ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2003, т. 240, с. 73–81

УДК 512.7

Направленные рациональные приближения с некоторыми приложениями в алгебраической геометрии[1]

©2003 г. А. А. Борисов[2], В. В. Шокуров[3]

Поступило в октябре 2002 г.

Обсуждаются существование и порядок направленных рациональных приближений точек пространства $\mathbb{R}^n$. В качестве приложений приводятся упрощенная версия леммы об аппроксимации, а также доказательство обобщения теоремы рациональности из логПММ, основанное на более новом геометрическом подходе.

1. НАПРАВЛЕННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Начнем с хорошо известного результата (см., например, [4, Ch. I, Theorem VII]).

Теорема 1.1 (Дирихле). *Существует вещественная положительная функция $c = c(n)$ целого положительного аргумента n такая, что для любой точки a (арифметического) аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ размерности n имеется бесконечное множество целых положительных чисел d и целых точек $m \in \mathbb{Z}^n$ таких, что*

$$\left\| a - \frac{m}{d} \right\| < \frac{c}{d^{1+1/n}},$$

где норма $\|\cdot\|$ задана максимальным абсолютным значением координат (см. [13, Notation 5.16]).

Доказательство. Пример классического приложения принципа “ящиков” Дирихле. См. подробности в [13]. □

Согласно теории цепных дробей при $n = 1$, выбирая приближения m/d, можно предполагать дополнительно, что все они лежат по одну произвольно выбранную сторону от a (см., например, [6]).

Под приближениями по направлению v понимаются приближения с нормализациями ошибок, стремящимися к v. При $n \geq 2$ можно также пытаться найти рациональные приближения a по любому направлению. Это означает всюду плотность на поверхности куба $\|\cdot\| \leq 1$ нормализаций ошибок приближений (направлений ошибок)

$$\frac{a - m/d}{\|a - m/d\|}$$

подходящего множества точек m/d теоремы 1.1. Однако это следует ожидать лишь при выполнении вполне естественных условий, формулируемых ниже в следствии 1.3.

[1]Работа выполнена вторым автором при финансовой поддержке NSF (грант DMS-0100991).

[2]Mathematics Department, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA.
E-mail: borisov@math.psu.edu

[3]Department of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA.
E-mail: shokurov@math.jhu.edu

Пример 1.2. Пусть $n = 2$ и $a = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Тогда для произвольного приближения $(m_1, m_2)/d$ точки a выполнено неравенство

$$\left\| a - \frac{(m_1, m_2)}{d} \right\| \geq \frac{1}{2} \frac{|m_1 + m_2|}{d}.$$

Значит, сумма координат любого хорошего приближения точки a должна удовлетворять соотношению

$$\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d} = 0$$

и ошибка направлена вдоль $\pm(1, -1)$.

Подобное происходит и в общем случае, когда 1 и координаты a линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Оказывается, что отсутствие таких условий достаточно для приближений, точность которых чуть лучше чем $1/d$.

Следствие 1.3 (теоремы Кронекера). *Предположим, что точка $a \in \mathbb{R}^n$ не содержится ни в одном собственном рациональном аффинном подпространстве в $\mathbb{R}^n$. Тогда она приближается по* любому *направлению рациональными точками m/d с $m \in \mathbb{Z}^n$, целыми положительными знаменателями d и*

$$\left\| a - \frac{m}{d} \right\| = \frac{o(1)}{d},$$

т.е. $o(1) = \|da - m\|$ стремится к 0 с ростом d.

Доказательство. Рассмотрим множество точек $da \bmod \mathbb{Z}^n$ тора $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ с целыми положительными кратностями d. Связная компонента нуля его замыкания будет подтором в T. Согласно нашим предположениям 1 и координаты точки a линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Значит, по теореме Кронекера построенный подтор совпадает со всем тором T. Иначе говоря, множество точек $da \bmod \mathbb{Z}^n$ всюду плотно в T. Поэтому для любого единичного вектора (направления) v можно указать последовательность множителей d такую, что для каждого ее члена d имеется целая точка $m \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ с комбинацией $da - m$, приближающей 0 по направлению v. Тогда последовательность приближений m/d удовлетворяет требованиям следствия. $\square$

Как показывает следующий результат, предыдущее следствие в некотором смысле оптимально.

