стягивание любого из двух семейств прямых этих квадратик дает гладкое семейство поверхностей. Стягивание выбранных семейств является вещественным и, следовательно, задает вещественную эквивалентность между  $(\tilde{X}_0, c)$  и  $(X_{t'}, c)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если  $(Z, f, c)$  является возмущением Морса–Лэфшеца вещественной поверхности с комплексно-сопряженными (не вещественными)  $A_1$ -особенностями, то все поверхности  $(X_t, c)$  при вещественных  $t \neq 0$  являются вещественно деформационно эквивалентными друг другу.

**3.2. Выворачивания треугольников.** Пусть  $\mathcal{L}$  – оснащенная чисто вещественная конфигурация Кампеделли (см. п. 2.4), и пусть  $P_{i_0} \subset \mathbb{RP}^2$  – треугольник, стороны которого образованы прямыми  $L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, L_{\alpha_3}$  конфигурации  $\mathcal{L}$ . Преобразование, изображенное на рис. 3, которое преобразует  $\mathcal{L}$  в оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли  $\mathcal{L}'$ , называется *выворачиванием треугольника*  $P_{i_0}$ . Согласно определению тройки знаков  $\text{Sign}'_i = \text{Sign}(P'_i)$  при  $i \neq i_0$  совпадают с  $\text{Sign}_i = \text{Sign}(P_i)$  и из правила пересчета (7) следует, что знаки  $\text{Sign}'_{i_0} = (\text{sign}'_{i_0,1}, \text{sign}'_{i_0,2}, \text{sign}'_{i_0,3})$  определяются знаками  $\text{Sign}_{i_0} = (\text{sign}_{i_0,1}, \text{sign}_{i_0,2}, \text{sign}_{i_0,3})$  по следующей формуле:

$$\text{sign}'_{i_0,j} = (-1)^{a_j} \text{sign}_{i_0,j},$$

где  $(a_1, a_2, a_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если стороны треугольника  $P_{i_0}$  линейно зависимы, то имеют место равенства  $\text{Sign}_{i_j} = \text{Sign}_{i_{j+3}}$  для  $j = 1, 2, 3$ ,  $\text{Sign}'_{i_0} = \text{Sign}_{i_0}$ , а знаки  $\text{Sign}_{i_1}, \text{Sign}_{i_2}$  и  $\text{Sign}_{i_3}$  попарно различны. В случае линейно зависимых сторон конфигурация прямых  $\mathcal{L}^0$  не является конфигурацией Кампеделли.

Если стороны треугольника  $P_{i_0}$  линейно независимы, то все тройки  $\text{Sign}_{i_j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 6$ , попарно различны и  $\text{Sign}'_{i_0}$  является дополнительным к ним элементом в множестве троек знаков. В случае линейно независимых сторон конфигурация  $\mathcal{L}^0$  является конфигурацией Кампеделли и каноническая модель  $X(\mathcal{L}^0)$  поверхности Кампеделли  $X^0$  имеет одну особую точку типа  $A_1$ ,



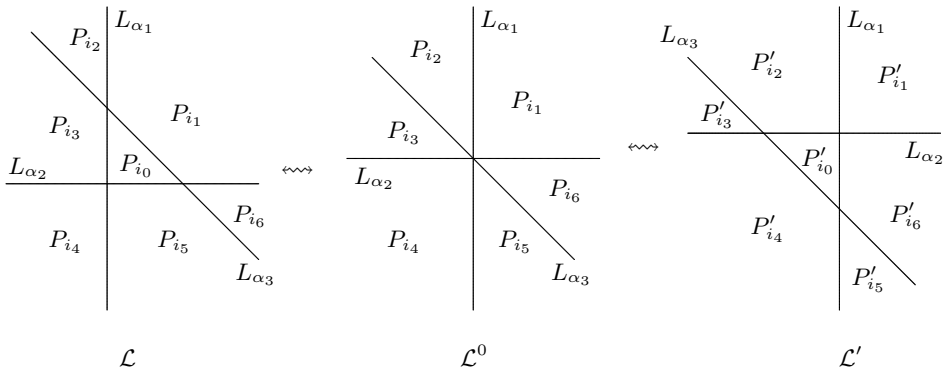


Рис. 3

лежащую над тройной точкой (над точкой, в которую вырождается треугольник  $P_{i_0}$ ). Локальная эйлерова характеристика многообразия  $X(\mathcal{L})$  в этой особой точке равна нулю тогда и только тогда, когда

$$(+, +, +) \notin \{\text{Sign}_{i_k}\}_{k=0,2,4,6}.$$

Соответственно, локальная эйлерова характеристика многообразия  $X(\mathcal{L}')$  в этой особой точке равна нулю тогда и только тогда, когда тройка знаков  $(+, +, +) \notin \{\text{Sign}'_{i_k}\}_{k=0,2,4,6}$ . Последнее условие эквивалентно условию  $(+, +, +) \in \{\text{Sign}_{i_k}\}_{k=0,2,4,6}$ ; в частности, если локальная эйлерова характеристика равна нулю для одной из конфигураций  $\mathcal{L}$  или  $\mathcal{L}'$ , то она не равна нулю для другой; верно и обратное утверждение.

**3.3. Редукция к общим деформациям.** Докажем следующие утверждения.

ЛЕММА 11. *Предположим, что  $(Z, f, c)$  – такая вещественная деформация, что все слои, за исключением слоя  $X_0$ , имеют неособые канонические модели, а каноническая модель поверхности  $X_0$  имеет  $A_1$ -особенности. Тогда локальная эйлерова характеристика поверхности  $X_{t, \mathbb{R}}$ ,  $t \neq 0$ , равна нулю в каждой вещественной особой точке  $O_j \in Z$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Деформация  $(Z, f, c)$  является одновременным разрешением особенностей семейства, состоящего из канонических моделей  $X_t^{\text{can}}$  поверхностей  $X_t$  над той же базой. Следовательно, для каждого достаточно малого вещественного  $t$  локальные эйлеровы характеристики поверхности  $X_{t, \mathbb{R}}$  совпадают с локальными эйлеровыми характеристиками разрешения особых точек. Последние равны нулю в случае  $A_1$ -особенностей, какими бы ни были вещественные формы особенностей.

ЛЕММА 12. *Пусть  $(Z, f, c)$  – вещественная деформация поверхностей Кампеделли. Для любого вещественного  $t' \in D$  существуют вещественная окрестность  $U \subset D$  точки  $t'$  и вещественное семейство  $\mathcal{L}_t$ ,  $t \in U$ , конфигураций Кампеделли в вещественной проективной плоскости  $(\mathbb{P}^2; c_{\mathbb{P}})$  такие, что  $X_t = X(\mathcal{L}_t)$  и  $c_t = c|_{X_t}$  является подъемом структуры  $c_{\mathbb{P}}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим относительный биканонический пучок  $2K|_{Z/D}$ . Его ограничение на каждый слой  $X_t$  является биканоническим пучком поверхности  $X_t$ . Пространство сечений ограничения имеет размерность три и эти сечения определяют конечный морфизм в  $\mathbb{P}^2$ , представляющий  $X_t$  как  $X(\mathcal{L}_t)$ , где  $\mathcal{L}_t$  – дивизор ветвления этого отображения (см. доказательство теоремы 5). Поскольку пространство сечений имеет постоянную размерность, то любые три сечения, порождающие биканонический пучок поверхности  $X_{t'}$ , продолжатся до трех сечений, порождающих пучок  $2K|_{Z/D}$  по крайней мере над некоторой малой окрестностью точки  $t'$ . Согласно теореме 7 эти три сечения биканонического пучка  $X_{t'}$  могут быть выбраны вещественными относительно вещественной структуры  $c_P$  плоскости  $\mathbb{P}^2$ , а затем останется усреднить их продолжения с помощью  $s$  и выбрать достаточно малую эквивариантную окрестность точки  $t'$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.** Пусть  $(X_1, c_1)$  и  $(X_2, c_2)$  – две деформационно эквивалентные вещественные поверхности Кампеделли, ассоциированные соответственно с конфигурациями Кампеделли  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . Если  $\mathcal{L}_1$  является чисто вещественной конфигурацией, то  $\mathcal{L}_2$  является также чисто вещественной. Если эти конфигурации являются чисто вещественными и не имеют тройных точек, то их оснащения знаками в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  гомеоморфны. Поэтому, в частности,  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  имеют одинаковый тип и одинаковый тип примыкания положительных многоугольников.

