Ernst Steinitz. *Überreicht vom Verfasser.*

BEITRÄGE ZUR ANALYSIS SITUS.

Von

Ernst Steinitz.

Aus den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.
VII. Jahrgang. 3. Stück. Sitzung vom 18. Dezember 1907.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Sonderabdruck aus Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Beiträge zur Analysis situs.

Von Ernst Steinitz.

I.

Während bei Euklides von den allgemeinen Begriffen Linie und Fläche ausgegangen wird und sodann erst Gerade und Ebene als spezielle Linien und Flächen charakterisiert werden, ist es in den modernen Systemen üblich, die Gerade und die Ebene direkt, und zwar als Grundbegriffe, einzuführen, jene allgemeinen Begriffe aber in der axiomatischen Grundlegung überhaupt nicht zu verwenden. Und man ist vielfach geneigt, eine solche Verwendung schlechthin als unzulässig zu erklären. Indessen haben gerade die vielen Untersuchungen, welche in neuester Zeit über die Grundlagen der Geometrie angestellt worden sind, immer deutlicher hervortreten lassen, daß es nicht angängig erscheint, apodiktisch zu erklären: dieser Begriff ist ein Grund-begriff, jener ist es nicht, oder: dieser Satz ist Axiom, jener muß bewiesen werden, sondern daß man verschiedene Systeme von Grundbegriffen und Axiomen aufstellen kann, derart, daß ein Begriff oder Satz in dem einen System zu den Grundbegriffen bzw. Axiomen zählt, in dem andern nicht. So wird man auch nicht von vornherein ein System von der Hand weisen können, das mit Linien und Flächen als Grundbegriffen operiert. Man wird vielmehr zu prüfen haben, ob die über diese Begriffe in Form von Axiomen gemachten Aussagen widerspruchsfrei sind. Ist das der Fall, und ist man überdies geneigt, die Übereinstimmung mit der Anschauung zuzugestehen, so ist an der Zulässigkeit des Systems kein Zweifel mehr. Sein Wert kann nur nach seiner Leistungsfähigkeit eingeschätzt werden.

Nun gibt es in der Tat eine geometrische Disziplin, für welche die Verwendung der Allgemeinbegriffe Linie und Fläche von Anbeginn ein Bedürfnis ist: die Analysis situs. Für sie erweist sich der gewöhnliche Aufbau der Geometrie als unzweckmäßig, weil schon die primitivsten Tatsachen, die demjenigen, der, nicht gewohnt, sich an Definitionen zu halten, nur mit der Anschauung operiert, ganz selbstverständlich erscheinen, sich aus den üblichen Axiomen nur sehr mühsam ableiten lassen. Man denke z. B. an den Jordanschen Satz. Tatsächlich haben sich auch so hervorragende Mathematiker wie Riemann keineswegs gescheut, bei der Bearbeitung der Analysis situs auf die Anschauung zu rekurrieren. In neuerer Zeit ist vielfach der Versuch gemacht worden, dies durch analytische Behandlung zu vermeiden: dabei werden die größten Schwierigkeiten dadurch umgangen, daß man bei den definierenden Funktionen außer der Stetigkeit wenigstens noch Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitungen voraussetzt. Aber wer sich mit Problemen der Analysis situs beschäftigt hat, wird sich kaum des Gefühls erwehren können, daß bei derartiger Behandlung Begriffe herbeigezogen werden, die dem Wesen der Sache fremd sind. Es ist mir auch kein Fall einer konsequenten analytischen Durchführung bekannt. Meines Erachtens ist das Verfahren Riemanns nur insofern ergänzungsbedürftig, als Riemann stillschweigend mit einer Gruppe von Axiomen operierte, die weder von ihm noch vor ihm irgendwo ausdrücklich postuliert waren.

Es ist deshalb gewiß als ein Fortschritt zu begrüßen, daß der Artikel über Analysis situs in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften[1]) ein Axiomsystem bringt, welches für den Aufbau dieser Disziplin, wenigstens im dreidimensionalen Raum ausreicht. Dadurch werden natürlich die wichtigen und schwierigen Probleme, welche die Analysis situs im Rahmen der gewöhnlichen Geometrie darbietet, weder gelöst noch aus der Welt geschafft; aber es ist die Möglichkeit gegeben, eine Analysis situs als selbständige Disziplin in voller Strenge weiterzuführen, ohne die Erledigung jener Fragen abwarten zu müssen.

Als Grundbegriffe oder Elemente haben wir in der Analysis situs zunächst den Punkt, die Strecke (worunter man sich eine zwei Punkte verbindende, sich selbst nicht schneidende Linie vorzustellen hat), das (einfach zusammenhängende) Flächenstück, das (einfache, kugelartige) Raumstück.[2]) Wir wollen

1) Enzyklopädie, III AB 3. Analysis situs von M. Dehn und P. Heegaard.

2) Die Ausführungen dieses Abschnitts haben lediglich den Zweck einer Einleitung. Von einer strengen Scheidung rein kombinatorischer und anschaulicher Betrachtungen ist deshalb abgesehen.

diese Elemente gemeinsam als *Zellen* bezeichnen und als *Zellen 0ter, 1ter, 2ter, 3ter Dimension* unterscheiden. Ihnen schließen sich die *Zellen nter Dimension* an. Eine Zelle ist vorzustellen als eine Punktmenge, und wir haben an ihr *innere Punkte* und solche der *Begrenzung* zu unterscheiden. Eine Zelle $n$ter Dimension hat zur Begrenzung eine *sphärische Mannigfaltigkeit* von $n-1$ Dimensionen, welche sich in verschiedener Weise aus $(n-1)$-dimensionalen Zellen aufbauen läßt. Es genügen zwei solche Zellen, die alsdann ihre gesamte Begrenzung gemein haben. — Zelle und sphärische Mannigfaltigkeit sind die einfachsten Repräsentanten *berandeter* und (in sich) *geschlossener Mannigfaltigkeiten.*

Zum allgemeinen Begriff der *n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* gelangt man, indem man sich dieselben in näher zu definierender Weise aus n-dimensionalen Zellen als *Polyeder* aufgebaut denkt. Als Elemente des Polyeders gelten seine n-dimensionalen Zellen, die $(n-1)$-dimensionalen Zellen, aus denen sich die Begrenzungen der n-dimensionalen zusammensetzen, die $(n-2)$-dimensionalen Zellen, welche die Begrenzungen der $(n-1)$-dimensionalen bilden usf., endlich die Punkte, welche die Strecken oder Kanten begrenzen. Zwei Elemente a, b verschiedener Dimension sollen *inzident* heißen, wenn dasjenige von kleinerer Dimension zur Begrenzung des andern gehört; bei gleicher Dimension sei Inzidenz gleichbedeutend mit Identität. Das Symbol (a, b) werde gleich 1 oder 0 gesetzt, je nachdem a und b inzident sind oder nicht.

Nicht jeder Zellenbau gilt hier als Polyeder und damit als Mannigfaltigkeit. Die Vorstellung, es sei möglich den Aufbau einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit so zu vollziehen, daß irgendein gegebener innerer Punkt von ihr innerer Punkt einer Zelle wird, führt zu einem Gesetz, das wir als *erstes Dualitätsgesetz* bezeichnen wollen. Es lautet:

Zu jedem geschlossenen n-dimensionalen Polyeder $\mathfrak{P}$ existiert ein reziprokes $\mathfrak{P}'$ derart, daß ein-eindeutig den k-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{P}$ die $(n-k)$-dimensionalen von $\mathfrak{P}'$ und inzidenten Zellen wieder inzidente entsprechen.[1])

Bei einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$[2]) gehört jede $(n-1)$-dimensionale Zelle der Begrenzung zweier, bei einer berandeten der Begrenzung zweier oder einer n-dimensionalen Zelle an. Die $(n-1)$-dimensionalen Zellen der zweiten Art nebst den mit ihnen inzidenten Zellen geringerer Dimension heißen *Randzellen*; sie bilden die *Begrenzung* oder *Berandung* der $\mathfrak{M}^{(n)}$. Diese Berandung besteht aus einer oder mehreren geschlossenen $\mathfrak{M}^{(n-1)}$.

Eins der wichtigsten Probleme der Analysis situs ist die Aufstellung der verschiedenen Typen von Mannigfaltigkeiten $n$ter Dimension. Gewöhnlich definiert man: Zwei Mannigfaltigkeiten heißen *homöomorph* (äquivalent) oder *von gleichem Typus*, wenn sie sich ein-eindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen. Geht man jedoch von der rein kombinatorischen Auffassung der polyedrischen Mannigfaltigkeiten aus, als Systemen, welche durch die zwischen ihren Elementen bestehenden Inzidenzen bestimmt sind, so ist natürlich von der Einführung des Stetigkeitsbegriffs Abstand zu nehmen. Die Definition des Homöomorphismus muß also anders gefaßt werden. Dies geschieht

1) Ein zweites, wohl zuerst von Poincaré bewiesenes Dualitätsgesetz sagt aus, daß reziproke Polyeder stets homöomorphe Mannigfaltigkeiten repräsentieren.

2) Ein oberer in Klammern gesetzter Index bezeichnet hier und im folgenden stets die Dimension.

bei Dehn-Heegaard mittels des Begriffs der „*internen Transformation*“ oder, wie wir auch sagen können „*Zellteilung*“. Eine Strecke $s^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)}$ wird durch Einführung eines inneren Punktes $c^{(0)}$ in zwei Strecken $a^{(0)}c^{(0)}$ und $c^{(0)}b^{(0)}$ „geteilt“. Um zur Teilung einer n-dimensionalen Zelle $a^{(n)} (n > 1)$ zu gelangen, hat man zunächst eine $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_{n-2}$ (im Falle $n = 2$ ein Punktepaar) anzunehmen, deren Elemente mit $a^{(n)}$ inzidieren. Durch $\mathfrak{K}_{n-2}$ zerfällt die Begrenzung von $a^{(n)}$ in zwei Teile $\mathfrak{Z}'_{n-1}$ und $\mathfrak{Z}''_{n-1}$. Durch Einführung einer neuen $(n-1)$-dimensionalen Zelle $c^{(n-1)}$ wird jetzt $a^{(n)}$ in zwei Zellen $a_1^{(n)}$ und $a_2^{(n)}$ „geteilt“, von denen die eine durch $\mathfrak{Z}'_{n-1}$ und $c^{(n-1)}$, die andere durch $\mathfrak{Z}''_{n-1}$ und $c^{(n-1)}$ begrenzt wird. Haben wir nun zwei Polyeder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, so stellen beide homöomorphe Mannigfaltigkeiten dar: Erstens, wenn sie isomorph sind, d. h. wenn eine ein-eindeutige Beziehung zwischen ihren Elementen gleicher Dimension möglich ist, bei welcher inzidenten Elementen wieder inzidente entsprechen; zweitens, wenn sie durch interne Transformationen in isomorphe Polyeder übergeführt werden können. Dies ist die Definition des Homöomorphismus bei Dehn-Heegaard; daß sie mit unserer Anschauung übereinstimmt, müssen wir als Axiom hinnehmen.[1])