Теорема 1.4. *Пусть $g(d)$ — произвольная вещественнозначная положительная монотонно возрастающая функция натурального аргумента d. Тогда имеется точка $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, для которой 1 и координаты α и β линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и нет рациональных приближений $(m_1, m_2)/d$, удовлетворяющих одновременно всем следующим требованиям*:

$$\left\| (\alpha, \beta) - \frac{(m_1, m_2)}{d} \right\| < \frac{1}{d \cdot g(d)},$$

$$\alpha < \frac{m_1}{d} \qquad \text{\textit{и}} \qquad \beta < \frac{m_2}{d}.$$

Доказательство. Построим сначала последовательность целых положительных чисел $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$ со следующими свойствами: для каждого i

$$d_i \mid d_{i+1}, \qquad g(d_{i+1}) > 2d_i \qquad \text{и} \qquad d_{i+1} > 2d_i^2.$$

Положим затем

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d_{4k}} \qquad \text{и} \qquad \beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d_{4k+2}}.$$

Предположим теперь, что для некоторой кратности d числа $d\alpha$ и $d\beta$ одновременно близки слева к некоторым целым (m_1 и m_2). Выведем из этого противоречие. Мы различаем два случая в зависимости от того, между какими из чисел d_i лежит число d: для некоторого целого $k \geq 0$

$d_{4k+1} \leq d \leq d_{4k+3}$ или

$d_{4k-1} \leq d \leq d_{4k+1}$, где полагаем $d_{-1} = 1$.

Доказательства обоих случаев подобны с точностью до перестановки чисел α и β. Ниже приводится доказательство первого из них. При этом тоже различаются два подслучая:

$d_{4k} \mid d$. Тогда $d\alpha$ по модулю $\mathbb{Z}$ совпадает с суммой

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d}{d_{4i}},$$

дающей малое положительное число.

$d_{4k} \nmid d$. Тогда расстояние между числом $d\alpha$ и ближайшим к нему целым числом не менее разности

$$\frac{1}{d_{4k}} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d}{d_{4i}} > \frac{1}{2d_{4k}} > \frac{1}{g(d_{4k+1})} \geq \frac{1}{g(d)}.$$

Пусть числа 1 и α, β линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Отсюда получаем не все равные 0 целые числа i, n и m, для которых $i + n\alpha + m\beta = 0$. Значит, $|n| + |m| > 0$. Также можно предполагать $m \neq 0$. Рассмотрим рациональные приближения

$$\alpha_l = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{d_{4k}}, \qquad \beta_l = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{d_{4k+2}}.$$

Тогда

$$|i + n\alpha_l + m\beta_l| = |n(\alpha_l - \alpha) + m(\beta_l - \beta)| \leq \frac{2(|m| + |n|)}{d_{4l+4}} < \frac{|m| + |n|}{d_{4l+3}^2} < \frac{|m| + |n|}{4d_{4l+2}^4}.$$

С другой стороны, число $d_{4l+2}(i + n\alpha_l + m\beta_l)$ целое. Оно не равно нулю для достаточно больших индексов l, потому что сравнимо с m по модулю d_{4l+2}/d_{4l}. Это невозможно. $\square$

В некоторых ситуациях следствие 1.3 все же можно улучшить. С одной стороны, оно уточняется теоремой Лоуренса [7]. Из нее вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ имеется конечное число классов рациональных собственных аффинных подпространств с точностью до целых сдвигов, точки которых не обладают нетривиальными приближениями с точностью лучше чем ε/d. Эта теорема имеет важные приложения в изучении торических особенностей, в частности: из нее следует гипотеза Мори–Д.Р. Моррисона–Я. Моррисона о торических четырехмерных терминальных особенностях (ср. [8, 2, 3]). Отметим также, что точки, построенные в доказательстве теоремы 1.4, обладают очень хорошими приближениями по некоторым направлениям. Вероятно, это верно и в общем случае. В частности, если 1 и координаты точки — линейно независимые над $\mathbb{Q}$ алгебраические числа, то следует ожидать существования ее достаточно хороших приближений (лучше чем $o(1/d)$) по любому направлению. Следующий результат тоже представляет интересный пример баланса порядка приближения и ограничения на направления приближения.