Заметим, что из предложения 8 следует, что деформация не может быть задана каким-либо выворачиванием треугольников.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно лемме 12 любая цепочка вещественных деформаций, связывающая поверхности  $(X_1, c_1)$  и  $(X_2, c_2)$ , является результатом выбора цепочки вещественных семейств конфигураций Кампеделли  $\mathcal{L}_t$ . Рассмотрим конфигурации  $\mathcal{L}_t$  с вещественными значениями параметра  $t$ . Они образуют цепочку вещественных конфигураций Кампеделли, связывающую  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . Конфигурации Кампеделли могут разве что приобретать тройные точки. Следовательно, число вещественных прямых в конфигурации не меняется в цепи вещественных деформаций. Это доказывает первое утверждение.

Теперь предположим, что  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  являются чисто вещественными конфигурациями. Тройные точки промежуточных конфигураций  $\mathcal{L}_t$  появляются и исчезают независимо друг от друга. Их исчезновение и появление происходит при *полувыворачивании треугольников* подобно тому, как это изображено на рис. 3. Полувыворачивание, в результате которого появляется треугольник, должно восстанавливать локальную комбинаторную структуру и локальное оснащение знаками, поскольку, с одной стороны, в соответствии с леммой 11 локальный вклад в эйлерову характеристику вещественной части должен быть равен нулю для обоих типов полувыворачивания, а с другой стороны, как мы заметили уже в п. 3.2, такой вклад благодаря исчезновению треугольника  $P_{i_0}$  (или, соответственно, появлению треугольника  $P'_{i_0}$ ) равен нулю тогда и только тогда, когда  $(+, +, +) \notin \{\text{Sign}_{i_k}\}_{k=0,2,4,6}$  (соответственно,  $(+, +, +) \notin \{\text{Sign}'_{i_k}\}_{k=0,2,4,6}$ ). В итоге отсюда вытекает, что при замене прямых линий  $L_{i,\mathbb{R}}$  подходящими изогнутыми линиями конфигурацию  $\mathcal{L}_1$  можно соединить с конфигурацией  $\mathcal{L}_2$  при помощи непрерывного семейства оснащенных изогнутых конфигураций, лежащих в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  и не имеющих тройных точек.

**3.4. Сглаживание  $T(-4)$ -особенностей.** *Вещественным сглаживанием* вещественной поверхности  $(M, c)$  назовем любой вещественный слой вещественного плоского семейства поверхностей  $Z \rightarrow D$  над единичным диском  $D$  (на котором вещественная структура задана обычным комплексным сопряжением) такого, что  $(X_0, c) = (M, c)$  и все слои  $X_t$  неособы при  $t \in D$ ,  $t \neq 0$ . Особая точка поверхности называется  $T(-4)$ -особенностью, если ее росток изоморфен  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -накрытию Галуа ростка  $(\mathbb{C}^2, o)$ , разветвленному в трех прямых  $L_{\alpha_1} \cup L_{\alpha_2} \cup L_{\alpha_3}$ , проходящих через точку  $o$ , и ассоциированному с  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -нумерацией  $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$  такой, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ . Мы будем говорить, что некоторая поверхность является *вещественной поверхностью с не вещественными  $T(-4)$ -особенностями*, если все ее особые точки являются  $T(-4)$ -особенностями и ни одна из ее особых точек не является вещественной.

**ТЕОРЕМА 8.** *Любые два вещественных сглаживания  $(M_1, c)$  и  $(M_2, c)$  вещественной поверхности  $(M, c)$  с не вещественными  $T(-4)$ -особенностями имеют диффеоморфные вещественные структуры.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пары  $(M_1, c)$  и  $(M_2, c)$  получаются из  $(M, c)$  при удалении  $c$ -инвариантных окрестностей Милнора  $U_j \cup c(U_j)$  для каждой пары сопряженных особенностей с последующим  $c$ -инвариантным приклеиванием вместо пары  $U_j \cup c(U_j)$  некоторых других стандартных кусков  $N_j \cup N_{\bar{j}}$ ,  $N_j = (N, j)$  и  $N_{\bar{j}} = (N, \bar{j})$ , и при использовании граничных диффеоморфизмов  $\phi_j: \partial N \rightarrow \partial U_j$ ,  $\phi_{\bar{j}}: \partial N \rightarrow \partial c(U_j)$  таких, что  $c \circ \phi_j = \phi_{\bar{j}}$  (так что  $c$  действует на  $N_j \cup N_{\bar{j}}$  по правилу  $(x, j) \mapsto (x, \bar{j})$ ). Как известно (см., например, [18]), результат склеивания половины из этих кусков, скажем  $\cup N_j$ , дает диффеоморфные четырехмерные многообразия  $M_1 \setminus \cup_j N_j$  и  $M_2 \setminus \cup_j N_{\bar{j}}$  (на самом деле,  $\partial N$  является линзовым пространством  $L(4, 1)$ , и существование такого диффеоморфизма следует из соответствующей теоремы Бонаона [1]). После этого осталось продолжить такой диффеоморфизм  $\Phi$  на  $M_1 \rightarrow M_2$ , используя симметрию, т. е. положив  $\Phi(x) = (c \circ \Phi)(x)$  для всех  $x \in (N, \bar{j})$ .

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы 8.

