

Una imitación a la geometría espinorial

U Murcia, 27/4/10

Esquema

- 1) SO_3 , Euler, $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Spin(3)$, \mathbb{H}
- 2) Clifford, $Spin \rightarrow SO$, (~~Clifford modules, spinor reps~~
módulos de Clifford, representaciones espinoriales)
- 3) (M, g) , $SO(M)$, $Spin(M)$, $\mathbb{Z}(M)$
- 4) ∇_{LC} , ∇_{Spin} , ∇ , Lichnerowicz
- 5) $\nabla\psi = 0$ & Holonomía
- 6) $\nabla_X\psi = \lambda X \cdot \psi$, cone, ...
- 7) Usos: (~~K-Theory, index theorem, vector fields on spheres, calibrations, ...~~)
Teoría K, teorema del índice, campos vectoriales en la esfera, calibraciones, ...

1) Motivación

$$SO_3 = \{ a \in Mat(3, \mathbb{R}) \mid a^t a = \mathbb{1} \text{ y } \det a = 1 \}$$

Euler: $a \in SO_3 \quad \exists 0 \neq v \in \mathbb{R}^3 \quad av = v.$

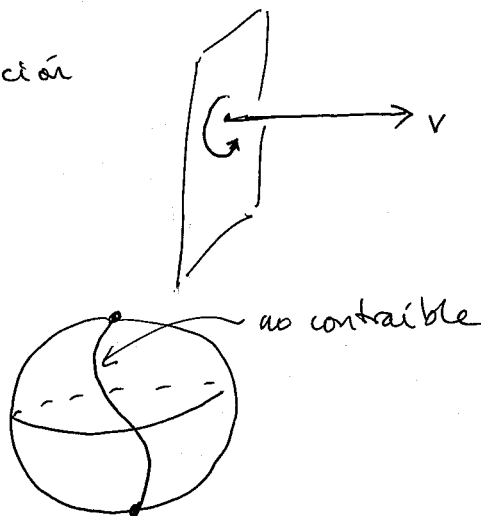
Dem.: $\chi_a(\lambda) = \lambda^3 + \dots \Rightarrow$ una raíz real y dos complejas $\xi, \bar{\xi}$
tres raíces reales.

si $av = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 = 1 \therefore \lambda = \pm 1.$
 $\det a = 1 \Rightarrow$ al menos una raíz real = 1.

\therefore existe un eje de rotación

$$SO_3 = B(0, \pi) / \sim$$
$$(v, \pi) \sim (-v, \pi)$$

$$\therefore \pi_1(SO_3) \neq \{1\}$$



De hecho $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y es recubridor universal en

$$Spin_3 \xrightarrow{2-1} SO_3.$$

$\mathbb{H} : 1, i, j, ij=k \quad \text{Re } \mathbb{H} = \mathbb{R}1 \quad \mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \text{Im } \mathbb{H} \quad |q|^2 = q\bar{q}$

$S_p(1) = \{u \in \mathbb{H} \mid u\bar{u} = 1\} \subset \text{Im } \mathbb{H} \quad (u, q) \mapsto uq\bar{u}$

$|uq\bar{u}|^2 = q\bar{q} \quad \therefore S_p(1) \xrightarrow{P} SO(\text{Im } \mathbb{H}) \cong SO(3)$
 $\ker p = \{\pm 1\}, \quad \text{Im } p = SO(3).$

$\therefore 1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S_p(1) \rightarrow SO(3) \rightarrow 1$

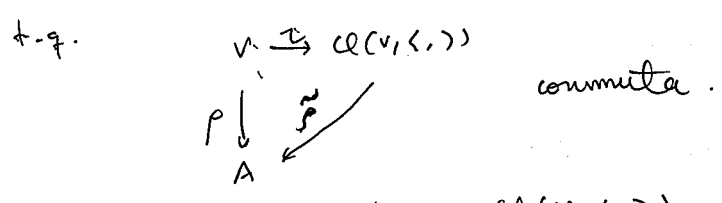
Esto funciona en completa generalidad, pero no con \mathbb{H} sino con...

