BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Herausgeber:
G. HARDER, ST. HILDEBRANDT, F. HIRZEBRUCH,
W. KLINGENBERG, R. LEIS, E. PESCHL,
J. TITS, H. UNGER, W. VOGEL

Nr. 53

Werner Meyer

Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln

BONN 1972

Als Manuskript gedruckt im
Mathematischen Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen am 18. November 1971

Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Werner Meyer

aus Rheydt

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathem.-Naturw.Fakultät der Universität Bonn
Referent: Prof. Dr. F. Hirzebruch
Koreferent: Prof. Dr. G. Harder

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Arbeit [6] von S.S. CHERN, F. HIRZEBRUCH und J.P. SERRE wurde gezeigt, daß die Signatur $\tau(E(\xi))$ des Totalraumes $E(\xi)$ eines Faserbündels ξ, dessen Faser F und Basis X kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten sind, gleich $\tau(F)\cdot\tau(X)$ ist, falls die Fundamentalgruppe von X trivial auf der Kohomologie von F operiert. K. KODAIRA [10*] und M.F. ATIYAH [1] zeigten sodann, daß die letztere Voraussetzung nicht entbehrlich ist. Sie gaben dort ein Beispiel eines Flächenbündels $\xi = (E,X,p,F,G)$ an, für welches X bzw. F eine kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht 129 bzw. 6 und $\tau(E) = 2^8 \neq \tau(X)\cdot\tau(F) = 0$ ist. Dieses Beispiel und andere aus [10*] wurde erneut von F. HIRZEBRUCH in [9] betrachtet, der die Ergebniss von KODAIRA und ATIYAH verallgemeinerte. Es erhebt sich die Frage, wie sich die Operation der Fundamentalgruppe der Basis auf der Kohomologie der Faser auf die Signatur des Totalraume auswirkt.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß unter recht allgemeinen Voraussetzungen die H-Signatur des Totalraumes $E(\xi)$ eines Faserbündels ξ gleich der H-Signatur $\tau(E_2^{*,*}(\xi),\omega_2)$ des E_2-Terms der Spektralsequenz $E_r^{*,*}(\xi)$ ist. Hierbei ist H eine endliche Gruppe, die auf ξ operiert. Dieses Ergebnis veranlaßt uns, die H-Signatur $\tau(X;\Gamma)$ von lokalen Koeffizientensystemen Γ über X mit symmetrischer oder schiefsymmetrischer regulärer Paarung $\Gamma\times\Gamma \longrightarrow \underline{L}$ zu untersuchen. Es zeigt sich, daß $\tau(X;\Gamma)$ die gleichen Bordismus- und Additivitätseigenschaften wie die gewöhnliche Signatur hat. Ebenso läßt sich auch der Satz von C.T.C. WALL [20] übertragen. Die Signatur liefer Homomorphismen $\tau\colon\ \Omega_{2k}(B_G) \longrightarrow \mathbb{Z}$, wobei $G \subseteq Sp(2h,\mathbb{R})$ für $k \equiv 1$ bzw. $G \subseteq O(p_+,p_-;\mathbb{R})$ für $k \equiv 0(2)$ ist.

Im zweiten Teil leiten wir unter der Voraussetzung, daß X eine kompakte orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit ohne Rand ist, eine Signaturformel für $\tau(X;\Gamma)$ her, in die außer dem L-Polynom L(X) noch eine charakteristische Klasse $ch^{(2)}(\widetilde{\Gamma}_+ - \widetilde{\Gamma}_-)$ bzw. $ch^{(2)}(\widetilde{\Gamma}^* - \widetilde{\Gamma})$ eingeht, die nur von Γ abhängt und homotopieinvariant ist. Dies führt zur Definition eines Funktors $\hat{A}^*$ und einer natürlichen Transformation $\hat{\varrho} : \hat{A}^*(\cdot,L) \longrightarrow H^{ev}(B_\cdot,\mathbb{Q})$. Weiter ziehen wir einige Folgerungen aus der

Signaturformel. Unter anderem beweisen wir, daß die Signatur multiplikativ ist, wenn $\dim F = 2m$ und $\mathrm{Rang}(H^m(F,\mathbb{Z}) \leqslant 2$ oder wenn die Strukturgruppe G von ξ eine kompakte Liegruppe ist.

Der letzte Teil schließlich befaßt sich mit Flächenbündeln und lokalen Koeffizientensystemen über Flächen. Wir beweisen, daß zu jedem Homomorphismus $\pi_1(X,*) \longrightarrow \Gamma_h$ ein Flächenbündel $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit Faser F vom Geschlecht h und $G = \mathrm{Diff}^+(F)$ existiert. Hierbei ist $\Gamma_h \cong \mathrm{Diff}^+(F)/\mathrm{Diff}(F)_o$ die Teichmüller-Gruppe zum Geschlecht h. Weiter definieren wir einen Kozykel $\tau_h : Sp(2h,\mathbb{Z}) \times Sp(2h,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ und eine Funktion $\wp: Sp(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ mit $\delta\wp = \tau_1$ und geben eine einfache Formel für $\tau(X;\Gamma)$ mit Hilfe von τ_h an. Ferner zeigen wir, daß sich $\wp$ mittels Dedekind-Summen beschreiben läßt. Schließlich beweisen wir, daß die Abbildung $\tau: \Omega_2(B_{Sp(2h,\mathbb{Z})}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ für $h \geqslant 2$ nichttrivial ist und leiten eine exakte Sequenz

$$\Omega_2(B_{\Gamma_h}) \longrightarrow \Omega_2(B_{Sp(2h,\mathbb{Z})}) \longrightarrow (\mathrm{Ker}(\sigma) \cap [\Gamma_h, \Gamma_h])/[\mathrm{Ker}(\sigma), \Gamma_h] \longrightarrow 0$$

her, wobei $\sigma: \Gamma_h \longrightarrow Sp(2h,\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion ist. Hieraus erhalten wir das folgende hinreichende Kriterium für die Existenz von Flächenbündeln $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit $\tau(E) \neq 0$:

$g(F) = h \geqslant 2$ und $(\mathrm{Ker}(\sigma) \cap [\Gamma_h, \Gamma_h])/[\mathrm{Ker}(\sigma), \Gamma_h]$ ist **Torsionsgruppe**.

Nach einer mündlichen Mitteilung von D. MUMFORD ist die zweite Bedingung für $h \geqslant 3$ erfüllt.

Zur Terminologie in dieser Arbeit ist folgendes zu sagen:

1) Homologie- und Kohomologiegruppen sind, wenn nichts anderes gesagt wird, singulär mit kompakten Trägern.
2) Faserbündel sind im Sinne von STEENROD [19] aufgefaßt.
3) $\langle x_1,\dots,x_n \mid R_1(x_i) = \dots = R_r(x_i) = 1\rangle$ ist die Gruppe mit den Erzeugenden $x_1,\dots,x_n$ und den definierenden Relationen $R_j(x_i) = 1$, $j = 1,\dots,r$, ([11]).
4) Für diskrete Gruppen G und G-Moduln A ist $H^p(B_G, E_G \times_G A)$ kanonisch isomorph zur Kohomologie $H^p(G,A)$ der Gruppe G mit Koeffizienten in A. Für endliche Gruppen G sind $\hat{H}^*(G,A)$ die reduzierten Kohomologiegruppen; insbesondere ist

$$\hat{H}^p(G,A) = H^p(G,A) \text{ für } p > 0,$$
$$\hat{H}^o(G,A) = A^G/N_G A \text{ und}$$
$$\hat{H}^{-1}(G,A) = \mathrm{Ker}(N_G)/I_G A \ ,$$

wobei $N_G : A \longrightarrow A$ der Normhomomorphismus,
A^G der Untermodul der G-invarianten Elemente von A und
$I_G A$ der von den $\gamma a - a$, $\gamma \in G$, $a \in A$ erzeugte Untermodul ist.

Herrn Professor Dr. F. Hirzebruch danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für manche fruchtbare Diskussionen.

Teil I

Signatur von Faserbündeln und lokalen Koeffizientensystemen mit Bilinearform

In diesem Teil wird gezeigt, daß die Signatur eines Faserbündels (E,X,p,F,G) unter relativ allgemeinen Voraussetzungen auf die Signatur eines lokalen Koeffizientensystems Γ über X mit bilinearer Paarung $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} = X \times \mathbb{R}$ zurückgeführt werden kann. Hierzu ist es zweckmäßig, einige Eigenschaften von POINCARÉ-Ringen herzuleiten, wobei wir den Begriff des letzteren etwas allgemeiner fassen. Wir nehmen außerdem an, daß eine endliche Gruppe H auf dem POINCARÉ-Ring operiert.

§ 1. H-Signatur, orientierte POINCARÉ-Ringe und Derivationen

Es sei H eine endliche Gruppe und $R(H,\mathbb{C})$ der Darstellungsring aller endlich-dimensionalen komplexen Darstellungen von H.[1] Weiter sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer H-Modul und β eine reguläre H-invariante Sesquilinearform auf V, so daß einer der folgenden Fälle vorliegt:

a) V ist komplex und β hermitesch,
b) V ist reell und β symmetrisch,
c) V ist reell und β antisymmetrisch.

Dann können wir dem Paar (V,β) ein Element $\operatorname{sign}(V,\beta) \in R(H,\mathbb{C})$ wie folgt zuordnen: Man wähle einen H-Modulautomorphismus $A : V \longrightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\langle x,y \rangle := \beta(x,Ay)$ ist eine hermitesche bzw. euklidische Metrik,
2) $A^2 = \mathrm{id}_V$ in den Fällen a) und b),
   $A^2 = -\mathrm{id}_V$ im Fall c).

Ein solches A läßt sich wie folgt konstruieren: Man wähle eine beliebige H-invariante hermitesche bzw. euklidische Metrik $(\, , \,)$ auf V, definiere $B : V \longrightarrow V$ durch $(x,y) = \beta(x,By)$ und setze $A = B \cdot (B^*B)^{-\frac{1}{2}}$, wobei B^* die Adjungierte von B bzgl. $(\, , \,)$ und $(B^*B)^{-\frac{1}{2}}$ die positive Wurzel aus dem bzgl. $(\, , \,)$ selbstadjungierten positiven Operator $(B^*B)^{-1}$ ist.

---
1) Alle Überlegungen dieses Paragraphen lassen sich auch für eine kompakte Liegruppe H durchführen. Man vergleiche auch die Arbeit [7].

In den Fällen a) und b) zerfällt V in die direkte Summe $V_+ \oplus V_-$ der Eigenräume $V_\pm$ zu den Eigenwerten ± 1 von A. Im Fall c) liefert $J := A$ zwei komplexe Strukturen $\pm J$ auf V, und wir bezeichnen die hierdurch definierten komplexen H-Moduln mit $(V, \pm J)$. Wir setzen nun im Fall

a) $\mathrm{sign}(V,\beta) := [V_+] - [V_-]$,
b) $\mathrm{sign}(V,\beta) := [V_+ \otimes \mathbb{C}] - [V_- \otimes \mathbb{C}]$,
c) $\mathrm{sign}(V,\beta) := [(V,J)] - [(V,-J)]$.

<u>Lemma I. 1.1:</u> $\mathrm{sign}(V,\beta)$ hängt nur von V und β ab.

<u>Beweis:</u> Sei $\tilde{A} : V \longrightarrow V$ ein anderer H-Modulautomorphismus mit 1) und 2). Wir unterscheiden die Fälle a), b) und c).

"a) und b)": Sei $V = \tilde{V}_+ \oplus \tilde{V}_-$ die zu $\tilde{A}$ gehörende Zerlegung von V. Man stellt leicht fest, daß β auf V_+ und $\tilde{V}_+$ positiv definit und auf V_- und $\tilde{V}_-$ negativ definit ist. Somit ist $V_+ \cap \tilde{V}_- = V_- \cap \tilde{V}_+$ und daher aus Dimensionsgründen $V = V_+ \oplus \tilde{V}_- = V_- \oplus \tilde{V}_+$. Hieraus folgt sogar $V_\pm \cong \tilde{V}_\pm$ als H-Modul und falls V reell ist auch $V_\pm \otimes \mathbb{C} \cong \tilde{V}_\pm \otimes \mathbb{C}$.

"c)": Wir definieren auf $V \otimes \mathbb{C}$ eine hermitesche Bilinearform $\beta_{\mathbb{C}}$ durch:

$$\beta_{\mathbb{C}}(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) := \beta(x_2,y_1) - \beta(x_1,y_2) - i(\beta(x_1,y_1) + \beta(x_2,y_2)),$$

$x_i, y_i \in V$.

Seien $W_\pm$ bzw. $\tilde{W}_\pm$ die Eigenräume von J bzw. $\tilde{J}$ in $V \otimes \mathbb{C}$ zu den Eigenwerten $\pm i$. Man rechnet leicht nach, daß $\beta_{\mathbb{C}}$ auf W_+ und $\tilde{W}_+$ positiv definit und auf W_- und $\tilde{W}_-$ negativ definit ist. Weiter stellt man leicht fest, daß die Abbildungen

$$\begin{matrix} \alpha_\pm : (V, \pm J) \longrightarrow W_\pm \\ \tilde{\alpha}_\pm : (V, \pm \tilde{J}) \longrightarrow \tilde{W}_\pm \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \alpha_\pm(x) = x \mp iJx \\ \tilde{\alpha}_\pm(x) = x \mp i\tilde{J}x \end{matrix}$$

H-Modulisomorphismen von komplexen H-Moduln sind. Aus dem zuvor unter "a) und b)" Bewiesenen folgt somit:

$$(V, \pm J) \cong W_\pm \cong \tilde{W}_\pm \cong (V, \pm \tilde{J}).$$

<u>Lemma I. 1.2:</u> Es sei (V,β) ein H-Modul mit Bilinearform wie oben. Ferner sei $W \subseteq V$ ein H-Untermodul mit $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$ und $\beta | W \times W = 0$. Dann ist $\mathrm{sign}(V,\beta) = 0$.

<u>Beweis:</u> Wir unterscheiden wieder die Fälle a), b) und c).
"a) und b)": Es sei $V = V_+ \oplus V_-$ eine Zerlegung, wie sie in der Definition von $\mathrm{sign}(V,\beta)$ auftritt. Dann ist $W \cap V_+ = W \cap V_- = 0$. Aus Dimensionsgründen und $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$ folgt daher, daß die Kompositionen

$$W \subset V_+ \oplus V_- \xrightarrow{p_\pm} V_\pm \quad , \ (p_\pm = \text{Projektion auf } V_\pm)$$

H-Modulisomorphismen sind. Somit ist $V_+ \cong W \cong V_-$ und daher $[V_+] - [V_-] = 0$ bzw. $[V_+ \otimes \mathbb{C}] - [V_- \otimes \mathbb{C}] = 0$.

"c)": Es sei J eine komplexe Struktur, wie sie in der Definition von $\mathrm{sign}(V,\beta)$ auftritt. Da $\langle x,y \rangle = \beta(x,Jy)$ positiv definiert ist, folgt $W \cap J(W) = 0$ und wegen $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$ weiter $V = W \oplus J(W)$. Wir können daher durch $\alpha(x+Jy) := x - Jy$ für $x,y \in W$ eine Abbildung

$$\alpha : (V,J) \longrightarrow (V,-J)$$

definieren. Man rechnet leicht nach, daß α ein H-Modulisomorphismus von komplexen H-Moduln ist, woraus offensichtlich $\mathrm{sign}(V,\beta) = 0$ folgt.

Ist V ein H-Modul und $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht notwendig reguläre symmetrische oder schiefsymmetrische H-invariante Bilinearform, so definieren wir: $\mathrm{sign}(V,\beta) := \mathrm{sign}(V/\mathrm{Rad}(V), \tilde{\beta})$, wobei $\tilde{\beta}$ die durch β induzierte Bilinearform ist. Offenbar ist, wenn $V = \mathrm{Rad}(V) \oplus \tilde{V}$ mit einem komplementären H-Modul $\tilde{V}$ ist: $\mathrm{sign}(V,\beta) = \mathrm{sign}(\tilde{V}, \beta | \tilde{V} \times \tilde{V})$. Wir beweisen nun für spätere Anwendungen eine Verallgemeinerung von Lemma I. 1.2:

<u>Lemma I. 1.3:</u> Seien U,V endlich-dimensionale H-Moduln über $\mathbb{R}$ und U^*, V^* die dualen H-Moduln. Weiter sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] & U^* \arrow[d, "\varphi^*"] \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\beta"] & V^* \end{tikzcd}$$

von H-Modulhomomorphismen gegeben mit $\alpha^* = \varepsilon\alpha$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$, wobei $*$ die transponierte Abbildung bezeichne. Seien $\tilde{\alpha}$ bzw. $\tilde{\beta}$ die auf $\mathrm{Im}\,\alpha$ bzw. $\mathrm{Im}\,\beta$ induzierten regulären H-invarianten Bilinearformen mit

$$\tilde{\alpha}(\alpha x, \alpha y) := (\alpha x)(y) \text{ bzw. } \tilde{\beta}(\beta x, \beta y) := (\beta x)(y) \quad \text{für } x,y \in U \text{ bzw. } V.$$

Ferner sei $S = \alpha\varphi(\mathrm{Ker}\,\beta)$, $\tilde{S} = \alpha(\mathrm{Ker}\,\varphi^*\alpha)$. Dann ist $\mathrm{Rad}(\tilde{S}) = S$

und es gilt $\mathrm{sign}(\mathrm{Im}\,\alpha,\tilde{\alpha}) = \mathrm{sign}(\mathrm{Im}\,\beta,\tilde{\beta}) + \mathrm{sign}(\tilde{S},\tilde{\alpha}|\tilde{S}\times\tilde{S})$.

<u>Beweis:</u> Wegen $\varphi(\mathrm{Ker}\,\beta) = \varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi) = \mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha} \cap \mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha}$ ist $S \subseteq \tilde{S}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}\,\alpha\varphi)^{\perp} &= \{\alpha x \mid \bigwedge_{y\in V}(\alpha x)(\varphi y) = 0\}\\ &= \{\alpha x \mid \bigwedge_{y\in V}(\varphi^*\alpha x)(y) = 0\}\\ &= \alpha(\mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha}) = \mathrm{Ker}\,\varphi^* \cap \mathrm{Im}\,\alpha = \tilde{S}.\end{aligned}$$

Da $\tilde{\alpha}$ regulär ist, ist auch $\mathrm{Im}\,\alpha\varphi = \tilde{S}^{\perp}$ und damit

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(\tilde{S}) = \mathrm{Rad}(\tilde{S}^{\perp}) = \tilde{S}\cap\tilde{S}^{\perp} &= \mathrm{Ker}\,\varphi^*\cap\mathrm{Im}\,\alpha\cap\mathrm{Im}\,\alpha\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi^*\cap\mathrm{Im}\,\alpha\varphi\\ &= \alpha\varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi) = S.\end{aligned}$$

Sei M ein H-invariantes Komplement von S in $\tilde{S}^{\perp}$ und N ein solches von S in $\tilde{S}$. Dann sind $\tilde{\alpha}|M\times M$ und $\tilde{\alpha}|N\times N$ regulär und wegen $\tilde{S}\perp\tilde{S}^{\perp}$ ist auch $M\perp N$ und daher $M\cap N = 0$. Wir behaupten, daß $\varphi^*|M : M \longrightarrow \mathrm{Im}\,\beta$ ein Isomorphismus von $(M,\tilde{\alpha}|M\times M)$ auf $(\mathrm{Im}\,\beta,\tilde{\beta})$ ist. Wegen $M \subseteq \tilde{S}^{\perp} = \mathrm{Im}\,\alpha\varphi$ ist $\varphi^*(M) \subseteq \varphi^*(\mathrm{Im}\,\alpha\varphi) = \mathrm{Im}\,\beta$. Da $\varphi^*(\tilde{S}^{\perp}) = \mathrm{Im}\,\beta$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{Ker}(\varphi^*|\tilde{S}^{\perp}) = S$ ist. In der Tat ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi^*|\tilde{S}^{\perp}) = \mathrm{Ker}\,\varphi^*\cap\mathrm{Im}\,\alpha\varphi = \alpha\varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi) = S.$$

Ferner ist für $\alpha\varphi x, \alpha\varphi y \in \tilde{S}^{\perp}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi x,\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi y) &= \tilde{\beta}(\beta x,\beta y) = (\beta x)(y) = (\varphi^*\tilde{\alpha}\varphi x)(y)\\ &= (\alpha\varphi x)(\varphi y) = \tilde{\alpha}(\alpha\varphi x,\alpha\varphi y).\end{aligned}$$

Sei $P := (M\oplus N)^{\perp}$. Wegen $S\perp M, S\perp N$ ist $S\subseteq P$ sowie

$$S^{\perp}\cap P = S^{\perp}\cap M^{\perp}\cap N^{\perp} = (S\oplus M)^{\perp}\cap(S\oplus N)^{\perp} = \tilde{S}\cap\tilde{S}^{\perp} = S,$$

also S sein eigenes orthogonales Komplement in P. Weiter ist offenbar

$\mathrm{Im}\,\alpha = M\oplus N\oplus P$ eine orthogonale Summe, also

$$\begin{aligned}\mathrm{sign}(\mathrm{Im}\,\alpha,\tilde{\alpha}) &= \mathrm{sign}(M,\tilde{\alpha}|M\times M) + \mathrm{sign}(N,\tilde{\alpha}|N\times N) + \mathrm{sign}(P,\tilde{\alpha}|P\times P)\\ &= \mathrm{sign}(\mathrm{Im}\,\beta,\tilde{\beta}) + \mathrm{sign}(\tilde{S},\tilde{\alpha}|\tilde{S}\times\tilde{S}),\end{aligned}$$

da nach Lemma I. 1.2 $\mathrm{sign}(P,\tilde{\alpha}|P\times P) = 0$ ist.

<u>Bemerkung:</u> Mit $\mathrm{Ker}\,\alpha = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi^* = W$, $\mathrm{Im}\,\alpha = V$ erhält man wieder Lemma I. 1.2.

Zur Formulierung des Satzes von WALL in § 3 benötigen wir eine weitere Invariante ([20]). Sei (V,β) ein reeller H-Modul mit H-invarianter regulärer Bilinearform. Ferner seien $A,B,C\subseteq V$ H-Untermoduln mit

$\beta|A\times A = \beta|B\times B = \beta|C\times C = 0$. Sei $W := (A\cap(B+C))/((A\cap B) + (A\cap C))$.

Dann wird durch

$$\hat{\beta}(w_1,w_2) := \sigma\cdot\beta(b_1,c_2)$$

mit $w_i = a_i + (A\cap B) + (A\cap C) \in W,\quad a_i = b_i + c_i,\quad a_i\in A, b_i\in B, c_i\in C,$

$$\sigma = \begin{cases}-1\ , & \text{falls } \beta \text{ symmetrisch}\\ +1\ , & \text{falls } \beta \text{ antisymmetrisch}\end{cases}$$

eine H-invariante Bilinearform

$$\hat{\beta} : W\times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert. Man bestätigt leicht, daß diese Definition zulässig sowie $\hat{\beta}$ symmetrisch (antisymmetrisch) ist, wenn β antisymmetrisch (symmetrisch) ist. Wir definieren

$$\mathrm{sign}(V;A,B,C) := \mathrm{sign}(W,\hat{\beta}).$$

Diese Signatur bleibt bei einer geraden Permutation von A,B,C fest, während sie bei einer ungeraden Permutation ihr Vorzeichen ändert.

Bekanntlich hat man eine Abbildung

$$\mathrm{Spur} : R(H,\mathbb{C}) \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

derart, daß für einen H-Modul V $\mathrm{Spur}([V],\cdot) : H \longrightarrow \mathbb{C}$ der Charakter von V und für festes $h\in H$ $\mathrm{Spur}(\cdot,h) : R(H,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Ringhomomorphismus ist. Dabei gilt für $\xi,\eta \in R(H,\mathbb{C})$:

$$\xi = \eta \iff \mathrm{Spur}(\xi,\cdot) = \mathrm{Spur}(\eta,\cdot).$$

Daher ist für (V,β) auch die Abbildung

$$\tau(V,\beta) : H \longrightarrow \mathbb{C} \quad\text{mit}\quad \tau(V,\beta)(h) := \mathrm{Spur}(\mathrm{sign}(V,\beta),h)$$

definiert. Man nennt $\tau(V,\beta)$ die H-Signatur von (V,β).

Wir kommen nun zur Definition eines orientierten POINCARÉ-Ringes. Es sei L ein im folgenden festgehaltener Unterkörper von $\mathbb{R}$.

<u>Definition I. 1.1:</u> Ein Paar (A^*,ω) heißt ein orientierter POINCARÉ-Ring der Dimension n über L $:\iff$

(1) A^* ist eine endlich-dimensionale graduierte antikommutative assoziative L-Algebra mit $A^p = 0$ für $p > n$,

(2) $0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}_L(A^n,L)$, so daß für jedes $p\in\mathbb{Z}$ die Bilinearform $A^p\times A^{n-p} \longrightarrow L,\ (\alpha,\beta)\longmapsto\omega(\alpha\cdot\beta)$ regulär ist.

Der Homomorphismus ω heißt eine Orientierung von A^*.

Eine L-lineare Abbildung $d : A^* \longrightarrow A^*$ vom Grad 1 mit $d \circ d = 0$ und $d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + (-1)^p \alpha \, d\beta$ für $\alpha \in A^p$, $\beta \in A^*$ heißt wie üblic eine Derivation von A.