**СЛЕДСТВИЕ 5.** *Пусть  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  – две оснащенные вещественные конфигурации Кампеделли, получающиеся друг из друга с помощью выворачивания треугольника  $P_{i_0}$ . Предположим, что стороны треугольника  $P_{i_0}$  являются линейно зависимыми и что  $\text{Sign}_{i_j} \neq (+, +, +)$  для  $j = 0, 1, \dots, 6$ , где  $P_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , – многоугольники, смежные с треугольником  $P_{i_0}$ . Тогда вещественные поверхности Кампеделли  $X(\mathcal{L})$  и  $X(\mathcal{L}')$  имеют диффеоморфные вещественные структуры.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** В теореме 8 и следствии 5 диффеоморфизм, переводящий одну вещественную структуру в другую, сохраняет ориентацию и канонический класс.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 5.** Ориентация и канонический класс поверхностей  $M = X_0$ ,  $M_1 = X_\varepsilon$  и  $M_2 = X_{-\varepsilon}$  определяются комплексной структурой. Отождествление многообразия  $M \setminus \cup U_j$  с соответствующими кусками поверхностей  $X_{\pm\varepsilon}$  задается диффеоморфизмами переноса. Поскольку комплексная структура на  $X_t$  зависит непрерывно от  $t$  при  $t \neq 0$ , то диффеоморфизмы Морса–Лефшеца сохраняют комплексную ориентацию и канонический класс. Следовательно, диффеоморфизм  $\Phi$ , ограниченный на

$$M_1^{\text{ext}} = M_1 \setminus \bigcup_j (N_j \cup N_{\bar{j}}) \rightarrow M_2^{\text{ext}} = M_2 \setminus \bigcup_j (N_j \cup N_{\bar{j}}),$$

сохраняет комплексную ориентацию и преобразует канонический класс  $K(M_2^{\text{ext}})$  в  $K(M_1^{\text{ext}})$ . Для доказательства осталось заметить, что гомоморфизмы  $H^2(M_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M_i^{\text{ext}}, \mathbb{Z})$ , индуцированные вложениями  $M_i^{\text{ext}} \subset M_i$ , являются инъективными. Действительно, по двойственности Пуанкаре–Лefшеца имеем

$$H^2(M_i, M_i^{\text{ext}}; \mathbb{Z}) = H_2\left(\bigcup_j (N_j \cup N_{\bar{j}}); \mathbb{Z}\right),$$

в то время как  $H_2(\bigcup_j (N_j \cup N_{\bar{j}}); \mathbb{Z}) = 0$ , так как каждая из окрестностей  $N_j$  и  $N_{\bar{j}}$  (составляющих несвязную пару) гомотопически эквивалентна вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  (см. следствие 4).

**3.5. Классификация смешанно-вещественных конфигураций Кампеделли с точностью до вещественных деформаций.** Пусть  $\mathcal{L}$  – конфигурация Кампеделли, являющаяся смешанно-вещественной относительно вещественной структуры  $c_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Скажем, что вещественная поверхность Кампеделли  $(X, c_X)$ , где  $X = X(\mathcal{L})$  и  $c_X$  – подъем структуры  $c_P$ , имеет тип  $J_{\pm}$ , где  $J = \text{I, II, III}$ , если  $\mathcal{L}$  не имеет тройных точек, имеет тип  $J$  и  $c_X = c_{\pm}$  (см. определения типов I, II, III и вещественных структур  $c_{\pm}$  в п. 2.5).

**ТЕОРЕМА 9.** *Существует ровно пять различных типов деформационно эквивалентных вещественных поверхностей Кампеделли  $(X, c)$ , ассоциированных со смешанно-вещественными конфигурациями Кампеделли. Конфигурации типа  $\text{II}_{+}$  и  $\text{II}_{-}$  представляют один и тот же деформационный тип. Остальные четыре деформационных типа соответствуют конфигурациям типов  $\text{I}_{\pm}$  и  $\text{III}_{\pm}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно предложению 8 вещественные поверхности  $X(\mathcal{L})$  и  $X(\mathcal{L}')$  не являются деформационно эквивалентными, если  $\mathcal{L}$  является чисто вещественной конфигурацией Кампеделли, а  $\mathcal{L}'$  является смешанно-вещественной. Из леммы 10 вытекает, что если  $\mathcal{L}$  имеет тройные точки, то поверхность  $(X, c_X)$  вещественно деформационно эквивалентна некоторой поверхности, ассоциированной с вещественной конфигурацией Кампеделли, не имеющей тройных точек. Отсюда в силу того, что пространство смешанно-вещественных конфигураций Кампеделли без тройных точек распадается на шесть деформационных классов (а именно,  $\text{I}_{\pm}$ ,  $\text{II}_{\pm}$  и  $\text{III}_{\pm}$ ), следует, что существует не более шести типов деформационно неэквивалентных вещественных поверхностей Кампеделли  $(X, c_X)$ .

Чтобы их различать, заметим, что вещественная деформация вещественных поверхностей Кампеделли  $(X, c_X)$  является одновременно и  $H$ -деформацией, где  $H = \text{Kl}(X, c_P)$ , в том смысле, что не только действие вещественной структуры  $c_X$ , но и действие всей группы  $H$  продолжаются на все пространство деформаций. Более того, так как группа Галуа  $G \subset H$  сохраняет каждый слой деформации, эта вещественная деформация поверхности  $(X, c_X)$  одновременно является вещественной деформацией для каждой другой вещественной структуры, содержащейся в  $H$ .

В случае смешанно-вещественной конфигурации Кампеделли группа  $H$  изоморфна группе  $D_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  (см. предложение 3), содержит четыре различные вещественные структуры и эти структуры распадаются на два класса сопряженности  $c_{\pm}$  (см. п. 2.5). В итоге топологический тип неупорядоченной пары двумерных многообразий  $(\text{Fix } c_{+}, \text{Fix } c_{-})$  инвариантен при вещественных деформациях поверхности  $(X, c_X)$ . Из леммы 9 следует, что этот инвариант различает типы  $\text{I}_{\pm}$ ,  $\text{II}_{\pm}$  и  $\text{III}_{\pm}$ .

Чтобы закончить доказательство, покажем, что типы  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$  являются деформационно эквивалентными. С точностью до деформационной эквивалентности мы можем предполагать, что вершины  $p_1$  и  $p_2$  конфигурации  $\mathcal{L}$  типа  $\Pi$  имеют проективные координаты  $(1, 1, 1)$  и  $(1, 1, -1)$  соответственно. Более того, мы можем предполагать, что  $l_{(1,0,0)}l_{(0,1,0)} = (z_1 - z_0)^2 + (z_2 - z_0)^2$  и  $l_{(1,0,1)}l_{(0,1,1)} = (z_1 - z_0)^2 + (z_2 + z_0)^2$  соответственно. Тогда диагональное преобразование  $z_0 \mapsto z_0, z_1 \mapsto z_1, z_2 \mapsto -z_2$  и перенумерация  $(1, 0, 0) \mapsto (1, 0, 1), (0, 1, 0) \mapsto (0, 1, 1), (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1)$  задают (см. уравнения (10)) эквивалентность вещественных структур  $c_-$  и  $c_+$ .

### § 4. $\text{DIF} \neq \text{DEF}$

В этом параграфе мы приводим несколько примеров диффеоморфных вещественных поверхностей Кампеделли, которые не являются деформационно эквивалентными.

#### 4.1. Пример пары диффеоморфных, но деформационно неэквивалентных вещественных поверхностей.

**ПРИМЕР 1.** Две вещественные поверхности Кампеделли, которые имеют диффеоморфные вещественные структуры, но не являются вещественно деформационно эквивалентными.

Пусть  $\mathcal{L}$  – чисто вещественная конфигурация Кампеделли, заданная сторонами семиугольника  $P_1$ , т. е. конфигурация типа  $(7, 14, 0, 0, 1)$ . Занумеруем прямые таким образом, что некоторые последовательные три стороны семиугольника  $P_1$  имеют метки  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  и  $(0, 1, 0)$ . Затем оснастим конфигурацию  $\mathcal{L}$  знаками так, что треугольник  $P_0$ , имеющий общую сторону с  $P_1$  вдоль  $L_{(1,1,0)}$ , имеет  $\text{Sign}_0 = (-, -, -)$ . Напомним, что такой выбор знаков для треугольника  $P_0$  может быть продолжен до оснащения знаками конфигурации  $\mathcal{L}$  при использовании правила пересчета (7) (см. фрагмент конфигурации  $\mathcal{L}$  на рис. 4).