Für die wichtigsten Fragen der Analysis situs ist die polyedrische Darstellung nur Mittel zum Zweck. Es werden uns hauptsächlich solche Eigenschaften interessieren, welche dem Typus als solchem zukommen, also von der jeweiligen polyedrischen Darstellung unabhängig sind, mithin bei internen Transformationen ungeändert bleiben und deshalb auch *Invarianten* genannt werden. Unser Ziel wird sein, für die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen ein *volles Invariantensystem* aufzustellen, d. h. ein System von der Beschaffenheit, daß die Übereinstimmung zweier Mannigfaltigkeiten in den Invarianten des Systems notwendig und hinreichend für den Homöomorphismus ist. Die drei Invarianten, welche bereits bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten auftreten, sind: die *Charakteristik*, die *Zahl der Ränder*, das *Verhalten der Indikatrix.*

Die Charakteristik C, die bekannte Zahl $e + f - k$ der gewöhnlichen Polyedertheorie, kann für (polyedrische) Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension definiert werden durch die Gleichung

$$C = \sum_a (-1)^{[a]}, \tag{1}$$

wo sich die Summe über alle Elemente a der betrachteten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erstreckt und das Symbol $[a]$ die Dimension von a bezeichnet. Nach dem gewöhnlichen Eulerschen Satz ist C für sphärische Mannigfaltigkeiten zweiter

1) Es kommen hier die Zerlegungsaxiome (a. a. O. S. 168/169) in Betracht. Die unter a) angeführten Axiome, durch welche die für den Homöomorphismus angegebenen Bedingungen als hinreichend charakterisiert werden, dürfte wohl jeder ohne weiteres als der Anschauung gemäß anerkennen. Die Aufstellung des Axioms b) hingegen, aus welchem die Notwendigkeit der Bedingungen folgen würde, scheint mir doch — namentlich, wenn man zu höheren Dimensionen aufsteigt, aber auch schon im dreidimensionalen Gebiet — gewagt. Seine Widerspruchslosigkeit genügt natürlich nicht. Ich habe mich noch nicht davon überzeugen können, ob man nicht doch genötigt sein könnte, für $n \geq 3$ eine allgemeinere Zellteilung dem Begriff des Homöomorphismus zugrunde zu legen. Ich komme bei anderer Gelegenheit auf diesen Punkt zurück, welcher eine ausführlichere Erörterung erfordert.

Dimension gleich 2, und die bekannte Verallgemeinerung für sphärische Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen besagt, daß C gleich 2 oder 0, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hat man daher eine beliebige $\mathfrak{M}^{(n)}$, und ist a irgend ein Element derselben, so ist die über die Elemente b der Begrenzung von a erstreckte Summe $\sum_b (-1)^{[b]}$ gleich $1-(-1)^{[a]}$. Erstrecken wir die Summe aber auch noch über das Element a selbst, so tritt noch $(-1)^{[a]}$ hinzu, und wir erhalten $\sum_b (-1)^{[b]} = 1$. Mit Hilfe des Symbols (a, b) (s. S. 31) können wir dieser Gleichung die Form

$$(2) \qquad \sum_b (a, b)\cdot(-1)^{[b]} = 1 \qquad ([b] \leqq [a])$$

geben, wo sich die Summe über alle Elemente b von $\mathfrak{M}^{(n)}$ erstreckt, welche der Bedingung $[b] \leqq [a]$ genügen. Wird (2) mit $(-1)^{[a]}$ multipliziert, so ergibt sich

$$\sum_{a,b} (a, b)\cdot(-1)^{[a]+[b]} = \sum_a (-1)^{[a]}, \qquad ([b] \leqq [a])$$

also wegen (1)

$$(3) \qquad C = \sum_{a,b} (a, b)\cdot(-1)^{[a]+[b]}. \qquad ([b] \leqq [a])$$

Hier erstreckt sich die Summe über alle Elementenpaare a, b, wobei a auch $= b$ sein kann, aber zwischen a, b und b, a nicht unterschieden wird. Gleichung (3) gilt für jede Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$. Ist $\mathfrak{M}^{(n)}$ geschlossen, so erhält man nach dem ersten Dualitätsgesetz unmittelbar eine zu (2) analoge Gleichung

$$\sum_a (a, b)\cdot(-1)^{n-[a]} = 1. \qquad ([a] \geqq [b])$$

Summieren wir diese für jedes Element b von $\mathfrak{M}^{(n)}$ gültige Gleichung nach Multiplikation mit $(-1)^{[b]}$ über b, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$(-1)^n \cdot \sum_{a,b} (a, b)\cdot(-1)^{[a]+[b]} = \sum_b (-1)^{[b]} = C. \qquad ([a] \geqq [b])$$

Die Vergleichung mit (3) ergibt

$$C = (-1)^n \cdot C,$$

also für ungerades n $C = 0$. D. h. *jede geschlossene Mannigfaltigkeit ungerader Dimension hat die Charakteristik* 0, ein Satz, der wohl zuerst von Poincaré für $n = 3$, von Dehn-Heegaard allgemein bewiesen wurde. — Bezeichnet man mit α_{pq} die Anzahl der Inzidenzen von je einem Element p-ter und einem q-ter Dimension, wobei $\alpha_{kk} = \alpha_k$ die Anzahl der Elemente k-ter Dimension wird, so kann man den Gleichungen (1), (3) die Form geben

$$(4) \qquad C = \sum_p (-1)^p \alpha_p = \sum_{pq} (-1)^{p+q} \alpha_{pq}. \qquad (q \leqq p)$$

Die sphärischen Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension sind also durch ihre Charakteristik in keiner Weise vor andern geschlossenen Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet. Bei den Mannigfaltigkeiten gerader Dimension verhält es sich anders, doch gibt es auch hier, wenn die Dimension ≥ 4 ist, nichtsphärische Mannigfaltigkeiten mit der Charakteristik 2. Im Falle $n = 2$ hingegen kommt die Charakteristik 2 ausschließlich den sphärischen Mannigfaltigkeiten zu; alle andern, geschlossene wie berandete, haben eine Charakteristik < 2. Hierauf beruht die dominierende Stellung, welche der Eulersche Satz in der Theorie der gewöhnlichen Polyeder einnimmt.

Bei dem Begriff Indikatrix hat man zunächst die Zelle zu betrachten. An jeder Zelle kann man zwei Indikatrizen unterscheiden. Bei der Strecke ist Indikatrix gleichwertig mit Richtungssinn, bei der Flächenzelle mit Umlaufssinn. Wir können auch sagen: der Flächenzelle erteilen wir eine bestimmte Indikatrix, indem wir jeder ihrer Begrenzungsstrecken eine bestimmte Indikatrix erteilen, und zwar so, daß ein Punkt, in welchem zwei Strecken aneinander grenzen, bei der einen als Endpunkt, bei der andern als Anfangspunkt erscheint. Ebenso erteilen wir einer dreidimensionalen Zelle eine bestimmte Indikatrix, indem wir jeder der begrenzenden Flächenzellen eine bestimmte Indikatrix erteilen, wobei das (Möbiussche Kanten-) Gesetz zu befolgen ist: Jede Kante $s^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)}$ erhält in der Indikatrix der einen von ihr begrenzten Flächenzelle die Richtung (Indikatrix) $a^{(0)}b^{(0)}$, in der Indikatrix der andern die Richtung $b^{(0)}a^{(0)}$. In gleicher Weise läßt sich die Indikatrix für Zellen höherer Dimension definieren, da ja das Möbiussche Gesetz sich ohne weiteres verallgemeinern läßt. Es wird hiernach auch klar sein, wie man die Fortsetzung einer für eine Zelle $a^{(n)}$ einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ gegebenen Indikatrix auf einem von $a^{(n)}$ ausgehenden und von Zelle zu Nachbarzelle fortschreitenden Wege zu verstehen hat. Machen wir einen geschlossenen Weg, so kann es sein, daß die Indikatrix am Ende mit der am Anfang übereinstimmt, oder daß beide entgegengesetzt sind. Führen alle geschlossenen Wege zur Ausgangsindikatrix zurück, so können wir für die ganze $\mathfrak{M}^{(n)}$ zwei Indikatrizen auseinanderhalten. Andernfalls haben wir eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit umkehrbarer Indikatrix; die beiden Indikatrizen gehen ineinander über wie die verschiedenen Zweige einer analytischen Funktion.[1] Hinsichtlich des Verhaltens der Indikatrix hat man also zwei verschiedene Arten von Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden.

Die Lehre vom *Homöomorphismus zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten* gipfelt in dem Nachweis des Satzes, daß für diese die Charakteristik, die Zahl der Ränder und das Verhalten der Indikatrix das volle Invariantensystem darstellen. Bei Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen ist dies nicht mehr der Fall. Schon Riemann und Betti haben es unternommen, weitere Invarianten aufzusuchen. Poincaré, der in dieser Richtung weiter arbeitete, fügte zu den „*Bettischen Zahlen*" (die bei ihm nicht ganz dieselbe Bedeutung haben, wie bei Betti) noch andere Invarianten unter dem Namen *Torsionskoeffizienten* hinzu, ohne daß dadurch die Lehre vom Homöomorphismus auch nur für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten erledigt würde.

Auf diese Untersuchungen, welche auf die rein arithmetische Theorie der Elementarteiler führen und sich mittels derselben verhältnismäßig einfach erledigen lassen, soll hier nicht eingegangen werden.

---

1) Jedoch treten keine Verzweigungselemente auf. Wollen wir in diesem Punkte den Vergleich aufrecht erhalten, so dürfen wir nicht Funktionen auf der Kugel betrachten, sondern gewisse Funktionen auf Riemannschen Flächen höheren Geschlechts.

II.

Dagegen soll ein Punkt ausführlich erörtert werden, der an die vorangegangenen Betrachtungen über die Indikatrix anknüpft.

Bei den Flächen in unserem Raum erkennen wir leicht, daß die einseitigen eine umkehrbare, die zweiseitigen eine nichtumkehrbare Indikatrix haben. Stellen wir uns vor, daß wir auf der Fläche gehen und dabei jeder Zelle, die wir passieren, diejenige Indikatrix beilegen, welche einer Drehung linksum entspricht; dann ist leicht zu sehen: einmal, daß dem Kantengesetz genügt wird, sodann, daß bei Zurücklegung eines geschlossenen Weges die Seite zugleich mit der Indikatrix erhalten bleibt oder gewechselt wird.