Falls H als Gruppe von mit ω verträglichen (d.h. $\omega(h\alpha) = \omega(\alpha$ für $h \in H, \alpha \in A^n$) Algebraautomorphismen auf A^* operiert, nennen wi (A^*, ω) einen orientierten H-POINCARÉ-Ring der Dimension n über L. Ist $n = 2m$, so hat man eine reguläre H-invariante Bilinearform

$$B : A^m \times A^m \longrightarrow L, \quad B(\alpha,\beta) = \omega(\alpha \cdot \beta),$$

also auch eine reguläre H-invariante Bilinearform

$$B_{\mathbb{R}} : A^m \otimes \mathbb{R} \times A^m \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die für $\left\{ \begin{array}{ll} m \equiv 0 \ (2) & \text{symmetrisch} \\ m \equiv 1 \ (2) & \text{antisymmetrisch} \end{array} \right\}$ ist. Wir nennen $\tau(A^m \otimes \mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ die H-Signatur von (A^*, ω) und bezeichnen sie kurz mit $\tau(A^*, \omega)$. Falls $n \not\equiv 0 \ (2)$ ist, setzen wir $\tau(A^*, \omega) = 0$. Es gilt nun folgender

<u>Satz I. 1.4:</u> Sei (A^*, ω) ein orientierter H-POINCARÉ-Ring der Dimension n und d eine H-invariante Derivation von A^* mit $\omega(dA^{n-1}) = 0$. Dann ist auch $(H^*(A^*), \omega^*)$ ein orientierter H-POINCARÉ-Ring der Dimension n, und es ist $\tau(H^*(A^*), \omega^*) = \tau(A^*, \omega$ Hierbei ist $\omega^* : A^n/dA^{n-1} \longrightarrow L$ der durch ω induzierte Homomorphismus.

<u>Beweis:</u> Die Gültigkeit von (1) für $(H^*(A^*), \omega^*)$ sowie $\omega^* \neq 0$ sind evident. Da d ein H-Modulhomomorphismus ist, operiert H auch auf $H^*(A^*)$ als Gruppe von Algebra-Automorphismen, und es gilt trivialerweise $\omega^*(ha) = \omega^*(a)$ für $h \in H, a \in H^n(A^*) = A^n/dA^{n-}$ Zum Nachweis der Regularität von

$H^p(A^*) \times H^{n-p}(A^*) \longrightarrow L$ sei $a \in H^p(A^*)$ mit $\omega(a \cdot b) = 0$ für alle $b \in H^{n-p}(A^*)$. Dies bedeutet, daß für $\alpha \in a$ und alle $\beta \in Z^{n-p}(A^*)$ $\omega(\alpha,\beta) = 0$ ist. Somit liefert $d\beta \longmapsto \omega(\alpha \cdot \beta)$ für $\beta \in A^{n-p}$ eine lineare Abbildung $\varphi : B^{n-p+1}(A^*) \longrightarrow L$. Sei $\psi : A^{n-p+1} \longrightarrow L$ eine lineare Fortsetzung von φ. Wegen (2) gibt es ein $\gamma \in A^{p-1}$ mit $\psi(\delta) = \omega(\gamma \cdot \delta)$ für alle $\delta \in A^{n-p+1}$. Aus $\omega(dA^{n-1}) = 0$ folgt somit für jedes $\beta \in A^{n-p}$:

$$\begin{aligned} 0 = \omega(d(\gamma \cdot \beta)) &= \omega(d\gamma \cdot \beta) + (-1)^{p-1} \omega(\gamma \cdot d\beta) = \omega(d\gamma \cdot \beta) + (-1)^{p-} \\ &= \omega(d\gamma \cdot \beta) + (-1)^{p-1} \varphi(d\beta) \ = \omega(d\gamma \cdot \beta) + (-1)^{p-1}\omega \end{aligned}$$

also wiederum nach (2) : $\alpha = (-1)^p d\gamma$ und damit $a = 0$.

Für den Beweis der letzten Behauptung darf man $n = 2m$ annehmen. Wir setzen $B := B^m(A^*)$, $Z := Z^m(A^*)$ und $\langle \alpha,\beta \rangle := \omega(\alpha \cdot \beta)$ für $\alpha, \beta \in A^m$. Ferner sei $\widetilde{H}$ ein H-invariantes Komplement von B in Z. Dann ist offenbar $H^m(A^*) \cong \widetilde{H}$ und $\tau(H^*(A^*), \omega^*) = \tau(\widetilde{H}, \langle\, , \rangle | \widetilde{H} \times \widetilde{H})$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\langle\, , \rangle | \widetilde{H} \times \widetilde{H}$ regulär, so daß $A^m = \widetilde{H} \oplus \widetilde{H}^{\perp}$ und $\langle\, , \rangle | \widetilde{H}^{\perp} \times \widetilde{H}^{\perp}$ ebenfalls regulär ist. Hier bedeute $^{\perp}$ das orthogonale Komplement in A^m bzgl. $\langle\, , \rangle$. Wegen der Additivität der H-Signatur genügt es, $\tau(\widetilde{H}^{\perp}, \langle\, , \rangle | \widetilde{H}^{\perp} \times \widetilde{H}^{\perp}) = 0$ zu zeigen. Aus $\omega(dA^{n-1}) = 0$ folgt nun für jedes $\beta \in A^m$:

$\langle d\alpha, \beta \rangle = 0$ für alle $\alpha \in A^{m-1} \Longleftrightarrow \langle \alpha, d\beta \rangle = 0$ für alle $\alpha \in A^{m-1} \Longleftrightarrow d\beta = 0$. Somit ist $B^{\perp} = Z$ und $Z^{\perp} = B^{\perp\perp} = B$. Wegen $\widetilde{H} \subseteq Z$ ist $B = Z^{\perp} \subseteq \widetilde{H}^{\perp}$. Ferner ist $\widetilde{H}^{\perp} \cap B^{\perp} = (\widetilde{H} \oplus B)^{\perp} = Z^{\perp} = B$, also B sein eigenes orthogonales Komplement in $\widetilde{H}^{\perp}$ und daher wegen der Regularität von $\langle\, , \rangle | \widetilde{H}^{\perp} \times \widetilde{H}^{\perp}$: $\dim B = \frac{1}{2} \dim \widetilde{H}^{\perp}$. Aus Lemma I. 1.2 folgt somit $\tau(\widetilde{H}^{\perp}, \langle\, , \rangle | \widetilde{H}^{\perp} \times \widetilde{H}^{\perp}) = 0$.

Satz I. 1.4 läßt noch eine Verallgemeinerung zu, die wir ebenfalls später benötigen. Zu ihrer Formulierung definieren wir: Ein Pentupel $P^* = (A^*, B^*, i, \cup, \omega)$ heißt ein orientiertes H-POINCARÉ-Paar der Dimension n über L, wenn folgendes gilt:

(1*) A^*, B^* sind endlich erzeugte graduierte L-Moduln, auf denen H graderhaltend operiert,

(2*) $A^p = B^p = 0$ für $p > n$,

(3*) $\cup : A^p \times B^q \longrightarrow A^{p+q}$, $(p,q \in \mathbb{Z})$ sind H-invariante bilineare Paarungen,

(4*) $i : A^* \longrightarrow B^*$ ist ein H-Modulhomomorphismus vom Grad 0 mit $a_1 \cup ia_2 = (-1)^{p \cdot q} a_2 \cup ia_1$ für $a_1 \in A^p, a_2 \in A^q$,

(5*) $\omega : A^n \longrightarrow L$ ist eine nichttriviale H-invariante Linearform, so daß $A^p \times B^{n-p} \xrightarrow{\ \cup\ } A^n \xrightarrow{\ \omega\ } L$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ regulär ist.

Ein Paar (d,d') von H-invarianten linearen Abbildungen $d : A^* \longrightarrow A^*$, $d' : B^* \longrightarrow B^*$ vom Grad 1 mit $d \circ d = 0$, $d' \circ d' = 0$ und $i \circ d = d' \circ i$ sowie $d(a \cup b) = da \cup b + (-1)^p a \cup d'b$ für $a \in A^p, b \in B^*$ heißt wieder eine Derivation von P^*.

Der Begriff des orientierten H-POINCARÉ-Ringes ordnet sich mit $A^* = B^*$, $i = id_{A^*}$ dem obigen Begriff unter. Ist $n = 2m$, so hat man wieder eine H-invariante Bilinearform

$$\langle\, , \rangle : A^m \times A^m \longrightarrow L \ , \ \langle a_1, a_2 \rangle := \omega(a_1 \cup ia_2),$$

deren Signatur mit $\tau(P^*)$ bezeichnet werde. Im Fall $n \not\equiv 1$ (2) sei $\tau(P^*) = 0$. Die angekündigte Verallgemeinerung ist nun

Satz I. 1.5: Sei $P^* = (A^*, B^*, i, \cup, \omega)$ ein orientiertes H-POINCARÉ-Paar der Dimension n über L und (d,d') eine Derivation von P^* mit $\omega(dA^{n-1}) = 0$. Dann ist $H^*(P^*) = (H^*(A^*), H^*(B^*), i^*, \cup^*, \omega^*)$ ebenfalls ein orientiertes H-POINCARÉ-Paar der Dimension n über L, und es ist $\tau(H^*(P^*)) = \tau(P^*)$. Hierbei sind $i^*, \cup^*, \omega^*$ die in kanonischer Weise durch $i, \cup, \omega$ induzierten Abbildungen.

Beweis: Da der Beweis, abgesehen von einigen trivialen Modifikationen, analog zum Beweis von Satz I. 1.4 verläuft, unterdrücken wir ihn hier.

§ 2. H-Signatur und Spektralsequenz eines Faserbündels

Es sei $\xi = (E,X,p,F,G)$ ein Faserbündel im Sinne von STEENROD [19] mit beliebiger Strukturgruppe $G \subseteq Aut(F)$ und H eine endliche Gruppe von Automorphismen von ξ. Hierbei ist Aut(F) die Gruppe der Homöomorphismen von F und G z.B. die Gruppe der Diffeomorphismen oder der biholomorphen Abbildungen von F, wenn F eine differenzierbare oder komplexe Struktur besitzt. Sei $E_r^{*,*} = E_r^{*,*}(\xi)$ die Spektralsequenz von ξ mit Koeffizienten in L und $\underline{H^*(F;L)}$ das lokale Koeffizientensystem mit $\underline{H^*(F;L)}(x) = H^*(F_x;L)$. Bekanntlich sind die $E_r^{*,*}$ für $r \geq 2$ bzgl. des Totalgrades graduierte antikommutative assoziative L-Algebren, auf denen H operiert und die $d_r^{*,*}$ sind H-invariante Derivationen auf $E_r^{*,*}$. Ferner ist $E_r^{*,*} \underset{p}{\Longrightarrow} H^*(E;L)$ bezüglich einer geeigneten Filtrierung von $H^*(E;L)$, wobei das Produkt auf $E_\infty^{*,*}$ durch das $\cup$-Produkt in $H^*(E;L)$ induziert wird (vgl. [4]).

Wegen Satz I. 1.4 erhebt sich daher die Frage, wann $E_2^{*,*} = H^*(X,\underline{H^*(F;L)})$ ein orientierter H-POINCARÉ-Ring bzgl. einer geeigneten Orientierung ω_2 ist. Zu ihrer Beantwortung benötigen wir die folgenden Begriffe (vgl. [5]):
Ein topologischer Raum X heißt homologisch lokal zusammenhängend (HLC) :$\Longleftrightarrow$ Zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x und jedem $p \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von x, so daß $\tilde{H}_p(V,\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_p(U,\mathbb{Z})$ die Nullabbildung ist.

Beispiele: Jeder lokal-endliche Simplizialkomplex und jede topologische Mannigfaltigkeit ist HLC.
Ein lokalkompakter topologischer Raum X heißt eine n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit über L(n-hm$_L$) :

(1) $\dim_L X < \infty$

(2) Die Garbe der lokalen Homologiegruppen $\mathcal{H}_p(X;L)$ ist 0 für $p \neq n$ und lokalkonstant mit Halmen $\cong$ L für $p = n$.

$\mathcal{O}_X := \mathcal{H}_n(X;L)$ heißt die Orientierungsgarbe von X. Falls $\mathcal{O}_X$ konstant ist, heißt X orientierbar und jeder nirgends verschwindende Schnitt $\omega \in \Gamma(\mathcal{O}_X)$ eine Orientierung von X.
Jede n-dimensionale ~~lokalkompakte~~ topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist eine n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit über L.

Nach [5] gelten die folgenden Sätze:

V.9.2. Theorem: Sei X eine n-hm$_L$. Dann gilt die POINCARÉ-Dualität

$$\Delta : H^p_\varphi(X; \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} H^\varphi_{n-p}(X;\mathcal{A})$$

für jede Garbe $\mathcal{A}$ und jede parakompaktifizierende Familie φ.

V.11.12. Corollary: Sei X HLC. Dann gibt es für jede Garbe $\mathcal{L}$ einen natürlichen Isomorphismus

$${}_SH^c_p(X;\mathcal{L}) \cong H^c_p(X;\mathcal{L}).$$

Insbesondere ist für lokalkonstante Garben $\mathcal{L}$ (d.h. lokale Koeffizientensysteme) die singuläre Homologie mit Koeffizienten in $\mathcal{L}$ isomorph zur Garbenhomologie mit kompakten Trägern.

Weiter hat man für lokalkonstante Garben $\mathcal{L}$ über L exakte Sequenzen ($\underline{L} = X\times L$) :

$$0 \to Ext_L({}_SH^c_{p-1}(X;\mathcal{L}),L) \to H^p(X,\mathcal{H}om_L(\mathcal{L},\underline{L})) \to Hom_L({}_SH^c_p(X;\mathcal{L}),L) \to 0 ,$$

falls der Kokettenkomplex $Ext_L(\Delta_*(X;\mathcal{L}),L)$ azyklisch ist. Dies folgt aus den Definitionen der entsprechenden Homologie- und Kohomologiegruppen und Theorem 3 in [18], Chap. 5, Sec. 5.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die folgende Verallgemeinerung eines Satzes aus [6] beweisen:

Satz I. 2.1: Sei $\xi = (E,X,p,F,G)$ ein Faserbündel mit folgenden Eigenschaften:

a) X und F sind kompakte orientierbare Homologiemannigfaltigkeiten über L der Dimensionen n bzw. m,

b) X ist zusammenhängend und HLC,

c) Es gibt ein $\omega \in \Gamma(\underline{H_m(F;L)})$, so daß ω_x für jedes $x \in X$ eine Orientierung von $H^*(F_x;L)$ ist.

Dann gilt:

Die $E_r^{*,*}(\xi)$ sind für $r \geq 2$ orientierbare POINCARÉ-Ringe der Dimension m+n über L. Die Orientierungen ω_r von $E_r^{*,*}(\xi)$ entsprechen bijektiv den Orientierungen ω_E von $H^*(E;L)$ und nach Wahl einer Orientierung ω_X von $H^*(X;L)$ auch bijektiv den Elementen ω mit der Eigenschaft c).

<u>Beweis:</u> Wegen a) folgt aus V.9.2. Theorem:

(1) $\mathrm{Hom}_L(H^p(X;\underline{H^q(F;L)}),L) \cong \mathrm{Hom}_L(H_{n-p}(X;\underline{H^q(F;L)}),L)$.

Aus c) folgt leicht die Isomorphie der Koeffiziententensysteme:

$$\underline{H^{m-q}(F;L)} \cong \mathcal{H}om_L(\underline{H^q(F;L)}\ ,\ \underline{L}\ )\ ,$$

wobei der Isomorphismus nur von ω abhängt. Da L ein Körper ist, ist $\mathrm{Ext}_L({}_SH_{n-p-1}(X;\underline{H^q(F;L)})\ ,\ L) = 0$ und somit

$$(2)\quad \mathrm{Hom}_L({}_SH_{n-p}(X;\underline{H^q(F;L)}),L) \cong H^{n-p}(X;\mathcal{H}om_L(\underline{H^q(F;L)},\ \underline{L}))$$
$$\cong H^{n-p}(X;\ \underline{H^{m-q}(F;L)}).$$

Wegen b) ist nach V.11.12. Corollary schließlich

$$(3)\quad {}_SH_{n-p}(X;\underline{H^q(F;L)}) \cong H_{n-p}(X;\underline{H^q(F;L)}).$$

Aus (1), (2) und (3) folgt somit:

$$\mathrm{Hom}_L(H^p(X;\underline{H^q(F;L)}),L) \cong H^{n-p}(X;\underline{H^{m-q}(F,L)}).$$

Es ist leicht einzusehen, daß dieser Isomorphismus nur von der Wahl von ω_X und ω abhängt und durch das $\cup$-Produkt in $E_2^{*,*}(\xi)$ induziert wird. Somit werden $E_2^{*,*}(\xi)$ und nach Satz I. 1.4 auch $E_r^{*,*}(\xi)$, $(2 \leq r \leq \infty)$ und $H^*(E;L)$ zu orientierten POINCARÉ-Ringen der Dimension m+n über L. Man beachte hierbei, daß für $r \geq 2$ die Bedingung $\omega(dA^{n-1}) = 0$ von Satz I.1.4 erfüllt ist, da $E_r^{p,q} = 0$ für $p > n$ oder $q > m$ gilt und $d_r^{*,*}$ den Grad $(r,1-r)$ hat.

Aus dem eben bewiesenen Satz erhalten wir nun das Hauptergebnis:

<u>Satz I. 2.2:</u> Sei ξ wie in Satz I. 2.1 gegeben. Ferner operiere H orientierungserhaltend auf ξ. Dann ist

$$\tau(H^*(E;L),\omega_E) = \tau(E_2^{*,*},\omega_2) = \tau(H^n(X;\underline{H^m(F;L)}),\ \omega_2),$$

falls $n \equiv m \equiv 0\ (2)$, bzw.

$$\tau(H^*(E;L),\omega_E) = 0, \text{ falls } n \text{ oder } m \not\equiv 0\ (2).$$

<u>Beweis:</u> Nach Satz I. 2.1 ist, da H orientierungserhaltend auf ξ operiert, $(E_r^{*,*}(\xi),\ \omega_r)$ für $2 \leq r \leq \infty$ ein orientierter H-POINCARÉ-Ring der Dimension m+n. Nach der Bemerkung im Beweis von Satz I. 2.1 ist somit

$$\tau(E_2^{*,*}(\xi),\ \omega_2) = \tau(E_\infty^{*,*}(\xi),\omega_\infty).$$

Mittels Lemma I. 1.2 beweist man analog wie im Beweis von Satz I. 1.4, daß gilt:

$$\tau(E_2^{*,*}(\xi),\ \omega_2) = \begin{cases} \tau(H^n(X;\underline{H^m(F;L)}),\ \omega_2) & \text{für } m \equiv n \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ferner das Produkt in $E_\infty^{*,*}(\xi) = G^*H^*(E;L)$ vom $\cup$-Produkt in $H^*(E;L)$ induziert wird, erhält man auf die gleiche Weise:

$$\tau(H^*(E;L),\ \omega_E) = \tau(E_\infty^{*,*}(\xi),\omega_\infty).$$

<u>§ 3. Additivität und Bordismusinvarianz der H-Signatur lokaler Koeffizientensysteme</u>

Die Ergebnisse des letzten Paragraphen legen es nahe, lokale Koeffizientensysteme mit regulärer Paarung zu untersuchen. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{L}(H,L)$ aller Paare (X,Γ), wobei X ein topologischer H-Raum und Γ ein lokales Koeffizientensystem über L mit einer bilinearen regulären symmetrischen oder schiefsymmetrischen Paarung

$$<\ ,\ >\ :\ \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \underline{L}$$

ist, welche mit H verträglich ist, d.h. die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \Gamma(x)\times\Gamma(x) \arrow[r, "<\,,\,>_x"] \arrow[d, "\Gamma_h\times\Gamma_h"'] & \{x\}\times L \arrow[d, "h\times id_L"] \\ \Gamma(hx)\times\Gamma(hx) \arrow[r, "<\,,\,>_{hx}"] & \{hx\}\times L \end{tikzcd} \qquad x\in X,\ h\in H$$

sind kommutativ. Ferner sei $\Gamma(x)$ für $x \in X$ ein endlich-erzeugter L-Modul. Ein Morphismus $(X_1,\Gamma_1) \longrightarrow (X_2,\Gamma_2)$ ist ein Paar (φ,Φ), wobei $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ eine H-Abbildung und $\Phi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ eine mit den Produkten verträgliche Familie $\Phi_x : \Gamma_1(x) \longrightarrow \Gamma_2(\varphi(x))$ von L-Homomorphismen ist, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1(x) \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[d, "\Gamma_{1,h}"'] & \Gamma_2(x) \arrow[d, "\Gamma_{2,h}"] \\ \Gamma_1(hx) \arrow[r, "\Phi_{hx}"'] & \Gamma_2(hx) \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \Gamma_1(\omega(1)) \arrow[r, "\Phi_{\omega(1)}"] \arrow[d, "\Gamma_1(\omega)"'] & \Gamma_2(\varphi\omega(1)) \arrow[d, "\Gamma_2(\varphi\omega)"] \\ \Gamma_1(\omega(0)) \arrow[r, "\Phi_{\omega(0)}"'] & \Gamma_2(\varphi\omega(0)) \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Zwei Morphismen (φ_0,Φ_0), $(\varphi_1,\Phi_1) : (X_1,\Gamma_1) \longrightarrow ($ heißen homotop, wenn es einen Morphismus

$$(\psi,\Psi) : (X_1\times I, \Gamma_1\times I) \longrightarrow (X_2\times I, \Gamma_2\times I)$$

gibt mit

$$(\psi,\Psi)|X_1\times\{i\} = (\varphi_i,\Phi_i)\times\{i\}, \quad i = 0,1.$$

Bekanntlich erfüllen die Kohomologiegruppen $H^*(X,A;\Gamma)$ alle Axiome einer Kohomologietheorie.

Sei nun $(X,\Gamma)\in\mathcal{L}(H,L)$ und X eine kompakte orientierte topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand mit der Orientierungsklas- se ω_X. Wir sagen (X,Γ) berandet, in Zeichen: $(X,\Gamma)\sim 0$, wenn ein $(Y,\tilde{\Gamma})\in\mathcal{L}(H,L)$ existiert, so daß Y eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial Y = X$, Orientierung ω_Y mit $\partial_*\omega_Y = \omega_X$ und $\tilde{\Gamma}|X \cong \Gamma\oplus\Gamma'$ ist, wobei Γ' über id_X trivial ist, d.h. $\Gamma'\cong X\times L^r$ mit einer durch eine feste reguläre Bilinearform $L^r\times L^r \longrightarrow L$ induzierten Paarung.

Sei $(X,\Gamma)\in\mathcal{L}(H,L)$, wobei X eine kompakte orientierte 2m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂X und Orientierung ω_X ist, so daß H orientierungserhaltend operiert. Durch die Festsetzung

$$(f\cup g)(\sigma) = (-1)^{ps}\langle f({}_p\sigma), \Gamma(\omega)g(\sigma_q)\rangle \quad \text{mit } \omega = \sigma|\langle e_0, e_p\rangle,$$

$\sigma : \Delta^{p+q} \longrightarrow X$ und $s\equiv\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$ mod 2, falls $\langle\,,\rangle$ $\left\{\begin{matrix}\text{symmetrisch}\\ \text{antisymmetrisch}\end{matrix}\right\}$,

$f\in Z^p(X,\partial X;\Gamma)$, $g\in Z^q(X;\Gamma)$

erhält man ein $\cup$-Produkt

$$\cup : H^p(X,\partial X;\Gamma)\times H^q(X;\Gamma) \longrightarrow H^{p+q}(X,\partial X;L)$$

und damit auch eine bilineare Paarung

$$H^m(X,\partial X;\Gamma)\times H^m(X;\Gamma) \xrightarrow{\ \cup\ } H^{2m}(X,\partial X;\underline{L}) \xrightarrow{\langle\cdot,\omega_X\rangle} L,$$

von der man ebenso wie im gewöhnlichen Fall zeigt, daß sie

regulär ist. Das Vorzeichen $(-1)^{p\cdot s}$ wurde gewählt, um Übereinstimmung mit dem Fall eines Faserbündels zu haben. Vermöge $j^* : H^m(X,\partial X;\Gamma) \longrightarrow H^m(X;\Gamma)$ erhält man auf $H^m(X,\partial X;\Gamma)$ eine H-invariante Bilinearform $\langle\,,\rangle$ mit $\mathrm{Rad}\langle\,,\,\rangle = \mathrm{Ker}\ j^*$. Wir definieren

$$\tau(X,\partial X;\Gamma) := \tau(H^m(X,\partial X;\Gamma), \langle\ ,\ \rangle).$$

Diese H-Signatur hat nun, wie wir zeigen wollen, die gleichen Eigenschaften wie die gewöhnliche Signatur. Zunächst gilt

Satz I. 3.1: Sei $(X,\Gamma)\in\mathcal{L}(H,L)$, $(X,\Gamma)\sim 0$. Dann ist $\tau(X;\Gamma)=0$.

Beweis: Sei $(Y,\tilde{\Gamma})\in\mathcal{L}(H,L)$ mit $\partial Y = X$, $\tilde{\Gamma}|X\cong\Gamma\oplus\Gamma'$, wobei $\Gamma' = X\times L^r$ mit der durch $\beta : L^r\times L^r \longrightarrow L$ induzierten Paarung ist. Dann ist offensichtlich

$$\tau(X;\tilde{\Gamma}|X) = \tau(X;\Gamma) + \tau(X;\Gamma')$$

sowie

$$H^*(X;\Gamma')\cong\bigoplus_{i=1}^{r} H^*(X;\underline{L}).$$

Ist β symmetrisch, so gibt es eine Basis $e_1,\dots,e_r$ von L^r, bzgl. der β Diagonalgestalt hat. In diesem Fall ist $\tau(X;\Gamma') = \tau(X;\underline{L})\cdot\mathrm{sign}(L^r,\beta)$. Ist dagegen β antisymmetrisch, so gibt es einen Unterraum $W\subseteq L^r$ mit $\dim W = \frac{1}{2}\dim L^r$ und $\beta|W\times W = 0$. Da $\mathrm{sign}(L^r,\beta) = 0$ ist, folgt auch jetzt nach Lemma I. 1.2:

$$\tau(X;\Gamma') = \tau(X;\underline{L})\ \mathrm{sign}(L^r,\beta) = 0.$$

Somit hat man in beiden Fällen

$$\tau(X;\tilde{\Gamma}|X) = \tau(X;\Gamma) + \tau(X;\underline{L})\ \mathrm{sign}(L^r,\beta).$$

Wir dürfen daher annehmen, daß $\Gamma = \tilde{\Gamma}|X$ ist, da die Voraussetzungen des Satzes für $\Gamma_1 = X\times L$, $\tilde{\Gamma}_1 = Y\times L$ statt $\Gamma,\tilde{\Gamma}$ ebenfalls erfüllt sind.