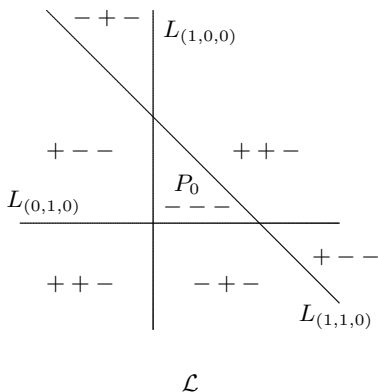


Рис. 4

Пусть  $\mathcal{L}'$  – оснащенная конфигурация, полученная выворачиванием треугольника  $P_0$ . Эта конфигурация имеет тип  $(7, 13, 1, 1, 0)$ . Из следствия 5 вытекает, что вещественные поверхности Кампеделли  $X(\mathcal{L})$  и  $X(\mathcal{L}')$  имеют диффеоморфные вещественные структуры, а согласно предложению 8 они не являются деформационно эквивалентными.

**4.2. Пример восьми диффеоморфных, но попарно деформационно неэквивалентных вещественных поверхностей.**

ПРИМЕР 2. Восемь вещественных поверхностей Кампеделли  $(X_1, c_1), \dots, (X_8, c_8)$ , которые имеют диффеоморфные друг другу вещественные структуры и являются попарно деформационно неэквивалентными.

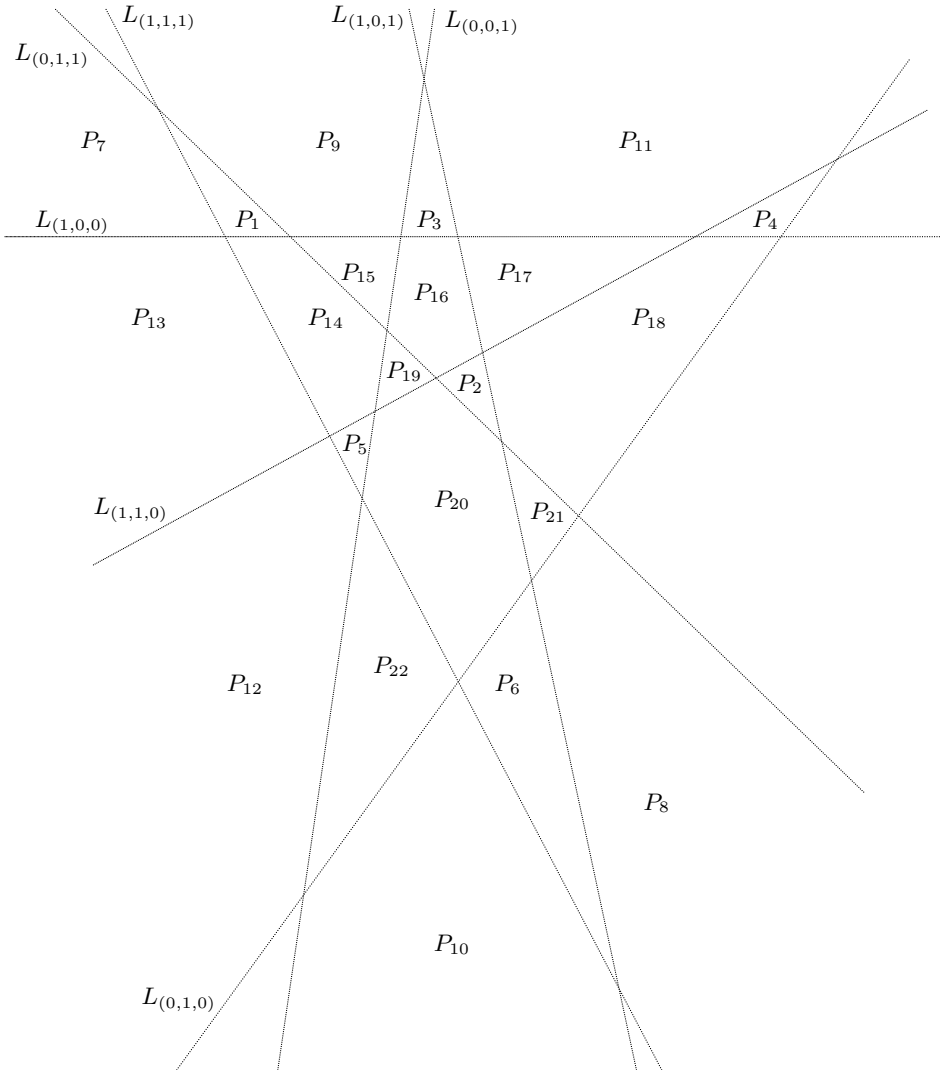


Рис. 5

Покажем, что существуют оснащенные чисто вещественные конфигурации Кампеделли  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , такие, что, во-первых, они могут быть получены друг из друга с помощью выворачиваний неположительных треугольников с линейно зависимыми сторонами, а во-вторых, они либо имеют различные типы, либо имеют различные типы примыкания положительных многоугольников. Тогда из теоремы 8 следует, что вещественные поверхности Кампеделли  $X(\mathcal{L}_i)$  имеют диффеоморфные вещественные структуры, а согласно предложению 8 они являются попарно деформационно неэквивалентными.

Построение таких конфигураций начнем с чисто вещественной конфигурации  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$  типа  $(11, 5, 5, 1, 0)$ , которая изображена на рис. 5. Эта конфигурация имеет шесть попарно непересекающихся треугольников  $P_1, \dots, P_6$ . Каждый из них имеет линейно зависимые стороны. Число сторон каждого из многоугольников  $P_7, \dots, P_{22}$  приведено в табл.  $(0, 0, 0, 0)_1$ .

Таблица  $(0, 0, 0, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
4	4	5	4	5	4	4	5
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
3	5	3	5	3	6	3	3

Присвоим треугольнику  $P_1$  знаки  $(+, +, +)$  и продолжим этот выбор до оснащения конфигурации  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$  знаками с помощью правила перехода (7). Тогда, как легко проверить,  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$  имеет только два положительных многоугольника, а именно  $P_1$  и  $P_2$ .

Чтобы убедиться в том, что можно независимо производить выворачивания четырех треугольников  $P_3, \dots, P_6$ , достаточно рассмотреть конфигурацию  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$  как малое возмущение прямых конфигурации, изображенной на рис. 6. После этого остается выбрать последовательность выворачиваний и посчитать для каждой полученной конфигурации ее тип и тип примыкания ее положительных многоугольников.

Однако сначала для удобства счета соберем в табл.  $(0, 0, 0, 0)_2$  типы примыканий треугольников  $P_1, \dots, P_6$  конфигурации  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$ .

Таблица  $(0, 0, 0, 0)_2$

$P_1$	$(4_7, 4'_8, 5_9, 3'_{15}, 5_{14}, 4'_{13})$	$P_2$	$(5_{16}, 3'_{17}, 5_{18}, 3'_{21}, 6_{20}, 3'_{19})$
$P_3$	$(5_9, 4'_{10}, 5_{11}, 3'_{17}, 5_{16}, 3'_{15})$	$P_4$	$(5_{11}, 4'_{12}, 4_{13}, 4'_7, 5_{18}, 3'_{17})$
$P_5$	$(4_{12}, 4'_{13}, 5_{14}, 3'_{19}, 6_{20}, 3'_{22})$	$P_6$	$(6_{20}, 3'_{21}, 4_8, 5'_9, 4_{10}, 3'_{22})$

(Здесь мы включили в тип примыкания треугольника  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , номера примыкающих многоугольников. Например, в типе примыкания  $(4_7, 4'_8, 5_9, 3'_{15}, 5_{14}, 4'_{13})$  треугольника  $P_1$  примыкание  $4_7$  означает, что многоугольник  $P_7$  является четырехугольником и имеет общую сторону с треугольником  $P_1$ .)