Der springende Punkt in dieser Betrachtung ist die Möglichkeit, zwischen einer Drehung linksum und einer Drehung rechtsum zu unterscheiden. In dieser Möglichkeit drückt sich die Tatsache aus, daß die Indikatrix unseres Raumes nicht umkehrbar ist. Wir machen also bei unserer Deduktion von einer Eigenschaft unseres Raumes Gebrauch, die nicht allen Mannigfaltigkeiten, auch nicht allen dreidimensionalen, zukommt.

Die Nichtbeachtung dieses Umstandes ist die Quelle eines Fehlers geworden, der sich fast durch die ganze Literatur zieht. Immer wieder trifft man die Behauptung, die „Seite" drücke nicht eine Beziehung einer $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zu einer sie enthaltenden $\mathfrak{M}^{(n)}$ aus, sondern sei eine innere Eigenschaft der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$. Offenbar faßt man den Sachverhalt so auf, als stelle der Begriff *Indikatrix* die exakte Formulierung für den Begriff *Seite* dar, für welchen die gewöhnlich mittels der Normalen gegebene Definition allerdings unzulänglich ist. Das Irrtümliche dieser Auffassung wurde meines Wissens nur von Dyck erkannt. In einer im Jahre 1888 erschienenen Arbeit heißt es (Math. Ann. Bd. 32, S. 474) in bezug auf Einseitigkeit und Zweiseitigkeit: „Diese letztere Eigenschaft ist indessen — wie ich bei anderer Gelegenheit ausführen will — nur eine Lageneigenschaft der Flächen in unserm dreidimensionalen Raum, und sie kann verloren gehen, sofern wir von dieser Lage absehen."

Dyck ist indessen nicht mehr hierauf zurückgekommen, und seine Bemerkung ist offenbar nicht richtig verstanden worden, da sich niemand daran gekehrt hat, obwohl seine Arbeit wohlbekannt ist. Ich selbst bin vor einigen Jahren bei Untersuchungen über ein spezielles einseitiges Polyeder[1]) den Irrtum gewahr worden, und zwar an folgendem Beispiel. Bezeichnet man mit x_k $(k=0,\dots n)$ die homogenen Punktkoordinaten im projektiven Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$, so stellt die Gleichung $\sum x_k = 0$ eine lineare $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ — sie heiße $\mathfrak{A}$ — dar, welche in $\mathfrak{R}^{(n)}$ einseitig ist. Wendet man auf $\mathfrak{A}$ die Transformation $y_k = |x_k|$ $(k=0,\dots n)$ an, wo die Striche den absoluten Wert bezeichnen, so geht $\mathfrak{A}$ in eine homöomorphe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ über. (Die Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist in den einzelnen Teilen, in welche $\mathfrak{A}$ durch die linearen Mannigfaltigkeiten $x_k = 0$ zerschnitten wird, kollinear und, wenn wir die $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ $\sum x_k^2 = 0$ als Fundamentalmannigfaltigkeit einer projektiven Maßbestimmung wählen, sogar kongruent.) Für $n=3$ wird $\mathfrak{B}$ das einseitige Heptaeder (und zwar, wenn man das Koordinatentetraeder regulär und $\mathfrak{A}$ als unendlich ferne Ebene annimmt, das spezielle Heptaeder, welches in der zitierten Arbeit den Ausgangs-

1) Crelles Journal, Bd. 130, S. 281 ff.

punkt bildet). Dagegen ist $\mathfrak{B}$ für jedes gerade n zweiseitig. Die Tatsache, *daß* alsdann *von den beiden homöomorphen Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *die eine ein-, die andere zweiseitig ist,* mag für den ersten Augenblick befremden, erscheint jedoch ganz trivial, wenn man beachtet, daß sie ja schon bei Linien auf Flächen in unserem Raum vorkommt. Haben wir nämlich in unserem Raum eine einseitige Fläche $\mathfrak{F}$ und auf dieser eine geschlossene Linie l, längs deren sich die Seite von $\mathfrak{F}$ umkehrt, so ist auch l innerhalb $\mathfrak{F}$ einseitig; d. h. man gelangt, wenn man in der Fläche $\mathfrak{F}$ an einem Ufer von l entlang geht, nach einem Umlauf auf das andere Ufer. Aber die Linie l ist mit andern geschlossenen Linien von $\mathfrak{F}$ homöomorph, die auch zweiseitig (in $\mathfrak{F}$) sein können. Ferner kann man durch l zweiseitige z. B. kugelartige Flächen legen, dann ist l auf diesen zweiseitig. So ist auch die Gerade der projektiven Geometrie einseitig in der Ebene, zweiseitig auf dem Hyperboloid. Mit einem Wort, *nicht die Linie an sich ist ein- oder zweiseitig, sie ist es nur in ihrer Beziehung zur Fläche. Dasselbe* nun *begegnet uns bei Mannigfaltigkeiten jeder beliebigen Dimension.*

Natürlich muß man zunächst eine Definition des Begriffs Seite haben. Eine solche erhält man aber sehr leicht, wenn man von dem polyedrischen Aufbau der Mannigfaltigkeiten ausgeht. Nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine Fläche $\mathfrak{M}^{(2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(3)}$. An eine Flächenzelle $c^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$ grenzen dann zwei räumliche Zellen $a^{(3)}$ und $b^{(3)}$, und wir können zunächst inbezug auf die Zelle $c^{(2)}$ von einer $a^{(3)}$-*Seite* und einer $b^{(3)}$-*Seite* sprechen. Ist jetzt $c_1^{(2)}$ eine $c^{(2)}$ benachbarte Flächenzelle von $\mathfrak{M}^{(2)}$, in welche man von $c^{(2)}$ nach Überschreitung der Kante $s^{(1)}$ gelangt, so haben wir an $c_1'^{(2)}$ angrenzend wieder zwei räumliche Zellen $a_1^{(3)}$, $b_1^{(3)}$. Die räumlichen Zellen, welche die Kante $s^{(1)}$ enthalten, bilden einen Zyklus $\mathfrak{K}$, welcher durch die Flächenzellen $c^{(2)}$, $c_1^{(2)}$ in zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerrissen wird derart, daß man, wenn ein Heraustreten aus dem Zyklus $\mathfrak{K}$ und ein Überschreiten der Zellen $c^{(2)}$ und $c_1^{(2)}$ nicht gestattet ist, aus $\mathfrak{A}$ nicht nach $\mathfrak{B}$ gelangen kann. Von den räumlichen Zellen $a^{(3)}$, $b^{(3)}$ gehört die eine zu $\mathfrak{A}$, die andere zu $\mathfrak{B}$; dasselbe gilt von $a_1^{(3)}$ und $b_1^{(3)}$. Die beiden Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ repräsentieren „*die beiden Seiten der* $\mathfrak{M}^{(2)}$ *an der Stelle* (Kante) $s^{(1)}$“. Es mögen etwa $a^{(3)}$ und $a_1^{(3)}$ zu $\mathfrak{A}$, $b^{(3)}$ und $b_1^{(3)}$ zu $\mathfrak{B}$ gehören. Dann sagen wir: „Von der $a^{(3)}$- (bzw. $b^{(3)}$)-*Seite von* $c^{(2)}$ *gelangt man nach Überschreitung der Kante* $s^{(1)}$ *auf die* $a_1^{(3)}$- (bzw. $b_1^{(3)}$)-*Seite von* $c_1^{(2)}$. Durch diese Festsetzungen, welche sich leicht ganz allgemein fassen lassen, wird der Begriff „Seite“ („Fortsetzung der Seite“) in einer Weise definiert, die offenbar vollkommen den Vorstellungen entspricht, welche man gewöhnlich mit diesem Begriff verbindet.

Nun gelangt man aber auch sehr leicht zu dem nachstehenden Theorem, welches die Beziehungen von Seite und Indikatrix für eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ und eine in ihr gelegene $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ angibt. In bezug auf eine geschlossene Linie l einer $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, können wir fragen: erstens nach dem Verhalten der Seite von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, zweitens nach dem Verhalten der Indikadrix der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, drittens (da die Linie l ja auch innerhalb der $\mathfrak{M}^{(n)}$ verläuft) nach dem Verhalten der Indikatrix der $\mathfrak{M}^{(n)}$. Es ergibt sich:

Wenn beim Durchlaufen der Linie l sowohl die Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ als auch die von $\mathfrak{M}^{(n)}$ erhalten bleibt, so führt l zur Ausgangsseite zurück. Dasselbe tritt ein, wenn beide Indikatrizen sich umkehren. Wenn dagegen eine von *beiden Indikatrizen erhalten bleibt, die andere sich umkehrt, so gelangt man nach Durchlaufen von l auf die entgegengesetzte Seite der* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$.[1])

An diese Überlegungen schließen sich eine Reihe weiterer Fragen an, von denen einige hier besprochen werden sollen. So liegt es nahe, nachdem in der *„Seite“ eine Beziehung zwischen einer* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ *und einer* $\mathfrak{M}^{(n)}$ erkannt ist, analoge Beziehungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu suchen, bei denen die Dimensionsdifferenz > 1 ist. Solche sind in der Tat vorhanden. Haben wir z. B. in einer $\mathfrak{M}^{(3)}$ eine Linie, so können wir diese an jeder Stelle in dem einen oder andern Sinne umkreisen; und wenn wir uns für einen bestimmten Sinn entschieden haben, so können wir ihn längs der Linie kontinuierlich fortsetzen. Ist die Linie geschlossen, so entsteht die Frage, ob nach vollzogenem Umlauf der Sinn der Umkreisung mit dem ursprünglichen übereinstimmt oder nicht. Wie mit einer Linie innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(3)}$, so verhält es sich allgemein mit einer $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$: an jeder Stelle können wir die $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ in zweierlei Sinne umkreisen Es entspricht dies dem Umstand, daß die n-dimensionalen Zellen, welche mit einer $(n-2)$-dimensionalen der $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ inzidieren, einen Zyklus bilden. Wir haben hier offenbar eine ganz ähnliche Erscheinung, wie bei der Indikatrix einer Flächenzelle, nur daß diese durch einen Zyklus von Elementen geringerer Dimension bestimmt wird, während bei der Betrachtung der $\mathfrak{M}^{(n-2)}$ innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ der Zyklus von Elementen höherer Dimension gebildet wird. Dementsprechend stellen wir dem bisherigen Begriff der Indikatrix, für den wir zur Unterscheidung bisweilen die Bezeichnung *„untere Indikatrix“* gebrauchen, den Begriff *„obere Indikatrix“* gegenüber. Wir wollen ferner die Indikatrix, welche wir bei der n-dimensionalen Zelle kennen lernten, eine *n-dimensionale (untere) Indikatrix* nennen und diese Bezeichnungsweise entsprechend bei der oberen Indikatrix verwenden. Dann können wir an jeder Stelle einer $\mathfrak{M}^{(n-k)}$, die innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ liegt, (in bezug auf die $\mathfrak{M}^{(n)}$) zwei entgegengesetzte *obere Indikatrizen k^{ter} Dimension unterscheiden.* Der Begriff Seite fällt nunmehr unter den Begriff obere Indikatrix: es ist *Seite = obere Indikatrix erster Dimension.* Als Verallgemeinerung unseres obigen Satzes für eine innerhalb einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ liegende $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ ergibt sich nun leicht: *Nach Durchlaufung einer geschlossenen in der $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ gelegenen Linie l bleibt die obere Indikatrix der $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ (in bezug auf die $\mathfrak{M}^{(n)}$) erhalten, oder sie kehrt sich um, je nachdem bei diesem Umlauf die (unteren) Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(n-k)}$ und $\mathfrak{M}^{(n)}$ gleiches oder verschiedenes Verhalten zeigen.*

III.