Nun erfüllt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^m(\partial Y;\Gamma) \arrow[r, equal] & H^m(\partial Y;\Gamma) \arrow[d, "\pm\delta^*"] \\ H^m(Y;\tilde{\Gamma}) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, "0"] & H^{m+1}(Y,\partial Y;\tilde{\Gamma}) \end{tikzcd}$$

bei geeigneter Wahl des Vorzeichens die Voraussetzungen von Lemma I. 1.3. Da $\mathrm{Ker}(\pm\delta^*) = \mathrm{Im}(i^*)$ ist, ist mit den dortigen Bezeichnungen $S = \tilde{S}$ und somit $\tau(X;\Gamma) = \tau(0,0) + \tau(0,0) = 0$.

Weiter läßt sich auch der Satz von WALL [20] übertragen:

<u>Satz I. 3.2:</u> Es seien (Y,Γ), $(Y_\pm,\Gamma_\pm) \in \mathcal{L}(H,L)$ derart, daß Y, Y_-, Y_+ kompakte orientierte 2m-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand sind mit:

(a) $Y = Y_- \cup Y_+$, $Y_- \cap Y_+ = \partial Y_- \cap \partial Y_+ =: X_o$, $\Gamma|Y_\pm = \Gamma_\pm$,
wobei X_o eine berandete Untermannigfaltigkeit von ∂Y_- und ∂Y_+ ist,

(b) $\omega_{Y_\pm}$ sind die durch ω_Y induzierten Orientierungen von $Y_\pm$,

Sei $\mp\omega_{X_o}$ die durch $\omega_{\partial Y_\pm} = \partial_*\omega_{Y_\pm}$ induzierte Orientierung und $\omega_{\partial X_o} = \partial_*\omega_{X_o}$.

(c) Alle Orientierungen sind H-invariant.

Sei ferner $X_\pm = \partial Y_\pm \setminus \mathring{X}_o$, also $\partial Y = X_+ \cup X_-$, $Z := \partial X_o = \partial X_+ = \partial X_-$.
Schließlich sei $V = H^{m-1}(Z;\, \Gamma|Z)$,

$A = \mathrm{Ker}(H^{m-1}(Z;\, \Gamma|Z) \longrightarrow H^m(X_-,Z;\, \Gamma|X_-))$,

$B = \mathrm{Ker}(H^{m-1}(Z;\, \Gamma|Z) \longrightarrow H^m(X_o,Z;\, \Gamma|X_o))$ und

$C = \mathrm{Ker}(H^{m-1}(Z;\, \Gamma|Z) \longrightarrow H^m(X_+,Z;\, \Gamma|X_+))$.

Dann ist
$$\tau(Y,\partial Y;\Gamma) = \tau(Y_-,\partial Y_-;\Gamma_-) + \tau(Y_+,\partial Y_+;\Gamma_+) - \tau(V;A,B,C)$$

<u>Beweis:</u> Wir setzen $X := X_o \cup X_- \cup X_+$. Statt $H^*(U,V;\, \Gamma|U)$ schreiben wir kurz $H^*(U,V)$. Aus der MAYER-VIETORIS-Sequenz für $(Y_-,\partial Y_-)$, $(Y_+,\partial Y_+)$ folgt $H^*(Y,X) \cong H^*(Y_-,\partial Y_-) \oplus H^*(Y_+,\partial Y_+)$. Damit erhält man ein kommutatives Diagramm:
$$\begin{tikzcd}
H^m(Y) \arrow[d, "p^* = p^*_- \oplus p^*_+"'] & & H^m(Y,\partial Y) \arrow[ll, "l^*"'] \\
H^m(Y_-) \oplus H^m(Y_+) & H^m(Y_-,\partial Y_-) \oplus H^m(Y_+,\partial Y_+) \arrow[l, "l^*_- \oplus l^*_+"] & H^m(Y,X) \arrow[l, "\cong"] \arrow[u, "q^*"']
\end{tikzcd}$$
welches wegen (b) die Voraussetzungen von Lemma I. 1.3 erfüllt. Somit ist
$$\tau(Y,\partial Y;\Gamma) = \tau(Y_-,\partial Y_-;\Gamma_-) + \tau(Y_+,\partial Y_+;\Gamma_+) + \tau(\tilde{S}/S;\tilde{\alpha}),$$
wobei $S = \mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Im}\, l^*q^*$, $\tilde{S} = \mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Im}\, l^*$ und $\tilde{\alpha}$ von der Bilinearform $\langle\,,\rangle$ auf $\mathrm{Im}\, l^*$ mit $\langle l^*x, l^*y\rangle = \langle l^*x \cup y, \omega_Y\rangle$ induziert ist. Wir haben somit zu zeigen, daß $(\tilde{S}/S,\tilde{\alpha}) \cong (W,\hat{\beta})$ ist, wobei $W = (B\cap(A+C))/((B\cap A)+(B\cap C))$ und $\hat{\beta}$ die durch $\beta = \langle\cdot\cup\cdot,\omega_Z\rangle$ gemäß der Definition von $\tau(V;B,A,C)$ induzierte Bilinearform auf W ist.

Zum Beweis von $\tilde{S}/S \cong W$ betrachte man das kommutative Diagramm 1 (vgl. S. 16) von MAYER-VIETORIS-Sequenzen.
Wegen $\mathrm{Im}\, l^* = \mathrm{Ker}\, t^*s^*$ und $\mathrm{Im}\, l^*q^* = \mathrm{Ker}\, s^*$ haben wir:
$$\begin{aligned}
\tilde{S}/S &= (\mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Ker}\, t^*s^*)/(\mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Ker}\, s^*) \cong s^*(\mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Ker}\, t^*s^*) \\
&= s^*\mathrm{Ker}\, p^* \cap \mathrm{Ker}\, t^* = \mathrm{Im}\,\Delta^*_o \cap \mathrm{Ker}\, t^* = \mathrm{Ker}\, t^*_- \cap \mathrm{Ker}\, t^*_+ \cap \mathrm{Ker}\, t^* \\
&= \Delta^*_o\, \mathrm{Ker}\, t^*\Delta^*_o \cong \mathrm{Ker}\, t^*\Delta^*_o / \mathrm{Ker}\,\Delta^*_o \\
&= \mathrm{Ker}\,\Delta^* k^*_o / (\mathrm{Im}\, r^*_- + \mathrm{Im}\, r^*_+).
\end{aligned}$$
Nun ist $\mathrm{Ker}\, k^*_o = \mathrm{Im}\, l^*_o \subseteq \mathrm{Im}\, r^*_- + \mathrm{Im}\, r^*_+$, da id-id surjektiv ist.
Ferner folgt aus den MAYER-VIETORIS-Sequenzen für $X_\pm, X_o$, daß $\mathrm{Im}\, k^*_o r^*_\pm = \mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Im}\, k^*_\pm$ ist. Daher ist weiter
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,\Delta^* k^*_o / (\mathrm{Im}\, r^*_- + \mathrm{Im}\, r^*_+) &\cong k^*_o\, \mathrm{Ker}\,\Delta^* k^*_o / (\mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Im}\, k^*_- + \mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Im}\, k^*_+) \\
&= (\mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Ker}\,\Delta^*)/(\mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Im}\, k^*_- + \mathrm{Im}\, k^*_o \cap \mathrm{Im}\, k^*_+) \\
&= (B\cap(A+C))/(B\cap A + B\cap C) \\
&= W.
\end{aligned}$$
Der Isomorphismus $\psi : \tilde{S}/S \longrightarrow W$ wird durch $\psi(l^*x+S) = k^*_o x^*_o + (B\cap A + B\cap C)$ mit $\tilde{\Delta}^* x_o = l^*x$ gegeben. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ sich bei diesem Isomorphismus entsprechen. Seien hierzu $i_- : (Y_-,X_-) \subseteq (Y,\partial Y)$ und $j_- : (X_o,Z) \subseteq (Y_-,X_-)$ die Inklusionen und δ^* der Verbindungshomomorphismus des Paares (Y_-,X_o). Seien ferner $l^*x, l^*y \in \tilde{S}$. Dann gibt es $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in H^{m-1}(X_\varepsilon)$, $(\varepsilon = 0,-,+)$, mit $\tilde{\Delta}^*_o x_o = l^*x$, $\tilde{\Delta}^*_o y_o = l^*y$ und $k^*_o x_o + k^*_- x_- + k^*_+ x_+ = k^*_o y_o + k^*_- y_- + k^*_+ y_+ = 0$. Es ist
$$\begin{aligned}
\langle l^*x, l^*y\rangle &= \langle l^*x\cup y, \omega_Y\rangle = \langle \tilde{\Delta}^*_o x_o \cup y, \omega_Y\rangle \\
&= \langle \delta^* x_o \cup i^*_- y, \omega_{Y_-}\rangle = \langle x_o \cup j^*_- i^*_- y, \omega_{X_o}\rangle .
\end{aligned}$$

Weiter betrachten wir das kommutative Diagramm 2 (vgl. S.17).
Sei $\tilde{W} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\, t^*_i$ und $x_i \in H^{m-1}(X_i)$, i=1,2,3 mit $\sum_{i=1}^{3} k^*_i x_i = 0$.
Dann gibt es ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmtes Element $\tilde{w} \in \tilde{W}$, und zu jedem i gibt es zwei Abbildungen $H^{m-1}(X_i) \longrightarrow H^m(X)$ im Diagramm, so daß $\pm\tilde{w}$ das Bild von x_i unter diesen Abbildungen ist. Das zugehörige Vorzeichen steht im Diagramm jeweils an der Gruppe, von der die Abbildung ausgeht. Umgekehrt gibt es zu jedem $\tilde{w} \in \tilde{W}$ ein Tripel x_i, i = 1,2,3 mit $\sum_{i=1}^{3} k^*_i x^*_i = 0$, so daß $\pm\tilde{w}$ das Bild von x_i ist. Ersetzt man hier die Indizes 1,2,3 durch -,0,+ und Y_o durch Y , so erhält man die oben benutzten Bezeichnungen. Hieraus ergibt sich
$j^*_- i^*_- y \equiv \pm\delta^*_o k^*_\pm y_\pm \mod \delta^*_o(\mathrm{Im}\, k^*_+ \cap \mathrm{Im}\, k^*_-)$, $(\delta^*_o : H^{m-1}(Z) \longrightarrow H^m(X_o,Z))$.

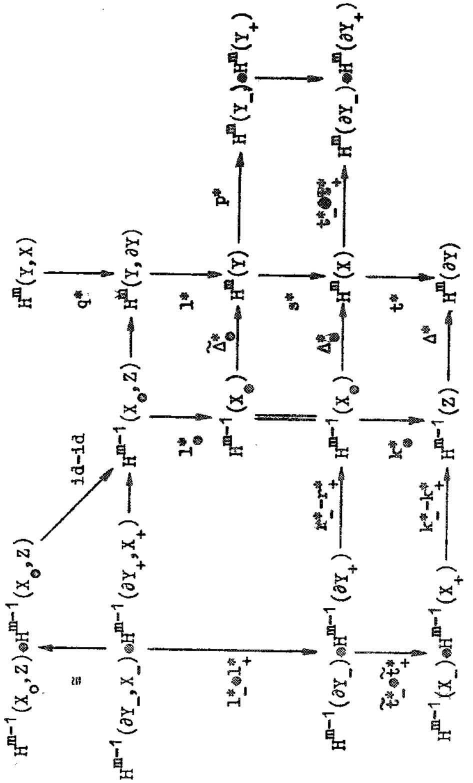


Diagramm 1

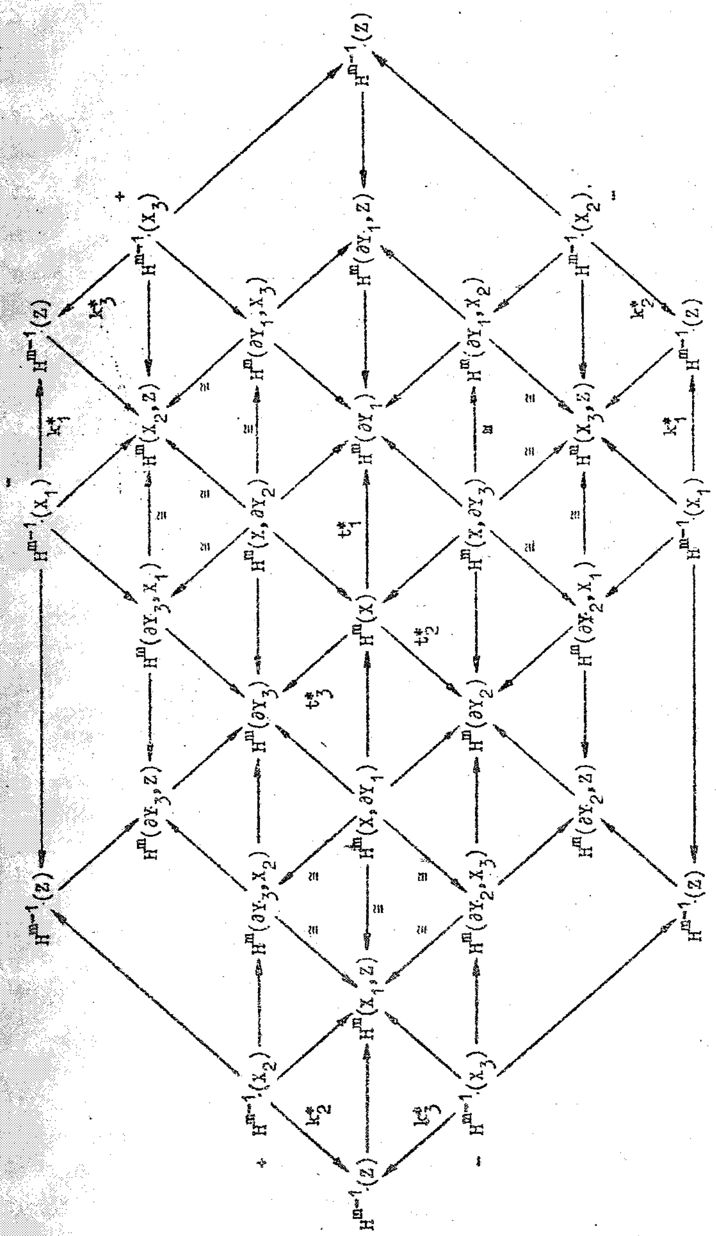


Diagramm 2

Sei $j_-^* i_-^* y = \delta_o^*(k_+^* y_+ + k_+^* z_+)$ mit $k_+^* z_+ \in \operatorname{Im} k_-^*$. Dann ist weiter

$$\begin{aligned}
\langle x_o \cup j_-^* i_-^* y, \omega_{X_o} \rangle &= \langle x_o \cup \delta_o^* k_+^* (y_+ + z_+), \omega_{X_o} \rangle \\
&= (-1)^{m-1+\sigma} \langle k_o^* x_o \cup k_+^* (y_+ + z_+), \omega_Z \rangle \\
&= (-1)^{m+\sigma} \langle k_-^* x_- \cup k_+^* y_+, \omega_Z \rangle \\
&= \hat{\beta}(\psi(I^* x + S), \psi(I^* y + S)).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $(-1)^\sigma$ die Parität von Γ, also $(-1)^{m-1+\sigma}$ die Parität von β. Man beachte, daß $\langle k_o^* x_o \cup k_+^* z_+, \omega_Z \rangle = 0$ ist wegen $k_o^* x_o = -k_-^* x_- - k_+^* x_+$ und

$$\langle k_\varepsilon^* u \cup k_\varepsilon^* v, \omega_Z \rangle = 0 \quad \text{für alle } u, v \in H^{m-1}(X_\varepsilon), \ (\varepsilon = 0, -, +).$$

<u>Bemerkung:</u> Mit $Z = \emptyset$ ergibt sich, daß $\tau(X, \partial X; \Gamma)$ sich bei Verkleben längs ganzer Randkomponenten additiv verhält (Satz von NOVIKOV).

Ist X ein weg-zusammenhängender, lokal-einfach-zusammenhängender Raum und Γ ein lokales Koeffizientensystem mit typischem Halm L^r, so ist Γ assoziiert zu einem flachen G-Prinzipalbündel $P \to X$, wobei $G \subseteq O(p_+, p_-; L)$ bzw. $G \subseteq Sp(2h; L)$ ist, falls $\Gamma \times \Gamma \to \underline{L}$ symmetrisch mit $r = p_+ + p_-$ und Index $p_+ - p_-$ bzw. antisymmetrisch mit $2h = r$ ist. Das Prinzipalbündel wird durch einen Homomorphismus $\chi : \pi_1(X, *) \to G$ gegeben und ebenso durch eine klassifizierende Abbildung $f : X \to B_G$. Es ist $\Gamma \cong f^*(E_G \times_G L^r)$. Vermöge χ ist auch $\Gamma \cong \tilde{f}^*(E_{\pi_1(X,*)} \times_{\pi_1(X,*)} L^r)$, wobei $\tilde{f} : X \to B_{\pi_1(X,*)}$ die klassifizierende Abbildung der universellen Überlagerung $\tilde{X} \to X$ ist und $\pi := \pi_1(X, *)$ vermöge χ auf L^r operiert. L^r ist also ein π-Modul mit π-invarianter symmetrischer oder antisymmetrischer Bilinearform $\beta : L^r \times L^r \to L$. Analog wie in § 1 kann man die Isomorphieklassen solcher π-Moduln betrachten und deren GROTHENDIECK-Ringe bilden. Dies wird in II § 5 ausgeführt.

Aus Satz I. 3.1 folgt, daß die Signatur für $H = 1$ Homomorphismen $\tau : \Omega_{2m}(B_G) \to \mathbb{Z}$ induziert, wobei $G \subseteq O(p_+, p_-; \mathbb{R})$ für $m \equiv 0$ (2) bzw. $G \subseteq Sp(2h; \mathbb{R})$ für $m \equiv 1$ (2) ist. Im Fall eines Faserbündels $\xi = (E, X, p, F, G)$ ist $G = O(p_+, p_-; \mathbb{Z})$ bzw. $= Sp(2h; \mathbb{Z})$, wobei der erste Fall für $\dim F =: f \equiv 0$ (4), $p_+ + p_- = \dim H^{f/2}(F; \mathbb{R})$, $p_+ - p_- = \tau(F)$ und der zweite Fall für $f \equiv 2$ (4), $2h = \dim H^{f/2}(F; \mathbb{R})$ vorliegt.

<u>Teil II</u>

<u>Die Signaturformel für lokale Koeffizientensysteme über differenzierbarer Basis</u>

Wir leiten in diesem Teil eine Signaturformel her für den Fall, daß die Basis C^∞-differenzierbar und $H = 1$ ist. Ferner definieren wir einen Funktor $\hat{A}^*$ und eine natürliche Transformation $\hat{\varsigma} : \hat{A}^* \to H^{ev}$. In § 6 ziehen wir einige Folgerungen aus der Signaturformel.

<u>§ 4. Die Signaturformel</u>

Es sei X eine kompakte zusammenhängende orientierte 2m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und Γ eine lokalkonstante Garbe mit Strukturgruppe

$$G \cong \left\{ \begin{array}{ll} O(p_+, p_-; \mathbb{R}) & \text{für } m \equiv 0 \ (2) \\ Sp(2h; \mathbb{R}) & \text{für } m \equiv 1 \ (2) \end{array} \right\} \text{ und typischem Halm } \mathbb{R}^{p_+ + p_-} \text{ bzw. } \mathbb{R}^{2h}.$$

Bezeichnet man das Γ zugeordnete flache reelle Vektorbündel mit $\tilde{\Gamma}$, so zerfällt $\tilde{\Gamma}$ im Fall $m \equiv 0$ (2) in zwei reelle Bündel $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_+ \oplus \tilde{\Gamma}_-$, während es im Fall $m \equiv 1$ (2) eine komplexe Struktur J besitzt. In letzterem Fall sei $\tilde{\Gamma}^*$ das konjugierte Bündel. Der Zerfall von $\tilde{\Gamma}$ bzw. die komplexe Struktur $J = A$ von $\tilde{\Gamma}$ wird durch einen Bündelautomorphismus $A : \tilde{\Gamma} \to \tilde{\Gamma}$ mit $A^2 = \mathrm{id}_{\tilde{\Gamma}}$ bzw. $A^2 = -\mathrm{id}_{\tilde{\Gamma}}$ bewirkt, wobei $\langle \cdot, A \cdot \rangle : \tilde{\Gamma} \times \tilde{\Gamma} \to \underline{\mathbb{R}}$ eine euklidische Metrik ist. Es gilt nun

<u>Satz II. 4.1:</u> Seien X, Γ wie oben gegeben. Dann ist

$$\tau(X; \Gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} ch^{(2)}([\tilde{\Gamma}_+] - [\tilde{\Gamma}_-]) \cdot L(X)[X] & \text{für } m \equiv 0 \ (2) \\ ch^{(2)}([\tilde{\Gamma}^*] - [\tilde{\Gamma}]) \cdot L(X)[X] & \text{für } m \equiv 1 \ (2) \end{array} \right\}.$$

Hierin ist $ch^{(2)} = ch \circ \psi^2$ und $L(X) = \prod_i x_i / \tanh x_i$ mit $p(X) = \prod_i (1 + x_i^2)$.

<u>Beweis:</u> Sei $\langle \, , \, \rangle : \Gamma \times \Gamma \to \underline{\mathbb{R}}$ die reguläre bilineare symmetrische ($m \equiv 0$ (2)) bzw. antisymmetrische ($m \equiv 1$ (2)) Paarung. Weiter sei $T_{\mathbb{C}}^* := T^* X \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung des Kotangentialbündels von X und $\mathcal{O}^p(\Gamma) = \mathcal{O}^p \otimes \Gamma$ die Garbe der Keime von C^∞-Schnitten $s : X \to \Lambda^p T_{\mathbb{C}}^* \otimes \tilde{\Gamma}$. Da $\mathcal{O}^p$ eine feine Garbe ist, gilt dasselbe auch für $\mathcal{O}^p(\Gamma)$. Da weiter für eine genügend feine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ von X die Übergangsfunktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ für $\tilde{\Gamma}$ konstant gewählt werden können, läßt sich die CARTANsche Ableitung $d : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^{p+1}$ auf $\mathcal{O}^*(\Gamma)$ erweitern. Nach dem POINCARÉschen Lemma, dessen Beweis sich

offenbar auf $\mathcal{O}\!\ell^*(\Gamma)$ übertragen läßt, erhält man somit eine feine Auflösung von Γ:

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathcal{O}\!\ell^0(\Gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{O}\!\ell^1(\Gamma) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{O}\!\ell^{2m}(\Gamma) \longrightarrow 0$$

und daher $H^p(X;\Gamma) \cong H^p(\Gamma(\mathcal{O}\!\ell^*(\Gamma)))$. Wir setzen $\Omega^*(\Gamma) = \Gamma(\mathcal{O}\!\ell^*(\Gamma))$. Das äußere Produkt $\wedge$ in $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}$ und das Produkt $\langle\ ,\ \rangle$ in Γ liefern durch die Festsetzung

$$(\alpha \otimes a) \wedge (\beta \otimes b) := (-1)^{m \deg \beta} (\alpha \wedge \beta) \cdot \langle a, b\rangle$$

für homogene Elemente $\alpha, \beta \in \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \Gamma$

auch äußere Produkte

$$\wedge : \Omega^p(\Gamma) \times \Omega^q(\Gamma) \longrightarrow \Omega^{p+q}(X) = \Gamma(\mathcal{O}\!\ell^{p+q}),$$

und es gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \beta \wedge \alpha &= (-1)^{(m+p)(m+q)} \alpha \wedge \beta \\ d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{m+p} \alpha \wedge d\beta \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha \in \Omega^p(\Gamma),\ \beta \in \Omega^q(\Gamma).$$

Es seien $\cup : H^p(X;\Gamma) \times H^q(X;\Gamma) \longrightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{R})$ die auf $H^*(X;\Gamma)$ induzierten Produkte. Die Orientierungsklasse ω_X liefert dann eine symmetrische Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle : H^m(X;\Gamma) \times H^m(X;\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R},\quad \langle[\alpha],[\beta]\rangle = \langle[\alpha]\cup[\beta], \omega_X\rangle = \int_X \alpha \wedge \beta$$

deren Signatur wir mit $\tau(X;\Gamma)$ bezeichneten.

Seien nun $\langle\ ,\ \rangle_X$ bzw. $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ hermitesche bzw. euklidische Metriken auf $T^*_{\mathbb{C}}$ bzw. $\widetilde{\Gamma}$. Sei $A : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}$ der durch $\langle Aa, b\rangle_\Gamma = \langle$ induzierte Bündelisomorphismus und $\langle\ ,\ \rangle$ die auf $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$ induzierte Metrik. Wir setzen voraus, daß $\langle\ ,\ \rangle_X$ die Komplexifizierung einer Riemannschen Metrik ist. Ferner wählen wir, was stets möglich ist, $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ so, daß $A^2 = (-1)^m \mathrm{id}_{\widetilde{\Gamma}}$ ist. A liefert den Zerfall $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_+ \oplus \widetilde{\Gamma}_-$ $(m \equiv 0(2))$ bzw. die komplexe Struktur $J = A$ $(m \equiv 1(2))$. Die der Orientierung und der Riemannschen Metrik zugeordnete Volumenform bezeichnen wir mit σ und die Konjugation auf $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$ mit $\bar{\ }$. Es gibt dann eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

$$* : \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Lambda^{2m-p} T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$$

mit $\quad \alpha \wedge *\bar{\beta} = \alpha \wedge \overline{*\beta} = \langle\alpha,\beta\rangle\sigma \quad$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $*$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\quad **\alpha = (-1)^{m+p}\alpha \quad$ für $\alpha \in \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$,

2) $\quad \langle *\alpha, *\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle \quad$ für $\alpha, \beta \in \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$,

3) $\quad *(\alpha \otimes a) = (-1)^{mp} *\alpha \otimes Aa \quad$ für $\alpha \in \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}}$, $a \in \widetilde{\Gamma}$.