Тип примыкания положительных многоугольников конфигурации  $\mathcal{L}_{(0,0,0,0)}$  имеет вид

$$A_{(0,0,0,0)} = ((4, 4', 5, 3', 5, 4'), (5, 3', 5, 3', 6, 3')).$$

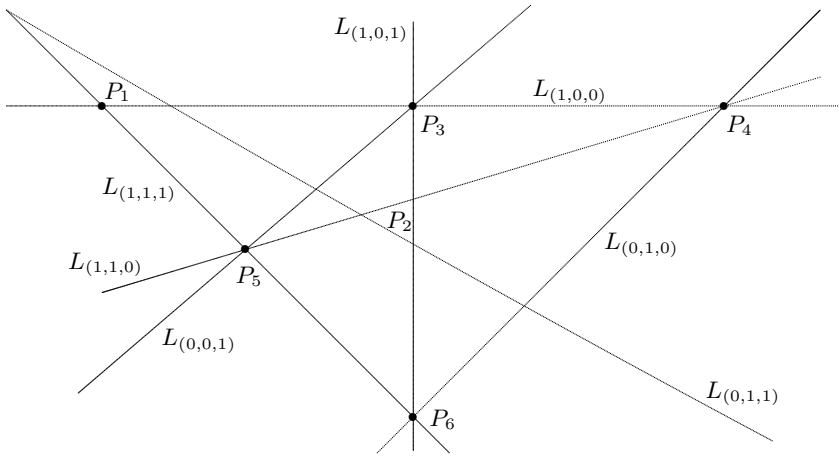


Рис. 6

Произведем в  $\mathcal{L}_{(0,0,0)}$  выворачивание треугольника  $P_3$  и получим новую оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли. Обозначим ее через  $\mathcal{L}_{(1,0,0)}$  и используем для ее многоугольников те же обозначения  $P_i$  (в п. 3.2 они обозначались через  $P'_i$ ). Чтобы вычислить ее инварианты, заметим, во-первых, что тип примыкания треугольника  $P_3$  преобразуется следующим образом:

$$(5_9, 4'_{10}, 5_{11}, 3'_{17}, 5_{16}, 3'_{15}) \mapsto (4'_9, 5_{10}, 4'_{11}, 4_{17}, 4'_{16}, 4_{15}).$$

После этого пересчитаем числа сторон многоугольников  $P_9, P_{10}, P_{11}, P_{17}, P_{16}, P_{15}$ , приведенные в табл.  $(0, 0, 0)_1$  и табл.  $(0, 0, 0)_2$ , и получим таблицы для  $\mathcal{L}_{(1,0,0)}$ : табл.  $(1, 0, 0)_1$  и табл.  $(1, 0, 0)_2$ .

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
4	4	4	5	4	4	4	5
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
4	4	4	5	3	6	3	3

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 0)_2$

$P_1$	$(4_7, 4'_8, 4_9, 4'_{15}, 5_{14}, 4'_{13})$	$P_2$	$(4_{16}, 4'_{17}, 5_{18}, 3'_{21}, 6_{20}, 3'_{19})$
$P_3$	$(4'_9, 5_{10}, 4'_{11}, 4_{17}, 4'_{16}, 4_{15})$	$P_4$	$(4_{11}, 4'_{12}, 4_{13}, 4'_7, 5_{18}, 4'_{17})$
$P_5$	$(4_{12}, 4'_{13}, 5_{14}, 3'_{19}, 6_{20}, 3'_{22})$	$P_6$	$(6_{20}, 3'_{21}, 4_8, 4'_9, 5_{10}, 3'_{22})$



Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(1,0,0,0)}$  имеет тип  $(9, 9, 3, 1, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(1,0,0,0)} = ((4, 4', 4, 4', 5, 4'), (4, 4', 5, 3', 6, 3')).$$

Осуществим в  $\mathcal{L}_{(1,0,0,0)}$  выворачивание треугольника  $P_4$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(1,1,0,0)}$  и, как и выше, произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(1,1,0,0)}$ : табл.  $(1, 1, 0, 0)_1$  и табл.  $(1, 1, 0, 0)_2$ .

ТАБЛИЦА  $(1, 1, 0, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
5	4	4	5	3	5	3	5
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
4	4	5	4	3	6	3	3

ТАБЛИЦА  $(1, 1, 0, 0)_2$

$P_1$	$(5_7, 4'_8, 4_9, 4'_{15}, 5_{14}, 3'_{13})$	$P_2$	$(4_{16}, 5'_{17}, 4_{18}, 3'_{21}, 6_{20}, 3'_{19})$
$P_3$	$(4'_9, 5_{10}, 3'_{11}, 5_{17}, 4'_{16}, 4_{15})$	$P_4$	$(3'_{11}, 5_{12}, 3'_{13}, 5_7, 4'_{18}, 5_{17})$
$P_5$	$(5_{12}, 3'_{13}, 5_{14}, 3'_{19}, 6_{20}, 3'_{22})$	$P_6$	$(6_{20}, 3'_{21}, 4_8, 4'_9, 5_{10}, 3'_{22})$

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(1,1,0,0)}$  имеет тип  $(11, 5, 5, 1, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и тип примыкания ее положительных многоугольников имеет вид

$$A_{(1,1,0,0)} = ((5, 4', 4, 4', 5, 3'), (4, 5', 4, 3', 6, 3')).$$

Осуществим в  $\mathcal{L}_{(1,1,0,0)}$  выворачивание треугольника  $P_3$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(0,1,0,0)}$  и, как и выше, произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(0,1,0,0)}$ : табл.  $(0, 1, 0, 0)_1$  и табл.  $(0, 1, 0, 0)_2$ .

ТАБЛИЦА  $(0, 1, 0, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
5	4	5	4	4	5	3	5
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
3	5	4	4	3	6	3	3

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(0,1,0,0)}$  имеет тип  $(11, 5, 5, 1, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(0,1,0,0)} = ((5, 4', 5, 3', 5, 3'), (5, 4', 4, 3', 6, 3')).$$

ТАБЛИЦА  $(0, 1, 0, 0)_2$ 

$P_1$	$(5_7, 4'_8, 5_9, 3'_{15}, 5_{14}, 3'_{13})$	$P_2$	$(5_{16}, 4'_{17}, 4_{18}, 3'_{21}, 6_{20}, 3'_{19})$
$P_3$	$(5_9, 4'_{10}, 4_{11}, 4'_{17}, 5_{16}, 3'_{15})$	$P_4$	$(4'_{11}, 5_{12}, 3'_{13}, 5_7, 4'_{18}, 4_{17})$
$P_5$	$(5_{12}, 3'_{13}, 5_{14}, 3'_{19}, 6_{20}, 3'_{22})$	$P_6$	$(6_{20}, 3'_{21}, 4_8, 5'_9, 4_{10}, 3'_{22})$

Осуществим в  $\mathcal{L}_{(0,1,0,0)}$  выворачивание треугольника  $P_5$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(0,1,1,0)}$  и, как и выше, произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(0,1,1,0)}$ : табл.  $(0, 1, 1, 0)_1$  и табл.  $(0, 1, 1, 0)_2$ .