Теорема 1.5. *Пусть a — точка в $\mathbb{R}^n$, не содержащаяся ни в одном собственном рациональном аффинном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, а $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ненулевая линейная функция с рациональными коэффициентами. Тогда существуют вещественное положительное число C, бесконечное множество целых положительных чисел d и последовательность рациональных точек $Q_d \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ такие, что для каждого d кратность dQ_d цела, $f(Q_d) > f(a)$ и*

$$\|a - Q_d\| < \frac{C}{d^{1+1/(2n-1)}}.$$

Доказательство. Поскольку константа C достаточно произвольна, то в подходящей системе координат, определенной над $\mathbb{Q}$, можно предполагать, что f — последняя координатная функция. В частности, $f(a) = a_n$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$. Число $f(a)$ иррационально. Значит, по теории цепных дробей существует последовательность приближений q/d числа $f(a)$ на $\mathbb{R}$ с $q/d - f(a) < 1/d^2$ и $q/d > f(a)$. Для каждого d делаем следующее. Применяем [10, Ch. 2, Theorem 1A][4] к точке $P_d = d(a_1, \dots, a_{n-1})$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ с числом Q, являющимся целой частью числа $d^{1/n}$. Из этого следует существование натурального числа $l \le d^{(n-1)/n}$ и точки $W_d = (b_1, \dots, b_{n-1})/l$ с целым вектором $(b_1, \dots, b_{n-1})$ таких, что

$$\|lP_d - lW_d\| < \frac{C}{d^{1/n}}.$$

Так как $l/d \le 1/d^{1/n}$, то

$$\|lda - (b_1, \dots, b_{n-1}, lq)\| < \frac{C}{d^{1/n}}.$$

Наконец, поскольку $ld \le d^{(2n-1)/n}$, теорема верна для $Q_d = (b_1, \dots, b_{n-1}, lq)/ld$ с ld вместо d. $\square$

Следствие 1.6 (ср. [13, Lemma 5.15])**.** *Пусть a — точка в $\mathbb{R}^n$, а V — замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в a и не содержащий аффинных подпространств положительной размерности. Тогда существуют вещественные положительные числа c и r, бесконечное множество целых положительных чисел d и последовательность рациональных точек $Q_d \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ такие, что для каждого d кратность dQ_d цела, Q_d* не *лежит во внутренности конуса V и*

$$\|a - Q_d\| < \frac{c}{d^{1+r}}.$$

Если точка a нерациональна, то требуемую последовательность точек Q_d можно выбрать вне V.

Доказательство. При нерациональности a применяем предыдущую теорему к пересечению конуса V с минимальным рациональным аффинным подпространством, содержащим a, а линейную функцию выбираем так, чтобы она принимала значение $< f(a)$ на $V \setminus \{a\}$. Если же точка a рациональна, то берем все $Q_d = a$. $\square$

2. ПРИЛОЖЕНИЯ

В качестве первого приложения приводится следующее упрощение в формулировке [13, Corollary 5.19]; при этом оценка приближения (по сравнению с приближением дивизора D' [13]) может ухудшиться. Все многообразия, отвечающие им объекты и конструкции рассматриваются в настоящем разделе локально$/P$ (ср. [13, 1.14. Conventions]).

Следствие 2.1 (о диофантовом приближении)**.** *Пусть D — полуобильный$/Z$ $\mathbb{R}$-дивизор на X. Тогда существуют вещественные положительные числа r и c, бесконечная последо-*

[4]Пусть $a_1, \dots, a_n$ — действительные числа и $Q \ge 1$ — целое число. Тогда существуют такие целые числа $q, p_1, \dots, p_n$, что $1 \le q \le Q^n$ и $|a_i q - p_i| \le \frac{1}{Q}$ для всех $1 \le i \le n$.