In 3) ist $*$ auf der rechten Seite der gewöhnliche $*$-Operator auf $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}$. Wir definieren auf $\Omega^p(\Gamma)$ das Skalarprodukt $(\ ,\ )$ durch Integration:

$$(\alpha,\beta) := \int_X \langle\alpha,\beta\rangle\sigma = \int_X \alpha \wedge \overline{*\beta}$$

und d^* als den zu d bzgl. $(\ ,\ )$ adjungierten Operator. Aus dem STOKEschen Integralsatz folgt $d^* = -*d*$. Schließlich setzen wir

$$D := i^m d + (-i)^m d^*$$

und definieren

$$\tau : \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$$

durch $\quad \tau\alpha := (-1)^{\binom{m}{2}+\binom{p}{2}} *\alpha \quad$ für $\quad \alpha \in \Lambda^p T^*_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\Gamma}$.

Mittels 1), 2), 3) und $d^* = -*d*$ rechnet man leicht nach, daß $\tau^2 = \mathrm{id}$ und $D \circ \tau + \tau \circ D = 0$ ist, wobei τ auch die induzierte Abbildung $\tau : \Omega^*(\Gamma) \longrightarrow \Omega^*(\Gamma)$ bezeichnet. Seien $\Omega_\pm(\Gamma)$ die Eigenräume von τ zu den Eigenwerten ± 1. Man hat dann offenbar induzierte Differentialoperatoren

$$D_\pm : \Omega_\pm(\Gamma) \longrightarrow \Omega_\mp(\Gamma).$$

Aus $d^2 = d^{*2} = 0$ folgt $D^2 = dd^* + d^*d$ und damit wie üblich, daß D^2 starkelliptisch, also D elliptisch ist. Aus der HODGE-Theorie ergibt sich daher

$$\mathrm{Ker}(D) \cong \mathrm{Koker}(D) \cong \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X;\Gamma)$$

und

$$\mathrm{Ker}(D_\pm) \cong \mathrm{Koker}(D_\mp) \cong \Omega_\pm(\Gamma) \cap \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X;\Gamma).$$

Da $\Omega^p(\Gamma)$ durch τ in $\Omega^{2m-p}(\Gamma)$ abgebildet wird, ist

$$\mathrm{Ker}(\tau \mp 1) \cap \bigoplus_{p \neq m} H^p(X;\Gamma) = \bigoplus_{0 \leq p < m} \{\tau\alpha \pm \alpha \mid \alpha \in H^p(X;\Gamma)\} \cong \bigoplus_{0 \leq p < m} H^p(X;\Gamma).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(D_+) &= \dim(\mathrm{Ker}\ D_+) - \dim(\mathrm{Koker}\ D_+) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}\ D_+) - \dim(\mathrm{Ker}\ D_-) \\ &= \dim\ \{\alpha \mid \alpha \in H^m(X;\Gamma),\ \tau\alpha = \alpha\} - \dim\ \{\alpha \mid \alpha \in H^m(X;\Gamma),\ \tau\alpha = -\alpha\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber für $\alpha \in \Omega^m(\Gamma)$: $\tau\alpha = *\alpha$. Aus $\tau\alpha = \alpha \in H^m(X;\Gamma)$ und $\alpha = \bar{\alpha}$ folgt somit $\langle\alpha,\alpha\rangle = \int_X \alpha \wedge \alpha = \int_X \alpha \wedge \overline{*\alpha} = (\alpha,\alpha) \geq 0$, wobei " = " genau für $\alpha = 0$ steht. Analog ist $\langle\alpha,\alpha\rangle = -(\alpha,\alpha) \leq 0$ für

$\tau\alpha = -\alpha \in H^m(X;\Gamma)$ und $\alpha = \bar{\alpha}$. Somit ist

$$\mathrm{ind}(D_+) = \tau(X;\Gamma).$$

Die Symbole $\sigma_1(D)$ und $\sigma_2(D^2) = \sigma_1(D)^2$ lassen sich leicht berechnen. Es ergibt sich:

$$\sigma_1(D)(v,\alpha\otimes a) = (v,\ [i^{m+1}v\wedge\alpha + (-i)^{m+1}*(v\wedge *\alpha)]\otimes a)$$

$$\sigma_2(D^2)(v,\alpha\otimes a) = (v,\ \langle v,v\rangle\alpha\otimes a)$$

für $v \in T^*X$, $\alpha\in\Lambda^* T^*_{\mathbb{C},\pi(v)}$, $a\in\widetilde{\Gamma}_{\pi(v)}$.

Durch die Metriken $\langle\ ,\ \rangle_X$ und $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ werden die Strukturgruppen von $T^*_{\mathbb{C}}$ und $\widetilde{\Gamma}$ auf $SO(2m;\mathbb{R})$ und K reduziert, wobei

$$K \cong \begin{cases} O(p_+;\mathbb{R})\times O(p_-;\mathbb{R}) & \text{für } m\equiv 0(2) \\ U(h;\mathbb{C}) & \text{für } m\equiv 1(2) \end{cases}$$ ist. Sei $\widetilde{G} = SO(2m;\mathbb{R})\times K$,

$\varsigma : \widetilde{G} \longrightarrow SO(2m;\mathbb{R})$ die Projektion. Ferner sei $V = \mathbb{R}^{2m}$ der Standard-$SO(2m;\mathbb{R})$-Modul, $V_{\mathbb{C}}$ seine Komplexifizierung und W der Standard-K-Modul, also $W = W_+\oplus W_- = \mathbb{R}^{p_+}\oplus\mathbb{R}^{p_-}$ bzw. $W = \mathbb{C}^h$. Weiter sei $\widetilde{A} : W \longrightarrow W$ der durch $A = id_{W_+}\oplus(-id_{W_-})$ bzw. $i\cdot id_W$ definierte K-Modulautomorphismus. Wir definieren ferner auf $M := \Lambda^* V_{\mathbb{C}}\otimes W$ einen $\widetilde{G}$-Modulautomorphismus $\widetilde{\tau}$ durch:

$$\widetilde{\tau}(\alpha\otimes a) = (-1)^{\binom{m+p}{2}} *\alpha\otimes\widetilde{A}a ,$$

wobei $\alpha\in\Lambda^p V_{\mathbb{C}}, a\in W$ und $*$ der durch die Orientierung und Metrik von V induzierte $*$-Operator auf $\Lambda^* V_{\mathbb{C}}$ ist. Es ist $\widetilde{\tau}^2 = id_M$, so daß M in $M_+\oplus M_-$ zerfällt. Weiter definieren wir eine Abbildung

$$\mu : V \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,M)$$

durch $\mu(x)(\alpha\otimes a) = [i^{m+1}x\wedge\alpha + (-i)^{m+1}*(x\wedge *\alpha)]\otimes a$ für $x\in V$, $\alpha\in\Lambda^* V_{\mathbb{C}}, a\in W$. Man rechnet leicht nach, daß μ mit der durch ς induzierten $\widetilde{G}$-Struktur auf V eine $\widetilde{G}$-Abbildung ist. Ist M irgendein $\widetilde{G}$-Modul, $B_{\widetilde{G}} = B_{SO(2m,\mathbb{R})}\times B_K$ ein klassifizierender Raum für $\widetilde{G}$, so sei $\widetilde{M} = E_{\widetilde{G}}\times_{\widetilde{G}} M$ das assoziierte Vektorbündel über $B_{\widetilde{G}}$. Seien

$$f : X \longrightarrow B_{SO(2m,\mathbb{R})}\ ,\quad g : X \longrightarrow B_K$$

klassifizierende Abbildungen für T^*X und $\widetilde{\Gamma}$, dann ist offenbar

$$\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\otimes\widetilde{\Gamma} \cong (f\times g)^*\widetilde{M}$$

und $\sigma_1(D)$ und τ sind die durch μ und $\widetilde{\tau}$ induzierten Abbildungen. Daher ist auch $\Lambda_\pm \cong (f\times g)^*\widetilde{M}_\pm$, wobei $\Lambda_\pm$ die Unterbündel von $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\otimes\widetilde{\Gamma}$ zu den Eigenwerten ± 1 von τ sind. Hiermit sind alle

Voraussetzungen von Proposition 2.17 in [2] gegeben. Daher ist

$$\mathrm{ind}(D_+) = (-1)^m (f\times g)^*\left(\frac{\mathrm{ch}\,\widetilde{M}_+ - \mathrm{ch}\,\widetilde{M}_-}{e(\widetilde{V})}\right)\mathrm{td}(X)[X] .$$

Es bleibt also $\mathrm{ch}\,\widetilde{M}_+ - \mathrm{ch}\,\widetilde{M}_-$ zu berechnen. Seien hierzu $T_1 \subseteq SO(2m,\mathbb{R})$ und $T_2 \subseteq K$ maximale Tori. Die Gewichte von $V_{\mathbb{C}}$ und $W_+\otimes\mathbb{C}$, $W_-\otimes\mathbb{C}$ bzw. W werden wie folgt bezeichnet:
$V_{\mathbb{C}} : \pm\varphi_1,\dots,\pm\varphi_m$, $W_+\otimes\mathbb{C} : \psi_1^+,\dots,\psi_{p_+}^+$, $W_-\otimes\mathbb{C} : \psi_1^-,\dots,\psi_{p_-}^-$ und W : $\psi_1,\dots,\psi_h$. Wir müssen die Gewichte von M_+ und M_- berechnen. Dabei dürfen wir Gewichte, die sowohl bei M_+ als auch bei M_- auftreten, paarweise weglassen. Nun liefert aber die Zuordnung $\alpha\otimes a \longmapsto \alpha\otimes a \pm \widetilde{\tau}(\alpha\otimes a)$ einen $\widetilde{G}$-Modulisomorphismus $\bigoplus_{0\le p<m}\Lambda^p V_{\mathbb{C}}\otimes W \longrightarrow M_\pm \cap \bigoplus_{p\ne m}\Lambda^p V_{\mathbb{C}}\otimes W$. Somit brauchen wir nur die Gewichte von $M_\pm\cap\Lambda^m V_{\mathbb{C}}\otimes W$ zu berechnen.

Sei hierzu $e_1,\dots,e_{2m}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V und $\sigma = e_1\wedge\dots\wedge e_{2m}$, $v_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j-1} - ie_{2j})$, $\bar{v}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j-1}+ie_{2j})$, $j = 1,\dots,m$. Wir dürfen annehmen, daß die v_j und $\bar{v}_j$ T_1-invariante 1-dimensionale komplexe Unterräume von $V_{\mathbb{C}}$ mit den Gewichten φ_j und $-\varphi_j$ aufspannen. Wir berechnen zuerst den $*$- Operator. Für eine Teilmenge $R = \{i_1,\dots,i_r\}$ von $\{1,\dots,m\}$, $i_1<i_2<\dots<i_r$ sei $v_R := v_{i_1}\wedge\dots\wedge v_{i_r}$ und $\bar{v}_R = \bar{v}_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar{v}_{i_r}$. Das Komplement von R in $\{1,\dots,m\}$ bezeichnen wir mit CR, die Anzahl der Elemente von R mit $\# R$. Wir behaupten:

$$*(v_R\wedge\bar{v}_S) = \varepsilon(R,S)\ v_{CS}\wedge\bar{v}_{CR} \text{ mit } \varepsilon(R,S) = i^{\eta(R,S)} , \text{ wobei}$$
$$\eta(R,S) \equiv m^2+(2m+r)(r+1)+s(s+1)+2\sum_{\varrho\in R}\varrho + 2\sum_{\sigma\in S}\sigma \mod 4,\ r = \# R, s = \# S$$
ist.

<u>Beweis:</u> Es genügt zu zeigen, daß für je zwei Mengen $T,U \subseteq \{1,\dots,m\}$ mit $\# T + \# U = \# R + \# S$ gilt:

$$v_T\wedge\bar{v}_U\wedge *(v_R\wedge\bar{v}_S) = \varepsilon(R,S)\ v_T\wedge\bar{v}_U\wedge v_{CS}\wedge\bar{v}_{CR}.$$

Die linke Seite ist per definitionem gleich

$$\langle v_T\wedge\bar{v}_U, \bar{v}_R\wedge v_S\rangle\sigma = (-1)^{r\cdot s}\langle v_T\wedge\bar{v}_U, v_S\wedge\bar{v}_R\rangle , \ (r = \# R,\ s = \# S)$$
$$= (-1)^{r\cdot s}\delta_{T,S}\cdot\delta_{U,R}\,\sigma .$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\varepsilon(R,S)(-1)^{u(m-s)} v_T\wedge v_{CS}\wedge\bar{v}_U\wedge\bar{v}_{CR} ,\ (u = \# U).$$

Falls $T \neq S$ oder $U \neq R$ ist, ist dies wegen $\# T + \# U = \# R + \# S$ gleich 0.

Damit wird aus der rechten Seite weiter

$$\varepsilon(R,S)(-1)^{u(m-s)}\,\delta_{T,S}\cdot\delta_{U,R}\; v_S\wedge v_{CS}\wedge\bar v_R\wedge\bar v_{CR}$$
$$= \varepsilon(R,S)\;(-1)^{w}\,\delta_{T,S}\,\delta_{U,R}\; v_{\{1,\dots,m\}}\wedge\bar v_{\{1,\dots,m\}}$$

mit $w = r(m-s) + \sum_{\varrho\in R}\varrho + \sum_{\sigma\in S}\sigma - \binom{r+1}{2} - \binom{s+1}{2}$.

Da ferner $v_{\{1,\dots,m\}}\wedge\bar v_{\{1,\dots,m\}} = i^{m^2}\sigma$ ist, folgt hieraus durch Vergleich der beiden Ausdrücke die Behauptung.

Uns interessiert der Fall $r+s = m$. Hier ist $\widetilde{\tau}(\alpha\otimes a) = (-1)^m *\alpha\otimes\widetilde{A}a$, also $\widetilde{\tau}((v_R\wedge\bar v_S)\otimes a) = i^{2r-m+2\sum_{\varrho\in R}\varrho+2\sum_{\sigma\in S}\sigma}\cdot(v_{CS}\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a$. Ist nun a_k ein Eigenvektor zum Gewicht ψ_k (im Fall $m\equiv 0(2)$ in der Komplexifizierung von W) und $R\neq CS$, so sind $\tau((v_R\wedge\bar v_S)\otimes a_k)$ und $(v_R\wedge\bar v_S)\otimes a_k$ linear unabhängig. Daher treten die Gewichte $\sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho - \sum_{\sigma\in S}\varphi_\sigma + \psi_k$ mit $R\neq CS$ sowohl in M_+ als auch in M_- auf. Es bleiben also nur noch die Gewichte von M_+ und M_-, die zu $R = CS$ gehören, zu berechnen. Es ist hierfür

$$\widetilde{\tau}((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a) = i^{m^2+2r}(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a.$$

Wir unterscheiden nun die Fälle $m\equiv 0\ (2)$ und $m\equiv 1\ (2)$:

1) $m\equiv 0\ (2)$: Jetzt ist $i^{m^2+2r} = (-1)^r$ und $\widetilde{A}a = \begin{cases} a & \text{für } a\in W_+ \\ -a & \text{für } a\in W_- \end{cases}$.

Daher treten die Gewichte $\sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho - \sum_{\sigma\in CR}\varphi_\sigma + \psi_k^+$ für $(-1)^{\# R} = \pm 1$ in $M_\pm$ und die Gewichte $\sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho - \sum_{\sigma\in CR}\varphi_\sigma + \psi_k^-$ für $(-1)^{\# R} = \mp 1$ in $M_\pm$ auf. Hieraus folgt nun:

$$\operatorname{ch}\widetilde{M}_+ - \operatorname{ch}\widetilde{M}_- = \Big(\sum_{k=1}^{p_+} e^{\psi_k^+} - \sum_{k=1}^{p_-} e^{-\psi_k^-}\Big)\prod_{i=1}^{m}(e^{-\varphi_i} - e^{\varphi_i}) \text{ und damit}$$

$$\operatorname{ind}(D_+) = \Big(\sum_{k=1}^{p_+} e^{y_k^+} - \sum_{k=1}^{p_-} e^{y_k^-}\Big)\cdot\prod_{i=1}^{m}\Big(\frac{e^{-x_i}-e^{x_i}}{-x_i}\Big)\Big(\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\Big)\Big(\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}\Big)[X],$$

wobei $p(X) = \prod_i(1+x_i^2)$, $p(\widetilde{\Gamma}_\pm) = \prod_{k=1}^{p_\pm}(1+(y_k^\pm)^2)$ ist.
Das läßt sich umformen zu

$$\operatorname{ind}(D_+) = \operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}_+] - [\widetilde{\Gamma}_-])\cdot L(X)[X].$$

2) $m\equiv 1\ (2)$: Jetzt ist $i^{m^2+2r} = i(-1)^r$ und $\widetilde{A} = i\cdot 1_W$. Ist a_k ein Eigenvektor zum Gewicht ψ_k, so ist für $t_2\in T_2$ und $t_1\in T_1$, $\varepsilon\in\{1,-1\}$:

$$(t_1\times t_2)((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k)$$
$$= e^{2\pi i\chi}((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k)$$

mit $\chi = \sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho(t_1) - \sum_{\sigma\in CR}\varphi_\sigma(t_1) - \varepsilon\psi_k(t_2)$.

Falls also

$$\widetilde{\tau}((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k)$$
$$= \pm((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k) \text{ ist,}$$

ist $\sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho - \sum_{\sigma\in CR}\varphi_\sigma - \varepsilon\psi_k$ ein Gewicht von $M_\pm$. Nun ist aber

$$\widetilde{\tau}((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k) = i(-1)^r((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k - \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k)$$
$$= \varepsilon(-1)^r((v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes a_k + \varepsilon i(v_R\wedge\bar v_{CR})\otimes\widetilde{A}a_k).$$

Somit sind $\sum_{\varrho\in R}\varphi_\varrho - \sum_{\sigma\in CR}\varphi_\sigma \mp (-1)^{\# R}\psi_k$ die restlichen Gewichte von $M_\pm$. Daraus folgt

$$\operatorname{ch}(\widetilde{M}_+ - \widetilde{M}_-) = \sum_{k=1}^{h}(e^{-\psi_k} - e^{\psi_k})\prod_{i=1}^{m}(e^{-\varphi_i} - e^{\varphi_i})$$

und analog wie in 1) :

$$\operatorname{ind}(D_+) = \operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}^*] - [\widetilde{\Gamma}])\cdot L(X)[X].$$

Hiermit ist Satz II. 4.1 vollständig bewiesen.

Die Signatur $\tau(X;\Gamma)$ und die Klassen $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}_+] - [\widetilde{\Gamma}_-])$ bzw. $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}^*] - [\widetilde{\Gamma}])$ sind auf Grund ihrer Definition Homotopieinvarianten. Für $\tau(X;\Gamma)$ ist dies klar, für $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}_+] - [\widetilde{\Gamma}_-])$ bzw. $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}^*] - [\widetilde{\Gamma}])$ folgt dies daraus, daß $\operatorname{ch}^{(2)}: K(\cdot)\to H^*(\cdot,\mathbb{Q})$ eine natürliche Transformation zwischen Homotopiefunktoren ist, sowie der Tatsache, daß $[\widetilde{\Gamma}_+] - [\widetilde{\Gamma}_-]$ bzw. $[\widetilde{\Gamma}^*] - [\widetilde{\Gamma}]$ die Bilder von universellen Elementen aus $K(B_G)$ unter einer klassifizierenden Abbildung $g : X\to B_G$ von Γ mit $G = O(p_+,p_-;\mathbb{R})$ bzw. $Sp(2h;\mathbb{R})$ sind. Die Signaturformel liefert somit das Ergebnis, daß der homogene Term der Dimension $2m$ in $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}_+] - [\widetilde{\Gamma}_-])\cdot\mathbf{L}(X)$ bzw. $\operatorname{ch}^{(2)}([\widetilde{\Gamma}^*] - [\widetilde{\Gamma}])\cdot L(X)$ homotopieinvariant ist, obwohl nur der erste Faktor eine Homotopieinvariante ist.

MILNOR hat in [14] mittels einer abgewandelten Konstruktion von THOM Pontrjaginklassen für kombinatorische Mannigfaltigkeiten definiert. Es erhebt sich die Frage, ob die Signaturformel in Satz II. 4.1 auch für kombinatorische Mannigfaltigkeiten mit $l(X)$ statt $L(X)$ richtig bleibt.

§ 5. Der Funktor $\hat{A}^*$ und die natürliche Transformation $\hat{\varrho}$.

Sei π eine diskrete Gruppe und $L\subseteq\mathbb{R}$ ein Unterring mit $1\in L$. Ferner sei $\mathfrak{A}^0(\pi,L)$ bzw. $\mathfrak{A}^1(\pi,L)$ die Menge aller Isomorphieklassen von Paaren (V,β) mit:

(a) V ist ein endlich erzeugter projektiver L-Modul und ein π-Modul,

(b) $\beta : V\times V \longrightarrow L$ ist eine nichtentartete π-invariante symmetrische bzw. schiefsymmetrische Bilinearform.

Auf $\mathfrak{A}(\pi,L) = \mathfrak{A}^0(\pi,L) \cup \mathfrak{A}^1(\pi,L)$ hat man die Operationen $\oplus, \otimes$ mit

$$\left.\begin{aligned}(V_1,\beta_1)\oplus(V_2,\beta_2) &:= (V_1\oplus V_2,\beta_1\oplus\beta_2)\\(V_1,\beta_1)\otimes(V_2,\beta_2) &:= (V_1\otimes V_2,\beta_1\otimes\beta_2)\end{aligned}\right\}\text{ für } (V_i,\beta_i)\in\mathfrak{A}^j(\pi,L),$$

wobei $(\beta_1\otimes\beta_2)(a_1\otimes a_2,\ b_1\otimes b_2) = \varepsilon\beta_1(a_1,b_1)\beta_2(a_2,b_2)$

mit $\varepsilon = \left\{\begin{array}{l}-1,\text{ falls } \beta_1 \text{ und } \beta_2 \text{ schiefsymmetrisch}\\ \ \ 1,\text{ sonst}\end{array}\right\}$

ist. Hierdurch wird $\mathfrak{A}^*(\pi,L)$ zu einem kommutativen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Halbring mit Einselement $(L,1)$. Dabei bezeichne (L,c) für $0 \neq c\in L$ den trivialen π-Modul mit $c : L\times L \longrightarrow L$, $c(x,y) = c\cdot x\cdot y$. Sei $A^*(\pi,L)$ der GROTHENDIECK-Ring von $\mathfrak{A}^*(\pi,L)$ mit der zusätzlichen Relation $[L,c] = \mathrm{sign}(c)\cdot[L,1]$. Ist $\varphi : \pi_1 \longrightarrow \pi_2$ ein Homomorphismus und $i : L_2 \subseteq L_1$, so induziert die Zuordnung $(V,\beta)\longmapsto(V\otimes_{L_2}L_1,\beta\otimes_{L_2}L_1)$ offenbar einen mit den Relationen verträglichen Homomorphismus $\mathfrak{A}^*(\pi_2,L_2)\longrightarrow\mathfrak{A}^*(\pi_1,L_1)$ und damit auch einen Homomorphismus

$$A^*(\varphi,i) : A^*(\pi_2,L_2)\longrightarrow A^*(\pi_1,L_1).$$

Es ist klar, daß A^* ein 1-kontra-, 2-kovarianter Funktor ist. Man hat ferner eine Augmentation

$$\varepsilon : A^*(\pi,L)\longrightarrow\mathbb{Z},\ \varepsilon[V,\beta] = \begin{cases}\mathrm{sign}(\beta) & \text{für } (V,\beta)\in\mathfrak{A}^0(\pi,L),\\ 0 & \text{für } (V,\beta)\in\mathfrak{A}^1(\pi,L),\end{cases}$$

deren Kern wir mit $\widetilde{A}^*(\pi,L)$ bezeichnen. Da ε mit den Morphismen $A^*(\varphi,i)$ verträglich ist, ist auch $\widetilde{A}^*$ ein Funktor. Schließlich definieren wir

$$\widehat{A}^*(\pi,L) := A^*(\pi,L)/I,$$

wobei I das von allen Bildern

$$A^*(\varphi,\mathrm{id}_L)(\widetilde{A}^*(\widetilde{\pi},L)) \text{ mit } \varphi:\pi\twoheadrightarrow\widetilde{\pi} \quad \text{surjektiv, } \#\widetilde{\pi}<\infty$$

erzeugte Ideal ist. Offenbar ist $\widehat{A}^*(\pi,L)\cong\mathbb{Z}$ für jede endliche Gruppe π.

Schließlich definieren wir eine natürliche Transformation

$$\hat{\varrho} : \widehat{A}^*(\pi,L)\longrightarrow H^{ev}(B_\pi;\mathbb{Q})$$

mit $\hat{\varrho}\widehat{A}^0(\pi,L) \subseteq \prod\limits_{k\geq 0}H^{4k}(B_\pi;\mathbb{Q})$ und $\hat{\varrho}\widehat{A}^1(\pi,L) \subseteq \prod\limits_{k\geq 0}H^{4k+2}(B_\pi;\mathbb{Q})$ wie folgt:

Sei $(V,\beta)\in\mathfrak{A}^*(\pi,L)$. Dann ist $\widetilde{V} := E_\pi\times_\pi(V\otimes_L\mathbb{C})$ ein komplexes Vektorbündel über B_π. Ist β symmetrisch, so ist $\widetilde{V} = \widetilde{V}_+\oplus\widetilde{V}_-$, wobei β auf $\widetilde{V}_+$ bzw. $\widetilde{V}_-$ positiv bzw. negativ definit ist. Es ist leicht zu sehen, daß das Element $ch^{(2)}([\widetilde{V}_+] - [\widetilde{V}_-])\in H^{ev}(B_\pi;\mathbb{Q})$ nur von der Isomorphieklasse von (V,β) abhängt. Ist dagegen β antisymmetrisch, so hat schon $\widetilde{V}_{\mathbb{R}} = E_\pi\times_\pi(V\otimes\mathbb{R})$ eine komplexe Struktur J, so daß $\widetilde{V} = \widetilde{V}_-\oplus\widetilde{V}_+\cong(\widetilde{V}_{\mathbb{R}},J)\oplus(\widetilde{V}_{\mathbb{R}},-J)$ ist. Man sieht auch jetzt, daß $ch^{(2)}([\widetilde{V}_+] - [\widetilde{V}_-])\in H^{ev}(B_\pi;\mathbb{Q})$ nur von der Isomorphieklasse von (V,β) abhängt. Ferner ist die Zuordnung $(V,\beta)\longmapsto ch^{(2)}([\widetilde{V}_+]-[\widetilde{V}_-])$ mit $\oplus,\otimes$ und den Relationen im GROTHENDIECK-Ring verträglich, so daß man einen Ringhomomorphismus $\varrho : A^*(\pi,L)\longrightarrow H^{ev}(B_\pi;\mathbb{Q})$ erhält. Es ist klar, daß ϱ eine natürliche Transformation ist. Ferner ist offenbar $\varrho[L,1] = ch^{(2)}(\underline{1}) = 1\in H^0(B_\pi;\mathbb{Q})$. Daher ist ϱ auch mit den Augmentationen verträglich. Da für eine endliche Gruppe $\widetilde{H}^*(B_\pi;\mathbb{Q}) = 0$ ist, ergibt sich leicht, daß das Ideal I unter ϱ auf 0 abgebildet wird. Somit induziert ϱ auch eine natürliche Transformation

$$\hat{\varrho} : \widehat{A}^*(\pi;L)\longrightarrow H^{ev}(B_\pi;\mathbb{Q}).$$

Es ist klar, daß

$$\hat{\varrho}\widehat{A}^0(\pi,L) \subseteq \prod_{k\geq 0}H^{4k}(B_\pi;\mathbb{Q}) \text{ und } \hat{\varrho}\widehat{A}^1(\pi,L) \subseteq \prod_{k\geq 0}H^{4k+2}(B_\pi;\mathbb{Q})$$

ist, da $ch^{(2)}([\widetilde{V}_+] - [\widetilde{V}_-])$ im Fall $(V,\beta)\in\mathfrak{A}^0(\pi,L)$ eine Potenzreihe in PONTRJAGIN-Klassen und im Fall $(V,\beta)\in\mathfrak{A}^1(\pi,L)$ eine ungerade Potenzreihe in CHERN-Klassen ist.