In Ergänzung unserer bisherigen Betrachtungen seien hier diejenigen Eigenschaften polyedrischer Mannigfaltigkeiten aufgestellt, welche für eine abstrakte Begründung der zuletzt angegebenen Sätze ausreichen:

1. Eine polyedrische Mannigfaltigkeit ist ein endliches System von Elementen.

2. Jedem Element a wird eine *Dimension* $[a]$ zugeschrieben; dieselbe ist gleich einer der Zahlen $0, 1, \ldots n$.

1) Auf diesen Satz bezieht sich die Bemerkung auf S. 283, Zeile 13 meiner oben zitierten Arbeit.

3. Zwei Elemente a, b heißen entweder inzident (in Zeichen $(a, b) = 1$ oder $(b, a) = 1$) oder *nicht inzident* ($(a, b) = 0$ oder $(b, a) = 0$).

4. Ist $[a] = [b]$, so ist dann und nur dann $(a, b) = 1$, wenn $a = b$ ist; ist $(a, b) = 1$, $(b, c) = 1$, $[a] \geqq [b] \geqq [c]$, so ist $(a, c) = 1$.

5. Jedes Element erster Dimension (Strecke) ist mit zwei Elementen 0^{ter} Dimension (Ecken), jedes Element $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension mit ein oder zwei Elementen n^{ter} Dimension inzident.

Hieran schließt sich die S. 31 gegebene Definition der *Randelemente*.

6. Ist $(a, b) = 1$, $[a] = [b] + 2$, so gibt es genau zwei Elemente x, welche den Bedingungen $[x] = [b] + 1$, $(a, x) = 1$, $(b, x) = 1$ genügen.

Unter einem *Weg* verstehen wir eine geordnete Folge von Elementen $a_1, a_2, \dots a_p$ derart, daß $(a_1, a_2) = 1, (a_2, a_3) = 1, \dots (a_{p-1}, a_p) = 1$ ist. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{M}^{(n)}$ oder auch das ganze System, so heißt $\mathfrak{S}$ *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Elementen a, b allemal ein Weg mit a als Anfangs-, b als Endelement gefunden werden kann. Dann schließen sich an die bisherigen Bedingungen die folgenden:

7. $\mathfrak{M}^{(n)}$ ist ein zusammenhängendes System.

8. Ist $[a] \geqq 2$ (bzw. $[b] \leqq n-2$), so existieren Elemente (d. h. es existiert wenigstens ein Element) x, welche den Bedingungen $[x] < a$, $(a, x) = 1$ (bzw. $[x] > b$, $(b, x) = 1$) genügen, und diese Elemente bilden ein zusammenhängendes System.

Im Falle $n = 2$ stellen die unter 1. bis 8. gemachten Angaben ein vollständiges System von Grundbegriffen und Axiomen dar. Ist $n > 2$, so schließt sich der Bedingung 8. zunächst die folgende an:

9. Ist $(a, b) = 1$, $[a] \geqq [b] + 3$, so existieren Elemente x, welche den Bedingungen $(a, x) = 1$, $(b, x) = 1$, $[a] > [x] > [b]$ genügen; dieselben bilden ein zusammenhängendes System.[1])

Wir führen nun einige weitere Bezeichnungen ein. Ein Weg $a_1, a_2 \dots a_p$, bei welchem das letzte Element a_p mit dem ersten a_1 übereinstimmt, soll auch als *geschlossener Weg* gelten können. Dann ist $p-1$ die Zahl seiner Elemente, und wir unterscheiden den Weg von den Wegen nicht, welche durch zyklische Vertauschung aus ihm hervorgehn. — Sind zwei Elemente a_{k-1} und a_{k+1} eines geschlossenen Weges w mit einander inzident, so ergibt die Fortlassung des Elementes a_k einen neuen geschlossenen Weg w'; w und w' heißen *Nachbarwege*. Den (einmaligen oder wiederholten) Übergang aus einem Wege zu einem benachbarten, bezeichnen wir als *stetige Variation des Weges;* Wege, die durch stetige Variation aus einander hervorgehen, werden auch als *homotop* bezeichnet. Ein einzelnes Element soll auch als geschlossener Weg angesehen werden dürfen. Alle geschlossenen Wege, welche sich auf ein einziges Element zusammenziehen lassen (hierher gehören z. B. alle, welche aus zwei oder drei

---

1) Nunmehr ist es leicht, auch die für $\mathfrak{M}^{(3)}$ vorauszusetzenden Eigenschaften vollständig anzugeben. Formal am einfachsten gelangt man hierzu, wenn man den bisherigen Bedingungen noch die folgenden hinzufügt: Im Falle $[a] = 3$ soll $\sum\limits_b (a, b) \cdot (-1)^{[b]} = 1$, im Falle $[a] = 0$ soll $\sum (a, b) \cdot (-1)^{[b]} = 0$ oder $= -1$ sein, je nachdem a Randelement ist oder nicht.

Elementen bestehen), sind (wie aus 7. folgt) unter einander homotop. Wir sagen: sie sind *homotop* 0.

Ein System von Elementen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ soll *Inzidenzgruppe* heißen, wenn es entweder nur aus einem einzigen Element oder aus mehreren Elementen besteht, die alle mit einander inzident sind. Eine Inzidenzgruppe kann höchstens $n+1$ Elemente enthalten; sie heißt *total*, wenn sie so viele enthält, sonst *partiell*. Zwei totale Inzidenzgruppen sollen *benachbart* heißen, wenn sie n Elemente gemein haben, sich also nur in einem unterscheiden. Ein System σ totaler Inzidenzgruppen nennen wir *zusammenhängend*, wenn man von irgend einer zugehörigen Inzidenzgruppe ausgehend und immer zu Nachbargruppen (innerhalb σ) fortschreitend zu jeder andern Gruppe von σ gelangen kann. Die totalen Inzidenzgruppen, welche eine gegebene partielle enthalten, bilden, wie aus den Bedingungen 1. bis 9. gefolgert werden kann, allemal ein zusammenhängendes System.

Wir kommen nun zur *Indikatrix*. Nach den früheren Erklärungen hätten wir einem Element $a^{(n)}$ eine bestimmte Indikatrix dadurch zu erteilen, daß wir ein mit $a^{(n)}$ inzidentes Element $a^{(n-1)}$ wählen und diesem eine bestimmte Indikatrix geben. Dies geschieht aber wieder, indem ein mit $a^{(n-1)}$ inzidentes Element $a^{(n-2)}$ gewählt wird usf. Schließlich steigen wir so bis zu einer „Strecke" $a^{(1)}$ herab, deren Indikatrix nun durch die Angabe einer ihrer Ecken $a^{(0)}$, (wir wollen ein für allemal festsetzen) derjenigen bestimmt wird, die als Anfangspunkt gelten soll. So würde also die Indikatrix von $a^{(n)}$ durch eine totale, $a^{(n)}$ enthaltende Inzidenzgruppe bestimmt werden. Die Möglichkeit aber, nach dem früher angegebenen Prinzip zwei Indikatrizen von $a^{(n)}$ auseinander zu halten, läßt sich (wenn $n \geqq 3$) nicht aus den Daten 1. bis 9. ableiten, sondern ist als weitere bei der Definition der Mannigfaltigkeiten vorauszusetzende Eigenschaft zu formulieren. Indem wir gleich die duale Eigenschaft hinzufügen, sprechen wir die neue Bedingung so aus:

10. Die totalen Inzidenzgruppen, welche ein gegebenes Element $a^{(n)}$ bzw. $a^{(0)}$ enthalten, zerfallen in zwei Klassen derart, daß je zwei benachbarte allemal verschiedenen Klassen angehören.

Ist nun a ein Element von $\mathfrak{M}^{(n)}$, dessen Dimension > 0 und $< n$ ist, so gehören zu a zwei Systeme a_u und a_o partieller Inzidenzgruppen, die so definiert sind: a_u (bzw. a_o) besteht aus denjenigen Inzidenzgruppen von je $[a]+1$ (bzw. $n-[a]+1$) Elementen, welche das Element a und außerdem nur Elemente enthalten, deren Dimension $<[a]$ (bzw. $>[a]$) ist. Aus 10. folgt leicht, daß auch jedes der Systeme a_u und a_o in zwei Klassen a'_u und a''_u (bzw. a'_o und a''_o) zerfällt, derart, daß benachbarte Gruppen, d. h. solche, die sich nur um ein Element unterscheiden, verschiedenen Klassen angehören.[1]) Wir nennen a'_u und a''_u *die beiden unteren*, a'_o und a''_o *die beiden oberen Indikatrizen des Elementes a*. Jede totale, a enthaltende Inzidenzgruppe „gehört" zu einer der Indikatrizen a'_u, a''_u, insofern als nach Weglassung derjenigen ihrer Elemente, deren Dimension $>[a]$ ist, eine zu a'_u oder a''_u gehörige Inzidenzgruppe zurückbleibt. Analoges gilt für a'_o und a''_o. — Als weitere Folge

1) Im Falle, daß $[a] = n-1$ und a ein Randelement ist, besteht a_o allerdings nur aus einer einzigen Gruppe, doch empfiehlt es sich, auch in diesem Falle zwei Klassen a'_o und a''_o zu zählen, von denen allerdings eine leer ausgeht. Ähnliche Festsetzungen sind im Folgenden zu beachten.

der bisherigen Annahmen ergibt sich dann ganz allgemein: Diejenigen totalen Inzidenzgruppen, welche eine gegebene partielle enthalten, zerfallen in zwei Klassen derart, daß benachbarte Gruppen verschiedenen Klassen angehören.