вательность натуральных чисел d и последовательность $\mathbb{Q}$-дивизоров Q_d на X такие, что для каждого d

- *линейная система $|dQ_d|$ свободна,* в частности, дивизор Q_d полуобилен;
- $\operatorname{Supp}(D - Q_d) \subset \operatorname{Supp} D_{\mathrm{irr}}$, *где D_{irr} обозначает иррациональную компоненту (часть) дивизора D, т.е. приближение затрагивает лишь иррациональные кратности дивизора D;*
- $\|D - Q_d\| < c/d^{1+r}$.

Более того, если D не является $\mathbb{Q}$-дивизором, то при подходящем выборе

- $\operatorname{mult}_{P_i} Q_d > \operatorname{mult}_{P_i} D$ *по крайней мере в одном простом дивизоре P_i на X;*
- $\operatorname{mult}_{P_i} Q_d = \operatorname{mult}_{P_i} D$, *когда кратность $\operatorname{mult}_{P_i} D$ рациональна.*

Добавление 2.1.1. *Для любого пучка идеалов J на X можно также предполагать следующую* свободу относительно J:

- *каждая линейная подсистема $|J(dQ_d)| \subset |dQ_d|$* свободна над *открытым подмножеством $T \setminus g(\operatorname{Supp} J)$, где $g\colon X \to T/Z$ — стягивание, заданное дивизором D, т.е. $g(\operatorname{Bs}|J(dQ_d)|) \subset g(\operatorname{Supp} J)$.*

Доказательство такое же, как и доказательство [13, Corollary 5.19, Addendum 5.19.1] со следствием 1.6 вместо [13, Lemma 5.15]. □

Основное применение указанных результатов — доказательство существования логперестроек [13]. Впрочем для этого вполне достаточна версия с более грубыми приближениями, как в следствии 1.3.

Имеются и другие не менее важные приложения. Здесь мы обсудим еще лишь одно — теорему рациональности, для которой тоже достаточно довольно грубого приближения (см. следствие 1.3):

(APX) для любых вещественных $\varepsilon > 0$ и a найдется рациональное число $r = m/d$ с натуральным знаменателем d такие, что
1) $a \le r$ и
2) $r - a < \varepsilon/d$.

Впервые теорема рациональности была сформулирована и доказана для трехмерных многообразий с каноническими особенностями М. Ридом [9, Lemma 5.5]. Более продвинутая версия — [5, Theorem 4-1-1]. Наше главное новшество относится к распространению результата на более широкий класс многообразий, точнее пар. Делается это не в погоне за максимальной общностью, а поскольку индукция проходит более естественно для таких пар.

Определение 2.2. *Обобщенной* логпарой $(X/Z, B)$ называется пара, состоящая из полного морфизма $f\colon X \to Z$ нормальных алгебраических многообразий и эффективного $\mathbb{R}$-дивизора (*обобщенной границы*) B на X таких, что логканонический дивизор $K + B$ является $\mathbb{R}$-Картье. Кроме того, предполагается заданной подсхема $X_{-\infty} = (X, B)_{-\infty} \subset X$, точки которой суть все точки нелогканоничности пары (X, B) (ср. [13, Example 5.25] и [1, Example 4.3, 1]). Таким образом, пара $(X/Z, B)$ логканонична тогда и только тогда, когда $X_{-\infty} = \varnothing$.

Если морфизм $X \to Z$ проективен, пара $(X/Z, B)$ называется *проективной.*

Теорема 2.3 (рациональности). *Пусть $(X/Z, B)$ — обобщенная проективная логпара над основным полем характеристики 0 с $\mathbb{Q}$-дивизором B, H — относительно обильный$/Z$ дивизор Картье, a — неотрицательное вещественное число такие, что*

(i) *дивизор $K + B + aH$ численно эффективен$/Z$, но не численно обилен$/Z$; однако*

(ii) *$(K + B + aH)_{|X_{-\infty}}$ численно обилен$/Z$.*

Тогда a рационально.