Sei nun X eine kompakte orientierte zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit ohne Rand und Γ ein lokales Koeffizientensystem auf X mit regulärer Paarung $\langle\ ,\ \rangle : \Gamma\times\Gamma\longrightarrow\underline{L}$ wie in § 3. Dann hat man einen Homomorphismus $\chi : \pi_1(X,*)\longrightarrow\mathrm{Aut}(V,\beta)$, wobei $V = \Gamma(*)$, $\beta = \langle\ ,\ \rangle|V\times V$, $\pi := \pi_1(X,*)$ ist, d.h. es ist $(V,\beta)\in\mathfrak{A}^*(\pi,L)$. Sei ferner $f : X\longrightarrow B_\pi$ eine klassifizierende Abbildung der universellen Überlagerung $\widetilde{X}\longrightarrow X$. Nach Satz II.4.1 gilt somit:

$$\tau(X;\Gamma) = f^*\hat{\varrho}[V,\beta]\cdot L(X)[X],$$

wobei der Zusammenhang zwischen $(\Gamma,\langle\ ,\ \rangle)$ und (V,β) durch $(\Gamma,\langle\ ,\ \rangle)\cong\widetilde{X}\times_\pi(V,\beta)$ gegeben ist.

§ 6. Folgerungen aus der Signaturformel

Aus der Signaturformel lassen sich wichtige Folgerungen über die Beziehungen zwischen den Signaturen der Faser, der Basis und des Totalraumes eines Faserbündels $\xi = (E,X,p,F,G)$ ziehen. Dabei ist $G \subseteq \mathrm{Aut}_+(F)$ eine Untergruppe der Gruppe aller eine vorgegebene Orientierung ω invariant lassenden Homöomorphismen von F; X,F sind kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand und X sei zusammenhängend und differenzierbar. Ferner sei G_0 die Zusammenhangskomponente des Einselementes von G. Es gilt nun

Satz II. 6.1. Sei ξ ein Faserbündel wie oben. Ferner sei das Bild des das lokale Koeffizientensystem $\Gamma = \underline{H^m(F;\mathbb{Z})}$ ($\dim F = 2m$) bestimmenden Homomorphismus $\chi : \pi_1(X,*) \to G/G_0 \to \mathrm{Aut}(H^m(F,\mathbb{Z}), \langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle)$ eine endliche Gruppe. Dann ist $\tau(E) = \tau(X) \cdot \tau(F)$.

Beweis: Da $\widetilde{H}^p(B_{\widetilde{G}};\mathbb{Q}) = 0$ ist für jede endliche Gruppe $\widetilde{G}$, verschwinden wegen unserer Voraussetzung die positiv-dimensionalen Komponenten von $\mathcal{G}[H^m(F;\mathbb{Z}), \langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle]$, während der nulldimensionale Term gleich $\tau(F)$ ist. Daraus folgt $\tau(E) = \tau(X;\Gamma) = \tau(F) \cdot L(X)[X] = \tau(F) \cdot \tau(X)$.

Die Voraussetzungen des letzten Satzes sind zum Beispiel in den folgenden Fällen erfüllt:

a) $\pi_1(X,*)$ ist endlich,

b) G ist kompakt, G_0 offen (etwa G kompakte Liegruppe oder wegzusammenhängend)

c) $\langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle$ ist auf $H^m(F,\mathbb{Z})$ definit.

Wir wollen zeigen, daß auch im Fall $\operatorname{rang} H^m(F,\mathbb{Z}) = 2$ für $\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(H^m(F,\mathbb{Z}), \langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle)$ gilt: $\widetilde{H}^{ev}(B_{\widetilde{G}},\mathbb{Q}) = 0$. Wegen c) brauchen wir nur die beiden Fälle zu betrachten:

1) $\langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle$ ist symmetrisch und indefinit,

2) $\langle \cdot \cup \cdot , \omega \rangle$ ist antisymmetrisch.

Ferner darf man annehmen, daß $H^m(F,\mathbb{Z})$ torsionsfrei, also $\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist. Sei e_1, e_2 eine Basis von $H^m(F,\mathbb{Z})$.

Fall 1): Sei $(\langle e_i \cup e_j, \omega \rangle) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = S$, $A,B,C \in \mathbb{Z}$, $AC - B^2 < 0$. Dann besteht G aus allen $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = \pm 1$ und $T^t S T = S$. Da mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt : $TJT^t = \det(T) \cdot J$ für alle zweireihigen Matrizen T, kann man die Gleichung $T^t S T = S$

umformen zu:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B \end{pmatrix},$$

Die $T \in \widetilde{G}$ mit $\det T = 1$ bilden bekanntlich eine zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ isomorphe Gruppe. Somit hat man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 ,$$

in der G eine endliche Gruppe ist. Aus der HOCHSCHILD-SERRE-Spektralsequenz $E_2^{*,*} = H^*(G;H^*(\mathbb{Z};\mathbb{Q})) \underset{p}{\Longrightarrow} H^*(\widetilde{G};\mathbb{Q})$ und $\widetilde{H}^p(\mathbb{Z};\mathbb{Q}) = 0$ für $p \neq 1$ folgt mühelos $\widetilde{H}^{ev}(\widetilde{G};\mathbb{Q}) = 0$, $H^0(\widetilde{G};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, also wegen $H^*(B_{\widetilde{G}};\mathbb{Q}) = H^*(\widetilde{G};\mathbb{Q})$ die Behauptung.

Fall 2): Jetzt ist $\widetilde{G} \cong Sp(2;\mathbb{Z}) = SL(2;\mathbb{Z})$. Wir beweisen nun

$$(*) \qquad H^p(SL(2;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) \cong \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{für } p \equiv 1(2), p > 0 \\ \mathbb{Z}_{12} & \text{für } p \equiv 0(2), p > 0 \end{array} \right\}.$$

Hierzu betrachten wir die Kommentatorgruppe $\widetilde{G}'$ von $\widetilde{G}$. Bekanntlich ist $\widetilde{G} \cong \langle a,b \mid a^2 = b^3, a^4 = 1 \rangle$ mit $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hieraus folgt leicht $\widetilde{G}/\widetilde{G}' \cong \mathbb{Z}_{12}$, wobei $ba^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ auf eine Erzeugende σ von $\mathbb{Z}_{12}$ abgebildet wird. Mittels der Methode von SCHREIER (vgl. [11]) zeigt man leicht, daß $\widetilde{G}'$ eine <u>freie</u> Gruppe vom Rang 2 mit den Erzeugenden

$$c = [a,b] = aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } d = [a,b^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ist $H^p(\widetilde{G}';\mathbb{Z}) = 0$ für $p \geq 2$ sowie $H^0(\widetilde{G}';\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\widetilde{G}',\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Seien c^*, d^* Erzeugende von $H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})$ mit

$$c^*(c) = d^*(d) = 1, \quad c^*(d) = d^*(c) = 0.$$

Die Gruppe G operiert auf $H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})$ durch

$$(gx^*)(x) = x^*(g^{-1}x\,g) \quad \text{für } x^* \in H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z}),\ x \in G\ ,\ g \in G.$$

Man erhält:

$$ac^* = -c^*, \quad bc^* = d^*,$$
$$ad^* = -d^*, \quad bd^* = -c^* - d^*,$$

und somit, da $\widetilde{G}'$ trivial auf $H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})$ operiert:

$$\sigma c^* = -d^*, \quad \sigma d^* = c^* + d^*.$$

Aus der HOCHSCHILD-SERRE-Spektralsequenz

$$E_2^{*,*} = H^*(\mathbb{Z}_{12}; H^*(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) \underset{p}{\Longrightarrow} H^*(\widetilde{G};\mathbb{Z})$$

erhält man wegen $H^q(\widetilde{G}';\mathbb{Z}) = 0$ für $q \geq 2$ exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Koker}(d_2^{p-2,1}) \longrightarrow H^p(\widetilde{G};\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_2^{p-1,1}) \longrightarrow 0.$$

Nun hat aber die reduzierte Kohomologie einer endlichen zyklischen Gruppe die Periode 2. Daher ist mit $N = \sum_{i=0}^{n} \sigma^i$:

$$H^0(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) = \mathrm{Ker}(\sigma-1),$$

$$\hat{H}^{2k}(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) \cong \hat{H}^0(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) = \mathrm{Ker}(\sigma-1)/\mathrm{Im}\ N,$$

$$\hat{H}^{2k+1}(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{-1}(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) = \mathrm{Ker}\ N/\mathrm{Im}(\sigma-1).$$

In unserem Fall ist $N = 0$, $(\sigma-1)c^* = -c^*-d^*$, $(\sigma-1)d^* = c^*$, also $\sigma-1$ ein Isomorphismus. Daher ist $\hat{H}^k(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) = 0 = H^0(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z}))$ und damit auch $H^k(\mathbb{Z}_{12};\ H^1(\widetilde{G}';\mathbb{Z})) = 0$ für alle $k \geq 0$. Hieraus folgt

$$\mathrm{Koker}(d_2^{p-2,1}) \cong H^p(\mathbb{Z}_{12};\mathbb{Z}) \text{ und } \mathrm{Ker}(d_2^{p-1,1}) = 0 \text{ für alle } p \geq 0.$$

Da $H^p(\mathbb{Z}_{12},\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{für } p \equiv 1(2), p > 0 \\ \mathbb{Z}_{12} & \text{für } p \equiv 0(2), p > 0 \end{cases}$ ist, folgt hieraus $(*)$.

Nach dem universellen Koeffizientensatz ist daher $\widetilde{H}^*(\widetilde{G};\mathbb{Q}) = 0$.

Aus dem Bewiesenen folgt offensichtlich

Satz II. 6.2: Sei ξ ein Faserbündel wie oben. Ferner sei $\dim F = 2m$ und $\mathrm{rang}\ H^m(F,\mathbb{Z}) \leq 2$. Dann ist $\tau(E) = \tau(X)\cdot\tau(F)$.

Bemerkung: Ist $\xi = (E,X,p,F,G)$ ein Flächenbündel über einer Riemannschen Fläche X und ist G die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von F, so ist bekanntlich $\# G < \infty$, falls $g(F) \geq 2$ (vgl. [3]). Hieraus und aus den letzten beiden Sätzen folgt somit $\tau(E) = \tau(X)\cdot\tau(F) = 0$.

Teil III

Flächenbündel und lokale Koeffizientensysteme über Flächen

In diesem letzten Teil untersuchen wir eingehender Flächenbündel und lokale Koeffizientensysteme über kompakten orientierten Flächen.

§ 7. Flächenbündel über Flächen

Sei X eine kompakte orientierte Fläche mit Rand ∂X und $X \not\cong S^2$. Dann ist bekanntlich die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ von X zusammenziehbar und daher X ein klassifizierender Raum für $\pi_1(X,*)$. Ferner sei

$$\pi_1(X,*) \cong \langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g,c_1,\dots,c_r \mid \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=1}^{r}c_j = 1\rangle,$$

wobei $g,r \geq 0$, $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator von a und b ist Sei wei-
und die c_j den r Randkomponenten von ∂X entsprechen.
ter $S^1(n)$ die Einpunktvereinigung von n 1-Sphären $S^1_1,\dots,S^1_n$,
und die Abbildung $i : S^1 \longrightarrow S^1(2g+r)$ repräsentiere den Weg
$\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=1}^{r}c_j$ in $\pi_1(S^1(2g+r),*) \cong \langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g,c_1,\dots,c_r\rangle$.
Dann ist $X \simeq C_i$, wobei C_i der Abbildungskegel von i ist. Sei
weiter G eine topologische Gruppe und G_o die Wegzusammenhangs-
komponente des Einselementes von G. Zu jedem G-Prinzipalbündel
$\xi = (P,X,p,G,G)$ über X gehört dann eine bis auf Homotopie ein-
deutig bestimmte stetige Abbildung $f : X \longrightarrow B_G$ und damit auch
ein Homomorphismus

$$f_*:\ \pi_1(X,*) \longrightarrow \pi_1(B_G,f(*)) \cong \pi_0(G) \cong G/G_o.$$

Offensichtlich ist f_* durch ξ bis auf einen inneren Automorphismus von G/G_o eindeutig bestimmt. Sei umgekehrt $\varrho : \pi_1(X,*) \longrightarrow G/G_o$ ein Homomorphismus. Wir behaupten, daß es eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow B_G$ gibt mit $f_* = \varrho$.

Beweis: Sei $j : S^1(2g+r) \longrightarrow C_i \simeq X$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\varrho\circ j_* : \pi_1(S^1(2g+r),*) \longrightarrow G/G_o$ ein Homomorphismus mit $\varrho\circ j_*\circ i_*(\mathrm{id}) = 1$. Es gibt offensichtlich eine stetige Abbildung $g : S^1(2g+r) \longrightarrow B_G$, so daß $g_* = \varrho\circ j_*$ ist. Da $g_*\circ i_*(\mathrm{id}) = 1$ ist, läßt sich $g\circ i$ zu einer stetigen Abbildung $D^2 \longrightarrow B_G$ erweitern. Diese Erweiterung liefert auch eine stetige Abbildung

$f : C_i \longrightarrow B_G$, für die $f_* = \varrho$ ist.

Wir wenden dies auf den Fall $G = \mathrm{Diff}^+(F)$ an, wobei F eine kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht h ohne Rand und $\mathrm{Diff}^+(F)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen mit der C^∞-Topologie ist. Hierfür hat NIELSEN in [17] gezeigt, daß

$$^G/G_o \cong \mathrm{Aut}^+(\pi_1(F,*))/\mathrm{Inn}(\pi_1(F,*)) = \mathcal{O}\!\mathcal{l}^+(\pi_1(F,*)) =: \Gamma_h$$

ist, wobei $\mathrm{Aut}^+(\pi_1(F,*))$ die Gruppe derjenigen Automorphismen von $\pi_1(F,*)$ ist, die ein kanonisches positiv orientiertes Schnittsystem $\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_h,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_h$ wieder in ein solches überführen. Γ_h heißt die TEICHMÜLLER-Gruppe zum Geschlecht h. Zu jedem Homomorphismus $\varrho : \pi_1(X,*) \longrightarrow \Gamma_h$ existiert somit ein Prinzipalbündel $\xi = (P,X,p,G,G)$ und damit auch ein assoziiertes Flächenbündel $\tilde{\xi} = (P\times_G F,X,\tilde{p},F,G)$, dessen klassifizierende Abbildung $f : X \longrightarrow B_G$ $f_* = \varrho$ erfüllt. Weiter induziert jeder Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}^+(\pi_1(F,*))$ auch einen Automorphismus $\hat{\varphi}$ von $H_1(F;\mathbb{Z}) = \pi_1(F,*)/[\pi_1(F,*),\pi_1(F,*)]$, der die Schnittform $\circ : H_1(F;\mathbb{Z})\times H_1(F;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ invariant läßt. Da die inneren Automorphismen von $\pi_1(F,*)$ offensichtlich trivial auf $H_1(F;\mathbb{Z})$ operieren, erhält man somit einen Homomorphismus

$$\sigma : \Gamma_h = \mathcal{O}\!\mathcal{l}^+(\pi_1(F,*)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(F;\mathbb{Z}),\circ) =: Sp_h,$$

der nach [11], Sec. 3.7 surjektiv ist. Es ist $Sp_h \cong Sp(2h;\mathbb{Z})$, wobei $Sp(2h;\mathbb{Z})$ die (eigentliche) unimodulare symplektische Gruppe ist. Der Kern N_h dieses Homomorphismus besteht offenbar aus allen äußeren "Automorphismen", die trivial auf der Homologie von F operieren.

Ist $\xi = (E,X,p,F,G)$ ein Flächenbündel mit beliebiger Strukturgruppe $G \subseteq \mathrm{Aut}^+(F)$ = Gruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen von F, so hat man nach [18] einen kontravarianten Funktor $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Htp}$ von dem Fundamentalgruppoid von X in die Homotopiekategorie, wobei $x \longmapsto p^{-1}(x)$, $[\omega] \longmapsto h_{[\omega]}$ ist. Daher hat man auch einen Antihomomorphismus $\psi : \pi_1(X,*) \longrightarrow \mathrm{Aut}^+_{Htp}(F)$, wobei $\mathrm{Aut}^+_{Htp}(F)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Homotopieäquivalenzen von F ist. Wir zeigen nun, daß $\mathrm{Aut}^+_{Htp}(F) \cong \Gamma_h$ ist. Hierzu beweisen wir allgemeiner:

<u>Lemma III. 7.1:</u> Seien G_1,G_2 diskrete Gruppen und $P(Y,G_2)$ die Menge der Isomorphieklassen von G_2-Prinzipalbündeln über Y. Dann ist

$$P(B_{G_1},G_2) \cong \mathrm{Hom}(G_1,G_2)/G_2 \cong [B_{G_1},B_{G_2}],$$

wobei G_2 von rechts auf $\mathrm{Hom}(G_1,G_2)$ durch $\varphi g_2 = g_2^{-1}\varphi(\cdot)g_2$ für $g_2 \in G_2$ operiert.

<u>Beweis:</u> Nach Definition von B_G genügt es, die erste Gleichung zu beweisen. Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_1,G_2)$, so sei $[\varphi]$ seine Äquivalenzklasse in $\mathrm{Hom}(G_1,G_2)/G_2$. Wir definieren $\tau[\varphi] = [E_{G_1}\times_{G_1} G_2]$, wobei G_1 von links auf G_2 durch $g_1\cdot g_2 := \varphi(g_1)g_2$ operiert. Man rechnet leicht nach, daß $E_{G_1}\times_{G_1} G_2$ ein G_2-Prinzipalbündel über B_{G_1} ist, dessen Isomorphieklasse durch $[\varphi]$ eindeutig bestimmt ist. Dies liefert eine Abbildung

$$\tau : \mathrm{Hom}(G_1,G_2)/G_2 \longrightarrow P(B_{G_1},G_2).$$

Sei umgekehrt $P \longrightarrow B_{G_1}$ ein G_2-Prinzipalbündel und $f : B_{G_1} \longrightarrow B_{G_2}$ eine klassifizierende Abbildung für P sowie $f_* : \pi_1(B_{G_1},*) \longrightarrow \pi_1(B_{G_2},f(*))$ der induzierte Homomorphismus. Wegen $\pi_1(B_{G_i},*) \cong G_i$ erhält man einen Homomorphismus $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, der durch $[P]$ bis auf einen inneren Automorphismus von G_2 eindeutig bestimmt ist. Wir setzen $\tilde{\tau}[P] := [\varphi]$ und erhalten eine Abbildung

$$\tilde{\tau} : P(B_{G_1},G_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_1,G_2)/G_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\tau,\tilde{\tau}$ zueinander invers sind.

Ist nun $F \cong S^2$, so ist $[S^2,S^2] \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, so daß $\mathrm{Aut}^+_{Htp}(S^2) = 1$ ist. Dagegen ist F im Fall $F \not\cong S^2$ ein klassifizierender Raum für $\pi_1(F,*) =: \pi$, so daß aus Lemma 7.1 folgt:

$$\mathrm{Aut}_{Htp}(F) \subseteq [B_\pi,B_\pi] \cong \mathrm{Hom}(\pi,\pi)/\pi,$$

wobei die Homotopieäquivalenzen offenbar der Untergruppe $\mathrm{Aut}(\pi)/\pi = \mathrm{Aut}(\pi)/\mathrm{Inn}(\pi)$ entsprechen. Ebenso folgt $\mathrm{Aut}^+_{Htp}(F) \cong \mathrm{Aut}^+(\pi)/\mathrm{Inn}(\pi) = \Gamma_h$.

Es ist leicht zu sehen, daß der Antihomomorphismus $\psi : \pi_1(X,*) \longrightarrow \mathrm{Aut}^+_{Htp}(F)$ und der Homomorphismus $\varrho : \pi_1(X,*) \longrightarrow \Gamma_h$, die zu einem Flächenbündel $\xi = (P\times_G F,X,p,F,G)$ gehören, durch $\varrho = \psi(\cdot)^{-1}$ miteinander verknüpft sind.

Wir hatten in § 3 gesehen, daß die Signatur $\tau(X,\Gamma)$ einen Homomorphismus $\tau : \Omega_2(B_{Sp(2h,\mathbb{Z})}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ induziert. Der Epimorphisaus $\sigma: \Gamma_h \longrightarrow Sp_h \cong Sp(2h,\mathbb{Z})$ induziert nach Lemma III.7.1 eine stetige Abbildung $B_\sigma : B_{\Gamma_h} \longrightarrow B_{Sp_h}$, deren Homotopieklasse durch σ eindeutig bestimmt ist. B_σ wiederum induziert durch σ eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$\Omega_n(B_\sigma) : \Omega_n(B_{\Gamma_h}) \longrightarrow \Omega_n(B_{Sp_h}), \quad n \geq 0.$$

Wir interessieren uns für die Fälle n = 1,2. Zunächst gilt

<u>Lemma III. 7.2:</u> Für jede diskrete Gruppe G gilt:

$$\Omega_1(B_G) \cong H_1(B_G,\mathbb{Z}) \cong {}^G/_{[G,G]}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $X = \bigvee_{i=1}^{r} S^1_i$ disjunkte Vereinigung von r 1-Sphären und $P \longrightarrow X$ ein G-Prinzipalbündel über X, $P_i := P|S^1_i$. Da S^1 ein klassifizierender Raum für $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$ ist, werden die P_i durch Konjugiertenklassen $[A_i], A_i \in G$ klassifiziert. Wir definieren $\Phi(X,P) := \prod_{i=1}^{r} A_i \cdot [G,G]$ und erhalten eine Abbildung

$$\Phi : \mathcal{P}_1(G) \longrightarrow {}^G/_{[G,G]},$$

wobei $\mathcal{P}_1(G)$ die Menge der Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln über 1-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten ist. Sei nun $(X,P) \cong \partial(Y,Q) := (\partial Y, Q|\partial P)$ bordant. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß Y eine zusammenhängende orientierte Fläche ist. Es ist dann

$$\pi_1(Y,*) \cong \langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g,c_1,\dots,c_r \mid \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=1}^{r} c_j \rangle,$$

wobei die c_i den Randkomponenten $S^1_i, i=1,\dots,r$ von $\partial Y \cong X$ entsprechen. Sei $\chi: \pi_1(Y,*) \longrightarrow G$ ein zu Q gehörender Homomorphismus. Dann ist offensichtlich $[\chi(c_j)] = [A_j]$, $j=1,\dots,r$ sowie

$$1 = \chi(\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=1}^{r} c_j) \equiv \prod_{j=1}^{r}\chi(c_j) \equiv \prod_{j=1}^{r} A_j \mod [G,G],$$

also $\Phi(X,P) = 0$. Daher induziert Φ einen Homomorphismus

$$\tilde{\Phi} : \Omega_1(B_G) \longrightarrow {}^G/_{[G,G]}.$$

Umgekehrt definieren wir

$$\tilde{\Psi} : {}^G/_{[G,G]} \longrightarrow \Omega_1(B_G)$$

durch $\tilde{\Psi}(A\cdot[G,G]) := [S^1,P_A]$, wobei $P_A \longrightarrow S^1$ das dem Homomorphismus $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1,1) \longrightarrow G$ mit $1 \longmapsto A$ zugeordnete G-Prinzipalbündel ist. Es ist leicht zu sehen, daß $\tilde{\Psi}$ ein Homomorphismus und invers zu $\tilde{\Phi}$ ist. Man beachte hierzu, daß $\Omega_1(B_G)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aus dem Beweis folgt noch:

Ist $G_1 \longrightarrow G_2$ ein Homomorphismus von diskreten Gruppen, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega_1(B_{G_1}) \arrow[r, "\Omega_1(B_\varphi)"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}"'] & \Omega_1(B_{G_2}) \arrow[d, "\tilde{\Phi}"'] \\ G_1/[G_1,G_1] \arrow[r, "\varphi_*"] & G_2/[G_2,G_2] \end{tikzcd}$$

mit $\varphi_*(g_1[G_1,G_1]) = \varphi(g_1)[G_2,G_2]$ kommutativ, d.h. die Funktoren $\Omega_1(B_\cdot)$ und $\cdot/[\cdot,\cdot]$ von der Kategorie der diskreten Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen sind äquivalent. Wegen $\pi_1(B_G,*) \cong G$ ist schließlich auch $H_1(B_G;\mathbb{Z}) \cong \Omega_1(B_G)$.