Besteht die partielle Inzidenzgruppe aus einem einzigen Element a, so bezeichnen wir die beiden Klassen auch als *„die beiden Indikatrizen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a“*. — Wie man sogleich sieht, stimmen im Falle $[a] = n$ bzw. $[a] = 0$ die beiden Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a mit den beiden unteren bzw. oberen Indikatrizen des Elementes a überein; im Falle $n > [a] > 0$ repräsentieren diejenigen totalen Inzidenzgruppen, welche (zugleich) zu a'_u und a'_o oder zu a''_u und a''_o gehören, die eine, diejenigen, welche zu a'_u und a''_o oder zu a''_u und a'_o gehören, die andere Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a.

Es seien nun a und b irgend zwei inzidente Elemente, a', a'' bzw. b', b'' die beiden Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a bzw. b, endlich seien c' und c'' die beiden Klassen, in welche das System der totalen, a und b zugleich enthaltenden Inzidenzgruppen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ zerfällt. Dann gehören die Gruppen der Klasse c' sämtlich zu einer und derselben Indikatrix von a und ebenso sämtlich zu einer und derselben Indikatrix von b. Nehmen wir an, sie gehörten zu den Indikatrizen a' und b', dann besteht c' (bzw. c'') aus denjenigen totalen Inzidenzgruppen, welche sowohl zu a' als auch zu b' (bzw. sowohl zu a'' als auch zu b'') gehören. Wir sagen: der Weg von a nach b führt die Indikatrix a' in b', die Indikatrix a'' in b'' über. Damit ist die *Fortsetzung der Indikatrix* definiert. — Die eingeführten Bezeichnungen rechtfertigen sich durch den leicht zu beweisenden Satz: W e n n a u f d e m g e s c h l o s s e n e n W e g e w d i e I n d i k a t r i x s i c h u m k e h r t (bzw. nicht umkehrt), s o g i l t d a s s e l b e f ü r a l l e W e g e, d i e a u s w d u r c h s t e t i g e V a r i a t i o n h e r v o r g e h e n.

Lassen sich alle totalen Inzidenzgruppen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ so in zwei Klassen einteilen, daß benachbarte allemal verschiedenen Klassen angehören, so haben wir eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit *nicht umkehrbarer Indikatrix*. Andernfalls gibt es Wege, auf denen sich die Indikatrix umkehrt. In diesem Falle können wir die Indikatrizen a', a'', welche a an den verschiedenen Stellen a besitzt als E l e m e n t e e i n e r n e u e n M a n n i g f a l t i g k e i t $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ auffassen, indem wir festsetzen, daß allgemein $[a'] = [a''] = [a]$ und (a', b') dann und nur dann $= 1$ sein soll, wenn $(a, b) = 1$ ist und überdies der von a nach b führende Weg die Indikatrix a' in die Indikatrix b' überführt. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ hat stets eine nicht umkehrbare Indikatrix und ihre Charakteristik ist doppelt so groß wie die von $\mathfrak{M}^{(n)}$. — Wichtig wird dieser Verdoppelungsprozeß dadurch, daß er, auf zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^{(n)}$, $\mathfrak{P}^{(n)}$ angewendet, stets wieder zu zwei homöomorphen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n)}$, $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ führt, sodaß also jedem Typus mit umkehrbarer Indikatrix ein solcher mit nicht umkehrbarer entspricht.[1]) Dieses Entsprechen ist bei den geschlossenen Flächen ($\mathfrak{M}^{(2)}$) ein

---

1) Der Beweis für diese letzte Behauptung kann natürlich, wenn $n > 2$, nicht auf Grund der Eigenschaften 1. bis 10. erbracht werden, da schon die Definition des Homöomorphismus noch auf weiteren Eigenschaften beruht. Im übrigen begegnet man beim Beweise natürlich keinen weiteren Schwierigkeiten als denen, die der Definition des Homöomorphismus im Wege stehen. Vgl. S. 32 Anm. Daß, falls $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch die D e h n - H e e g a a r d schen internen Transformationen auseinander ableitbar sind, dies auch für $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ gilt, ist leicht zu sehen.

ein-eindeutiges, da hier die verschiedenen Typen durch die Charakteristik vollständig auseinander gehalten werden, und diese bei den Typen mit umkehrbarer Indikatrix alle Werte $\leqq 1$, bei den andern alle graden Werte $\leqq 2$, also die doppelten jener annimmt.

Es sei $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ $(\nu = n - k,\ 0 < k < n)$ eine in der $\mathfrak{M}^{(n)}$ gelegene Mannigfaltigkeit; d. h. es sei $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{M}^{(n)}$, bestehend aus Elementen 0^{ter} bis ν^{ter} Dimension, welche den Bedingungen 1. bis 10. genügen, wofern man darin n durch ν, $\mathfrak{M}^{(n)}$ durch $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ ersetzt.[1] Es sei ferner w ein geschlossener, aus Elementen von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ bestehender Weg, und es seien a und b zwei auf einander folgende Elemente von w. An der Stelle a besitzt $\mathfrak{M}^{(n)}$ zwei Indikatrizen a', a'', ebenso $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ zwei Indikatrizen a_1', a_1''. Es bezeichne $\mathfrak{A}$ das System derjenigen totalen Inzidenzgruppen, welche eine in bezug auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ totale Inzidenzgruppe mit dem Element a enthalten. Dann zerfällt $\mathfrak{A}$ in vier Klassen: $a'a_1'$, $a'a_1''$, $a''a_1'$, $a''a_1''$, welche so definiert sind: eine Inzidenzgruppe aus $\mathfrak{A}$ zählt zur Klasse $a'a_1'$, wenn sie selbst zur Indikatrix a' und die in ihr enthaltene, in bezug auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ totale Inzidenzgruppe zu a_1' gehört, usf. Diese vier Klassen fassen wir zu zwei und zwei zu Doppelklassen, nämlich $a'a_1' + a''a_1''$ und $a'a_1'' + a''a_1'$ zusammen. Zwei benachbarte Inzidenzgruppen aus $\mathfrak{A}$ gehören zu derselben oder zu verschiedenen Doppelklassen, je nachdem die Dimension der Elemente, in denen sie sich unterscheiden $\leqq \nu$ oder $> \nu$ ist. Ist daher $\mathfrak{a}$ irgend ein ν-dimensionales mit a inzidentes Element von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$, so entsprechen seine beiden oberen Indikatrizen $\mathfrak{a}_o'$ und $\mathfrak{a}_o''$ den beiden Doppelklassen in der Weise, daß alle $\mathfrak{a}$ enthaltenden Inzidenzgruppen aus $\mathfrak{A}$, welche zu $\mathfrak{a}_o'$ gehören, in der einen, alle, welche zu $\mathfrak{a}_o''$ gehören, in der anderen Doppelklasse enthalten sind. Hiernach sprechen wir von den beiden oberen Indikatrizen von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ in bezug auf $\mathfrak{M}^{(n)}$ an der Stelle a und bezeichnen dieselben durch die Doppelklassen $a'a_1' + a''a_1''$ und $a'a_1'' + a''a_1'$, indem wir unter der Bezeichnung „obere Indikatrix $a'a_1' + a''a_1''$" diejenigen oberen Indikatrizen der mit a inzidenten ν-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ zusammenfassen, welche der Doppelklasse $a'a_1' + a''a_1''$ entsprechen. Wenn beim Fortschreiten vom Element a zum folgenden Element b des Weges w die Indikatrizen a', a'', a_1', a_1'' bzw. in b', b'', b_1', b_1'' übergehen, so sagen wir: die obere Indikatrix (Doppelklasse) $a'a_1' + a''a_1''$ geht in die obere Indikatrix (Doppelklasse) $b'b_1' + b''b_1''$ über. Wesentlich ist dabei, daß ein ν-dimensionales Element $\mathfrak{c}$, welches mit a und b zugleich inzident ist, in $a'a_1' + a''a_1''$ allemal dieselbe obere Indikatrix wie in $b'b_1' + b''b_1''$ hat.

Unser oben (S. 37) über das Verhalten der oberen Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges ausgesprochener Satz erscheint hier als unmittelbare Folge der letzten Definitionen und hat bei dieser Fassung

---

1) Der obigen Erklärung zufolge würde $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ in $\mathfrak{M}^{(n)}$ singularitätenfrei sein. Diese Voraussetzung ist für das folgende unnötig und nur der größeren Anschaulichkeit wegen gemacht. Man kann allgemein $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ als die Abbildung einer $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ (deren Elemente von denen der $\mathfrak{M}^{(n)}$ verschieden sind) auf die $\mathfrak{M}^{(n)}$ auffassen, wobei folgende Regeln festzuhalten sind (vgl. Enzyklopädie III AB 3 Nr. 6): Jedem Element von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ entspricht ein Element derselben Dimension von $\mathfrak{M}^{(n)}$; inzidenten Elementen von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ entsprechen inzidente von $\mathfrak{M}^{(n)}$; zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$, welche mit demselben ν-dimensionalen Element inzident sind, entsprechen verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$.

die Eigenschaften 1. bis 10. der $\mathfrak{M}^{(n)}$ zur alleinigen Voraussetzung, gilt daher nicht nur für Mannigfaltigkeiten (da diese durch die Eigenschaften 1. bis 10. nicht vollständig charakterisirt sind) sondern auch für allgemeinere Komplexe.

