Membranas supersiméticas y A-D-E

U Murcia 4/5/10

Esquema

(1) A-D-E

(2) La correspondencia de McKay y subgrupos finitos de $\mathbb{H}$.

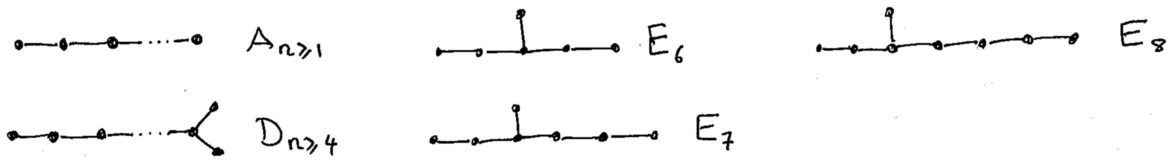
(3) Membranas supersimétricas en d=11 SUGRA

(4) 7-variedades con espinores de Killing reales, ...

(5) S^7/Γ ⇐ $N \geq 4$, $\Gamma < Sp(1) \times Sp(1)$, Goursat, A-D-E + twist.

---

(1) A-D-E (diagramas de Coxeter-Dynkin)



juegan un papel importante en muchas clasificaciones:

- sólidos platónicos (subgrupos finitos de rotaciones en $\mathbb{R}^3$)
- representaciones de 'quivers' [teorema de Gabriel]
- singularities kleinianas / du Val / Brieskorn
- puntos críticos de funciones sin "móduli"
- grupos de Weyl con raíces de la misma longitud
- álgebras 'cluster' antisimétricas
- álgebras preproyectivas de dimensión finita
- teorías conformes racionales

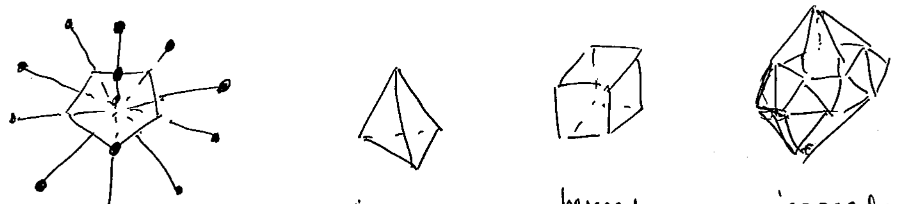
y no se conoce la relación fundamental entre muchas de ellas (Arnold '70s)

Hoy veremos un ejemplo más, aunque está muy relacionado al primer ejemplo en la lista y del que a continuación tratamos.

(2) La correspondencia de McKay

¿Cuáles son los subgrupos finitos de rotaciones en $\mathbb{R}^3$? Sea $\Gamma < SO(3)$ un grupo finito. Como vimos la semana pasada, todo elemento $a \in \Gamma$ $(a \neq 1)$ fija una línea (el eje de rotación) y esa línea corta a la 2-esfera unidad en dos puntos: $\{x, -x\}$ (los polos de la rotación). Γ actúa en el conjunto finito de polos con dos ó tres órbitas. El caso de dos órbitas es el caso bidimensional →

en el que $\Gamma < SO(2)$ es pues que es un grupo cíclico $\cong \mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}$.
Si Γ actúa ~~con tres órbitas~~, es un grupo diédrico o poliédrico:



polígono $2n$ — tetraedro 12 — hexaedro 24 — icosaedro 60

~~[illegible]~~ De la semana pasada $\quad Sp(1) \xrightarrow[2-1]{\pi} SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) \cong SO(3)$

$G = \pi^{-1}(\Gamma) < Sp(1)$ finito:

cíclico	A_n	$n+1$	$\langle t \mid t^{n+1} = 1\rangle$	$\{t = e^{2\pi i/n+1}$
diédrico binario	$D_{n\geq 4}$	$4(n-2)$	$\langle s,t \mid s^2 = t^{n-2} = (st)^2\rangle$	$\begin{cases} t = e^{2\pi i/n-2} \\ s = j \end{cases}$
tetraédrico binario	E_6	24	$\langle s,t \mid s^3 = t^3 = (st)^2\rangle$	$s = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$
octoédrico binario	E_7	48	$\langle s,t \mid s^3 = t^4 = (st)^2\rangle$	$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+i+j-k) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ \frac{1}{2}(\varphi+\varphi^{-1}i+j) \end{cases}$
icosaédrico binario	E_8	120	$\langle s,t \mid s^3 = t^5 = (st)^2\rangle$	$\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