ТАБЛИЦА  $(0, 1, 1, 0)_1$ 

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
5	4	5	4	4	4	4	4
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
3	5	4	4	4	5	3	4

ТАБЛИЦА  $(0, 1, 1, 0)_2$ 

$P_1$	$(5_7, 4'_8, 5_9, 3'_{15}, 4_{14}, 4'_{13})$	$P_2$	$(5_{16}, 4'_{17}, 4_{18}, 3'_{21}, 5_{20}, 4'_{19})$
$P_3$	$(5_9, 4'_{10}, 4_{11}, 4'_{17}, 5_{16}, 3'_{15})$	$P_4$	$(4'_{11}, 4_{12}, 4'_{13}, 5_7, 4'_{18}, 4_{17})$
$P_5$	$(4'_{12}, 4_{13}, 4'_{14}, 4_{19}, 5'_{20}, 4_{22})$	$P_6$	$(5_{20}, 3'_{21}, 4_8, 5'_9, 4_{10}, 4'_{22})$

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(0,1,1,0)}$  имеет тип  $(8, 10, 4, 0, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(0,1,1,0)} = ((5, 4', 5, 3', 4, 4'), (5, 4', 4, 3', 5, 4')).$$

Осуществим в  $\mathcal{L}_{(0,1,1,0)}$  выворачивание треугольника  $P_4$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(0,0,1,0)}$  и, как и выше, произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(0,0,1,0)}$ : табл.  $(0, 0, 1, 0)_1$  и табл.  $(0, 0, 1, 0)_2$ .

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(0,0,1,0)}$  имеет тип  $(10, 6, 6, 0, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(0,0,1,0)} = ((4, 4', 5, 3', 4, 5'), (5, 3', 5, 3', 5, 4')).$$

Осуществим в  $\mathcal{L}_{(0,0,1,0)}$  выворачивание треугольника  $P_3$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(1,0,1,0)}$  и, как и выше, произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(1,0,1,0)}$ : табл.  $(1, 0, 1, 0)_1$  и табл.  $(1, 0, 1, 0)_2$ .

ТАБЛИЦА  $(0, 0, 1, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
4	4	5	4	5	3	5	4
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
3	5	3	5	4	5	3	4

ТАБЛИЦА  $(0, 0, 1, 0)_2$

$P_1$	$(4_7, 4'_8, 5_9, 3'_{15}, 4_{14}, 5'_{13})$	$P_2$	$(5_{16}, 3'_{17}, 5_{18}, 3'_{21}, 5_{20}, 4'_{19})$
$P_3$	$(5_9, 4'_{10}, 5_{11}, 3'_{17}, 5_{16}, 3'_{15})$	$P_4$	$(5_{11}, 3'_{12}, 5_{13}, 4'_7, 5_{18}, 3'_{17})$
$P_5$	$(3'_{12}, 5_{13}, 4'_{14}, 4_{19}, 5'_{20}, 4_{22})$	$P_6$	$(5_{20}, 3'_{21}, 4_8, 5'_9, 4_{10}, 4'_{22})$

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 1, 0)_1$

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
4	4	4	5	4	3	5	4
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
4	4	4	5	4	5	3	4

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 1, 0)_2$

$P_1$	$(4_7, 4'_8, 4_9, 4'_{15}, 4_{14}, 5'_{13})$	$P_2$	$(4_{16}, 4'_{17}, 5_{18}, 3'_{21}, 5_{20}, 4'_{19})$
$P_3$	$(4'_9, 5_{10}, 4'_{11}, 4_{17}, 4'_{16}, 4_{15})$	$P_4$	$(4_{11}, 3'_{12}, 5_{13}, 4'_7, 5_{18}, 4'_{17})$
$P_5$	$(3'_{12}, 5_{13}, 4'_{14}, 4_{19}, 5'_{20}, 4_{22})$	$P_6$	$(5_{20}, 3'_{21}, 4_8, 4'_9, 5_{10}, 4'_{22})$

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(1,0,1,0)}$  имеет тип  $(8, 10, 4, 0, 0)$ , она содержит только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , и ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(1,0,1,0)} = ((4, 4', 4, 4', 4, 5'), (4, 4', 5, 3', 5, 4')).$$

Наконец, осуществим в  $\mathcal{L}_{(1,0,1,0)}$  выворачивание треугольника  $P_6$ , обозначим полученную оснащенную чисто вещественную конфигурацию Кампеделли через  $\mathcal{L}_{(1,0,1,1)}$  и, как и выше, еще раз произведем аналогичный пересчет. В результате получим две таблицы для  $\mathcal{L}_{(1,0,1,1)}$ : табл.  $(1, 0, 1, 1)_1$  и табл.  $(1, 0, 1, 1)_2$ .

Мы видим, что конфигурация  $\mathcal{L}_{(1,0,1,1)}$  имеет тип  $(8, 10, 4, 0, 0)$ , она имеет два и только два положительных многоугольника, именно  $P_1$  и  $P_2$ , ее тип примыкания положительных многоугольников – это

$$A_{(1,0,1,1)} = ((4, 3', 5, 4', 4, 5'), (4, 4', 5, 4', 4, 4')).$$

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 1, 1)_1$ 

$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
4	3	5	4	4	3	5	4
$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$	$P_{21}$	$P_{22}$
4	4	4	5	4	4	4	5

ТАБЛИЦА  $(1, 0, 1, 1)_2$ 

$P_1$	$(4_7, 3'_8, 5_9, 4'_{15}, 4_{14}, 5'_{13})$	$P_2$	$(4_{16}, 4'_{17}, 5_{18}, 4'_{21}, 4_{20}, 4'_{19})$
$P_3$	$(5'_9, 4_{10}, 4'_{11}, 4_{17}, 4'_{16}, 4_{15})$	$P_4$	$(4_{11}, 3'_{12}, 5_{13}, 4'_7, 5_{18}, 4'_{17})$
$P_5$	$(3'_{12}, 5_{13}, 4'_{14}, 4_{19}, 4'_{20}, 5_{22})$	$P_6$	$(4'_{20}, 4_{21}, 3'_8, 5_9, 4'_{10}, 5_{22})$

Из полученных результатов следует, что каждые две из восьми построенных конфигураций либо имеют различные типы, либо, если типы совпадают, имеют различные типы примыкания положительных многоугольников.

### 4.3. Смешанно-вещественные конфигурации.

**ПРИМЕР 3.** Вещественные поверхности Кампеделли типов  $I_-$  и  $III_+$  имеют диффеоморфные вещественные структуры, но они не являются деформационно эквивалентными.

Действительно, пусть  $(X, c)$  – вещественная поверхность Кампеделли типа  $III_+$ , ассоциированная со смешанно-вещественной конфигурацией Кампеделли типа  $III$ . Мы можем двигать вершину  $p_2$  так, что она переходит из треугольника  $P_3$  в  $P_1$  через бесконечно удаленную прямую  $L_{(1,1,0)}$ . Из теоремы 8 следует, что вещественные структуры  $c$  и  $c_1$  диффеоморфны.