Weiter haben wir

<u>Satz III. 7.3:</u> Sei $\varrho : G_1 \longrightarrow G_2$ ein surjektiver Homomorphismus von diskreten Gruppen. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Koker}(\Omega_2(B_\varrho) : \Omega_2(B_{G_1}) \longrightarrow \Omega_2(B_{G_2})) \cong (\mathrm{Ker}\,\varrho \cap [G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\,\varrho, G_1].$$

<u>Beweis:</u> Der Beweis verläuft in drei Schritten:

1. Schritt: Konstruktion eines Homomorphismus

$$\Phi : \Omega_2(B_{G_2}) \longrightarrow (\mathrm{Ker}\,\varrho \cap [G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\,\varrho, G_1].$$

2. Schritt: Nachweis der Surjektivität von Φ.
3. Schritt: Nachweis von $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Im}\,\Omega_2(B_\varrho)$.

<u>1. Schritt:</u> Sei $[X,P] \in \Omega_2(B_{G_2})$, X kompakte orientierte Fläche ohne Rand, $P \longrightarrow X$ ein G_2-Prinzipalbündel über P. Seien $X_i, i=1,\dots,r$ die Komponenten von X und $P_i = P|X_i$ die Einschränkungen von P auf X_i. Weiter seien $\chi_i : \pi_1(X_i,*) \longrightarrow G_2$ klassifizierende Homomorphismen der Bündel P_i, wobei die χ_i durch P_i bis auf innere Automorphismen von G_2 eindeutig bestimmt sind. Ferner sei g_i das Geschlecht von X_i,

$$\pi_1(X_i,*) = \langle a^{(i)}_j, b^{(i)}_j \mid j=1,\dots,g_i, \prod_{j=1}^{g_i}[a^{(i)}_j, b^{(i)}_j] = 1 \rangle.$$

Seien $A^{(i)}_j, B^{(i)}_j \in G_1$ mit $\varrho(A^{(i)}_j) = \chi_i(a^{(i)}_j)$, $\varrho(B^{(i)}_j) = \chi_i(b^{(i)}_j)$. Dann ist offenbar $\prod_j [A^{(i)}_j, B^{(i)}_j] \in \mathrm{Ker}\,\varrho \cap [G_1,G_1]$, so daß wir definieren können:

$$\Phi[X,P] := \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{g_i}[A^{(i)}_j, B^{(i)}_j]\cdot[\mathrm{Ker}\,\varrho, G_1].$$

Wählt man statt $A_j^{(i)}$, $B_j^{(i)}$ andere Urbilder der $\chi_i(a_j^{(i)})$, $\chi_i(b_j^{(i)})$, so zeigt eine leichte Rechnung, daß sich $\Phi[X,P]$ hierbei nicht ändert. Da G_1 trivial auf $(\mathrm{Ker}\varrho\cap[G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho,G_1]$ operiert, ändert sich $\Phi[X,P]$ auch nicht, wenn man χ_i durch $T_i\,\chi_i(\cdot)\,T_i^{-1}$ mit $T_i\in G_2$ ersetzt. Ist schließlich $c_j^{(i)}$, $d_j^{(i)}$ ein anderes positiv orientiertes kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X_i,*)$, so gibt es nach [11], Sec. 3.7, Theorem N 10 NIELSEN-Transformationen

$$x_j\longmapsto W_j(x_k,y_k),\quad y_j\longmapsto \widetilde{W}_j(x_k,y_k),\quad j=1,\dots,g_i,$$

so daß

$$c_j^{(i)}=W_j(a_k^{(i)},b_k^{(i)}),\quad d_j^{(i)}=\widetilde{W}_j(a_k^{(i)},b_k^{(i)})$$

und

$$\prod_j[W_j(x_k,y_k),\ \widetilde{W}_j(x_k,y_k)]\simeq\prod_j[x_j,y_j]$$

in der freien Gruppe $\langle x_j,y_j\mid j=1,\dots,g_i\rangle$ ist. Setzt man dann

$$C_j^{(i)}=W_j(A_k^{(i)},B_k^{(i)}),\quad D_j^{(i)}=\widetilde{W}_j(A_k^{(i)},B_k^{(i)}),$$

so ist offenbar

$$\begin{aligned}\chi_i(c_j^{(i)})&=\chi_i(W_j(a_k^{(i)},b_k^{(i)}))=W_j(\chi_i(a_k^{(i)}),\chi_i(b_k^{(i)}))\\&=W_j(\varrho(A_k^{(i)}),\varrho(B_k^{(i)}))=\varrho(W_j(A_k^{(i)},B_k^{(i)}))\\&=\varrho(C_j^{(i)})\end{aligned}$$

und ebenso $\chi_i(d_j^{(i)})=\varrho(D_j^{(i)})$. Ferner ist

$$\prod_j[C_j^{(i)},\ D_j^{(i)}]\simeq\prod_j[A_j^{(i)},\ B_j^{(i)}]\quad\text{in } G_1.$$

Hieraus folgt offenbar die Unabhängigkeit von $\Phi[X,P]$ von der Wahl der kanonischen Erzeugendensysteme der $\pi_1(X_i,*)$.

Schließlich ist zu zeigen, daß $\Phi[X,P]=0$ ist für $(X,P)=\partial(Y,Q)$. Dies ist offenbar äquivalent mit $(X,P)\simeq(X',P')\Longrightarrow\Phi[X,P]=\Phi[X',P']$. Sei also $(X,P)-(X',P')=\partial(Y,Q)$, $Y=X-X'$, $P=Q|X$, $P'=Q|X'$, wobei Y eine kompakte orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit ist. Dann gibt es eine MORSE-Funktion $f\colon Y\to[0,1]$ mit $f^{-1}(0)=X$, $f^{-1}(1)=X'$ und endlich vielen kritischen nichtentarteten Punkten $p_1,\dots,p_r\in Y$ mit $t_0=0<f(p_1)<\dots<f(p_r)<1=t_r$ und Index $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\{0,1,2,3\}$ (vgl. [15]). Sei $f(p_i)<t_i<f(p_{i+1})$, $i=1,\dots,r-1$, $X_0=X$, $X_1=X'$ und $X_i=f^{-1}(t_i)$ für $0<i<r$. Ferner sei $Y_i=f^{-1}[t_{i-1},t_i]$

$Q_i=Q\,|\,Y_i$, $P_i=P\,|\,X_i$. Offenbar ist $\partial(Y_i,Q_i)=(X_{i-1},P_{i-1})-(X_i,P_i)$, $i=1,\dots,r$. Man darf daher annehmen, daß f nur einen kritischen Punkt p mit Index λ hat. Da p dann auch kritischer Punkt von $1-f$ mit Index $3-\lambda$ ist, darf man auch noch $0\le\lambda\le1$ annehmen. Bekanntlich entsteht dann Y aus $X\times[0,1]$ durch Anheften eines Henkelkörpers $D^\lambda\times D^{3-\lambda}$ an eine Tubenumgebung $T=S^{\lambda-1}\times D^{3-\lambda}$ von $\mathrm{Im}\,\varphi\times\{1\}$, wobei $\varphi\colon S^{\lambda-1}\to X$ eine durch f bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung ist, die wir zudem als injektiv voraussetzen dürfen. X' entsteht aus X durch Surgery:

$$X'\cong X\setminus\mathring{T}\cup_{\partial T}D^\lambda\times S^{2-\lambda},$$

wobei ∂T mit $S^{\lambda-1}\times S^{2-\lambda}\subseteq D^\lambda\times S^{2-\lambda}$ identifiziert wurde. Wir unterscheiden nun die Fälle "$\lambda=0$" und "$\lambda=1$". Da G_1 auf $\mathrm{Ker}\varrho\cap[G_1,G_1]/[\mathrm{Ker}\varrho,G_1]$ trivial operiert, ist die Wahl der Basispunkte der im Folgenden auftretenden Fundamentalgruppen unwesentlich, so daß wir statt $\pi_1(X,*)$ u.s.w. $\pi_1(X)$ schreiben.
"$\lambda=0$": Offenbar ist $T=\emptyset$ und daher $X'\cong X\cup S^2$ mit $X\cap S^2=\emptyset$. Wegen $\pi_1(S^2)\cong1$ ist $Q|S^2$ trivial und damit $\Phi[X,P]=\Phi[X',P']$.
"$\lambda=1$": Sei $T=D_0^2\cup D_1^2$ Tubenumgebung von $\mathrm{Im}\,\varphi$ in X und $i\colon X\subseteq Y$, $i'\colon X'\subseteq Y$ die Inklusionen. Für die EULER-Charakteristiken von X und X' gilt:

$$\chi(X')=\chi(X)+(-1)^\lambda(1+(-1)^n)=\chi(X)-2,\qquad(n=\dim X=2).$$

Wir unterscheiden nun die Fälle

a) $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ liegen in einer Zusammenhangskomponente von X,
b) $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X.

"a)" : In diesem Fall ist offenbar $\#\pi_0(X)=\#\pi_0(X')$. Sei X o.B.d.A. zusammenhängend. Dann ist $g(X')=g(X)+1=:g+1$. Mittels des Satzes von VAN KAMPEN rechnet man leicht nach, daß es positiv orientierte kanonische Basen

$$a_1,\dots,a_g,\ b_1,\dots,b_g\quad\text{von }\pi_1(X),$$
$$a_1',\dots,a_{g+1}',\ b_1',\dots,b_{g+1}'\quad\text{von }\pi_1(X')$$

sowie ein Erzeugendensystem

$$a_1'',\dots,a_{g+1}'',\ b_1'',\dots,b_{g+1}''\quad\text{von }\pi_1(Y)$$

gibt mit

$$i_*(a_i)=a_i'',\ i_*(b_i)=b_i'',\quad i=1,\dots,g,$$
$$i_*'(a_i')=a_i'',\ i_*'(b_i')=b_i'',\quad i=1,\dots,g+1,$$

wobei die definierenden Relationen

$$\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i] = 1,\quad \prod_{i=1}^{g+1}[a_i',b_i'] = 1,\quad \prod_{i=1}^{g}[a_i'',b_i''] = 1 \text{ und } a_{g+1}'' = 1$$

gelten. a_{g+1}' wird hierbei durch ∂D_0^2 repräsentiert. Sei nun $\chi'' : \pi_1(Y) \longrightarrow G_2$ ein klassifizierender Homomorphismus von Q. Dann definieren $\chi = \chi'' \circ i_*$ bzw. $\chi' = \chi'' \circ i_*'$ die Bündel P bzw. P' und eine leichte Rechnung zeigt (wegen $\chi'(a_{g+1}') = 1$), daß $\Phi[X,P] = \Phi[X',P']$ ist.

"b)" : Jetzt ist $\#\pi_0(X') = \#\pi_0(X) - 1$. Sei X' o.B.d.A. zusammenhängend. Ferner seien X_0, X_1 die Zusammenhangskomponenten von X, $g_i := g(X_i), (i=0,1)$, so daß also $g(X') = g_0+g_1$ ist. Weiter sei $i_\mu = i \mid X_\mu$ $(\mu=0,1)$. Mittels des Satzes von VAN KAMPEN findet man wieder positiv orientierte kanonische Basen

$$a_1,\dots,a_{g_0},\ b_1,\dots,b_{g_0} \quad \text{von } \pi_1(X_0),$$
$$c_1,\dots,c_{g_1},\ d_1,\dots,d_{g_1} \quad \text{von } \pi_1(X_1)$$

und

$$a_1',\dots,a_{g_0}',\ c_1',\dots,c_{g_1}',\ b_1',\dots,b_{g_0}',\ d_1',\dots,d_{g_1}' \quad \text{von } \pi_1(X')$$

sowie ein Erzeugendensystem

$$a_1'',\dots,a_{g_0}'',\ c_1'',\dots,c_{g_1}'',\ b_1'',\dots,b_{g_0}'',\ d_1'',\dots,d_{g_1}'' \quad \text{von } \pi_1(Y)$$

mit

$$i_{0*}(a_i) = a_i'',\quad i_{0*}(b_i) = b_i'',\quad (i=1,\dots,g_0),$$
$$i_{1*}(c_i) = c_i'',\quad i_{1*}(d_i) = d_i'',\quad (i=1,\dots,g_1),$$
$$i_*'(a_i') = a_i'',\quad i_*'(b_i') = b_i'',\quad (i=1,\dots,g_0),$$
$$i_*'(c_i') = c_i'',\quad i_*'(d_i') = d_i'',\quad (i=1,\dots,g_1)$$

und den definierenden Relationen

$$\prod_{i=1}^{g_0}[a_i,b_i] = 1,\quad \prod_{i=1}^{g_1}[c_i,d_i] = 1,\quad \prod_{i=1}^{g_0}[a_i',b_i']\cdot\prod_{i=1}^{g_1}[c_i',d_i'] = 1$$

und

$$\prod_{i=1}^{g_0}[a_i'',b_i''] = \prod_{i=1}^{g_1}[c_i'',d_i''] = 1.$$

Hieraus folgt ebenso wie unter "a)", daß

$$\Phi[X,P] = \Phi[X_0,P|X_0] + \Phi[X_1,P|X_1] = \Phi[X',P']$$

ist. Hiermit ist bewiesen, daß Φ wohldefiniert ist. Es ist klar, daß Φ ein Homomorphismus ist.

2. Schritt: Sei $\bar{x} = x\cdot[\mathrm{Ker}\varrho, G_1] \in (\mathrm{Ker}\varrho \cap [G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho, G_1]$. Dann gibt es $y_i, z_i \in G_1$ $(i=1,\dots,g)$ mit $x = \prod_{i=1}^{g}[y_i,z_i]$. Sei $\tilde{y}_i = \varrho(y_i)$, $\tilde{z}_i = \varrho(z_i)$. Offenbar ist dann $\prod_{i=1}^{g}[\tilde{y}_i,\tilde{z}_i] = 1$.

Sei X eine Fläche vom Geschlecht g und $P \longrightarrow X$ ein G_2-Prinzipalbündel mit dem klassifizierenden Homomorphismus

$$\chi : \pi_1(X) \cong \langle a_1,\dots,a_g,\ b_1,\dots,b_g \mid \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i] = 1\rangle \longrightarrow G_2,$$

wobei $\chi(a_i) = \tilde{y}_i$, $\chi(b_i) = \tilde{z}_i$, $(i=1,\dots,g)$ ist. Offenbar ist dann $\Phi[X,P] = \bar{x}$.

3. Schritt: "$\mathrm{Im}(\Omega_2(B_\varrho)) \subseteq \mathrm{Ker}\Phi$": Sei $[X,\tilde{P}] \in \Omega_2(B_{G_1})$ und $\chi : \pi_1(X) \longrightarrow G_1$ ein klassifizierender Homomorphismus von $\tilde{P}$. Dann ist $\Omega_2(B_\varrho)([X,\tilde{P}]) = [X,P]$, wobei $\varrho\circ\chi$ ein klassifizierender Homomorphismus von P ist. Als Urbilder der $\varrho\circ\chi(a_i)$, $\varrho\circ\chi(b_i)$ können wir $A_i = \chi(a_i)$, $B_i = \chi(b_i)$ wählen. Dann ist aber wegen $\prod_i[\chi(a_i),\chi(b_i)] = 1$ offensichtlich $\Phi[X,P] = 0$.

"$\mathrm{Ker}\Phi \subseteq \mathrm{Im}(\Omega_2(B_\varrho))$": Sei $[X,P] \in \Omega_2(B_{G_2})$ mit $\Phi[X,P] = 0$ und sei X o.B.d.A. zusammenhängend mit $g := g(X)$. Seien $A_i, B_i \in G_1$ mit $\varrho(A_i) = \chi(a_i)$, $\varrho(B_i) = \chi(b_i)$, $(i=1,\dots,g)$. Wegen $\prod_{i=1}^{g}[A_i,B_i] \in [\mathrm{Ker}\varrho, G_1]$ gibt es $C_j \in \mathrm{Ker}\varrho$, $D_j \in G_1$, $(j=1,\dots,h)$ mit $\prod_{i=1}^{g}[A_i,B_i]\cdot\prod_{j=1}^{h}[C_j,D_j] = 1$.

Seien X' bzw. X" Flächen vom Geschlecht g+h bzw. h und sei

$$\pi_1(X') = \langle a_i',b_i',c_j',d_j' \mid i=1,\dots,g, j=1,\dots,h;\ \prod_{i=1}^{g}[a_i',b_i']\cdot\prod_{j=1}^{h}[c_j',d_j'] = 1\rangle,$$

$$\pi_1(X'') = \langle c_j'',d_j'' \mid j=1,\dots,h;\ \prod_{j=1}^{h}[c_j'',d_j''] = 1\rangle.$$

Ferner seien die G_2-Prinzipalbündel $P' \longrightarrow X'$ bzw. $P'' \longrightarrow X''$ durch die klassifizierenden Homomorphismen χ' bzw. χ'' mit

$$\chi'(a_i') = \varrho(A_i),\quad \chi'(b_i') = \varrho(B_i),\quad \chi'(c_j') = \varrho(C_j),\quad \chi'(d_j') = \varrho(D_j) \text{ bzw.}$$
$$\chi''(c_j'') = \varrho(C_j),\quad \chi''(d_j'') = \varrho(D_j)$$

definiert. Sei $(X \vee X'', P \vee P'')$ die disjunkte Summe. Nach dem unter "a)" Bewiesenen ist dann

$$[X\vee X'', P\vee P''] = [X,P] + [X'',P''] = [X',P']$$

sowie offensichtlich $[X',P'] \in \mathrm{Im}(\Omega_2(B_\varrho))$, da sich χ' über G_1 faktorisieren läßt. Es braucht somit nur noch $[X'',P''] = 0$ gezeigt zu werden. Da $\varrho(C_j) = 1$ ist, folgt aus dem unter "b)" Gezeigten leicht, daß $[X'',P''] = [X''',P''']$ ist, wobei $g(X''') = g(X'')-1 = h-1$ ist und P''' durch den Homomorphismus $\chi''': \pi_1(X''') = \langle c_j''', d_j''' \mid j=1,\dots,h-1;\ \prod_{j=1}^{h-1}[c_j''',d_j'''] = 1\rangle \longrightarrow G_2$ mit $\chi'''(c_j''') = \varrho(C_j)$, $\chi'''(d_j''') = \varrho(D_j)$ definiert ist. Durch Induktion über h folgt hieraus offenbar

$$[X'',P''] = [S^2, S^2\times G_2] = 0.$$

Hiermit ist Satz III. 7.3 bewiesen.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen Bemerkungen über die Gruppe $(\mathrm{Ker}\varrho \cap [G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho, G_1]$, insbesondere den später betrachteten Spezialfall $G_1 = \Gamma_h$, $G_2 = Sp_h$, $\mathrm{Ker}\varrho = N_h$, ab. Sei G_2 eine endlich präsentierte Gruppe, d.h. $G_2 \cong F/R$, wobei F eine freie Gruppe von endlichem Rang und R ein endlich erzeugter Normalteiler von F ist (d.h. R ist als Normalteiler endlich erzeugt). Dann ist auch $(\mathrm{Ker}\varrho \cap [G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho, G_1]$ endlich erzeugt, genauer gilt sogar:

Ist $G_2 \cong \langle a_1,\dots,a_n \mid R_1(a_i),\dots,R_r(a_i)\rangle$, so wird jene Gruppe von höchstens r Elementen erzeugt.

Beweis: Bekanntlich (vgl. [10]) ist $H_2(B_{G_2},\mathbb{Z}) \cong (R\cap[F,F])/[R,F]$. Hat man eine zweite Darstellung $1 \to \tilde R \to \tilde F \to G_2 \to 1$ von G_2, so läßt sich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "r"'] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \tilde R \arrow[r] & \tilde F \arrow[r] & G_2 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

durch Homomorphismen r,f kommutativ ergänzen. Jedes solche Paar (r,f) induziert einen Isomorphismus

$$f_*: (R\cap[F,F])/[R,F] \longrightarrow (\tilde R\cap[\tilde F,\tilde F])/[\tilde R,\tilde F],$$

und man erhält aus dem kommutativen Diagramm mit den exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & R \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & G_2 \arrow[r] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, equal] & 1 & \\
 & 1 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\varrho \arrow[rr] & & G_1 \arrow[rr] & & G_2 \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \tilde R \arrow[rr] \arrow[ur] & & \tilde F \arrow[rr] \arrow[ur] & & G_2 \arrow[r] \arrow[ur, equal] & 1 &
\end{tikzcd}$$

auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(R\cap[F,F])/[R,F] \arrow[dr, "\Phi_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \\
(\tilde R\cap[\tilde F,\tilde F])/[\tilde R,\tilde F] \arrow[r, "\tilde\Phi_*"'] & (\mathrm{Ker}\varrho\cap[G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho,G_1].
\end{tikzcd}$$

Nun läßt sich $\tilde F$ sicher so wählen, daß $\tilde F \to G_1$ surjektiv ist. Dann ist aber auch $\tilde\Phi_*$ und damit Φ_* surjektiv. Andererseits ist

$$xR_j(a_i)x^{-1} \equiv R_j(a_i) \bmod [R,F] \text{ für alle } x\in F, j=1,\dots,r .$$

Daher wird $R/[R,F]$ und somit erst recht $R\cap[F,F]/[R,F]$ und damit auch $(\mathrm{Ker}\varrho\cap[G_1,G_1])/[\mathrm{Ker}\varrho,G_1]$ von r Elementen erzeugt.

Es ist bekannt, daß

$$Sp_h/[Sp_h,Sp_h] \cong \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_{12} & \text{für } h=1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } h=2 \\ 0 & \text{für } h\geq 3 \end{array}\right\}$$

ist. Weiter hat MUMFORD in [16] gezeigt, daß

$$\Gamma_h / [\Gamma_h,\Gamma_h] \cong \mathbb{Z}_d \quad \text{mit } d\mid 10 \text{ für } h\geq 2$$

ist. Aus diesen beiden Ergebnissen folgt:

$(N_h\cap[\Gamma_h,\Gamma_h])/[N_h,\Gamma_h]$ ist Torsionsgruppe $\Longleftrightarrow$ $N_h/[N_h,\Gamma_h]$ ist Torsionsgruppe.

Beweis: Dies ergibt sich aus den exakten Sequenzen

$$1 \to N_h/(N_h\cap[\Gamma_h,\Gamma_h]) \to \Gamma_h/[\Gamma_h,\Gamma_h] \to Sp_h/[Sp_h,Sp_h] \to 1$$

und

$$1 \to (N_h\cap[\Gamma_h,\Gamma_h])/[N_h,\Gamma_h] \to N_h/[N_h,\Gamma_h] \to N_h/(N_h\cap[\Gamma_h,\Gamma_h]) \to 1 .$$

§ 8. Der Kozykel τ_h und die Funktion φ.

Es sei $X = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \mathring{D}_i^2$ die dreifach gelochte 2-Sphäre und Γ ein lokales Koeffizientensystem über X mit Strukturgruppe $Sp(2h;L)$ und Halm $\mathbb{R}^{2h}$, wobei $L \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterring mit Einselement ist. Wir wollen $\tau(X;\Gamma)$ explizit berechnen. Sei hierzu $\pi_1(X,*) \cong \langle a,b,c \mid abc = 1\rangle$, wobei a,b,c den drei Randkurven ∂D_i^2 entsprechen und sei $\chi: \pi_1(X,*) \to Sp(2h;L)$ mit $\chi(a) = \alpha$, $\chi(b) = \beta$ $(\chi(c) = \gamma = \beta^{-1}\alpha^{-1})$ ein klassifizierender Homomorphismus von Γ. Wir setzen $\tau_h(\alpha,\beta) := -\tau(X,\Gamma)$.

Zerschneidet man X längs einer Jordankurve, die zwei Punkte N,S von ∂D_3^2 verbindet, in zwei Stücke X_-, X_+ derart, daß $\partial D_1^2 \subseteq X_+$, $\partial D_2^2 \subseteq X_-$ ist, so läßt sich auf das Tripel (X,Γ), $(X_-, \Gamma|X_-)$, $(X_+,\Gamma|X_+)$ der Satz I. 3.2 anwenden. Wir wollen jedoch $\tau(X;\Gamma)$ direkt berechnen und betrachten hierzu folgende Simplizialzerlegung von X:

0 - Simplizes: $A_1, A_2,\ B_1, B_2,\ C_1, C_2$,

1 - Simplizes: $a_1, a_2,\ b_1, b_2,\ c_1, c_2,\ d_1, \ldots, d_4,\ e_1, \ldots, e_4,\ f$,

2 - Simplizes: $D_1, D_2,\ E_1, E_2, E_3,\ F_1, F_2, F_3$,

mit $\partial D_1^2 = -a_1 - a_2 \quad \partial D_2^2 = -b_1 - b_2, \quad \partial D_3^2 = -c_1 - c_2,$

$$\omega_X = D_1 + D_2 + \sum_{i=1}^{3} (E_i + F_i)$$

und den Berandungsrelationen:

$$\partial a_1 = -\partial a_2 = A_2 - A_1,\ \partial b_1 = -\partial b_2 = B_2 - B_1,\ \partial c_1 = -\partial c_2 = C_2 - C_1,\ \partial f = A_1 - B_2;$$

$$\partial d_1 = C_1 - B_1,\ \partial d_2 = C_1 - B_2,\ \partial d_3 = C_1 - A_1,\ \partial d_4 = C_1 - A_2,$$

$$\partial e_1 = B_1 - C_2,\ \partial e_2 = B_2 - C_2,\ \partial e_3 = A_1 - C_2,\ \partial e_4 = A_2 - C_2;$$

$$\partial D_1 = c_1 + d_1 + e_1,\quad \partial D_2 = c_2 - d_4 - e_4,$$

$$\partial E_1 = b_1 + d_2 - d_1,\quad \partial E_2 = d_3 - d_2 + f,\ \partial E_3 = d_4 - d_3 + a_1$$

$$\partial F_1 = e_2 - e_1 + b_2,\quad \partial F_2 = e_3 - e_2 - f,\ \partial F_3 = e_4 - e_3 + a_2.$$

Für die dem lokalen Koeffizientensystem Γ zugeordneten Isomorphismen $\Gamma(\sigma)$, $\sigma \in X^{(1)}$ können wir annehmen:

$$\Gamma(a_1) = 1,\ \Gamma(a_2) = \alpha,\ \Gamma(b_1) = 1,\ \Gamma(b_2) = \beta,\ \Gamma(c_1) = 1,\ \Gamma(c_2) = \gamma$$

$$\Gamma(d_i) = 1,\ i=1,\ldots,4,\ \Gamma(f) = 1,\ \Gamma(e_1) = 1,\ \Gamma(e_2) = \beta^{-1},$$

$$\Gamma(e_3) = \beta^{-1},\ \Gamma(e_4) = \gamma.$$

Ein Element $z \in H^1(X,\partial X;\Gamma)$ ist dann durch zwei Elemente $a,b \in \mathbb{R}^{2h}$ mit $(\alpha^{-1}-1)a + (\beta-1)b = 0$ und

$$z(a_i) = z(b_i) = z(c_i) = 0,\ i=1,2,\ z(d_1) = z(d_2) = b,\ z(d_3) = z(d_4) = -a,$$

$$z(e_1) = z(e_2) = -b,\ z(e_3) = z(e_4) = \gamma a,\ z(f) = a+b$$

eindeutig bestimmt. Identifiziert man $H^1(X,\partial X;\Gamma)$ mit

$$V_{\alpha,\beta} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2h} \times \mathbb{R}^{2h} \mid (\alpha^{-1}-1)a + (\beta-1)\,b = 0\},$$

so berechnet sich die Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle : H^1(X,\partial X;\Gamma) \times H^1(X,\partial X;\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu

$$\langle (a_1,b_1),(a_2,b_2)\rangle = \langle a_1 + b_1, (\beta-1)\,b_2\rangle,\ (a_i,b_i) \in V_{\alpha,\beta}.$$

Hierbei ist $\langle\ ,\ \rangle$ auf der rechten Seite die schiefsymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{2h}$. Man beachte die Vorzeichenkonvention von I. §3 !