Данная теорема и, вероятно, ее доказательство, приводимое ниже, проходят в еще более общем классе пар — квазилогпар (ср. [1, Theorem 5.9]). Отметим, что квазилогмногообразия включают, но не совпадают с обобщенными логканоническими многообразиями по существу из-за ненормальности, а также поскольку даже в нормальном случае логканонический дивизор обобщенного многообразия, представляющий подобный дивизор квазилогмногообразия, полуканоничен, т.е. определен с точностью до $\mathbb{R}$-линейной эквивалентности.

Все ограничения $D_{|Y}$ определены для $\mathbb{R}$-Картье дивизоров D с точностью до $\mathbb{R}$-линейной эквивалентности $\sim_{\mathbb{R}}$ (ср. смешанные ограничения [13, 7.3. Mixed restriction]). Соответственно такие ограничения определены с точностью до $\mathbb{Q}$-линейной эквивалентности для $\mathbb{Q}$-Картье дивизоров D.

Доказательство теоремы 2.3 проводим с помощью индукции по размерности X. При этом мы различаем следующие два случая:

- индуктивный: при некотором рациональном $0 \le r \le a$ имеет место $\mathbb{Q}$-линейная эквивалентность
$$K + B + rH \sim_{\mathbb{Q}} D$$
с эффективным $\mathbb{Q}$-дивизором D;
- алгебраический: таких r и D не существует; в частности, тогда логканонический дивизор K неэффективен даже с точностью до $\sim_{\mathbb{Q}}$.

Очевидно можно предполагать $a > 0$.

Начнем с индуктивного случая. Тогда результат теоремы получается из подобного в меньшей размерности, что позволяет применять индукцию по размерности. Однако для этого нам понадобится присоединение на подходящий логканонический центр $Y \subset \mathrm{LCS}(X, B)$. Прежде всего напомним, что неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называют *логканоническим центром*, если в общей точке Y пара (X, B) логканонична, но не Кавамата-логтерминальна. Отсюда следует существование простого $\mathfrak{b}$-дивизора E, логдискрепанта которого равна 0 и $\mathrm{center}_X E = Y$. Всякий такой $\mathfrak{b}$-дивизор E однозначно определяет конечный морфизм $\nu\colon Y^\nu \to Y$ нормального многообразия Y^ν, например в разложении Штейна
$$E \to Y^\nu \to Y$$
естественного морфизма $E \to Y$, задаваемого моделью $W \to X$ многообразия X, на которой E — нормальное неприводимое дивизориальное подмногообразие. По-другому: $\nu\colon Y^\nu \to Y$ — нормализация Y в поле $\mathfrak{b}$-дивизора E. Если $\mathfrak{b}$-дивизор E единствен, то центр называют *исключительным*. В этом случае (по теореме связности для LCS) ν — морфизм нормализации.

В данной ситуации присоединение означает существование эффективного дивизора B_{Y^ν} на Y^ν такого, что

- B_{Y^ν} можно считать $\mathbb{Q}$-дивизором, когда таков B;
- $K_{Y^\nu} + B_{Y^\nu} \sim_{\mathbb{R}} \nu^*((K + B)_{|Y})$, при этом эквивалентность $\sim_{\mathbb{R}}$ можно заменить на $\sim_{\mathbb{Q}}$, когда B — $\mathbb{Q}$-дивизор;
- особенности не усугубляются: Кавамата-логтерминальные точки (X, B) (точнее, их прообразы относительно ν) остаются таковыми и для (Y^ν, B_{Y^ν}), то же — для логканонических точек, а поэтому $\nu(Y_{-\infty}(Y^\nu, B_{Y^\nu})) \subset X_{-\infty}$.