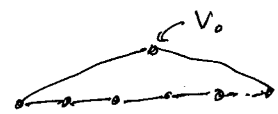
<u>Rmk.</u> $S^3/_{E_8}$ es el contraejemplo a la conjetura original de Poincaré.
$([E_8, E_8] = E_8)$

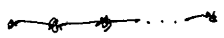
La relación con los diagramas A-D-E es la correspondencia de McKay.

$G < Sp(1)$ actúa en $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$. Llamemos a ésa la "representación fundamental" de G: R. G es finito $\Rightarrow \exists$ número finito de reps. irreducibles: $V_0, V_1, \dots, V_k$ dónde V_0 es la rep. trivial. Definamos un grafo a partir de G. Los vértices son las $V_0, \dots, V_k$. Si $V_i \subset R \otimes V_j$ hay una arista entre V_i y V_j.

eg: $A_n \cong \mathbb{Z}/_{(n+1)}\mathbb{Z}$ $\quad$ reps: $\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{n}$ $\quad$ ~~[illegible]~~ $t \mapsto \omega^p \cdot id$, $\omega = e^{2\pi i/n+1}$
$\dim_{\mathbb{C}} = 1$ $\qquad p = 0, 1, \dots, n$

$R = \underline{1} \oplus \underline{n}$ $\qquad \underline{i} \otimes R = \underline{i+1} \oplus \underline{i-1}$



Quitando V_0,  A_n

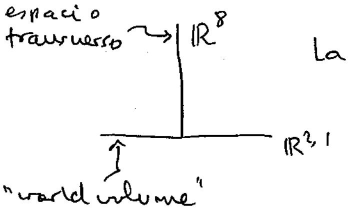
con los otros grupos encontramos los otros diagramas A-D-E.

3 Membranas supersimétricas

U Murcia 4/5/10

$d=11$ SUGRA $\quad (M,g,F) \quad Ric(g)=T(g,F) \quad D=\nabla^g+\Theta(F)$ en $\mathcal{E}(M)$ ← real, rango 32, simpléctica

$dF=0 \quad d{*F}=-\frac{1}{2}F\wedge F$



La membrana elemental es una familia biparamétrica de soluciones

$$\begin{cases} g = H^{-2/3}(r)\, g_{\mathbb{R}^{2,1}} + H^{1/3}(r)\,(dr^2+r^2 g_{S^7}) \\ F = d\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2,1}}\wedge dH^{-1} \end{cases}, \quad H(r)=\alpha+\frac{\beta}{r^6}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Genéricamente ($\alpha\beta\neq 0$) la solución tiene cohomogeneidad 1.

Dos regímenes asintóticos:

$\beta\to 0 \quad (r\gg 1) \quad \rightsquigarrow \mathbb{E}^{1,10},\ F=0$

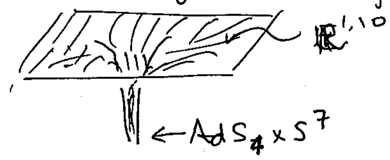
"near-horizon" $\quad \alpha\to 0 \quad (r\ll 1) \quad \rightsquigarrow AdS_4\times S^7,\ F\propto d\mathrm{vol}(AdS_4)$

} fondos máximamente supersimétricos

Para $\alpha\beta\neq 0$, los espinores de Killing son $\varepsilon = H^{-1/6}(r)\,\varepsilon_\infty$ ← espinor paralelo asintótico $d\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2,1}}\,\varepsilon_\infty=\varepsilon_\infty$

$\therefore \dim\{\text{esp. de Killing}\} = 16 = \frac{1}{2}32 \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}$-BPS"

La membrana (M2) es un solitón interpolante y tiene carga "eléctrica" en el sentido que $\displaystyle\int_{S^7_\infty} {*F} \neq 0$.



<u>M2 generalizadas</u>: $S^7 \rightsquigarrow V^7$ donde V es Einstein (con el mismo escalar de Ricci) y admite espinores de Killing geométricos: $\nabla_X\psi=\frac{1}{2}X\cdot\psi$. (Eso implica Einstein!)