Wir haben also $\tau_h(\alpha,\beta) = \operatorname{sign}(V_{\alpha,\beta}, \langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta})$, wobei $\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta}$ die durch $\langle (a_1,b_1),(a_2,b_2)\rangle_{\alpha,\beta} = \langle a_1 + b_1, (1-\beta)b_2\rangle$ definierte Bilinearform ist, die sich leicht als symmetrisch erweist. Aus der Additivität der Signatur $\tau(X;\Gamma)$ bei Verklebung längs ganzer Randkomponenten leitet man leicht die Kozykeleigenschaft

(0) $\quad \tau_h(\alpha,\beta) + \tau_h(\alpha\beta,\gamma) = \tau_h(\alpha,\beta\gamma) + \tau_h(\beta,\gamma)$

der Funktion $\tau_h : Sp(2h;L) \times Sp(2h;L) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ab. Man betrachte hierzu über der vierfach gelochten 2-Sphäre X' ein lokales Koeffizientensystem Γ'! Da $\pi_1(X',*) \cong \langle a,b,c,d \mid abcd = 1\rangle$ ist, ist Γ' durch drei Elemente $\chi(a) = \alpha$, $\chi(b) = \beta$ und $\chi(c) = \gamma$, die beliebig wählbar sind, bestimmt. Zerschneidet man X' auf zwei verschiedene Weisen jeweils in zwei dreifach gelochte 2-Sphären, so erhält man durch Vergleich der Signaturen die Kozykeleigenschaft (0). Weiter leitet man aus der Definition von τ_h und den Eigenschaften der Signatur leicht folgende Eigenschaften von τ_h her:

(1) $\quad \alpha\beta\gamma = 1 \Longrightarrow \tau_h(\alpha,\beta) = \tau_h(\beta,\gamma) = \tau_h(\gamma,\alpha)$,

(2) $\quad \tau_h(\alpha,1) = 0$,

(3) $\quad \tau_h(\beta,\alpha) = \tau_h(\alpha,\beta)$,

(4) $\quad \tau_h(\alpha^{-1},\beta^{-1}) = -\tau_h(\alpha,\beta)$ und

(5) $\quad \tau_h(\gamma\alpha\gamma^{-1}, \gamma\beta\gamma^{-1}) = \tau_h(\alpha,\beta)$.

Sei weiter

$$j : Sp(2h_1;L) \times \ldots \times Sp(2h_r;L) \longrightarrow Sp(2h;L),\quad (h = \sum_{i=1}^{r} h_i)$$

der durch

$$j\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & b_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_r & 0 & & b_r \\ c_1 & & 0 & d_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & c_r & 0 & & d_r \end{pmatrix}$$

definierte Monomorphismus (a_i, b_i, c_i, d_i sind h_i-reihige Matrizen). Dann ist leicht zu sehen, daß

(6) $$j^*\tau_h((\alpha_1,\ldots,\alpha_r),(\beta_1,\ldots,\beta_r)) = \tau_h(j(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),j(\beta_1,\ldots,\beta_r)) = \sum_{i=1}^{r} \tau_{h_i}(\alpha_i,\beta_i)$$

gilt. Insbesondere ist τ_h ein stabiler Kozykel, d.h. $[\tau_h]$ liegt im Bild von

$$H^2(\varinjlim Sp(2h';L);\mathbb{Z}) = H^2(Sp(L);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Sp(2h;L);\mathbb{Z}).$$

Es gilt nun

Satz III. 8.1: Sei X eine kompakte orientierte Fläche mit Rand $\partial X \cong \bigvee_{i=1}^{r} S_i^1$ und Γ ein lokales Koeffizientensystem über X mit Strukturgruppe $Sp(2h;L)$,

$$\chi : \pi_1(X,*) \cong \langle a_i, b_i, c_j \mid i=1,\ldots,g, j=1,\ldots,r;\ \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\cdot\prod_{j=1}^{r} c_j\rangle \longrightarrow Sp(2h;L)$$

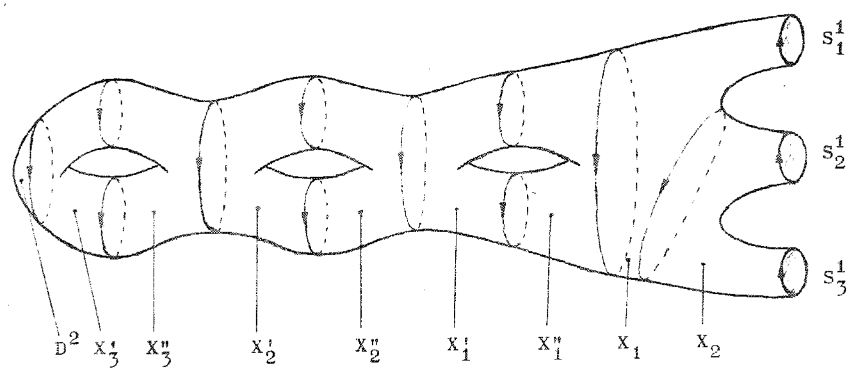
ein klassifizierender Homomorphismus von Γ, $\chi(a_i) = \alpha_i$, $\chi(b_i) = \beta_i$, $\chi(c_j) = \gamma_j$. Sei weiter $\tilde{\omega}_k$ das Produkt der ersten k Faktoren und ω_k der k-te Faktor in $\prod_i [\alpha_i,\beta_i]\cdot\prod_j \gamma_j = 1$, $k = 1,\ldots,4g+r$, $\tilde{\omega}_0 := 1$.

Dann ist
$$\tau(X,\partial X;\Gamma) = -\sum_{k=1}^{4g+r} \tau_h(\tilde{\omega}_{k-1}, \omega_k).$$

Ist $\partial X = \emptyset$, also $r = 0$ und setzt man $[\alpha_i,\beta_i] = \varkappa_i$, so ist

$$\tau(X;\Gamma) = \sum_{i=1}^{g}\tau_h(\varkappa_i,\beta_i) - \sum_{i=2}^{g-1}\tau_h\Big(\prod_{j=1}^{i-1}\varkappa_j,\ \varkappa_i\Big).$$

Beweis: Wir zerlegen X durch $3g+r-1$ Jordankurven, wie in der Skizze für $g = 3$, $r = 3$ dargestellt, in $2g+r-1$ dreifach gelochte 2-Sphären und eine Scheibe:



Sei $\Gamma_i' = \Gamma|X_i'$, $\Gamma_i'' = \Gamma|X_i''$, $\Gamma_j = \Gamma|X_j$, $i=1,\ldots,g$, $j=1,\ldots,r-1$.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß zu $\Gamma_i', \Gamma_i'', \Gamma_j$ klassifizierende Homomorphismen

$$\chi_i' : \pi_1(X_i',*) \cong \langle c_i', d_i'\rangle \longrightarrow Sp(2h;L),\ \chi_i'(c_i') = \gamma_i',\ \chi_i'(d_i') = \delta_i'$$
$$\chi_i'' : \pi_1(X_i'',*) \cong \langle c_i'', d_i''\rangle \longrightarrow Sp(2h;L),\ \chi_i''(c_i'') = \gamma_i'',\ \chi_i''(d_i'') = \delta_i''$$
$$\chi_j : \pi_1(X_j,*) \cong \langle \tilde{c}_j, \tilde{d}_j\rangle \longrightarrow Sp(2h;L),\ \chi_j(\tilde{c}_j) = \tilde{\gamma}_j,\ \chi_j(\tilde{d}_j) = \tilde{\delta}_j$$

gehören mit

$$\gamma_i' = \prod_{k=i+1}^{g}[\alpha_k,\beta_k],\quad \delta_i' = \gamma_i'^{-1}\beta_i \qquad i = 1,\ldots,g$$
$$\gamma_i'' = \Big(\prod_{k=i}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\Big)^{-1},\quad \delta_i'' = \alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}$$
$$\tilde{\gamma}_j = \prod_{k=1}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\cdot\prod_{l=1}^{j-1}\gamma_l,\quad \tilde{\delta}_j = \gamma_j \qquad j = 1,\ldots,r.$$

Falls $r = 0$ ist, hat man in diesen Formeln einfach $r = 1$, $c_r = 1$, $\gamma_r = 1$ zu setzen. Aus der Additivität von $\tau(X;\Gamma)$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
\tau(X;\Gamma) &= \sum_{i=1}^{g}\big(\tau(X_i';\Gamma_i') + \tau(X_i'';\Gamma_i'')\big) + \sum_{j=1}^{r-1}\tau(X_j;\Gamma_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{g}\big(\tau_h(\gamma_i',\delta_i') + \tau_h(\gamma_i'',\delta_i'')\big) - \sum_{j=1}^{r-1}\tau_h(\tilde{\gamma}_j,\tilde{\delta}_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{g}\Big(\tau_h\Big(\prod_{k=i+1}^{g}[\alpha_k,\beta_k],\ \Big(\prod_{k=i+1}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\Big)^{-1}\beta_i\Big) \\
&\quad + \tau_h\Big(\Big(\prod_{k=i}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\Big)^{-1},\ \alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\Big)\Big) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r-1}\tau_h\Big(\prod_{k=1}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\prod_{l=1}^{j-1}\gamma_l,\ \gamma_j\Big).
\end{aligned}$$

Mittels der Eigenschaften (0) - (5) von τ_h sowie $\prod_{k=1}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\cdot\prod_{j=1}^{r}\gamma_j$ läßt sich dies umformen zu:

$$\tau(X;\Gamma) = -\sum_{i=1}^{g}\Big(\tau_h(\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1},\beta_i^{-1}) + \tau_h([\alpha_i,\beta_i],\ \prod_{k=i+1}^{g}[\alpha_k,\beta_k])\Big)$$
$$- \sum_{j=1}^{r}\tau_h(\prod_{k=1}^{g}[\alpha_k,\beta_k]\prod_{l=1}^{j-1}\gamma_l,\ \gamma_j).$$

Nun beweist man aber durch vollständige Induktion über s mittels (

$$\sum_{i=1}^{s}\tau_h(\prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j,\sigma_i) = \sum_{i=1}^{s}\tau_h(\sigma_{i-1},\ \prod_{j=i}^{s}\sigma_j),\ \text{mit } \sigma_0 = 1,\ \sigma_i \in Sp(2h,L)$$

Wegen $\tau_h(\alpha\beta\alpha^{-1},\beta^{-1}) = \tau_h(\beta^{-1},[\alpha,\beta]^{-1}) = -\tau_h([\alpha,\beta],\beta)$ folgt hieraus mit $r = 0$ die zweite Behauptung des Satzes. Zum Beweis der ersten Behauptung des Satzes fassen wir auf ihrer rechten Seite je vier Glieder zusammen. Es bleibt dann zu zeigen:

$$\tau_h(\prod_{k=1}^{i-1}[\alpha_k,\beta_k],\alpha_i) + \tau_h(\prod_{k=1}^{i-1}[\alpha_k,\beta_k]\alpha_i,\beta_i)$$
$$+ \tau_h(\prod_{k=1}^{i-1}[\alpha_k,\beta_k]\alpha_i\beta_i,\alpha_i^{-1}) + \tau_h(\prod_{k=1}^{i-1}[\alpha_k,\beta_k]\cdot\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1},\beta_i^{-1})$$
$$= \tau_h(\prod_{k=1}^{i-1}[\alpha_k,\beta_k],[\alpha_i,\beta_i]) + \tau_h(\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1},\beta_i^{-1}).$$

Dies folgt aber ohne Mühe aus (0) - (5).

Nun ist für $g(X) = g \geq 1$: $\mathbb{Z} \cong H^2(X;\mathbb{Z}) = H^2(B_\pi;\mathbb{Z})$ mit $\pi = \pi_1(X,*)$, da X klassifizierender Raum für $\pi_1(X,*)$ ist. Jede Kohomologieklasse $h \in H^2(X;\mathbb{Z})$ läßt sich durch einen Kozykel $z : \pi\times\pi \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$z(x,1) = z(1,x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \pi_1(X,*)$$

und

$$z(a_i,a_i^{-1}) = z(b_i,b_i^{-1}) = 0,\ i=1,\dots,g$$

repräsentieren, wobei $a_i,b_i,i=1,\dots,g$ ein positiv orientiertes kanonisches Schnittsystem ist. Ist z ein solcher Kozykel und ω_X die Orientierungsklasse von X und ist $\widetilde{w}_j$ bzw. w_j das Produkt der ersten j Faktoren bzw. der j-te Faktor von $\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]$, so ist

$$\langle[z],\omega_X\rangle = \sum_{j=1}^{4g} z(\widetilde{w}_{j-1},w_j),$$

allgemeiner

$$(*) \quad \langle[z],\omega_X\rangle = \sum_{j=1}^{4g} z(\widetilde{w}_{j-1},w_j) - \sum_{i=1}^{g}(z(a_i,a_i^{-1}) + z(b_i,b_i^{-1}))$$

für jeden Kozykel z mit $z(x,1) = z(1,x) = 0$ für $x \in \pi_1(X,*)$.

<u>Beweis:</u> Man zeigt leicht, daß die rechte Seite von (*) nur von [z] abhängt und somit einen Homomorphismus $H^2(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ liefert. Nun ist $H^1(X;\mathbb{Z}) = Hom(\pi,\mathbb{Z})$, und man rechnet leicht nach, daß das $\cup$ - Produkt durch

$$\varphi\cup\psi = [z] \text{ mit } z(x,y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$$
$$\text{für } \varphi,\psi \in Hom(\pi,\mathbb{Z}), x,y \in \pi$$

gegeben wird. Ist a_i^*,b_i^* eine zu a_i,b_i duale Basis von $H^1(X;\mathbb{Z})$, und $a_i^* \cup b_i^* = [z]$, so ist einerseits

$$\langle a_i^* \cup b_i^*,\omega_X\rangle = 1$$

und andererseits

$$\sum_{j=1}^{4g} z(\widetilde{w}_{j-1},w_j) - \sum_{i=1}^{g}(z(a_i,a_i^{-1}) + z(b_i,b_i^{-1})) = 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung. Der Vergleich der obigen Formel mit der Formel von Satz III. 8.1 liefert nun

$$\tau(X;\Gamma) = -\langle\chi^*[\tau_h],\omega_X\rangle,$$

wobei

$$\chi^*: H^2(Sp(2h;L);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\pi_1(X,*);\mathbb{Z})$$

der durch $\chi : \pi_1(X,*) \longrightarrow Sp(2h;L)$ induzierte Homomorphismus ist. Dies gilt auch für $X \cong S^2$, da in diesem Fall $\tau(X;\Gamma) = 0$ und $\pi_1(X,*) \cong 1$ ist. Der Vergleich mit der Signaturformel ergibt daher:

$$\chi^*[\tau_h] = 4\ c_1(\widetilde{\Gamma}),$$

wobei $\widetilde{\Gamma}$ das Γ zugeordnete komplexe Vektorbündel ist, dessen komplexe Struktur J durch "$\langle\cdot\ ,J\cdot\rangle$ ist positiv definit" gegeben ist. Es ist also stets $\tau(X;\Gamma) \equiv 0 \mod 4$.

Wir hatten in II § 6 gesehen, daß $H^2(Sp(2;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) = H^2(SL(2;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{12}$ ist. Daher gibt es eine Funktion $\varphi : SL(2;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $\delta\varphi = \tau_1$, d.h.

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha\beta) + \varphi(\beta) = \tau_1(\alpha,\beta) \quad \text{für alle } \alpha,\beta \in SL(2;\mathbb{Z}).$$

φ ist offenbar durch diese Gleichung bis auf einen Homomorphismus $SL(2;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt. Da aber $Hom(SL(2;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \cong Hom(\mathbb{Z}_{12},\mathbb{Q}) = 0$ ist, ist φ sogar eindeutig bestimmt. Aus den Eigenschaften (1) - (5) ergeben sich ohne Mühe die folgenden Eigenschaften von φ:

(1*) $\varphi(1) = 0$, (2*) $\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha)$, (3*) $\varphi(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = \varphi(\alpha)$.

Wir wollen nun eine explizite Formel für φ mit Hilfe von DEDEKIND-Summen herleiten. Von C. MEYER [12] und H. RADEMACHER [17*] wurde die Funktion $\Psi: SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ untersucht mit

$$\Psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{a+d}{c} - 12\,\mathrm{sign}(c)s(a,c) - 3\,\mathrm{sign}(c(a+d)) & \text{für } c \neq 0, \\ \frac{b}{d} & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

Hierin ist $s(a,c)$ die DEDEKIND-Summe:

$$s(a,c) := \sum_{k \bmod c} \left(\left(\frac{a\cdot k}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{k}{c}\right)\right),$$

wobei $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $((x)) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$ ist.

Ψ hat die folgenden Eigenschaften:

1) $\Psi(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = \Psi(\alpha) \in \mathbb{Z}$ für $\alpha, \gamma \in SL(2;\mathbb{Z})$,

2) $\Psi(-\alpha) = \Psi(\alpha)$,

3) $\Psi(\alpha^{-1}) = -\Psi(\alpha)$ und

4) α ist nicht elliptisch, d.h. $|a+d| \geq 2 \Longrightarrow \Psi(\alpha^k) = k\Psi(\alpha)$.

Ferner erfüllt Ψ die "Kozykelbedingung" (vgl. [12], [13]):

5) $\Psi(\alpha_1)+\Psi(\alpha_2)+\Psi(\alpha_3) = -3[\mathrm{sign}(c_1c_2c_3)+\sum_{i=1}^{3} \mathrm{sign}(c_i(a_i+d_i))]$,

wobei $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$, $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ ist.

Es sei weiter

$$S(\alpha) = a+d \text{ die Spur von } \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma(\alpha) = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix} = \mathrm{sign}\, J(\alpha - \tfrac{1}{2}S(\alpha)) \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\alpha J \alpha^t = J$ für $\alpha \in SL(2;\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma\alpha\gamma^{-1}) &= \mathrm{sign}\, J(\gamma\alpha\gamma^{-1} - \tfrac{1}{2}S(\gamma\alpha\gamma^{-1})) \\ &= \mathrm{sign}\, \gamma^{-t}J(\alpha - \tfrac{1}{2}S(\alpha))\gamma^{-1} \\ &= \sigma(\alpha), \end{aligned}$$

d.h. σ ist eine Klassenfunktion. Es ist $\sigma(\alpha) = \tau_1(\alpha,-1)$.

Zum Beweis lösen wir die Gleichung $(\alpha^{-1}-1)x + (-1-1)y = 0$ nach y auf: $y = \frac{1}{2}(\alpha^{-1}-1)x$. Das ergibt für die quadratische Form $\langle\ ,\ \rangle_{(\alpha,-1)}$

$$\begin{aligned} \langle(x,y),(x',y')\rangle_{(\alpha,-1)} &= -\langle\tfrac{1}{2}(\alpha^{-1}+1)x,(1-\alpha^{-1})x'\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2}(\langle\alpha^{-1}x,x'\rangle - \langle x,\alpha^{-1}x'\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}\langle x,(\alpha^{-1}-\alpha)x'\rangle \end{aligned}$$

Wegen $\alpha e_1 = e_1a+e_2c$, $\alpha e_2 = e_1b+e_2d$, $\langle e_1,e_2\rangle = 1$ erhält man bzgl. der Basis e_1,e_2 für $\langle\ ,\ \rangle_{(\alpha,-1)}$ die Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix}$ und damit die Behauptung.

Wir beweisen nun

<u>Satz III. 8.2:</u> $\varphi(\alpha) = -\frac{1}{3}\Psi(\alpha) + \sigma(\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+\mathrm{sign}\, S(\alpha))$,

$$\tau_1(\alpha_1,\alpha_2) = \varrho(\alpha_1) + \varrho(\alpha_2) + \varrho(\alpha_3) + \mathrm{sign}(c_1c_2c_3),$$

wobei $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$, $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$

und $\varrho(\alpha_i) = \mathrm{sign}(c_iS(\alpha_i)) + \sigma(\alpha_i)\cdot\frac{1}{2}(1+\mathrm{sign}\, S(\alpha_i))$ ist.

<u>Beweis:</u> Die Formel für τ_1 folgt durch Einsetzen der Formel für φ in $\tau_1 = \delta\varphi$ unter Berücksichtigung von 5) und der Eigenschaften von φ und Ψ.

Zum Beweis der ersten Formel setzen wir

$$\Delta(\alpha) := \Psi(\alpha) + 3\varphi(\alpha) - 3\sigma(\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{sign}\, S(\alpha))$$

und zeigen:

a) Δ ist eine Klassenfunktion,

b) α elliptisch oder parabolisch $\Longrightarrow \Delta(\alpha) = 0$,

c) $\Delta(\alpha^{-1}) = -\Delta(\alpha)$,

d) α hyperbolisch $\Longrightarrow \Delta(\alpha\sigma) = \Delta(\alpha)$, wobei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Aus a), b), c) und d) folgt $\Delta = 0$.

Wir beweisen zuerst die letzte Behauptung. Bekanntlich wird $SL(2;\mathbb{Z})$ von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = J\sigma J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Wir definieren die Länge $l(\alpha)$ für $\alpha \in SL(2;\mathbb{Z})$ durch:

$$l(\alpha) := \mathrm{Min}\left\{ \sum_{i=1}^{n}(|\varepsilon_i|+|\eta_i|) \;\middle|\; \alpha = \prod_{i=1}^{n}\tau^{\eta_i}\sigma^{\varepsilon_i},\ n \geq 0,\ \varepsilon_i,\eta_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

und führen den Beweis durch Induktion über $l = l(\alpha)$. Wäre $\Delta \neq 0$, so gäbe es ein α minimaler Länge mit $\Delta(\alpha) \neq 0$. Wegen b) ist α hyperbolisch. Wegen a) ist auch $\Delta(\gamma\alpha\gamma^{-1}) \neq 0$, und wir dürfen, notfalls nach Übergang zu einer Konjugierten $\gamma\alpha\gamma^{-1}$, annehmen, daß $\alpha = \prod_{i=1}^{n}\tau^{\eta_i}\sigma^{\varepsilon_i}$ mit $l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(|\varepsilon_i| + |\eta_i|)$ und $\varepsilon_i,\eta_i \neq 0$ ist. Bei geeigneter Wahl von $\varepsilon = \pm 1$ ist dann $l(\alpha\sigma^{\varepsilon}) < l(\alpha)$, also $\Delta(\alpha\sigma^{\varepsilon}) = 0$. Ist nun $\varepsilon = 1$, so folgt aus d) der Widerspruch

$$0 = \Delta(\alpha\sigma) = \Delta(\alpha) \neq 0.$$

Ist dagegen $\varepsilon = -1$, so erhalten wir mittels a), c) und d) den Widerspruch

$$0 = \Delta(\alpha\sigma^{-1}) = -\Delta(\sigma\alpha^{-1}) = -\Delta(\alpha^{-1}\sigma) = -\Delta(\alpha^{-1}) \neq 0.$$

Man beachte hierzu, daß auch α^{-1} hyperbolisch ist. Somit ist $\Delta = 0$.

"a)" : Da Ψ, φ, σ und S Klassenfunktionen sind, ist auch Δ Klassenfunktion.