Álgebras de Clifford álgebra asociativa unitaria real

$V, \langle, \rangle \quad \text{eg: } \mathbb{R}^{p,q} \quad p: V \rightarrow A \text{ es Clifford si}$
 $p(x)^2 = -\langle x, x \rangle 1_A \quad \forall x \in V$

\exists álgebra $Cl(V, \langle, \rangle)$ universal para aplicaciones Clifford:

$\exists! \tau: V \rightarrow Cl(V, \langle, \rangle) \text{ Clifford} \rightarrow Cl(V, \langle, \rangle) \xrightarrow{\tilde{F}} A \text{ (homomorfismo)}$



En términos más prácticos $Cl(V, \langle, \rangle)$ está generada por $1, V$ sujeta

a las relaciones $XY + YX = -2\langle X, Y \rangle 1$

$Cl(V, \langle, \rangle) \cong \Lambda^* V$, $Cl(V, \langle, \rangle) \rightarrow \Lambda^* V$ límite clásico

$Cl(\mathbb{R}^{p,q}) =: Cl(p,q)$

$\mathbb{R}(2)$			
$\mathbb{R}(1)$	$\mathbb{R}(1)$		
\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	

$Cl(p,q) \cong \begin{cases} \mathbb{F}(n) \oplus \mathbb{F}(n) \\ \mathbb{F}(m) \end{cases}$

$\therefore Cl(p,q)$ tiene bien 1 bien 2 reps. irreducibles: módulos de Clifford
 ($p+q$ even) ($p+q$ odd)

$Spin(p,q) \subset Cl(p,q)$

$= \{v_1 \dots v_{2k} \mid \langle v_i, v_i \rangle = \pm 1\}$

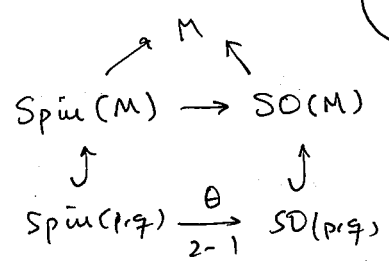
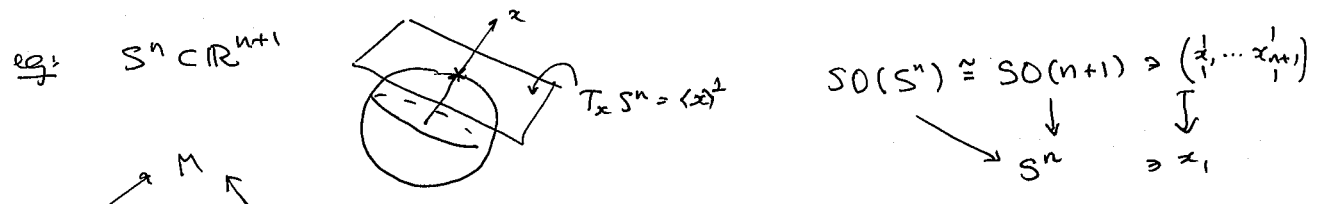
$a \in Spin(p,q), x \in \mathbb{R}^{p,q}$
 $axa^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q} \quad \forall$
 $-(axa^{-1}, axa^{-1}) \pm 1 = axa^{-1} \cdot axa^{-1} = x^2$
 $\therefore |axa^{-1}| = |x|^2$

$$\text{Spin}(p, q) \xrightarrow[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]{\theta} \text{SO}(p, q) \text{ con núcleo } \{\pm 1\}.$$

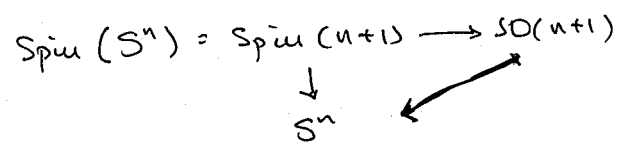
La restricción de un módulo de Clifford a Spin es una representación espinorial: puede ser irreducible o suma \oplus de dos reps. irreducibles.

Estructuras de espin:

(M, g) orientable signature $(p, q) \rightarrow \mathcal{C}(TM)$ fibrado de álgebras de Clifford: $\mathcal{C}(TM) \cong \wedge TM$
 $\text{SO}(M)$ marcos orientados ortonormales: fibrado principal $G = \text{SO}(p, q)$



$\text{Spin}(M)$: fibrado de espin, si existe



Obstrucción: $w_2(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Clasificadas por $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1 M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

(M, g) es espin si $\text{Spin}(M)$ existe

$$\mathbb{E}(M) = \text{Spin}(M) \times_{\text{Spin}(p, q)} S = (\text{Spin}(M) \times S)^{\text{Spin}(p, q)} \text{ fibrado espinorial}$$

$\mathcal{C}(TM)$ actúa en $\mathbb{E}(M)$ y extiende la acción de $\text{Spin}(M)$.

Conexión de espin

TFGR: $\exists!$ conexión métrica su torsión en TM (Levi-Civita)

Da lugar a una conexión de Ehresmann en $\text{SO}(M)$ y su pullback es una conexión de Ehresmann en $\text{Spin}(M)$, y ésta induce una conexión de Koszul en $\mathbb{E}(M)$.