С другой стороны, согласно теореме 9 вещественные поверхности типа  $I_-$  не являются деформационно эквивалентными вещественным поверхностям типа  $III_+$ .

В действительности, в случае смешанно-вещественных типов можно дать полный ответ на проблему  $DIF \neq DEF$ . Из следующей теоремы и теоремы 9 получаем, что число классов диффеоморфности равно четырем, а число классов деформационной эквивалентности равно пяти.

**ТЕОРЕМА 10.** *Вещественные структуры типов  $I_{\pm}$ ,  $II_+$  и  $III_-$  попарно не диффеоморфны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из леммы 9 следует, что для всех этих типов соответствующие множества вещественных точек имеют различные топологические типы.

## § 5. Заключительные замечания

**5.1. Почти максимальная поверхность.** Напомним, что вещественная поверхность  $(X, c)$  называется  $(M - k)$ -поверхностью, если

$$\dim H_*(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2k.$$

Можно показать, что среди поверхностей Кампеделли нет  $M$ - и  $(M - 1)$ -поверхностей. Поэтому, как нам кажется, следующая  $(M - 2)$ -поверхность представляет некоторый интерес.

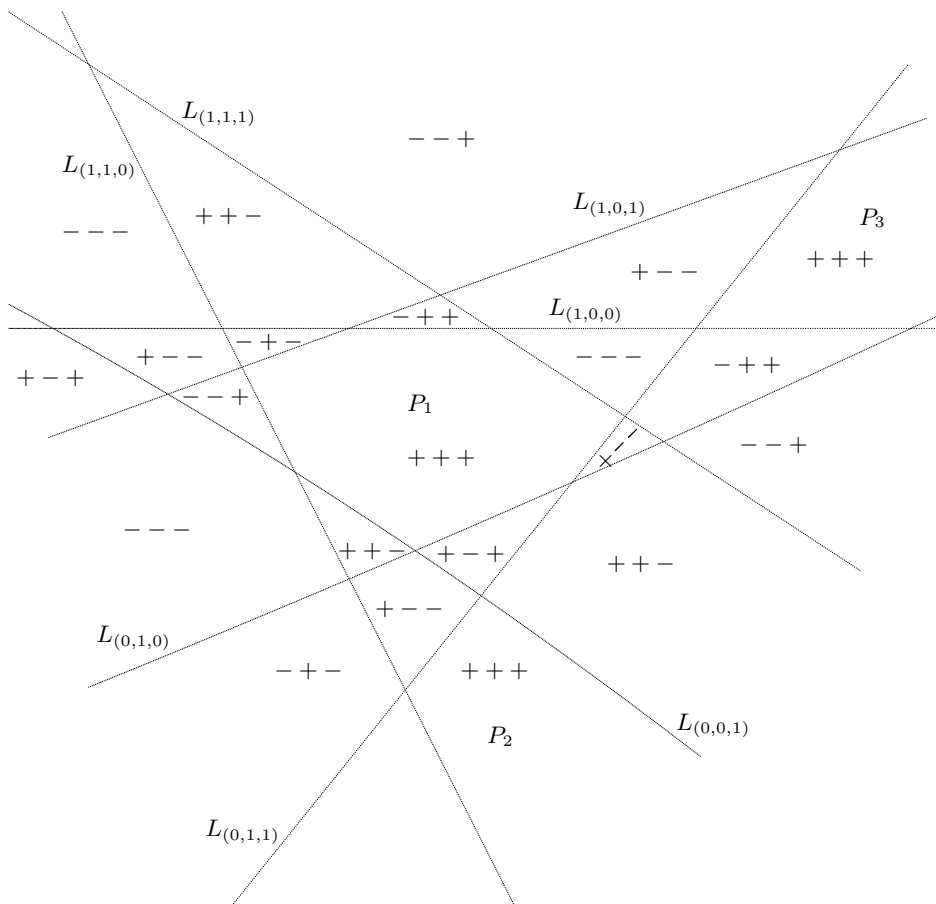


Рис. 7

Пусть  $\mathcal{L}$  – оснащенная чисто вещественная конфигурация Кампеделли, изображенная на рис. 7. Ее тип равен  $(7, 14, 0, 0, 1)$ , и она имеет в точности три положительных многоугольника: семиугольник  $P_1$  и два четырехугольника:  $P_2$  со сторонами  $L(1,1,0)$ ,  $L(0,1,1)$ ,  $L(0,0,1)$   $L(1,1,1)$  и  $P_3$  со сторонами  $L(0,1,0)$ ,  $L(1,0,0)$ ,  $L(0,1,1)$  и  $L(1,0,1)$ .

Рассмотрим поверхность Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$  вместе с ее вещественной структурой  $c = c_{+++}$ . Согласно следствию 4 вещественная часть  $X_{\mathbb{R}}$  поверхности  $(X, c)$  состоит из трех связных компонент: компоненты, лежащей над  $P_1$  и являющейся связной суммой восьми вещественных проективных плоскостей (эйлерова характеристика равна  $-6$ ), компоненты, лежащей над  $P_2$  и являющейся бутылкой Клейна, и компоненты, лежащей над  $P_3$  и являющейся тором.

Заметим, что согласно неравенству Смита–Тома

$$\dim H_*(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 10 + 4 + 4 < 22 = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

в то время как обычные числа Бетти поверхности  $X_{\mathbb{R}}$  превышают числа Бетти комплексной поверхности  $X_{\mathbb{C}}$ :

$$\dim H_*(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Q}) = 8 + 2 + 4 = 14 > 10 = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}; \mathbb{Q}).$$

**5.2. Плохие выворачивания треугольников.** Покажем, что в следствии 5 предположение о знаках является существенным: без него не существует локального эквивариантного диффеоморфизма между вещественными поверхностями Кампеделли  $X(\mathcal{L})$  и  $X(\mathcal{L}')$ , где  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$ , как и в следствии 5, получаются друг из друга выворачиванием треугольника. Например, в менее очевидном случае, когда  $X(\mathcal{L})$  (а следовательно, и  $X(\mathcal{L}')$ ) имеет вещественную компоненту над этим треугольником, чтобы доказать отсутствие локального эквивариантного диффеоморфизма, можно использовать следующее рассуждение. Необходимо сравнить факторпространства по действию комплексного сопряжения двух  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -накрытий Гаула малого шара с центром в тройной точке, разветвленных соответственно в  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  (напомним, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ ). Более точно, границы этих факторпространств естественным образом отождествлены, и вопрос состоит в том, можно ли это отождествление продолжить на внутренние точки. На самом деле это в точности один из вопросов, в эквивалентной форме исследовавшихся в работе [21], откуда следует, что такое продолжение *не возможно* тогда и только тогда, когда четырехмерное многообразие  $M$ , полученное склейкой факторпространств вдоль границы, имеет те же гомологии, что и четырехмерная сфера  $S^4$ . Замечая, что на вещественной проективной плоскости, лежащей над исчезающим треугольником в одной половине многообразия  $M$ , существует петля, зацепленная с вещественной проективной плоскостью, лежащей над исчезающим треугольником в другой половине этого многообразия (достаточно рассмотреть петлю, лежащую над одной из сторон исчезающего треугольника), и применяя двойственность Пуанкаре–Лefшеца к членам  $H_i(M, M^-)$ ,  $M^{\pm}$  – половины многообразия  $M$ , в точной последовательности

$$\dots \rightarrow H_2(M, M^-) \rightarrow H_1(M^-) \rightarrow H_1(M) \rightarrow H_1(M, M^-) \rightarrow \dots,$$

легко получим, что  $H_*(M) = H_*(S^4)$ .