В общем случае ожидается, что достаточно взять нормализацию $\nu\colon Y^\nu \to Y$ самого Y. Однако это доказано лишь при исключительности центра Y [1, Theorem 4.9], когда ν всегда таково, и при дополнительном предположении, что $B \ge$ некоторого (численно) обильного/Z $\mathbb{Q}$-дивизора (соответственно $\mathbb{R}$-дивизора), чего достаточно в Кавамата-логтерминальной версии доказываемой теоремы (см. замечание 2.4(2)). Дополнительное ограничение при $a > 0$

выполнено для малой рациональной кратности H и при новом $B := B + \delta H$ с достаточно малым положительным рациональным числом δ. При этом надо поменять a в выражении $K + B + aH$. Поскольку новое число $a := a - \delta$, то достаточно установить рациональность нового a. Более того, теорема 4.11 из [1] позволяет проверить присоединение в общем случае снова при дополнительном предположении на B и подходящем выборе E, а именно вместо b-*дивизора* E надо взять минимальный (по размерности) логканонический центр $C \subset W$ над Y (или его раздутие) на логтерминальном разрешении $W \to X$ пары (X, D). При этом с помощью последовательных дивизориальных присоединений крепантной пары $(W, B_W = B^W)$ надо задать (C, B_C) и применить [1, Theorem 4.11] к стягиванию $C \to Y^\nu$. (Конечный морфизм $Y^\nu \to Y$ в общем случае не бирационален, но является морфизмом Галуа на нормализацию центра Y с инвариантной дивизориальной компонентой присоединения. Вероятно, это позволяет спустить присоединение на нормализацию Y.)

Отметим, что если имеется логканонический центр $Y \subset \mathrm{LCS}(X, B)$, на котором ограничение $(K + B + aH)_{|Y}$ численно необильно$/Z$, то по формуле присоединения обобщенная пара $(Y^\nu/Z, B_{Y^\nu})$ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы для обильного$/Z$ дивизора $\nu^*(H_{|Y})$ и того же числа a. Действительно, (i) вытекает из того, что эквивалентность

$$K_{Y^\nu} + B_{Y^\nu} + a\nu^*(H_{|Y}) \sim_{\mathbb{R}} \nu^*((K + B + aH)_{|Y})$$

и конечные морфизмы сохраняют необильность$/Z$. Наоборот, из сохранения обильности$/Z$ при линейной эквивалентности для включений и конечных морфизмов, а также в силу неусугубления особенностей при присоединении получаем условие (ii).

Теперь мы собственно и обращаемся к индуктивному случаю, когда существуют требуемые r и $D \sim_{\mathbb{Q}} K + B + rH$, и сводим его к предшествующей необильности$/Z$. Очевидно, можно предполагать, что $a > r$. Тогда дивизор D отрицателен на некоторой кривой C над Z, точнее, $f(C) = P$ и $D \cdot C < 0$. Более того, всякая такая кривая $C \subset \mathrm{Supp}\, D$, но по (ii) $C \not\subset X_{-\infty}$. Рассмотрим минимальное d, при котором ограничение $(K + B + aH)_{|Y}$ численно необильно$/Z$ для некоторого логканонического центра $Y \subset \mathrm{LCS}(X, B + dD)$. Такое d существует и ≤ 1 из-за включений $C \subset \mathrm{Supp}\, D$, указанных выше, и условий (i), (ii) теоремы (хорошее упражнение на численную обильность). В рассмотренном выше случае необильности$/Z$ $d = 0$. Кроме того, d рационально, поскольку для $\mathbb{Q}$-дивизора B и $\mathbb{Q}$-Картье дивизора D обращение в нуль логдискрепанты для $(X, B + dD)$ в b-дивизоре E/Y задает линейное уравнение на d с рациональными коэффициентами. После перенормировки теорема сводится к случаю, рассмотренному выше, для новой логпары $(X, B := B + dD)$ с тем же самым дивизором H и $a := a - dr/(1 + d) > 0$.

Осталось разобраться с алгебраическим случаем, который был так назван по способу его доказательства, более алгебраическому и основанному на теории когомологий когерентных пучков. По-прежнему предполагаем, что $a > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{a}{I(n+1)},$$

где I — индекс дивизора $K + B$, а n — размерность многообразия X (или размерность X/Z для большей точности). Согласно (APX) или следствию теоремы Кронекера 1.3 выберем $r = m/d$.

