Äquivalenz Hermitescher Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

Von WALTHER LANDHERR in Hamburg.

Die Methoden, mit denen HASSE die quadratischen Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper[1]) behandelt, lassen sich mit einer kleinen Modifikation auch auf Hermitesche Formen anwenden. Hiervon soll die vorliegende Note berichten.

k sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper mit dem quadratischen Oberkörper $\Omega = k(\sqrt{a})$, $a \subset k$. Der Automorphismus von Ω, welcher k elementweise festläßt und $\sqrt{a}$ in $-\sqrt{a}$ überführt, werde durch $\alpha \to \bar{\alpha}$ bezeichnet. Unter einer Hermiteschen Form verstehen wir dann einen Ausdruck der Gestalt

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k$$

mit $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$. x_i und $\bar{x}_k$ sind Variable; wenn man für die x_i Werte aus Ω einsetzt, so soll man für die $\bar{x}_k$ die Konjugierten nehmen. Wir setzen

$$A = (a_{ik})$$

und nennen f nicht ausgeartet, wenn $|A| \neq 0$ ist. Wenn man neue Variable einführt, so transformiert sich A folgendermaßen:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, y_k, \qquad (s_{ik}) = S, \qquad |S| \neq 0,$$

$$f = \sum_{i,k,\nu,\mu} s_{\nu i}\, a_{\nu\mu}\, \bar{s}_{\mu k}\, y_i\, \bar{y}_k,$$

also

$$A^* = S' A \bar{S},$$

worin $S' = (s_{ki})$ und $\bar{S} = (\bar{s}_{ik})$ ist. Mit A ist auch A^* nicht ausgeartet. Mit diesen Transformationen kann man A auf Diagonalgestalt bringen: Wenn alle $a_{ik} = 0$, so sind wir fertig; sind alle $a_{ii} = 0$, aber ein $a_{ik} \neq 0$, so können wir durch eine Substitution

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + \alpha y_k, \\ x_k &= y_i + y_k, \\ x_\nu &= y_\nu \text{ für } \nu \neq i, k, \end{aligned}$$

$$\alpha \neq 1, \qquad \alpha a_{ik} + \bar{\alpha} \bar{a}_{ik} \neq 0$$

[1]) Journal für reine u. angew. Math., Crelle 152 und 153 (fünf Arbeiten).

erreichen, daß $a_{kk} \neq 0$ wird. Wenn etwa $a_{11} \neq 0\,(a_{11} \subset k)$, so führen wir

$$x_1 = y_1 - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{a_{\nu 1}}{a_{11}} y_\nu ,$$
$$x_i = y_i \quad \text{für } i \neq 1$$

ein. Nun wird $f = a_{11} y_1 \bar{y}_1 + g(y_2, \cdots, y_n, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)$. Setzen wir vollständige Induktion nach n an, so finden wir

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i \bar{x}_i .$$

Wenn $|A| = 0$ ist, so kann man die Form mit weniger Variablen schreiben. Wir machen jetzt die Voraussetzung $|A| \neq 0$ und stellen die Invarianten der Form auf. Da

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} (y_i^2 - a z_i^2)$$

(wenn $x_i \subset \Omega$, so y_i und $z_i \subset k$), so ist für eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{\infty, l}$, an welcher $a < 0$ ist, die Anzahl der negativen a_{ii} eine Invariante $\mathfrak{J}_l$ der Form, denn sie ist $\frac{1}{2} J_l(f(y_i, z_i))$, und dieser Wert bleibt sogar bei beliebiger linearer Transformation der y_i und z_i invariant[2]). Für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ liefert das Normenrestsymbol $\left(\frac{|A|,\ \Omega/k}{\mathfrak{p}}\right)$ oder $\left(\frac{|A|,\ a}{\mathfrak{p}}\right) = d_{\mathfrak{p}}$ eine Invariante, weil

$$|S' A \bar{S}| = N_{\Omega/k}(|S|)\,|A|.$$

Da die Darstellbarkeit von $m \subset k$ durch f auf eine quadratische Form $f(y_i, z_i)$ aus k zurückgeführt ist, findet man sofort die genauen Bedingungen:

Wenn $m \neq 0$, so muß für $n = 1$

$$\left(\frac{a_{11}}{m}, a\right) = 1$$

(die $\mathfrak{p}$ aus den Normenrestsymbolen lassen wir weg), für $n \geqq 2$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}_l(m) \leqq \mathfrak{J}_l \leqq n - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}_l(m)$$

für alle $\mathfrak{p}_{\infty, l}$, welche in Ω/k verzweigt sind[3]); diese Anzahl sei w. Ist $m = 0$, so muß für $n = 2$ $(-|A|, a) = 1$, für $n \geqq 3$ $0 < \mathfrak{J}_l < n$.

Für die Äquivalenz (vermöge $A^* = S' A \bar{S}$) kann man dasselbe Verfahren wie bei Hasse[4]) anwenden. Man habe zwei nicht ausgeartete

---

[2]) Crelle 153, Seite 159, Satz 2.

[3]) Crelle 153, Seite 129, Satz 19.

[4]) Crelle 152, Seite 218, Satz 4.