Wollen wir aber — indem wir uns jetzt auf den Fall $\nu = n - 1$ beschränken — nachweisen, daß sich der Begriff „*obere Indikatrix der* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$" nach der jetzigen Fassung mit dem Begriff „*Seite*" deckt, falls wir die Seite wie früher (S. 36) definieren, so müssen wir noch von einer weiteren Eigenschaft der $\mathfrak{M}^{(n)}$ Gebrauch machen, die es zum Ausdruck bringt, daß überhaupt an jeder Stelle der $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zwei Seiten unterschieden werden können. Behalten wir unsere letzten Bezeichnungen bei, so wird jedem mit a inzidenten $(n-1)$-dimensionalen Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ durch die Doppelklasse $a'a_1' + a''a_1''$ eine bestimmte obere Indikatrix und damit ein bestimmtes der beiden mit $\mathfrak{a}$ inzidenten n-dimensionalen Elemente zugeordnet. So entspricht der Doppelklasse $a'a_1' + a''a_1''$ ein System $\mathfrak{T}'$, bestehend aus einem oder mehreren Elementen von n-Dimensionen.[1]) Ein analoges System $\mathfrak{T}''$ entspricht der Doppelklasse $a'a_1'' + a''a_1'$. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ das System derjenigen mit a inzidenten Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$, welche nicht zu $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ gehören[2]), so sind $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ Teilsysteme von $\mathfrak{S}$. Auf Grund der Eigenschaften 1. bis 10. läßt sich nun leicht beweisen, daß die Elemente von $\mathfrak{T}'$ (ebenso die von $\mathfrak{T}''$) innerhalb $\mathfrak{S}$ mit einander zusammenhängen. Da ferner jedes Element von $\mathfrak{S}$ mit gewissen Elementen von $\mathfrak{T}'$ oder $\mathfrak{T}''$ inzident ist, so folgt, daß das System $\mathfrak{S}$, sofern es nicht zusammenhängend ist, nur in zwei Systeme $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist und von denen das eine $\mathfrak{T}'$, das andere $\mathfrak{T}''$ enthält. Daß $\mathfrak{S}$ aber wirklich zerfällt, ist hier als neue, von 1. bis 10. unabhängige Eigenschaft der Mannigfaltigkeiten einzuführen. $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ repräsentieren *die beiden Seiten von* $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ *an der Stelle a,* sie entsprechen den beiden oberen Indikatrizen. Sind ferner $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}''$ die beiden Seiten von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ an der folgenden Stelle b des Weges, und sind die $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{U}'$ entsprechenden oberen Indikatrizen solche, die beim Fortschreiten von a nach b ineinander übergehn, so hat $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{S}''$ mit $\mathfrak{U}''$, nicht aber $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{U}''$ oder $\mathfrak{S}''$ mit $\mathfrak{U}'$ gewisse Elemente gemein, so daß also auch der Fortsetzung der oberen Indikatrix die Fortsetzung der Seite in dem früher definierten Sinne entspricht.

IV.

Unter den vielen Operationen, mittels deren man aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue ableiten kann, ist eine besonders bemerkenswert, die wir als *Multiplikation* bezeichnen wollen. Fassen wir die Mannigfaltigkeiten als kontinuierliche Gebilde auf, so besteht die Multiplikation zweier Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ darin, daß jede Kombination aus einem Element (Punkt)

---

1) Läßt man zu, daß $(n-1)$-dimensionale Zellen von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ der Berandung von $\mathfrak{M}^{(n)}$ angehören, so kann $\mathfrak{T}'$ auch leer ausgehen.

2) Dabei ist vorausgesetzt, daß a nicht Randelement von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ ist; andernfalls hat man in $\mathfrak{S}$ nur diejenigen Elemente aufzunehmen, welche, ohne zu $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zu gehören, außer mit a noch mit einem Element von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ inzident sind, das selbst mit a inzident und nicht Randelement von $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ ist.

von $\mathfrak{A}$ und einem von $\mathfrak{B}$ als Element einer neuen kontinuierlichen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ angesehn wird, deren Dimension gleich der Summe der Dimensionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Für die Multiplikation gelten das kommutative und das assoziative Gesetz. Natürlich sind die meisten Mannigfaltigkeiten nicht in solche niedrigerer Dimensionen zerlegbar. Die einfachsten zerlegbaren Mannigfaltigkeiten sind die vom Typus der Zellen. Bezeichnet $\mathfrak{Z}_n$ den Typus der n-dimensionalen Zelle, so hat man

$$\mathfrak{Z}_p\cdot\mathfrak{Z}_q=\mathfrak{Z}_{p+q},\ \mathfrak{Z}_n=\mathfrak{Z}_1^n.$$

Es entspricht dies ganz der gewöhnlichen Auffassung des Rechtecks als Produktes zweier, des Quaders als Produktes dreier Strecken usf., nur daß von einer Unterscheidung homöomorpher Mannigfaltigkeiten abgesehen wird. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_n$ die sphärische Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, so stellen

$$\mathfrak{Z}_1^2,\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_1^2$$

die einzigen zerlegbaren Flächen dar, Typen, die durch das Rechteck, den Mantel eines (begrenzten) Zylinders, die Ringfläche repräsentiert werden. Vom Typus der letzteren ist auch die Regelfläche $\mathfrak{F}$ zweiten Grades. Die auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Regelscharen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ stellen Mannigfaltigkeiten vom Typus $\mathfrak{K}_1$ dar, und jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ stellt als Schnittpunkt zweier Geraden eine Kombination von einem Element aus $\mathfrak{R}$ und einem Element aus $\mathfrak{R}'$ dar. Fassen wir aber eine (allgemeine) Fläche $\mathfrak{F}$ vom zweiten Grade als komplexe Punktmannigfaltigkeit auf, so ist $\mathfrak{F}$ vierdimensional, die Regelscharen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ sind zweidimensional und zwar vom Typus $\mathfrak{K}_2$, so daß $\mathfrak{F}$ den Typus $\mathfrak{K}_2^2$ hat. Einen einfachen Repräsentanten desselben Typus stellt uns im projektiven Raum die Mannigfaltigkeit der reellen, orientierten d. h. mit Richtungssinn versehenen Geraden dar. Bedienen wir uns nämlich Plückerscher Koordinaten

$$l_{23},\ l_{31},\ l_{12},\ l_{14},\ l_{24},\ l_{34}\qquad (l_{23}l_{14}+l_{31}l_{24}+l_{12}l_{34}=0),$$

so stellen zwei Systeme l_{pq}, l'_{pq} dann dasselbe Element dar, wenn sie sich nur um einen positiven Proportionalitätsfaktor unterscheiden, bei Unterscheidung um einen negativen haben wir dieselbe Gerade, aber mit verschiedenem Richtungssinn. Zwischen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der orientierten Geraden und der komplexen Punktmannigfaltigkeit der Fläche zweiten Grades $\mathfrak{F}$, welcher wir die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$

geben können, erhalten wir eine ein-eindeutige, stetige Beziehung, wenn wir dem Punkt λx_1, λx_2, λx_3, λx_4 von $\mathfrak{F}$ das Element

$$l_{pq}=\lambda\lambda'(x_p x'_q-x_q x'_p)\cdot i$$

von $\mathfrak{M}$ zuordnen, unter λ', x'_p, x'_q die zu λ, x_p, x_q konjugiert-komplexen Zahlen, unter i die imaginäre Einheit verstehend. Zwei konjugiert-komplexen Punkten von $\mathfrak{F}$ entspricht dieselbe Gerade, aber mit verschiedenem Richtungssinn.

Ein Beispiel für eine zerlegbare Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen liefern uns die (reellen) Flächenelemente im projektiven Raum, wenn man unter Flächenelement die Kombination aus einer Ebene mit einem auf ihr liegenden Punkt versteht. Setzen wir nämlich

$$
(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \quad \lambda_3 x_2 - \lambda_2 x_3 + \lambda_1 x_4 \\ u_2 = -\lambda_3 x_1 \quad\quad + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 \\ u_3 = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 \quad\quad + \lambda_3 x_4 \\ u_4 = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 \end{cases},
$$

so wird

$$
(2) \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)
$$

$$
(3) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.
$$

Gleichung (2) zeigt, daß bei Beschränkung auf reelle Größen, wenn, wie hier stets vorausgesetzt werden soll, weder die λ_k $(k=1, 2, 3)$ noch die x_k $(k=1,2,3,4)$ sämtlich verschwinden, auch die u_k nicht sämtlich verschwinden können. Daraus folgt weiter, daß bei festgehaltenen x_k linear unabhängigen Systemen λ_k auch linear unabhängige Systeme u_k entsprechen, ferner, daß durch die Gleichungen (1) wenn wir die λ_k variieren, alle Lösungen u_k der Gleichung (3) dargestellt werden. Wenn man daher x_k bezw. u_k als Koordinaten eines Punktes x bezw. einer Ebene u im projektiven Raum, die λ_k als Koordinaten eines Punktes λ in einer projektiven Ebene deutet, so stellt (3) die Bedingung dafür dar, daß x und u ein Flächenelement $(x\,|\,u)$ bestimmen. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Gleichungen (1) eine ein-eindeutige Beziehung vermitteln zwischen den Kombinationen aus einem x und einem λ einerseits, den Flächenelementen $(x\,|\,u)$ andererseits. Werden also durch $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$ die Typen bezeichnet, welche die Punktmannigfaltigkeiten der projektiven Ebene und des projektiven Raumes repräsentieren, so ist das System der Flächenelemente im projektiven Raum vom Typus $\mathfrak{R}_2 \cdot \mathfrak{R}_3$.

Ausgehend von der Gleichung $\mathfrak{Z}_p \cdot \mathfrak{Z}_q = \mathfrak{Z}_{p+q}$ gelangen wir zu folgender Festsetzung der *Multiplikation polyedrischer Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von m bezw. n Dimensionen:

Das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ bezeichnet eine polyedrische Mannigfaltigkeit von $m + n$ Dimensionen. Die Elemente von $\mathfrak{C}$ werden durch die Kombinationen (Produkte) $ab = ba$ aus je einem Element a von $\mathfrak{A}$ und einem Element b von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Es ist $[ab] = [a] + [b]$. Ist $[ab] \geqq [a_1 b_1]$, so ist $(ab,\ a_1 b_1) = (a_1 b_1,\ ab) = 1$, wenn $(a,\ a_1) = 1$, $(b,\ b_1) = 1$, $[a] \geqq [a_1]$, $[b] \geqq [b_1]$ ist; sonst ist $(ab,\ a_1 b_1) = (a_1 b_1,\ ab) = 0$.