Рассмотрим полиномиальную функцию целого аргумента i

$$\chi(X/Z, \mathcal{O}_X(\mathcal{K} + i\overline{D})) = \chi(X/Z, \omega^b(iD)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \operatorname{rk} R^j f_* \omega^b(iD)$$

— эйлерову характеристику над окрестностью точки $P \in Z$ пучка $\mathcal{O}_X(\mathcal{K} + i\overline{D}) = \omega^b(iD)$, где $\omega^b = \mathcal{O}_X(\mathcal{K})$ — *b-канонический* подпучок канонического пучка $\omega = \mathcal{O}_X(K)$ (ср. [13, Example 4.48]), $D = Id(K+B+mH/d) = Id(K+B)+ImH$ — дивизор Картье с замыканием $\overline{D}$ (см. [12, Example 1.1.1]) и rk — ранг вблизи P. Утверждается, что при $r > a$ эта функция задается

1) ненулевым многочленом степени $\leq n$,

2) обращающимся в нуль при $1 \leq i \leq n+1$,

что невозможно. Значит, $a = m/d$ рационально. Более того, по соображениям, излагаемым ниже, $m \leq I(n+1)$ для простой дроби m/d, т.е. при условии взаимной простоты $(m,d) = 1$.

Действительно, утверждение в 1) о многочлене общее и он не равен нулю, поскольку дивизор D обилен при $r > a$. Обращение в нуль в 2) вытекает из обращений в нуль

$$R^j f_* \omega^b(iD) = 0$$

для всех $j \geq 0$ и $1 \leq i \leq n+1$. При $j = 0$ это следует из алгебраичности (не индуктивности) рассматриваемого случая. Если $R^0 f_* \omega^b(iD) \neq 0$ при некотором $1 \leq i \leq n+1$, то $R^0 f_* \omega^b(iD) \subset R^0 f_* \omega(iD) \neq 0$ и ненулевое сечение s пучка $\omega(iD) = \mathcal{O}_X(K+iD)$ над Z задает эффективный дивизор

$$E = (s) + K + iD \sim K + iD = K + iId(K+B) + iImH$$

на X. Значит,

$$K + B + \frac{iIm}{iId+1}H = K + B + r\frac{iId}{iId+1}H \sim_{\mathbb{Q}} (E+B)/(iId+1) \geq 0,$$

что возможно лишь в индуктивном случае, так как в силу выбора $r = m/d$ и ε выполнены неравенства

$$r < a + \frac{\varepsilon}{d} = a + \frac{a}{I(n+1)d} \leq a + \frac{a}{Iid} = a\frac{iId+1}{iId}$$

и

$$r\frac{iId}{iId+1} < a.$$

При $j > 0$ используются теорема об обращении в нуль Каваматы–Фивега (в целом случае по существу Кодаиры–Грауэрта–Рениншнайдера) и спектральная последовательность композиции морфизмов $f \circ g \colon Y \to Z$, где $g \colon Y \to X$ — разрешение особенностей. Тогда для любого $i \geq 1$ дивизор $g^* iD$ численно эффективен и объемен над X и Z по обильности D, откуда в силу обращения в нуль для любого $j \geq 1$

$$R^j g_* \omega_Y(g^* iD) = R^j g_* \mathcal{O}_Y(K_Y + g^* iD) = 0$$

и

$$R^j (f \circ g)_* \omega_Y(g^* iD) = R^j (f \circ g)_* \mathcal{O}_Y(K_Y + g^* iD) = 0,$$

где канонический пучок $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(K_Y) = \mathcal{O}_Y(\mathcal{K})$ b-каноничен по неособости Y. С другой стороны, по формуле проекции

$$R^0 g_* \omega_Y(g^* iD) = (R^0 g_* \mathcal{O}_Y(\mathcal{K}))(iD) = \mathcal{O}_X(\mathcal{K})(iD) = \omega^b(iD)$$

и из спектральной последовательности получаем требуемое обращение в нуль при $j \geq 1$.