**5.3. Преобразования класса  $T$ .** Теорема 8 (и следствие 5) основаны на сглаживании  $T(-4)$ -особенностей. Последние образуют простейший пример так называемых *особенностей класса  $T$* . Эти особенности, введенные Колларом и Шеперд-Барроном в работе [16], играют важную роль в примерах Манетти [18]: как доказано в [18], сглаживание таких особенностей приводит к диффеоморфным поверхностям. В качестве следствия получаем, что утверждение и доказательство теоремы 8 дословно распространяются на вещественные сглаживания вещественных поверхностей с любыми не вещественными особенностями класса  $T$ .

**5.4. О числе деформационных классов.** В соответствии с предложением 8 множество деформационных классов вещественных поверхностей Кампеделли распадается на два непересекающихся подмножества: деформационные классы вещественных поверхностей, ассоциированных со смешанно-вещественными конфигурациями Кампеделли, и деформационные классы

поверхностей, ассоциированных с чисто вещественными конфигурациями Кампеделли. Согласно теореме 9 первое подмножество состоит только из пяти классов. Покажем, что второе подмножество содержит более ста элементов.

Вычисление опирается на предложение 5 (и предложение 8), из которого вытекает, что если  $X(\mathcal{L}_1)$  и  $X(\mathcal{L}_2)$  деформационно эквивалентны, где  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 1, 2$ , — оснащенные чисто вещественные конфигурации Кампеделли без тройных точек, то, применив перенумерующий изоморфизм  $h: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  для перенумерации прямых в конфигурации  $\mathcal{L}_2$  и сделав соответствующую ему замену оснащения, найдем гомеоморфизм  $\lambda: \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , который отображает  $\mathcal{L}_1 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  в  $\mathcal{L}_2 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  с сохранением нумераций и оснащений знаками.

Рассмотрим конфигурацию  $\mathcal{L}$  типа  $(11, 5, 5, 1, 0)$ , состоящую из семи вещественных прямых и не имеющую тройных точек. Эта конфигурация допускает  $7!$  различных нумераций, превращающих ее в чисто вещественные конфигурации Кампеделли, и для каждой нумерации имеется восемь различных оснащений знаками. Любой гомеоморфизм плоскости  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , оставляющий на месте конфигурацию  $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , должен оставлять на месте прямую  $L_{(1,0,0)} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  и шестиугольник  $P_{20}$  (см. рис. 5). Легко видеть, что с точностью до изотопии, оставляющей на месте конфигурацию  $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , за исключением тождественного гомеоморфизма, существует только один такой гомеоморфизм. Поскольку порядок группы автоморфизмов  $\text{Aut } G$  группы  $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  равен  $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ , то мы видим, что существует по крайней мере  $\frac{7! \cdot 8}{(7 \cdot 6 \cdot 4) \cdot 2} = 120$  различных деформационных классов вещественных поверхностей Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$ , где  $\mathcal{L}$  — конфигурация типа  $(11, 5, 5, 1, 0)$ .

Фактически имеется гораздо больше деформационных классов. Действительно, аналогичное рассуждение показывает, что имеется по крайней мере еще 120 деформационных классов вещественных поверхностей Кампеделли  $X = X(\mathcal{L})$ , где  $\mathcal{L}$  — конфигурации Кампеделли типа  $(9, 9, 3, 1, 0)$ . Кроме того, как известно (см. [11], [5] и [23]), имеется девять других деформационных классов (семь из них имеют другие типы) чисто вещественных конфигураций семи прямых без тройных точек. Отметим также, что две такие конфигурации являются деформационно эквивалентными тогда и только тогда, когда они гомеоморфны [11] (доказательство можно найти в [10]). Аналогично, автомеоморфизм оснащенной чисто вещественной конфигурации семи прямых без тройных точек должен быть изотопным проективному автоморфизму, что в соответствии с предложением 8 влекло бы совпадение числа деформационных классов чисто вещественных поверхностей Кампеделли с числом деформационных классов оснащенных чисто вещественных конфигураций Кампеделли без тройных точек.

### Список литературы

1. Bonahon F., “Difféotopies des espaces lenticulaires”, *Topology*, **22:3** (1983), 305–314.
2. Campedelli L., “Sopra alcuni piani doppi notevoli con curve di diramazione del decimo ordine”, *Atti Acad. Naz. Lincei*, **15** (1932), 536–542.
3. Catanese F., Frediani P., “Real hyperelliptic surfaces and the orbifold fundamental group”, *J. Inst. Math. Jussieu*, **2:2** (2003), 163–233.
4. Comessatti A., “Sulle varietà abeliane reali, I e II”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **2** (1924), 67–106; **4** (1926), 27–71.
5. Cummings L. D., “Hexagonal systems of seven lines in a plane”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1932), 105–109.

6. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V., *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin–N. Y., 2000.
7. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V., “Finiteness and Quasi-Simplicity for Symmetric K3-Surfaces”, *Duke Math. J.*, **122** (2004), 1–49.
8. Degtyarev A., Kharlamov V., “On the moduli space of real Enriques surfaces”, *C. R. Acad. Sci.*, **324**:3 (1997), 317–322.
9. Degtyarev A., Kharlamov V., “Real rational surfaces are quasi-simple”, *J. reine angew. Matem.*, **551** (2002), 87–99.
10. Финашин С., *Проективные конфигурации и вещественные алгебраические кривые*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ленинградский гос. ун-т, Ленинград, 1985.
11. Finashin S., “Configurations of seven points in  $\mathbb{R}P^3$ ”, *Topology and geometry, Rohlin Semin.* 1984–1986, Lecture Notes in Math., **1346**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 501–526.
12. Grauert H., Remmert R., “Komplexe Räume”, *Math. Ann.*, **136** (1958), 245–318.
13. Klein F., “Ueber Flächen dritter Ordnung”, *Math. Ann.*, **6** (1873), 551–581.
14. Куликов Вик. С., Харламов В. М., “Вещественные структуры на жестких поверхностях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 133–152.
15. Kharlamov V., Kulikov Vik. S., “Deformation inequivalent complex conjugated complex structures and applications”, *Turk. J. Math.*, **26** (2002), 1–25.
16. Kollár J., Shepherd-Barron N. I., “Threefolds and deformations of surface singularities”, *Invent. Math.*, **91**:2 (1988), 299–338.
17. Куликов Вик. С., “Старые и новый примеры поверхностей общего типа с  $p_g = 0$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 123–170.
18. Manetti Y., “On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces”, *Invent. Math.*, **143**:1 (2001), 29–76.
19. Miyaoka Y., “On numerically Campedelli surfaces”, *Complex analysis and Algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 113–118.
20. Никулин В. В., “Целочисленные симметричные билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177.
21. Price T. M., “Homeomorphisms of quaternion space and projective planes in four space”, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, **23** (1977), 112–128.
22. Welschinger J. Y., “Real structures on minimal ruled surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **78**:2 (2003), 418–446.
23. White H. S., “The plane figure of seven lines”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1932), 60–65.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)  
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
*E-mail*: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию  
 16.08.2005

В. М. Харламов (V. M. Kharlamov)  
 Страсбургский университет им. Л. Пастера  
*E-mail*: kharlam@math.u-strasbg.fr