Man überzeugt sich leicht, daß das System $\mathfrak{C}$ die im Abschnitt III aufgeführten Eigenschaften 1. bis 10. besitzen muß, sofern man nur eben diese bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ voraussetzt. Bei den Eigenschaften 1. bis 9. ergibt sich dies fast unmittelbar; zum Nachweis von 10. empfiehlt es sich, die totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$ in zwei „Kategorien“ $\varkappa'$, $\varkappa''$ einzuteilen. Es sei nämlich $\mathfrak{c}$ eine solche Gruppe, sie bestehe aus den Elementen $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots c^{(m+n)}$, und es sei $c^{(k)} = a_k \cdot b_k$ $(k = 0, \cdots m + n)$, wo a_k zu $\mathfrak{A}$, b_k zu $\mathfrak{B}$ gehört. Dann ist zu unterscheiden, ob die Summe $\sum_{k=0}^{m+n} [a_k]$ gerade oder ungerade ist, und hiernach die Einteilung in die beiden Kategorien zu treffen. Wir hätten ebenso gut die Summe $\sum_{k=0}^{m+n}[b_k]$ bei der Einteilung zugrunde legen können; da aber

$$\sum_{k=0}^{m+n}[a_k]+\sum_{k=0}^{m+n}[b_k]=\sum_{k=0}^{m+n}[a_k]+[b_k]=\sum_{k=0}^{m+n}[c^{(k)}]=\sum_{k=0}^{m+n}k=\frac{(m+n)(m+n-1)}{2},$$

also konstant ist, so erhalten wir beidemal dieselbe Einteilung. Unter den Elementen a_k sind $m+1$ verschieden, sie bilden eine totale Inzidenzgruppe $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$, ebenso die Elemente b_k eine solche $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}$. Nennen wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die *Komponenten* von $\mathfrak{c}$, so hat zwar jede totale Inzidenzgruppe von $\mathfrak{C}$ zwei bestimmte Komponenten, aber dieselben beiden Komponenten kommen verschiedenen totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$ zu. Es sei jetzt $c = ab$ irgend ein Element von $\mathfrak{C}$, γ das System derjenigen totalen Inzidenzgruppen von $\mathfrak{C}$, welche das Element c enthalten, endlich mögen a', a'' bezw. b', b'' die Indikatrizen bezeichnen, welche $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ an der Stelle a bezw. b hat. Bei jeder Gruppe aus γ ist zu unterscheiden, ob ihre erste Komponente zu a' oder a'', ob ihre zweite zu b' oder b'', ob sie selbst zur Kategorie $\varkappa'$ oder $\varkappa''$ gehört. Das System γ zerfällt demgemäß in acht Systeme, welche durch die Symbole $a'b'\varkappa'$, $a'b'\varkappa''$, $a'b''\varkappa'$, $a'b''\varkappa''$, $a''b'\varkappa'$, $a''b'\varkappa''$, $a''b''\varkappa'$, $a''b''\varkappa''$ gekennzeichnet sind. Sind $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zwei benachbarte Inzidenzgruppen aus γ, so findet man leicht, daß nur die beiden Fälle möglich sind: entweder stimmen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ in beiden Komponenten überein — dann gehören sie verschiedenen Kategorien an; oder $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ stimmen in einer Komponente überein, während die andern benachbart sind — dann gehören sie zu derselben Kategorie. Faßt man daher die acht Teilsysteme von γ zu vier und vier in zwei Klassen $a'b'\varkappa'+a'b''\varkappa''+a''b'\varkappa''+a''b''\varkappa'$ und $a'b'\varkappa''+a'b''\varkappa'+a''b'\varkappa'+a''b''\varkappa''$ zusammen, so gehören die benachbarten Gruppen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ stets zu verschiedenen Klassen; d. h. $\mathfrak{C}$ besitzt die Eigenschaft 10. Daraus ergeben sich auch leicht die weiter unten über die Indikatrix aufgestellten Sätze.

Von Interesse ist es, die Beziehungen zwischen den Invarianten eines Produkts und denen seiner Faktoren zu verfolgen.[1]) Wir beschränken uns auf die schon früher betrachteten Invarianten:

1. Die Charakteristik. Es ist $\sum_{c}(-1)^{[c]}=\sum_{a,b}(-1)^{[ab]}=\sum_{a,b}(-1)^{[a]+[b]}$ $=\sum_{a}(-1)^{[a]}\cdot\sum_{b}(-1)^{[b]}$, d. h. *die Charakteristik eines Produkts ist gleich dem Produkt der Charakteristiken.*

2. Die Zahl der Ränder. Man findet leicht: Sind beide Faktoren geschlossen, so ist das Produkt geschlossen. Ist ein Faktor geschlossen und besitzt der andere r Ränder, so hat das Produkt r Ränder. Sind beide Faktoren berandet, so hat das Produkt stets einen Rand.

3. Die Indikatrix. Hat keiner der Faktoren eine umkehrbare Indikatrix, so ist auch die Indikatrix des Produkts nicht umkehrbar; anderenfalls ist sie umkehrbar.

1) Die tiefere Bedeutung der Multiplikation beruht natürlich darauf, daß der Typus des Produkts ungeändert bleibt, wenn man die Faktoren durch andere von demselben Typus ersetzt, woraus folgt, daß von einer Multiplikation der Typen gesprochen werden kann. Was den Beweis anlangt, so gilt das in S. 40, Anm. Gesagte auch hier.

Aus dem Satz über die Charakteristik folgt u. a., wenn man beachtet, daß die Charakteristik einer geschlossenen Fläche jeden (ganzzahligen) Wert $\leqq 2$ haben kann: die Charakteristik einer geschlossenen $\mathfrak{M}^{(n)}$ kann, wenn n gerade und $\geqq 4$ ist, jeden Wert haben. — Das Verhalten der Indikatrix des Produkts $\mathfrak{C}$ auf einem geschlossenen Wege $w = c_1, c_2 \cdots c_p = c_1$ ist, wie leicht zu sehen, durch das Verhalten der Indikatrizen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf den Komponenten w_a und w_b von w bestimmt. Dabei sind als Komponenten von w die Wege $w_a = a_1, a_2, \cdots a_p = a_1, w_b = b_1, b_2, \cdots b_p = b_1$ bezeichnet, wo $c_k = a_k \cdot b_k$ ist. Die Indikatrix von $\mathfrak{C}$ bleibt auf dem Wege w erhalten, wenn die Indikatrizen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf den Wegen w_a und w_b beide erhalten bleiben oder sich beide umkehren. Andernfalls kehrt sich die Indikatrix von w um.

Ist $b^{(0)}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{B}$, so stellt das Produkt $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cdot b^{(0)}$ eine in $\mathfrak{C}$ gelegene, zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Mannigfaltigkeit dar. Die Elemente und Wege von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen einander eindeutig. Es sei $w_a = a_1, a_2, \cdots a_p = a_1$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{A}$, also $w = a_1 b^{(0)}, a_2 b^{(0)}, \cdots a_p b^{(0)} = a_1 b^{(0)}$ der entsprechende auf $\mathfrak{A}'$. Betrachten wir w als Weg innerhalb $\mathfrak{C}$, so stellt w_a die eine Komponente dar, die andere w_b besteht nur aus dem wiederholten Element $b^{(0)}$. Da sich somit die Indikatrix von $\mathfrak{B}$ längs w_b nicht umkehrt, so verhält sich die Indikatrix von $\mathfrak{C}$ längs w wie die Indikatrix von $\mathfrak{A}$ längs w_a. Diese aber verhält sich wie die Indikatrix von $\mathfrak{A}'$ längs w. Daraus folgt nach dem Satz am Ende von Abschnitt II, daß die obere Indikatrix von $\mathfrak{A}'$ in bezug auf $\mathfrak{C}$ sich längs des Weges w nicht umkehrt; und da w ein beliebiger Weg auf $\mathfrak{A}'$ ist, so ist diese Indikatrix (deren Dimension gleich der Dimension n von $\mathfrak{B}$ ist) überhaupt nicht umkehrbar. Damit ist bewiesen: *Jede Mannigfaltigkeit kann mit einer nicht umkehrbaren oberen Indikatrix von vorgeschriebener Dimension behaftet erscheinen.* Insbesondere gilt also: *Jede Mannigfaltigkeit kann zweiseitig erscheinen.*

Eine in einer $\mathfrak{M}^{(n)}$ gelegene (singularitätenfreie) $\mathfrak{M}^{(n-1)}$, durch welche $\mathfrak{M}^{(n)}$ in zwei Teile zerlegt wird, ist natürlich stets zweiseitig. Ebenso haben wir unserer ganzen Begriffsbildung gemäß die Randmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}^{(n)}$, an denen wir ja eine äußere und innere Seite unterscheiden können, als zweiseitig anzusehen. Es entsteht nun im Anschluß an die letzten Ergebnisse die Frage, ob zu einem gegebenen System von q geschlossenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n-1)}, \mathfrak{M}_2^{(n-1)}, \ldots \mathfrak{M}_q^{(n-1)}$ stets ein $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit q zu diesen Mannigfaltigkeiten homöomorphen Rändern gefunden werden kann. Die Frage ist zu verneinen. Es ergibt sich nämlich als eine notwendige Bedingung, daß die Summe der Charakteristiken von $\mathfrak{M}_1^{(n-1)}, \mathfrak{M}_2^{(n-1)}, \ldots \mathfrak{M}_q^{(n-1)}$ gerade sein muß. Nehmen wir, um dies zu zeigen, an, es existiere eine $\mathfrak{M}^{(n)}$, wie wir sie suchen, bezeichnen wir mit C' ihre Charakteristik, mit C_k $(k = 1, \cdots q)$ die Charakteristiken der $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$, und setzen wir $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_q$. Ist $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ isomorphe Mannigfaltigkeit, so haben wir eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}^{(n)}$ und denen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$. Indem wir die entsprechenden Randelemente identifizieren, fügen wir $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ zusammen, deren Charakteristik C'', wie sofort zu sehen, durch die Gleichung $C'' = 2C' - C$ gegeben wird. Ist n gerade, so sind die Charakteristiken C_k der geschlossenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$ nach dem S. 33 bewiesenen Satz sämtlich 0; ist n ungerade, so ist nach demselben Satze $C'' = 0$, und man hat $C = 2C'$. In jedem Falle muß also C gerade sein.

Im Falle $n = 3$ ist die eben abgeleitete Bedingung auch hinreichend. Um dies zu erkennen, betrachten wir zunächst zwei beliebige Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_2^{(n)}$. Heften wir diese beiden, nachdem wir einer jeden eine ganz im Innern gelegene Zelle von n Dimensionen entnommen haben, mit den dadurch entstehenden sphärischen Rändern aneinander, so entsteht eine $\mathfrak{M}^{(n)}$, deren gesamte Berandung aus den Rändern von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ und denen von $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ besteht. Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich der hier zu beweisende Satz auf zwei Spezialfälle reduzieren. Es wird zu zeigen sein:

a) Es gibt eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit einem Rand, der einen vorgeschriebenen geschlossenen Typus von gerader Charakteristik hat;

b) Es gibt eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit zwei Rändern, welche vorgeschriebene geschlossene Typen von ungerader Charakteristik haben.

Im Falle a) ist zu unterscheiden, ob der vorgeschriebene Typus eine nicht umkehrbare oder eine umkehrbare Indikatrix hat. Ist die Indikatrix nicht umkehrbar, so hat die Charakteristik die Form $2 - 2p$ $(p \geqq 0)$, und, wie bekannt, genügt die „Kugel mit p Henkeln" den vorgeschriebenen Bedingungen. Ist die Indikatrix umkehrbar, so hat die Charakteristik die Form $-2p (p \geqq 0)$. Hier gehen wir von irgend einer $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit umkehrbarer Indikatrix aus und nehmen in ihr eine geschlossene Linie l an, längs deren sich die Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(3)}$ umkehrt. Betrachten wir nun ein Gebiet $\mathfrak{T}$, welches wohl mit hinreichender Deutlichkeit als „röhrenförmige Umgebung der Linie l" bezeichnet wird, so erkennt man leicht, daß $\mathfrak{T}$ eine Randfläche hat, daß ihre Indikatrix umkehrbar, ihre Charakteristik $= 0$ ist. Nach Anbringung von p Henkeln sinkt die Charakteristik der Randfläche auf $-2p$ und man hat eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ der gewünschten Art. — Im Falle b) haben die vorgeschriebenen Charakteristiken die Form $1 - 2p$, $1 - 2q (p \geqq 0, q \geqq 0)$. Wir multiplizieren den geschlossenen Flächentypus von der Charakteristik 1 mit einer Strecke. Es entsteht eine $\mathfrak{M}^{(3)}$ mit zwei Rändern; beide haben die Charakteristik 1. Wir bringen an dem einen Rand p, an dem anderen q Henkel an, wodurch die gewünschte $\mathfrak{M}^{(3)}$ entsteht.