"b)" : Bekanntlich ist jedes elliptische oder parabolische Element zu einem der Elemente $\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$, $\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{Z}$ konjugiert. Man hat nun folgende Tabelle, aus der man leicht die Behauptung b) abliest:

$\alpha =$	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$	$\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Psi(\alpha) =$	0	0	-2	2	b
$\varphi(\alpha) =$	0	∓ 1	$-\frac{1}{3} \mp 1$	$\frac{1}{3} \pm 1$	$\frac{\text{sign}\, b}{2}(1 \pm 1) - \frac{b}{3}$
$\sigma(\alpha) =$	0	∓ 2	∓ 2	± 2	$\pm\,\text{sign}\, b$
$S(\alpha) =$	± 2	0	± 1	± 1	± 2

Alle Werte in der Tabelle außer $\varphi(\alpha)$ ergeben sich unmittelbar aus der Definition und $s(a,c) = 0$ für $|c| = 1$. Nun ist $\tau_1(J,J) = \tau_1(J,-1) = -2$, also $2\varphi(J) - \varphi(-1) = -2$; $\tau_1(-1,-1) = 0$, also $2\varphi(-1) = 0$, da $\varphi(1) = \tau_1(1,1) = 0$ ist. Hieraus folgt $\varphi(\pm 1) = 0$, $\varphi(\pm J) = \varphi(J^{\pm 1}) = \pm(-1) = \mp 1$. Weiter ist mit $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $S^3 = -1$ und

$$\tau_1(S,S^2) = \tau_1(S,-1) = \tau_1(S^2,-1) = -2,$$
$$\tau_1(S,S^{-1}) = \tau_1(S^2,S^{-2}) = 0,$$
$$\tau_1(S,S) = \tau_1(S,S^{-4}) = \tau_1(S,S^2) = -2.$$

Hieraus ergibt sich mit $\varphi(\pm 1) = 0$:

$$\varphi(S^{\pm 1}) = \mp \tfrac{4}{3}, \quad \varphi(S^{\pm 2}) = \mp \tfrac{2}{3} .$$

Schließlich ist $\sigma = J^{-1}S$, also

$$\varphi(\sigma) = \varphi(J^{-1}) + \varphi(S) - \tau_1(J^{-1},S) = -\tfrac{1}{3} - \tau_1(J^{-1},S).$$

Nun gelten aber die Formeln:

$$\tau_1(\alpha,\beta) = \text{sign}(-J(\alpha-1)(\beta-1)^{-1}(\alpha^{-1}-\beta)) \text{ für } \alpha,\beta \in Sl(2;\mathbb{Z}) \text{ mit } \det(\beta-1) \neq 0.$$

$$\tau_1(\sigma^k,\sigma^l) = \text{sign}(k\cdot l(k+l)) = \text{sign}\, k + \text{sign}\, l - \text{sign}(k+l),$$

die man ebenso wie die Formel für $\tau_1(\alpha,-1)$ ableitet. Damit ergibt sich weiter:

$$\tau_1(J^{-1},S) = \tau_1(S,-J) = \text{sign}(-J(S-1)(-J-1)^{-1}(S^{-1}+J))$$
$$= \text{sign}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

und hieraus schließlich $\varphi(\sigma) = \frac{2}{3}$. Aus der obigen Formel für $\tau_1(\sigma^k,\sigma^l)$ sowie $\tau_1(\sigma^k,-1) = \text{sign}\, k = \varphi(\sigma^k) - \varphi(-\sigma^k)$ ergibt sich durch vollständige Induktion über $|k|$: $\varphi(\sigma^k) = \text{sign}(k) - \frac{k}{3}$ und $\varphi(-\sigma^k) = -\frac{k}{3}$. Damit sind die Werte $\varphi(\alpha)$ in der obigen Tabelle bestätigt.

"c)" : Wegen $\Psi(\alpha^{-1}) = -\Psi(\alpha)$ und $\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha)$ ist die Behauptung äquivalent mit:

$$\tau_1(\alpha^{-1},-1)(1+S(\alpha^{-1})) = -\tau_1(\alpha,-1)(1+S(\alpha)).$$

Dies ist aber wegen $\tau_1(\alpha^{-1},-1) = -\tau_1(\alpha,-1)$ und $S(\alpha^{-1}) = S(\alpha)$ richtig.

"d)" : Zum Beweis von d) benötigen wir noch eine weitere Formel:

$$\tau_1(\alpha,\sigma) = \left\{ \begin{matrix} \text{sign}(b(b+1)) & \text{falls } a=1 \text{ und } c=0 \\ \text{sign}((a+d-2)(a+d+c-2)) & \text{sonst} \end{matrix} \right\}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

<u>Beweis:</u> Für $a=1$, $c=0$ ist dies schon oben gezeigt worden. Im anderen Fall hat $V_{\alpha,\sigma}$ die Dimension 2 und $\text{Rad}\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\sigma}$ die Dimension 1. Als allgemeine Lösung von $(\alpha^{-1}-1)x + (\sigma-1)y = 0$ findet man:

$$x = (a-1,c)\cdot t,\ y = (b_1,(a+d-2)t) \ , \quad b_1, t \in \mathbb{R}.$$

Setzt man dies in $\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\sigma}$ ein, so erhält man auf $V_{\alpha,\sigma}/\text{Rad}\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\sigma} \cong \mathbb{R}$ die Bilinearform

$$(t,t') \longmapsto t\cdot t'(a+d-2)(a+d+c-2) \ , \ t,t' \in \mathbb{R},$$

aus der die Behauptung folgt.

Sei nun $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hyperbolisch, also $|a+d| \geq 3$. Wegen $\Delta(\sigma) = 0$ ist

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha\sigma)-\Delta(\alpha) &= \Delta(\alpha\sigma)-\Delta(\alpha)-\Delta(\sigma)\\ &= -\Psi((\alpha\sigma)^{-1})-\Psi(\alpha)-\Psi(\sigma)+3\varphi(\alpha\sigma)-3\varphi(\alpha)-3\varphi(\sigma)\\ &\quad -3\sigma(\alpha\sigma)\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}S(\alpha\sigma))+3\sigma(\alpha)\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}S(\alpha))+3\sigma(\sigma)\cdot\\ &\quad\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}S(\sigma))\\ &= 3\cdot\operatorname{sign}(c(a+d))+3\operatorname{sign}(-c(a+d+c))-3\tau_1(\alpha,\sigma)\\ &\quad + 3\sigma\begin{pmatrix}c+d & -a-b\\ -c & a\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(a+d+c)) + 3.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, daß $\sigma(\alpha) = 0$ und $\sigma(\sigma) = 1$ ist, da α hyperbolisch ist. Es ist somit zu zeigen, daß

$$-\operatorname{sign}((a+d-2)(a+d+c-2)) + \operatorname{sign}(c(a+d)) - \operatorname{sign}(c(a+d+c)) + 1 + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}2c & c+d-a\\ c+d-a & -2a-2b\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}(1+\operatorname{sign}(a+d+c)) = 0$$

ist. Wegen $c \neq 0$ und

$$\operatorname{sign}(xy)+\operatorname{sign}(yz)+\operatorname{sign}(zx)+1 = 0 \quad \text{für } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\},\ x+y+z = 0$$

läßt sich dies noch vereinfachen zu

$$-\operatorname{sign}((a+d-2)(a+d+c-2)) + \operatorname{sign}((a+d)(a+d+c)) + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}2c & c+d-a\\ c+d-a & -2a-2b\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\operatorname{sign}(a+d+c)) = 0. \qquad (*)$$

Ferner hat man:

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix}2c & c+d-a\\ c+d-a & -2a-2b\end{pmatrix} = \begin{cases} 2\cdot\operatorname{sign}(c-a-b), & \text{falls } |a+d+c| \leq 1\\ \operatorname{sign}(c-a-b), & \text{falls } |a+d+c| = 2\\ 0, & \text{falls } |a+d+c| \geq 3\end{cases}$$

ist.

(i) $a+d+c = 0$. $(*)$ lautet hier:

$$\operatorname{sign}(a+d-2) = \operatorname{sign}(a+b-c),$$

oder wegen $c = -a-d \neq 0$:

$$\operatorname{sign}((a+d)(a+d-2)) = \operatorname{sign}(c^2-ac-bc) = \operatorname{sign}(a^2+c^2+1) = 1.$$

Wegen $|a+d| \geq 3$ ist dies aber richtig.

(ii) $a+d+c = 1$. Zu zeigen ist jetzt:
$\operatorname{sign}(a+d-2) + \operatorname{sign}(a+d) = 2\operatorname{sign}(a+b-c)$,
oder wegen $|a+d| \geq 3$ und $c = 1-a-d \neq 0$:
$\operatorname{sign}(c(a+d)) = \operatorname{sign}(ac+bc-c^2) = \operatorname{sign}(a-a^2-1-c^2) = -1.$
Wegen $(a+d)(1-a-d) < 0$ ist dies richtig.

(iii) $a+d+c = -1$. $(*)$ geht über in:
$\operatorname{sign}(a+d-2) = \operatorname{sign}(a+d)$,
was wegen $|a+d| \geq 3$ richtig ist.

(iv) $a+d+c = 2$. Hier ist zu zeigen:
$\operatorname{sign}(a+d) = \operatorname{sign}(a+b-c)$,
oder wegen $c = 2-a-d \neq 0$ und $|a+d| \geq 3$:
$-1 = \operatorname{sign}((2-a-d)(a+d)) = \operatorname{sign}(ac+bc-c^2) = \operatorname{sign}(-(a-1)^2-c^2)$.
Dies ist genau für $a = 1$, $c = 0$ falsch. In diesem Fall wäre aber $|a+d| = 2$.

(v) $a+d+c = -2$. $(*)$ hat jetzt die Form:
$\operatorname{sign}(a+d-2) = \operatorname{sign}(a+d)$,
was wegen $|a+d| \geq 3$ erfüllt ist.

(vi) $|a+d+c| \geq 3$. Hier ist zu beweisen:
$\operatorname{sign}((a+d-2)(a+d+c-2)) = \operatorname{sign}((a+d)(a+d+c))$.
Wegen $|a+d| \geq 3$ und $|a+d+c| \geq 3$ ist aber
$\operatorname{sign}(a+d-2) = \operatorname{sign}(a+d)$ und $\operatorname{sign}(a+d+c-2) = \operatorname{sign}(a+d+c)$.

Daraus folgt offensichtlich die Behauptung.

Hiermit ist a), b), c) und d) und damit Satz III. 8.2 bewiesen.

Aus der Signaturformel von Satz III. 8.1 erhält man mit $\tau_1 = \delta\varphi$ das

<u>Korollar III. 8.3 :</u> Sei X eine kompakte orientierte Fläche mit $\partial X = \bigvee_{i=1}^{r} S_i^1$ (disjunkte Vereinigung) und sei $E \longrightarrow X$ ein Torusbündel über X. Ferner seien $\alpha_i \in SL(2;\mathbb{Z})$, $i=1,\dots,r$ klassifizierende Elemente für $E_i := E|S_i^1$, d.h. $\alpha_i = \chi_i(1)$, wobei $\chi_i : \pi_1(S_i^1) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow SL(2;\mathbb{Z})$ klassifizierende Homomorphismen für E_i sind. Dann ist

$$\tau(E,\partial E) = -\sum_{i=1}^{r}\varphi(\alpha_i).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $SL(2;\mathbb{Z})_n = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \bmod n\right\}$ die Kongruenzuntergruppe zur Stufe n. Sei ferner $\xi = (E,X,p,T^2, SL(2;\mathbb{Z})_n)$ ein Torusbündel über X mit dem klassifizierenden Homomorphismus $\chi: \pi_1(X,*) \longrightarrow SL(2;\mathbb{Z})_n$. Dann operiert die Gruppe $H = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ frei auf E wie folgt: Sei $T_x^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine Faser, $h = (k,l) \bmod n$, $(x,y) \in T_x$. Dann sei $h(x,y) = (x+\frac{k}{n}, y+\frac{l}{n})$. Da die Operationen von $\pi_1(X,*)$ und H auf $p^{-1}(*)$ miteinander kommutieren, ist hierdurch eine wohlbestimmte Operation von H auf E definiert, wobei H offensichtlich frei operiert. Ferner ist $h : T_x^2 \longrightarrow T_x^2$ homotop zur Identität, so daß H trivial auf der Garbe $\underline{H^*(T^2;\mathbb{Z})}$ operiert. Hieraus folgt für die H-Signatur nach Satz I. 1.5 ebenso wie im Beweis von Satz I. 2.2:

$$\tau(E,\partial E)(h) = \tau(H^*(E,\partial E;\mathbb{R}),\omega_E)(h) = \tau(E,\partial E)(1) = \tau(E,\partial E)$$

für alle $h \in H$.

Andererseits hat man für freie Aktionen einer endlichen Gruppe H auf einer ungeraddimensionalen Mannigfaltigkeit M die α-Invariante

$$\alpha(M,\cdot) : H \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

1) Ist $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, wobei $M_i, i=1,2$ H-Mannigfaltigkeiten sind, so ist

$$\alpha(M,\cdot) = \alpha(M_1,\cdot) + \alpha(M_2,\cdot).$$

2) Ist $M = \partial N$, wobei N eine H-Mannigfaltigkeit mit freier H-Aktion und M ein H-Unterraum ist, so ist

$$\alpha(M,h) = \operatorname{sign}(N,\partial N)(h).$$

Hieraus und aus dem obigen Ergebnis folgt nun:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha(E_i,h) = -\sum_{i=1}^{r} \varphi(\alpha_i) \quad \text{für } h \in H,\ h \neq 1.$$

Dies legt die folgende Definition nahe:

$$\alpha(E_\beta,1) := -\varphi(\beta),$$

falls $E_\beta \longrightarrow S^1$ ein T^2-Bündel mit klassifizierendem Element $\beta \in SL(2;\mathbb{Z})_n$ ist. Dann besagt die letzte Gleichung: Die Abbildung

$$SL(2;\mathbb{Z})_n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \beta \longmapsto \alpha(E_\beta,h_1) - \alpha(E_\beta,h_2)$$

ist für jedes Paar $h_1,h_2 \in H = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ ein Homomorphismus. Es ergibt sich das Problem, diese Homomorphismen explizit zu berechnen.

<u>§ 9. Beispiele von symplektischen Bündeln über geschlossenen Flächen mit Signatur $\neq 0$</u>

Von **ATIYAH** wurde in [1] ein Flächenbündel $E \longrightarrow X$ angegeben mit Faser F vom Geschlecht 6 und Basis X vom Geschlecht 129 und $\tau(E) = 2^8$. Dieses Beispiel wurde von HIRZEBRUCH in [9]

verallgemeinert. Hier sollen nun für symplektische Bündel $P \longrightarrow X$ mit Faser $\cong Sp(2h;L)$ und $\Gamma = P \times_{Sp(2h;L)} \mathbb{R}^{2h}$ einfachere Beispiele mit $\tau(X;\Gamma) \neq 0$ angegeben werden. Weiter geben wir ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Flächenbündeln $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit $\tau(E) \neq 0$ und $g(F) = h \geq 2$ an.

Unser erstes Beispiel ist ein symplektisches G-Prinzipalbündel $P \longrightarrow X$ mit $G = Sp(2;L)$, $L = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, $g(X) = 2$ und $\tau(X,\Gamma) = 4$. Sei $\pi_1(X,*) = \langle a_1,a_2,b_1,b_2 \mid [a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2] = 1\rangle$ und $\chi : \pi_1(X,*) \longrightarrow G$ gegeben durch $\chi(a_i) = \alpha_i$, $\chi(b_i) = \beta_i$ mit

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -\frac{27}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 33 & 8 \end{pmatrix},\quad \beta_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -33 & 8 \end{pmatrix},\quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ \frac{27}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Man erhält für $\gamma_i := [\alpha_i,\beta_i]$:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

so daß χ tatsächlich ein Homomorphismus ist. Nun gilt in Verallgemeinerung von Eigenschaft (5) für τ_1:

(5') $\tau_1(\gamma\alpha\gamma^{-1},\gamma\beta\gamma^{-1}) = -\tau_1(\alpha,\beta)$
für $\alpha,\beta \in SL(2,\mathbb{R})$, $\gamma \in GL(2,\mathbb{R})$, $\det(\gamma) < 0$.

Dies folgt leicht aus $\gamma J \gamma^t = \det(\gamma)\cdot J$, $\left(J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ für alle $\gamma \in End(\mathbb{R}^2)$. Man hat mit $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\alpha_2 = \gamma\beta_1\gamma^{-1},\quad \beta_2 = \gamma\alpha_1\gamma^{-1}$$

und damit

$$\tau_1([\alpha_2,\beta_2],\beta_2) = -\tau_1([\alpha_1,\beta_1]^{-1},\alpha_1) = \tau_1([\alpha_1,\beta_1],\alpha_1^{-1}) .$$

Mittels (0) - (5) rechnet man leicht nach, daß $\tau_1([\alpha,\beta],\alpha^{-1}) = \tau_1([\alpha,\beta],\beta)$ ist. Damit wird $\tau(X;\Gamma) = \tau_1([\alpha_1,\beta_1],\beta_1) + \tau_1([\alpha_2,\beta_2],\beta_2) = 2\tau_1([\alpha_1,\beta_1],\beta_1) = 2\tau_1(\beta_1,\gamma_1) = 4$. Wesentlich an diesem Beispiel ist, daß $\gamma_1 = [\alpha_1,\beta_1]$ mit einer Matrix γ mit $\det(\gamma) < 0$ vertauschbar und $\tau_1([\alpha_1,\beta_1],\beta_1) \neq 0$ ist.

Als zweites Beispiel geben wir ein symplektisches Bündel $\xi = (P,X,p,G,G)$ mit $G = Sp(4;\mathbb{Z})$, $g(X) = 4$ und $\tau(X;\Gamma) = 8$ an.

Sei $\pi_1(X,*) = \langle a_1,\dots,a_4,\ b_1,\dots,b_4 \mid \prod_{i=1}^{4}[a_i,b_i] = 1\rangle$

und $\chi : \pi_1(X,*) \longrightarrow Sp(4;\mathbb{Z})$

gegeben durch $\chi(a_i) = \alpha_i$, $\chi(b_i) = \beta_i$ mit:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A+E \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & A+E \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},\ \alpha_4 = \begin{pmatrix} A & -E \\ 0 & A+E \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -3A & E \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} E-3A & 3A \\ -3A & E+3A \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} E & 3A \\ 0 & E \end{pmatrix},\ \beta_4 = \begin{pmatrix} E+3A & 3A \\ -3A & E-3A \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Behauptung:</u> χ liefert ein lokales Koeffizientensystem Γ mit $\tau(X,\Gamma) = 8$.

<u>Beweis:</u> Es ist $A^2 + A = E$ und daher die von den α_i, β_i erzeugte Gruppe isomorph zu einer Untergruppe von $SL(2;\mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot\varepsilon$ mit $\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ der Ring der ganzen Zahlen von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist. Man rechnet ferner leicht aus, daß $\prod_{i=1}^{4}[\alpha_i,\beta_i] = 1$ und daher χ ein Homomorphismus ist. Ferner ist $\alpha_i = \sigma_i\alpha_3\sigma_i^{-1}$, $\beta_i = \sigma_i\beta_3\sigma_i^{-1}$, $i=1,\dots,4$ mit
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} E & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = 1$ und $\sigma_4 = \begin{pmatrix} E & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Wir setzen $\gamma_i = [\alpha_i,\beta_i]$, $i=1,\dots,4$.
Sind S,T symmetrische h-reihige Matrizen mit $\det(S) \neq 0, \det(T) \neq 0$, so gilt:

$$\tau_h\left(\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \operatorname{sign}(S^{-1} + T^{-1}).$$

Der Beweis ergibt sich durch Auflösen von

$$\begin{pmatrix} 0 & -S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

nach $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und Einsetzen in die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta}$. Man erhält für die zugeordnete reguläre Bilinearform auf $V_{\alpha,\beta}/\mathrm{Rad}\langle\ ,\ \rangle$ die Matrix $S + ST^{-1}S = S(S^{-1} + T^{-1})S^t$. Hieraus folgt die Behauptung. Wir erhalten nun wegen $\sigma_i \in Sp(4,\mathbb{Z})$:

$$\tau_2([\alpha_i,\beta_i],\beta_i) = \tau_2([\alpha_3,\beta_3],\beta_3) = \tau_2\left(\begin{pmatrix} E & 3E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 3A \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \operatorname{sign}(\tfrac{1}{3}E + \tfrac{1}{3}A^{-1})$$
$$= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\ .$$

Weiter ist $\tau_2(\gamma_1,\gamma_2) = 0$, da aus $(\gamma_1^{-1} - 1)x + (\gamma_2 - 1)y = 0$ schon $(\gamma_1^{-1}-1)x = (\gamma_2-1)y = 0$ folgt. Ferner haben wir wegen $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 1$ auch $\tau_2(\gamma_1\gamma_2,\gamma_3) = \tau_2(\gamma_3,\gamma_4) = 0$, da auch

$$(\gamma_3^{-1}-1)x + (\gamma_4-1)y = 0 \Longrightarrow (\gamma_3^{-1}-1)x = (\gamma_4-1)y = 0$$

gilt. Einsetzen dieser Werte in die Formel von Satz III. 8.1 liefert $\tau(X;\Gamma) = 8$.

Aus Satz III. 7.3 läßt sich mit $G_1 = \Gamma_h$, $G_2 = Sp_h \cong Sp(2h;\mathbb{Z})$ und $\operatorname{Ker}\varrho = N_h$ noch ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Flächenbündels $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit $g(F) \geqslant 2$, $G = \mathrm{Diff}^+(F)$ und $\tau(E) \neq 0$ herleiten:

<u>Satz III. 9.1.</u> Sei $h \geqslant 2$ und $(N_h \cap [\Gamma_h,\Gamma_h])/[N_h,\Gamma_h]$ eine Torsionsgruppe. Dann gibt es ein Flächenbündel $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit $g(F) = h$ und $\tau(E) \neq 0$.

<u>Beweis:</u> Aus dem zweiten Beispiel, welches sich leicht für $h \geqslant 3$ verallgemeinern läßt (man beachte hierzu die Eigenschaft (6) von τ_h in § 8), folgt, daß

$$\tau : \Omega_2(B_{Sp_h}) \longrightarrow \mathbb{Z},\ [X,\Gamma] \longmapsto \tau(X,\Gamma)$$

für $h \geqslant 2$ nicht die Nullabbildung ist. Sei

$$\Phi : \Omega_2(B_{Sp_h}) \longrightarrow (N_h \cap [\Gamma_h,\Gamma_h])/[N_h,\Gamma_h]$$

der im Beweis von Satz III. 7.3 definierte Homomorphismus und $\sigma_* = \Omega_2(B_\sigma)$. Sei $[\tilde{X},\tilde{\Gamma}] \in \Omega_2(B_{Sp_h})$ mit $\tau(\tilde{X},\tilde{\Gamma}) \neq 0$. Ferner sei $k \neq 0$ die Ordnung von $\Phi[\tilde{X},\tilde{\Gamma}]$. Dann gibt es ein $[X,\Gamma] \in \Omega_2(B_{\Gamma_h})$ mit $\sigma_*[X,\Gamma] = k[\tilde{X},\tilde{\Gamma}]$. Wir sahen aber in § 7, daß zu (X,Γ) auch ein Flächenbündel $\xi = (E,X,p,F,G)$ mit $g(F) = h$, $G = \mathrm{Diff}^+(F)$ und $\Gamma \cong \underline{H_1(F;\mathbb{Z})}$ existiert. Für dieses Flächenbündel ist dann offensichtlich $\tau(E) = k\,\tau(\tilde{X},\tilde{\Gamma}) \neq 0$.

<u>Bemerkung:</u> Bekanntlich ist (vgl. [8])

$$\Omega_n(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \sum_{p+q=n} H_p(X;\mathbb{Q}) \otimes \Omega_q,$$

insbesondere also für $n = 2$, $X = B_{Sp_h}$ wegen $\Omega_0 = \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$:

$$\Omega_2(B_{Sp_h}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_2(B_{Sp_h};\mathbb{Q})$$

Andererseits ist nach unveröffentlichen Ergebnissen von BOREL und anderen:

$$H^2(B_{Sp_h};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ für } h \geqslant 2.$$

Ferner ist, wie oben gezeigt

$$\tau\otimes id_{\mathbb{Q}} : \Omega_2(B_{Sp_h})\otimes \mathbb{Q} \cong H_2(B_{Sp_h};\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

für $h \geq 2$ nicht die Nullabbildung. Daher ist $\tau\otimes id_{\mathbb{Q}}$ eine Erzeugende von $H^2(B_{Sp_h};\mathbb{Q})$. Dies zeigt, daß die Bedingung von Satz III. 9.1 auch notwendig ist und ferner, daß sie mit der Nichttrivialität von

$$\sigma^*: H^2(B_{Sp_h};\mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(B_{\Gamma_h};\mathbb{Q})$$

äquivalent ist. Nach einer mündlichen Mitteilung von MUMFORD ist letzteres für $h \geq 3$ richtig.

Literaturverzeichnis

[1] ATIYAH, M.F.: The signature of fibre bundles. Collected Math. Papers in honor of Kodaira, Tokyo Univ. Press, (1969).

[2] ATIYAH, M.F., SINGER, I.M.: The index of elliptic operators III. Annals of Math. 87, (1969) 546-604.

[3] BEHNKE, H., SOMMER, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. veränderte Auflage. Springer, BGH, (1962).

[4] BOREL, A.: Topics in the homology theory of fibre bundles. Lecture Notes, Springer, B-H-N.Y., (1967).

[5] BREDON, G.E.: Sheaf Theory. MacGraw-Hill, (1967).

[6] CHERN, S.S., HIRZEBRUCH, F., SERRE, J.P.: On the index of a fibred manifold. Proc.Am.Math.Soc. 8, (1957) 587-596.

[7] CONNER, P.E.: Seminar on periodic maps. Lecture Notes 46, Springer, BGH, (1967).

[8] CONNER, P.E., FLOYD, E.E.: Differentiable periodic maps. Springer, BGH, (1964).

[9] HIRZEBRUCH, F.: The signature of ramified coverings. Collected Math. Papers in honor of Kodaira, Tokyo Univ. Press, (1969).

[10] HOPF, H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe. Comment. Math. Helv. 14, (1942).

[10*] KODAIRA, K.: A certain type of irregular algebraic surfaces. Journal d'Analyse Mathématique 19,(1967) 207-215.

[11] MAGNUS, W., KARRASS, A., SOLITAR, D.: Combinatorial Group Theory. Interscience Publ., (1966).

[12] MEYER, C.: Über die Bildung von Klasseninvarianten .... Abh. a.d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg, 27, 3/4, (1964) 206-230.

[13] - Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. Journal für r. u. a. Math. 198, 3/4, (1957) 143-203.

[14] MILNOR, J.: Lectures on characteristic classes. Mimeographed Notes by J. Stasheff.

[15] - Morse-theory, 2nd Edition. Princeton Univ. Press, (1962).

[16] MUMFORD, D.: Abelian quotients of the Teichmüller modular group. J. Analyse Math., (1967) 227-244.

[17] NIELSEN, J.: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I,II,III, Acta Math. 50, (1927) 189-358; 53, (1929) 1-76; 58, (1931) 87-167.

[17*] RADEMACHER, H.: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Zeitschr. 63, (1955/56) 445-463.

[18] SPANIER, E.H.: Algebraic Topology. Mac Graw-Hill, (1966).

[19] STEENROD, N.: The Topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press, (1951).

[20] WALL, C.T.C.: Nonadditivity of the signature. Invent. Math. 7, (1969) 269-274.