Если a рационально и задано простой дробью m/d, то то же самое противоречие получается и для простой дроби $r = m'/d' > a$ с разностью

$$r - a = \frac{m'}{d'} - \frac{m}{d} = \frac{m'd - d'm}{d'd} = \frac{1}{dd'},$$

если

$$\frac{1}{d} < \varepsilon = \frac{a}{I(n+1)} = \frac{m}{dI(n+1)},$$

т.е. если $m > I(n+1)$. Требуемая дробь m'/d' отвечает решению диофантова уравнения $m'd - d'm = 1$ с $m' > 0$. Такое решение существует, поскольку $(m,d) = 1$. $\square$

Замечания 2.4. (1) В трехмерном случае для доказательства теоремы рациональности достаточно присоединения на дивизоры (поверхности), иначе требуемая рациональность получается из существования кривой (один из логканонических центров), на которую $K + B + aH$ ограничивается необильно. По существу это близко к первым доказательствам теоремы о конусе (см., например, [11]).

(2) В Кавамата-логтерминальном случае для доказательства теоремы рациональности достаточно присоединения [1, Theorem 4.9], если перед этим возмутить добавочный дивизор dD (см. доказательство [13, Lemma 10.15]).

(3) В заключение отметим, что основное приложение теоремы рациональности — теорема о конусе кривых [11; 9; 5, Theorem 4-2-1]. Для этого после теоремы рациональности прежде всего требуется теорема о стягивании: для обобщенного случая достаточно теоремы 5.1 из [1]. Другой важный ингредиент доказательства теоремы о конусе, связанный с дискретностью экстремальных лучей, — оценка числителя m порога a (см. оценку $m \le I(\dim X/Z + 1)$ в [1, Theorem 5.9]; в других подходах m появляется как знаменатель [5, Theorem 4-1-1]). При нашем подходе можно использовать теорему о стягивании для $K + B + aH$ и оценку длины данного стягивания, т.е. существование стягиваемой кривой C/Z с $-(K+B)\cdot C \le 2\dim X/Z$ (ср. с доказательством теоремы о конусе (5.1.1) для трехмерий из [12]). Это дает чуть более грубую оценку: $m \le 2I \dim X/Z$. Более точная оценка длины дала бы более точную оценку и числителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambro F.* Quasi-log varieties: E-print. http://arxiv.org/abs/math.AG/0112282, 29 p. // Наст. изд. С. 220–239.
2. *Borisov A.* On classification of toric singularities // J. Math. Sci. 1999. V. 94, N 1. P. 1111–1113. http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/9804137.
3. *Borisov A.* Convex lattice polytopes and cones with few lattice points inside, from a birational geometry viewpoint: E-print. http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0001109.
4. *Касселс Дж.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. Пер. с англ.: *Cassels J.W.S.* An introduction to Diophantine approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957; reprint. New York: Hafner Publ. Co., 1972.
5. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Algebraic geometry. Sendai, 1985. Amsterdam: North-Holland, 1987. P. 283–360. (Adv. Stud. Pure Math.; V. 10).
6. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. 4-е изд. М.: Наука, 1978.
7. *Lawrence J.* Finite unions of closed subgroups of the n-dimensional torus // Applied geometry and discrete mathematics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1991. P. 433–441. (DIMACS Ser. Discr. Math. Theor. Comput. Sci.; V. 4).
8. *Mori S., Morrison D.R., Morrison I.* On four-dimensional terminal quotient singularities // Math. Comput. 1988. V. 51, N 184. P. 769–786.
9. *Reid M.* Projective morphism according to Kawamata: Preprint. Univ. Warwick, 1983.
10. *Шмидт В.* Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983. Пер. с англ.: *Schmidt W.M.* Diophantine approximation. Berlin: Springer, 1980. (Lect. Notes Math.; V. 785).
11. *Шокуров В.В.* О замкнутом конусе кривых трехмерных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 1. С. 203–208.
12. *Shokurov V.V.* 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81, N 3. P. 2667–2699.
13. *Shokurov V.V.* Prelimiting flips // Наст. изд. С. 82–219.