Espacios simétricos (lorentzianos) y algunos de sus usos

U Murcia, 28/4/10

Esquema

1) Espacios homogéneos, simétricos, ...
2) Clasificación de Cartan (caso riemanniano)
3) Clasificación de Cahen-Wallach (caso lorentziano)
4) d=11 SUGRA, vacíos máximamente supersimétricos, ...

---

1) (M, g) variedad riemanniana (o pseudo-riemanniana)

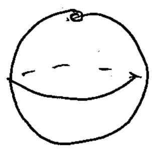
G = grupo de isometrías de (M, g):

$f \in G \qquad f: M \to M$ diffeo & $f^* g = g$.

G es un grupo de Lie. (M,g) es homogénea si G actúa transitivamente en M: para todo $x, y \in M$ $\exists f \in G$, $f(x) = y$.
$\therefore M \cong G/H \leftarrow$ isotropía

(M,g) es localmente homogénea si para todo $x, y \in M$ hay entornos $U \ni x$, $V \ni y$ y una isometría $f: U \to V$ con $f(x) = y$.
$\nwarrow$ f no tiene porqué extenderse a todo M.


homogénea


localmente homogénea

Teorema (Ambrose-Singer, Kostant)

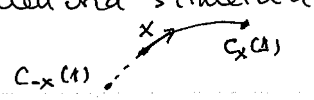
(M,g) riemanniano es localmente homogéneo

$\Leftrightarrow$ TM tiene una conexión ∇ compatible con g y tal que

$$\nabla T^\nabla = \nabla R^\nabla = 0.$$

Si la conexión ∇ es la de Levi-Civita, $T^\nabla = 0$, entonces (M,g) es localmente simétrica. En otras palabras, una variedad es localmente simétrica si la curvatura es paralela.

El origen del nombre es que los espacios localmente simétricos tienen una simetría de orden 2 alrededor de cualquier punto:



$C_x(1) \mapsto C_{-x}(1)$ es una isometría.
(no está definido nec. para todo X)

2) Los espacios simétricos riemannianos fueron clasificados por Élie Cartan, quien empezó por estudiar la condición $\nabla R = 0$.

Si (M,g) es ~~localmente~~ simétrica, completa y simplemente conexa

entonces $M = G/H$, G grupo de Lie conexo (actuando bajo isometrías)

$H < G$ compacto

$\sigma : G \to G$ auto., involutivo

$S = G^\sigma \quad S_e = (G^\sigma)_0 \quad S_e \subset H \subset S$

Al nivel de álgebras de Lie: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma \qquad \sigma|_{\mathfrak{m}} = -id|_{\mathfrak{m}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \\ [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \\ [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h} \end{array}$$

$\therefore$ $[\ ,\ ,\ ] : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ define un <u>sistema triple de Lie</u>

$(X,Y,Z) \longmapsto [[X,Y],Z]$ (álgebra ternaria)

La clasificación de Cartan:

$(K, K^{\mathbb{C}})$ eg: $(SU(n), SL(n,\mathbb{C}))$

K: grupo de Lie simple compacto 1-conexo

$K^{\mathbb{C}}$: grupo de Lie complejo correspondiente

$(G/H, G^*/H)$ eg: $\left(\frac{SL(n,\mathbb{R})}{SO(n)}, \frac{SU(n)}{SO(n)}\right)$

G: grupo de Lie simple no compacto 1-conexo

G^*: forma compacta de G

$H < G$ max. compacto

ejemplos típicos: espacios de curvatura constante: esfera, espacio hiperbólico.
grassmannianos (cuádricas) (también cuádricas). $\boxed{\text{¿cuádricas?}}$

3) Los espacios simétricos lorentzianos fueron clasificados por Cahen-Wallach (demostración dada 20 años más tarde por Cahen-Parker)

<u>Teorema</u> (C-W) (M,g) lorentziana, simplemente conexa simétrica.

M es isométrica a un producto de una variedad simplemente conexa riemanniana simétrica y una de las siguientes:

- $(\mathbb{R}, -dt^2)$
- de Sitter, anti de Sitter $n \geq 2$
- $CW_n(A)$ $n \geq 3$

dS_n es el recubridor universal de la cuádrica en $\mathbb{R}^{n+1}$

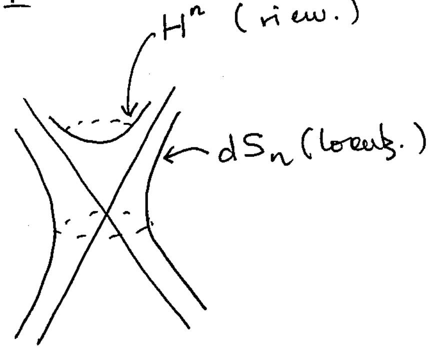
$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

AdS_n ——————— " ———————

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1$$

cf. S^n $\quad x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

$\mathbb{H}^n$ $\quad -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1$



<u>$CW_n(A)$</u> :

$V /\mathbb{R}$ $\quad n-2 \quad \langle , \rangle$ pos-def. $\quad \left.\right\} \begin{array}{l} \flat : V \xrightarrow{\cong} V^* \\ \# : V^* \xrightarrow{\cong} V \end{array}$

V^* dual

$\mathbb{R}e_+ = Z$ $\quad$ 1-dim $\qquad A \in S^2 V^*$

$\mathbb{R}e_- = Z^*$ dual $\qquad A : V \to V \qquad \langle Ax, y \rangle = A(x,y)$

$$\mathfrak{g}_A = V \oplus V^* \oplus Z \oplus Z^*$$

$[e_-, v] = v^\flat \qquad v \in V$

$[e_-, \alpha] = A(\alpha^\#) \qquad \alpha \in V^*$

$[\alpha, v] = A(v, \alpha^\#)\, e_+$

(3-step solv.) $\qquad \mathfrak{k}_A = V^*$ $\quad$ subálg. abeliana

$\mathfrak{m}_A = V \oplus Z \oplus Z^*$

$[\mathfrak{k}_A, \mathfrak{m}_A] \subset \mathfrak{m}_A$

$[\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_A] \subset \mathfrak{k}_A$