[Es posible que existan M2 con 'worldvolume' curvo. Hay indicaciones basadas en la teoría de deformación de ciertas superálgebras de Lie que sugieren la existencia de una M2 en $AdS_4\times S^7$, y no una M2 en $\mathbb{R}^{1,10}$ como la M2 elemental.]

4 7-variedades admitiendo espinores de Killing reales

(M^7,g) espín, completa, 1-conexa; $\quad \nabla_X\psi=\pm\frac{1}{2}X\cdot\psi \overset{\text{Bär}}{\Longleftrightarrow} \tilde{M}=\mathbb{R}^+\times M,\ \tilde{g}=dr^2+r^2g \quad \tilde{\nabla}\tilde{\psi}=0$

<u>Myers</u>: M compacta

<u>Gallot</u>: $\tilde{M}=\mathbb{R}^8\setminus\{0\}$ $(d=8)$

$\tilde{M}$ es irreducible $\overset{\text{(Wang)}}{\Longrightarrow} \mathrm{Hol}(\tilde{M}) =$

		d
$Spin(7)$	M weak G_2 hol.	1
$SU(4)$	M Sasakiana-Einstein	2
$Sp(2)$	M 3-Sasakiana	3

$d=\dim_{\mathbb{R}}\{\text{espinores de Killing con } +\frac{1}{2}\}$

Para obtener $d>3$ hay que tomar cocientes de S^7, y es pues que M ya no es simplemente conexa: $M=S^7/\Gamma$, $\Gamma<SO(8)$. ¿Qué Γ podemos usar?

$\boxed{1}$ $\Gamma<SO(8)$ actúa libremente en S^7 (S^7/Γ regular)

$\boxed{2}$ S^7/Γ espín con espinores de Killing reales.

$\boxed{1}$ resoelto por Wolf. Hay muchísimos Γ !!!

$\boxed{2}$ Para todo Γ satisfaciendo $\boxed{1}$, S^7/Γ tiene por lo menos una estuctura espinorial.

Mejor invertir el orden: ocuparse de $\boxed{2}$ y luego de $\boxed{1}$.

$$\begin{array}{c} SO(S^7) = SO(8) \\ \downarrow {\scriptstyle 1^{a}\text{ col.}} \\ S^7 \end{array}$$

$\Gamma < SO(8)$ actúa sobre $SO(8)$ bajo multiplicación por la izquierda (esa acción siempre es libre) y eso induce la acción en $S^7 \subset \mathbb{R}^8$. El fibrado de referencias ortonormales orientadas de S^7/Γ es siempre regular, $SO(S^7/\Gamma) = \Gamma\backslash SO(8)$

Una estuctura espinorial en S^7/Γ es un levantamiento de Γ a un subgrupo $G < Spin(8)$ isomorfo a Γ de tal manera que $Spin(S^7/\Gamma) = G\backslash Spin(8)$ sea el fibrado espinorial. Pueden existir más de un fibrado espinorial en S^7/Γ: están clasificados por los levantamientos de Γ a $Spin(8)$: $H^1(S^7/\Gamma, \mathbb{Z}/2) \cong Hom(\Gamma, \mathbb{Z}/2)$

Típicamente $\Gamma = \langle gens \mid rels \rangle$: cada generador tiene dos levantamientos posibles $\pm\gamma$ es pues que se etiquetan con un signo por generador. Luego se impone que los signos sean compatibles con las relaciones.

Los espinores de Killing de S^7/Γ son los espinores de Killing de S^7 invariantes bajo la acción de G. (es pues que depende de la estuctura espinorial)

Los espinores de Killing de S^7 $\longleftrightarrow$ Δ_+ de $Spin(8)$ (para $+\frac{1}{2}$)

$\therefore$ {espinores de Killing de S^7/Γ} $= \Delta_+^G$. Estamos interesados en la clasificación de aquellos G con $\dim_{\mathbb{R}} \Delta_+^G \geq 4$.