Formen $f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ und $g = \sum_{i,k} b_{ik} y_i \bar{y}_k$, welche gleiche Invarianten $\mathfrak{J}_l$ und $d_\mathfrak{p}$ haben. Wir wählen aus k w Zahlen ε_l mit den Vorzeichen

$$\operatorname{sign}_e(\varepsilon_l) = 1 - 2\,\delta_{el}.$$

Für $n = 1$ ist $\frac{a_{11}}{b_{11}}$ Norm, also f äquivalent g. Wir setzen vollständige Induktion nach n an. f und g stellen $a_{11}^* = \prod_{\mathfrak{J}_l = n} \varepsilon_l$ (bzw. $+1$) mit den Wertsystemen

$$x_i = \xi_i, \qquad y_i = \eta_i \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

dar. Wenn man nun

$$x_1 = \xi_1 x_1^*, \qquad y_1 = \eta_1 y_1^*,$$
$$x_i = x_i^* + \xi_i x_1^*, \qquad y_i = y_i^* + \eta_i y_1^* \text{ für } i \geqq 2$$

einführt, so bekommen $x_1^* \bar{x}_1^*$ und $y_1^* \bar{y}_1^*$ den Koeffizienten a_{11}^*. Wie oben kann man x_1^* und y_1^* von den anderen Variablen trennen und findet zwei Restformen mit $n-1$ Variablen und gleichen Invarianten, welche nach Induktionsvoraussetzung äquivalent sind, also ist f äquivalent mit g. Auch hier gilt das Prinzip, daß zwei Formen in k äquivalent sind, wenn sie es in jedem $k_\mathfrak{p}$ sind. Hieraus findet man die Invarianten für ausgeartete Formen auf demselben Weg wie bei quadratischen Formen.

Die Invarianten genügen den notwendigen Bedingungen:

$$0 \leqq \mathfrak{J}_l \leqq n, \qquad d_{\mathfrak{p}_{\infty,l}} = (-1)^{\mathfrak{J}_l}, \qquad d_\mathfrak{p} = \pm 1,$$
$$\text{nur endlich viele } d_\mathfrak{p} \neq 1,$$
$$\text{für } \left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \text{ ist } d_\mathfrak{p} = +1 \text{ und } \prod_\mathfrak{p} d_\mathfrak{p} = +1.$$

Diese Bedingungen sind auch hinreichend für die Existenz einer Form: Man löse

$$\left(\frac{|A|, a}{\mathfrak{p}}\right) \equiv d_\mathfrak{p}, \qquad a_{ik} = \prod_{\mathfrak{J}_l > n-i} \varepsilon_l\,\delta_{ik} \quad \text{für } i \neq n, \qquad a_{nn} = \frac{|A|}{\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}}.$$

Die Darstellung einer Form durch eine andere wird ebenso bewiesen wie bei Hasse[5]). Für die Komplexsumme gilt $n = n_1 + n_2$, $\mathfrak{J}_l = \mathfrak{J}_{l,1} + \mathfrak{J}_{l,2}$ und $d_\mathfrak{p} = d_{\mathfrak{p},1}\, d_{\mathfrak{p},2}$. Die einzige Änderung besteht darin, daß von einigen Faktoren das Konjugierte zu nehmen ist. Notwendig und hinreichend für die Darstellbarkeit von $g\,(n_1, \mathfrak{J}_{l,1}, d_{\mathfrak{p},1})$ durch $f(n, \mathfrak{J}_l, d_\mathfrak{p})$ ist

$$f \text{ äquivalent } g \quad \text{oder} \quad 0 < n - n_1, \quad 0 \leqq \mathfrak{J}_l - \mathfrak{J}_{l,1} \leqq n - n_1.$$

[5]) Crelle 153, Seite 14, § 1.

Die Bedingungen für die ν-äre Darstellung der Null sind

$$\nu \leqq \frac{n}{2}, \qquad \nu \leqq \mathfrak{J}_l \leqq n - \nu$$

und für $\nu = \frac{n}{2}$ noch

$$d_{\mathfrak{p}} \equiv \left(\frac{-1,\, a}{\mathfrak{p}}\right)^{\nu}.$$

Betrachtet man die multiplikative Äquivalenz $A^* = tS'A\bar{S}$ mit $t \subset k$, so erhält man die Invarianten n, $j_l = |n - 2\,\mathfrak{J}_l|$ und für gerade n noch $d_{\mathfrak{p}}$. Haben zwei Formen A und B dieselben Invarianten, so kann man durch Multiplikation mit den ε_l erreichen, daß alle $\mathfrak{J}_l$ gleich werden; für ungerade n muß man B noch mit $|AB|$ multiplizieren, dann sind auch alle $d_{\mathfrak{p}}$ gleich, also sind diese Formen äquivalent und A und B multiplikativ äquivalent. Die Bedingungen zwischen den Invarianten sind

$$0 \leqq j_l \leqq n, \qquad j_l \equiv n \pmod 2),$$

ferner für gerades n $d_{\mathfrak{p}_{\infty, l}} = (-1)^{\frac{1}{2}(n+j_l)}$, nur endlich viele $d_{\mathfrak{p}} \neq 1$, für $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ ist $d_{\mathfrak{p}} = 1$ und $\prod\limits_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} = +1$. Auch bei den Hermiteschen Formen hängt die ν-äre Darstellbarkeit der Null nur von diesen multiplikativen Invarianten ab.

Hamburg, April 1935.