$B \in (S^2 \mathfrak{m}_A^*)^{\mathfrak{k}_A}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} B(x,y) = \langle x, y \rangle \qquad x, y \in V \\ B(e_+, e_-) = 1 \end{array} \right.$

lorentziano

G_A : 1-conexo $\cdot (\mathfrak{g}_A)$

$K_A < G_A$ asociado a $\mathfrak{k}_A$

B induce en G_A/K_A una métrica Lorentziana simétrica

$((e_i)$ ON para V, $e_+, e_-)$ $\quad x^i, x^+, x^-$ coordenadas

$$g = 2dx^+dx^- + \left(\sum_{i,j=1}^{n-2} A_{ij} x^i x^j\right)(dx^-)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (dx^i)^2$$

("onda plana", ∂_+ es paralelo y nulo)

<u>Prop.</u> (C-W) $\quad M_A$ es indescomponible sii $\det A \neq 0$

$$M_A \cong M_{A'} \iff A'(x,y) = c\,A(ax, ay)$$
$$a \in O(V),\ c > 0$$

$CW(A)_n$ es localmente isométrico a la $\cap$ de dos cuádricas

en $\mathbb{R}^{n+2}$:
$$2du^1 dv^1 + 2du^2 dv^2 + \sum_{i=1}^{n-2} dx^i dx^i$$

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1 \qquad 2u^1v^1 + 2u^2v^2 = \sum_{i,j=1}^{n-2} A_{ij} x^i x^j$$

---

4) <u>$d = 11$ SUGRA</u>

(M, g) Lorentziana $(1,10)$ espín $\qquad \mathcal{E}(M) \to M$ fibrado espinorial

$Cl(1,10) \cong \mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$

$F \in \Omega^4(M) \quad dF = 0 \qquad \mathcal{E}(M)$ rango 32 ($\mathbb{R}$), simpléctica

$\mathcal{D}$ conexión en $\mathcal{E}(M)$

$$\mathcal{D}_X \psi = \overset{LC}{\nabla_X} \psi + \tfrac{1}{6}\iota_X F \cdot \psi + \tfrac{1}{12} X^\flat \wedge F \cdot \psi$$

<u>Def.</u> Un ~~[illegible]~~ fondo <u>supersimétrico</u> de $d=11$ SUGRA es (M, g, F) satisfaciendo: 1) $\mathrm{Ric}(g) = T(g, F)$

$$T(X,Y) = \tfrac{1}{2}\langle \iota_X F, \iota_Y F\rangle - \tfrac{1}{6} g(X,Y) \overbrace{|F|^2}^{\langle F,F\rangle}$$

2) $d \star F = -\tfrac{1}{2} F \wedge F$

3) $\ker \mathcal{D} \neq \{0\}$

$\ker \mathcal{D}$ es un espacio vectorial de dimensión ≤ 32.

La "fracción de supersimetría" del fondo es $\nu := \frac{1}{32} \dim \ker \mathcal{D}$.

$\nu \in \{1, 2, 3, \ldots, 29, 32\}/32$ (30, 31 no aparecen)

$\nu > 24/32 \Rightarrow (M, g, F)$ localmente homogénea
(JMF, Meessen, Philip)

$\mathrm{Iso}(g) \cap \mathrm{Iso}(F)$ actúa localmente transitiv.
(álgebra de Lie genera el espacio tangente)

Conjetura: $\nu > 16/32 \Rightarrow (M, g, F)$ localmente homogénea.
(Apoyada en todos los ejemplos conocidos).

Rem. $\mathcal{D}\psi = 0$: ψ es un espinor de Killing.
(El vector V tal que $g(V, X) = (\psi, X\cdot\psi)$ $\forall X$ es Killing y preserva F.)

Si $M = \underset{\text{lor.}}{L^4} \times \underset{\text{riem.}}{\mathbb{R}^7}$ o $M = \underset{\text{lor.}}{L^7} \times \underset{\text{riem.}}{R^4}$, $F \propto d\mathrm{vol}_4$

ψ es $\otimes$ de espinores de Killing en $\underset{\text{imag.}}{L}, \underset{\text{real.}}{R}$

Teorema (JMF, Papadopoulos)
$\nu = 32/32$ (M, g, F) es localmente isométrica a

a) $AdS_7(-7R) \times S^4(8R)$, $F = \sqrt{6R}\, d\mathrm{vol}(S^4)$ $R > 0$ scal de M

b) $AdS_4(8R) \times S^7(-7R)$, $F = \sqrt{-6R}\, d\mathrm{vol}(AdS_4)$ $R < 0$ scal de M

c) $CW_{11}(A)$, $A = -\frac{\mu^2}{36} \mathrm{diag}(4, 4, 4, \overbrace{1, \ldots, 1}^{6})$ $\mu \neq 0$
$F = \mu\, dx^- \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

d) $\mathbb{R}^{1,10}$, $F = 0$

Teorema (Blau, JMF, Hull, Papadopoulos)

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{CW} \arrow[dd, "\mu\to 0"] & \\
AdS_4\times S^7 \arrow[ur, "PL"] \arrow[dr, "R\to 0"'] & & AdS_7\times S^4 \arrow[ul, "PL"'] \arrow[dl, "R\to 0"] \\
& \text{flat} &
\end{tikzcd}$$

Límites geométricos