Resumiendo: buscamos $G < Spin(8)$ tal que

a) $-1 \notin G$ (para que G sea isomorfo a su proyección Γ a $SO(8)$)

b) $\Gamma \circlearrowright S^7$ libremente

c) $\dim_{\mathbb{R}} \Delta_+^G \geq 4$

(5) Resultados

c) $\Rightarrow$ $G < Spin(4)$ = estabilizador de Δ_+^G en Δ_+, ($Spin(8)$ actúa transitivamente en los grassmannianos de planos en Δ_+, así que todos los estabilizadores son conjugados.) $Spin(4) \cong Sp(1)\times Sp(1)$ y actúa en $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$ de la siguiente manera:

$$(u_1,u_2)\cdot(x,y) = (u_1 x, u_2 y) \qquad \forall\, u_i \in Sp(1),\ x,y \in \mathbb{H}$$

(si $|x|^2+|y|^2 = 1$, $|u_1 x|^2 + |u_2 y|^2 = 1$ así que preserva $S^7 \subset \mathbb{R}^8$.)

$\ker(Spin(4) \longrightarrow SO(8))$ es trivial porque $\mathbb{H}$ es un álgebra de división.

es pues que cualquier $G < Spin(4)$ es el levantamiento de $\Gamma < SO(8)$.

La acción es libre si y sólo si ningún $(x,y) \in S^7$ tiene estabilizador no trivial:

$$(u_1,u_2)(x,y) = (x,y) \iff \begin{matrix} u_1 \cdot x = x \\ u_2 \cdot y = y \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=0 \text{ ó } u_1 = 1 \\ y = 0 \text{ ó } u_2 = 1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} (x,y) = (0,0) \notin S^7 \\ \text{ó} \\ u_1 = 1 \text{ ó } u_2 = 1 \end{matrix}$$

$\therefore$ Γ actúa libremente en S^7 si y sólo si no hay elementos (distintos a la identidad) en G de la forma $(1,u_2)$ ó $(u_1,1)$.

¿Cuáles son los subgrupos finitos de $Sp(1) \times Sp(1)$?

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & A \times B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

<u>Lema de Goursat</u> $\quad A, B$ grupos $\quad C \hookrightarrow A \times B$ subgrupo

$L < A \qquad L = \{a \in A \mid \exists b \in B \ \ (a,b) \in C\}$

$R < B \qquad R = \{b \in B \mid \exists a \in A \ \ (a,b) \in C\}$

$L_0 \triangleleft L \qquad L_0 = \{a \in A \mid (a,1) \in C\}$

$R_0 \triangleleft R \qquad R_0 = \{b \in B \mid (1,b) \in C\}$

El subgrupo $C \hookrightarrow A \times B$ define un isomorfismo de grupos $L/L_0 \xrightarrow{\varphi} R/R_0$

Si $(a,b) \in C$, $\quad \varphi(a) = [b]$. Está bien definido en R/R_0 y su núcleo es $L_0 < L$. C es el grafo de φ.

En nuestro caso $G < Sp(1) \times Sp(1)$ es pues que L, R son subgrupos de $Sp(1)$, pero si $\Gamma \circlearrowleft S^7$, $R_0 = L_0 = 1$, es pues que $L \overset{F}{\cong} R$ y G es el grafo de un automorfismo de un subgrupo finito F de $Sp(1)$!

Si el automorfismo es "interno" ($g \mapsto aga^{-1}$ $\exists a \in$) es lo mismo que si ponemos el automorfismo = identidad.

El problema se reduce a

A) clasificar los automorfismos "externos" de los subgrupos A-D-E de $Sp(1)$

y B) calcular $\dim A_+^G$ (fórmulas de caracteres, ...)

<u>Resultados</u>: $\quad$ (la notación es tal que $(F, id) \equiv F$)

$S^7, \mathbb{RP}^7$
$S^1 \to S^7 \to \mathbb{CP}^3$ $\cup$ $\mathbb{Z}_N$

N	(F, τ)
8	$\{1\}$, A_1
6	$A_{n\geq 2}$
5	$D_{n \geq 4}$, E_6, E_7, E_8
4	$(A_{n\geq 4, \neq 5}\ ,\ r \in \mathbb{Z}^\times_{n+1} \setminus \{\pm 1\})$ $(D_{n \geq 6}\ ,\ r \in \mathbb{Z}^\times_{2(n-2)} \setminus \{\pm 1\})$ (E_7, ν), (E_8, ν)

$t \mapsto t^r$ en la presentación dada con anterioridad.

único auto. no trivial no interno de E_7, E_8