Während jede Mannigfaltigkeit zweiseitig erscheinen kann, kann nicht jede einseitig erscheinen. — Es sei eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ und eine natürliche Zahl p gegeben. Wir suchen eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ so zu konstruieren, daß zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine Beziehung der folgenden Art möglich ist: Jedem Element von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ soll ein Element gleicher Dimension von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen, inzidenten Elementen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ sollen inzidente von $\mathfrak{M}^{(n)}$, zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ sollen, falls sie mit einem und demselben n-dimensionalen Element inzident sind, verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen. Jedem Element von $\mathfrak{M}^{(n)}$ sollen ausnahmslos p verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ entsprechen. Wenn sich eine $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ mit solcher Beziehung konstruieren läßt, wollen wir sagen: Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(n)}$ läßt eine *singularitätenfreie (zusammenhängende) p-fache Überdeckung zu.*

Nunmehr können wir folgenden Satz aufstellen: *Damit eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ einseitig erscheinen könne* (allgemeiner: *damit eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ als Mannigfaltigkeit mit umkehrbarer oberer Indikatrix von vorgeschriebener Dimension auftreten könne*), ist notwendig und hinreichend, daß sie eine singularitätenfreie zweifache Bedeckung zuläßt.

Beweis: 1. Die Bedingung ist notwendig. — Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{M}^{(n)}$ in $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ gelegen, und die obere Indikatrix von $\mathfrak{M}^{(n)}$ sei umkehrbar. Dann können wir die oberen Indikatrizen a', a'', welche $\mathfrak{M}^{(n)}$ an den verschiedenen Stellen besitzt, als Elemente einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ auffassen, wie wir dies S. 40 für die unteren Indikatrizen getan haben. Die ein-zweideutige Beziehung, welche wir so zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ erhalten, zeigt, daß $\mathfrak{M}^{(n)}$ eine zweifache singularitätenfreie Überdeckung zuläßt.

2. Die Bedingung ist hinreichend. — Jetzt ist vorauszusetzen, daß zwischen $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(n)}$ und einer $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ eine ein-zweideutige Beziehung der oben beschriebenen Art besteht. Es sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)}$ eine Mannigfaltigkeit, bestehend aus einer Strecke mit ihren beiden Endpunkten $b_1^{(0)}$, $b_2^{(0)}$, und es werde $\mathfrak{M}_1^{(n)} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}_1^{(n)} \cdot b_1^{(0)} = \overline{\mathfrak{M}}_1^{(n)}$ gesetzt. $\overline{\mathfrak{M}}_1^{(n)}$ bildet einen Teil der Berandung von $\mathfrak{C}$ und ist zu $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ isomorph, so daß also zwischen $\mathfrak{M}^{(n)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}_1^{(n)}$ eine ein-zweideutige Beziehung statthat. Identifiziert man nun je zwei Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}_1^{(n)}$, welche demselben Element von $\mathfrak{M}^{(n)}$ entsprechen, so werden aus $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{M}}_1^{(n)}$ neue Mannigfaltigkeiten — sie mögen $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ heißen —, und es ist sofort zu sehen, daß $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ isomorph zu $\mathfrak{M}^{(n)}$ und innerhalb $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ einseitig ist. — Es sei jetzt $\mathfrak{D}^{(k-1)}$ irgend eine Mannigfaltigkeit von $k-1$ Dimensionen, $d^{(0)}$ ein Element von $\mathfrak{D}^{(k-1)}$, und es werde $\mathfrak{M}^{(n+1)}\mathfrak{D}^{(k-1)} = \mathfrak{M}^{(n+k)}$, $\mathfrak{M}^{(n+1)} \cdot d^{(0)} = \overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$, $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)} \cdot d^{(0)} = \overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ gesetzt. Dann ist $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ isomorph zu $\mathfrak{M}^{(n+1)}$, und die obere Indikatrix von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ inbezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ ist nicht umkehrbar. $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ ist zu $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}^{(n)}$ isomorph, und da $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ einseitig ist, so ist auch $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ in $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ einseitig. Man kann also einen geschlossenen Weg w in $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ angeben, längs dessen sich die Seite von $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ in bezug auf $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ umkehrt. Auf diesem Wege zeigen dann die Indikatrizen von $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ verschiedenes Verhalten. Die letztere Indikatrix verhält sich aber wie die von $\mathfrak{M}^{(n+k)}$, da ja die obere Indikatrix von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ inbezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ nicht umkehrbar ist. Daher verhalten sich die Indikatrizen von $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ und $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ auf dem Wege w verschieden, und mithin ist die obere Indikatrix der zu $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(n)}$ isomorphen Mannigfaltigkeit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}^{(n)}$ in bezug auf $\mathfrak{M}^{(n+k)}$ umkehrbar.

Hierzu noch einige Bemerkungen. — Eine $\mathfrak{M}^{(n)}$ mit umkehrbarer Indikatrix läßt, wie der S. 40 erklärte Verdoppelungsprozeß zeigt, eine zweifache Bedeckung zu, kann daher einseitig erscheinen. — Es sei innerhalb einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(n)}$ eine zweite $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(n-1)}$ gegeben; die Elemente von $\mathfrak{B}$ seien durch b, die nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörigen von $\mathfrak{A}$ durch a bezeichnet. Wir wollen annehmen, daß ein Element b dann und nur dann Randelement von $\mathfrak{B}$ ist, wenn es Randelement von $\mathfrak{A}$ ist. Dann können wir den Satz aussprechen:

Wenn die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ nicht zerstückt wird (d. h. wenn die Elemente a ein zusammenhängendes System bilden), *so kann $\mathfrak{A}$ einseitig erscheinen.*

Zum Beweise denken wir uns $\mathfrak{A}$ längs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ „aufgeschnitten“, wodurch unserer Voraussetzung gemäß der Zusammenhang von $\mathfrak{A}$ nicht aufgehoben wird, also eine neue Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}'$ entsteht. Bei diesem Prozeß treten an die Stelle jedes Elementes b zwei Elemente b', b'', welche den beiden Seiten von $\mathfrak{B}$ an der Stelle b entsprechen, und *konjugiert* heißen sollen. Die Elemente b', b'' gehören der Berandung von $\mathfrak{A}'$ an und stellen in ihrer Gesamtheit ein System $\mathfrak{S}'$ dar, welches aus einer einzigen $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ besteht, oder in zwei $\mathfrak{M}^{(n-1)}$ zerfällt, je nachdem $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{A}$ ein- oder zweiseitig war. Es sei nun $\mathfrak{A}''$ eine zu $\mathfrak{A}'$ isomorphe Mannigfaltigkeit. Dann entspricht dem System $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{A}'$ ein System $\mathfrak{S}''$ von $\mathfrak{A}''$, dessen Elemente nunmehr ebenfalls paarweise „konjugiert" sind. Wir fügen jetzt $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ zu einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}_1$ zusammen, indem wir jedes Element e' von $\mathfrak{S}'$ mit demjenigen Element von $\mathfrak{S}''$ identifizieren, welches zu dem e' auf $\mathfrak{S}''$ entsprechenden Element e'' konjugiert ist. Dann hat man eine ein-zweideutige Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, von welcher man leicht sieht, daß sie den oben angegebenen Bedingungen entspricht. D. h. $\mathfrak{A}$ ist zweifach überdeckbar, kann also einseitig erscheinen.

Hieraus folgt u. a.: *Alle Flächentypen, mit Ausnahme des Kugel- und des Zellentypus können einseitig erscheinen.* Denn bis auf diese Ausnahmen lassen sich auf jeder Fläche Querschnitte oder geschlossene Schnitte ausführen, welche die Fläche nicht zerstücken. — Daß andererseits Kugel- und Flächenzellentypus nur zweiseitig auftreten können, folgt daraus, daß sich auf ihnen jede geschlossene Linie auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Es ist aber klar, daß eine geschlossene Linie, längs deren sich die obere Indikatrix einer Mannigfaltigkeit umkehrt, diese Eigenschaft bei stetiger Variation beibehält, also nicht auf ein Element zusammengezogen werden kann. Aus diesem Grunde können alle Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{Z}_n$ vom Typus der Zellen von n Dimensionen, sowie alle sphärischen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{K}_n$, deren Dimension $n > 1$ ist, nur zweiseitig erscheinen. Doch gibt es, wenn $n > 2$ ist, noch andere $\mathfrak{M}^{(n)}$ von dieser Beschaffenheit.

Einfache Beispiele hierfür können wir wieder mittels Multiplikation leicht bilden. Zunächst bemerken wir, daß, wenn man in einem Produkt $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ einen geschlossenen Weg w mit den Komponenten w_a und w_b hat, welcher durch stetige Variation in einen Weg w' mit den Komponenten w_a' und w_b' übergeht, auch w_a in w_a' und w_b in w_b' stetig übergeführt werden kann. Es läßt sich aber auch unschwer nachweisen, daß umgekehrt zwei Wege w, w' von $\mathfrak{C}$ stetig ineinander übergeführt werden können, sobald dies bei ihren Komponenten der Fall ist.[1]) Insbesondere folgt: Läßt sich sowohl auf $\mathfrak{A}$ wie auf $\mathfrak{B}$ jeder geschlossene Weg auf ein Element zusammenziehn, so gilt dasselbe für $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$. Durch Multiplikation von Zellen mit Sphären und von Sphären untereinander kann man also wieder Mannigfaltigkeiten bilden, welche nicht einseitig erscheinen können. (Solche Mannigfaltigkeiten werden daher auch durch jeden geschlossenen Schnitt oder Querschnitt zerstückt.) Daß man so in der Tat neue Mannigfaltigkeiten erhält, ist leicht zu sehen. So kann z. B. die Potenz $\mathfrak{K}_{2q}^n$ $(n > 1)$ keine sphärische Mannigfaltigkeit sein; denn nach dem Satz über die Charakteristik eines Produkts beträgt ihre Charakteristik 2^n.

1) Beim Beweise braucht man sich nur auf die Eigenschaften 1. bis 4. (Abschnitt III) zu stützen.