Explícitamente, si $\mathcal{E} = (e_i)$ es un marco orientado ortonormal local (sección local de $\text{SO}(M)$)

(uno-forma de conexión)
$$E^* \omega = \frac{1}{2} \sum g(\nabla e_i, e_j) \underbrace{e^i \wedge e^j}_{\text{genera } \underline{\text{SO}}(p, q)}$$

$$g(e^i, e^j) = \delta_{ij} \quad (e^i \wedge e^j)(x) = g(e^i, x)e^j - g(e^j, x)e^i$$

si $\tilde{\mathcal{E}}$ es una sección local de $\text{Spin}(M)$ liftando a \mathcal{E} ,

$$\tilde{\mathcal{E}}^* \tilde{\omega} = E^* \omega = \frac{1}{2} \sum g(\nabla e_i, e_j) \left(+ \frac{1}{2} \frac{e^i e^j}{\text{Spin}(p, q)} \right) \in \mathcal{C}(p, q)$$

Esto define $\nabla = d + \tilde{E}^* \tilde{\omega}$ en secciones de $\tilde{E}(M)$.

$\not\partial := \sum_i e^i \nabla_{e_i}$ es el operador de Dirac

$$\not\partial^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} \text{scal}$$

$0 \neq \psi \in \Gamma(\tilde{E}(M))$ es un espinor armónico si $\not\partial \psi = 0$.

Teorema (Lichnerowicz) (M, g) compacto, 1) scal ≥ 0 (> 0 en algún punto) \Rightarrow $\#$ espinores armónicos.

2) scal = 0, $\not\partial \psi = 0 \Rightarrow \nabla \psi = 0$ paralelo.

Espinores paralelos

$\nabla \psi = 0 \Rightarrow \psi$ es invariante bajo el transporte paralelo definido por ∇
 \Rightarrow para todo $p \in M$, $\psi(p)$ es invariante bajo $\text{Hol}(p)$ (el lift a espín de $\text{Hol}(p)$).

(M, g) riemanniana (+-def) $\Rightarrow \nabla \psi = 0 \Rightarrow (M, g)$ es "Ricci-flat"

Grupos de holonomía riemannianos:

Élie Cartan (espacios métricos)
M. Berger, J. Simons, D. Alekseyevsky, ...

$SO(n)$	n	quéricos
$U(n)$	$2n$	kähler
$Sp(n) \cdot Sp(1)$	$4n$	\mathbb{Q} kähler
$SU(n)$	$2n$	C-Y
$Sp(n)$	$4n$	H.K
G_2	7	—
$Spin(7)$	8	—

\Rightarrow holonomías con Ricci = 0 y holonomías con espinores paralelos

Las formas paralelas se construyen a raíz de espinores paralelos:

$$\omega(x, y) = (\psi, x \wedge y \cdot \psi) \text{ etc...}$$

[M. Wang]

Twistores

$$\Gamma(M) \xrightarrow{\nabla} T^*M \otimes \Gamma(M) \xrightarrow{d} \Gamma(M)$$

ker d = W \in T^*M \otimes $\Gamma(M)$

$$\Gamma(M) \xrightarrow{\nabla} T^*M \otimes \Gamma(M) \xrightarrow{\pi} W$$

I

operador de Peirce

$$I_X \psi = \nabla_X \psi + \frac{1}{2} X \cdot \not\psi$$

$$I_X \psi = 0 \iff \psi \text{ es un } \underline{\text{twistor}}$$

Espinores de Killing

Un caso especial de twistores son los espinores de Killing:

$$0 \neq \psi \in \Gamma(\Gamma(M)) \quad \nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi \quad \forall X \in \mathcal{X}(M) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$$

($\lambda^2 \sim \text{scal}$)

(M, g) riemanniana: ~~∃~~ ψ KS \implies (M, g) \Leftarrow Einstein

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Einstein, scal} > 0, \text{ compacta}$

$\lambda \in i\mathbb{R} \quad \text{---}, \text{scal} < 0, \dots$

$\lambda = \pm \frac{1}{2}$ wlog $\tilde{\nabla}$ conexista $\tilde{\nabla}_X \psi = \nabla_X \psi + \lambda X \cdot \psi$

hol($\tilde{\nabla}$) = Spin(n+1)

(\tilde{M}, \tilde{g}) como: $\tilde{M} = \mathbb{R}^+ \times M, \tilde{g} = dr^2 + r^2 g$
 $\tilde{\nabla}$ es la conexista LC de \tilde{M} .

\therefore (M, g) admite espinores de Killing reales \iff (\tilde{M}, \tilde{g}) admite espinores parabolos.

Teorema (Gallot) (M, g) completa. (\tilde{M}, \tilde{g}) es irreducible o plana.

(\tilde{M}, \tilde{g})	$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$	CY	HK	G_2	$Spin(7)$
(M, g)	S^n	S-E	3-S	NK ₆	wh. G_2