Jaworowski on "Chironomus" (*Archives Slaves de Biologie*, 1886). He finds that by rupture of the ovarian membrane the ova fall into the body-cavity, and there develop rapidly to form larvæ without fertilisation. "The great abundance of nutritive material replaces the effect of fertilisation."

2. My attention has recently been called by Mr H. B. Brady to the phenomenon of "Dimorphism" exhibited by certain Foraminifera, and which has been hypothetically interpreted as possibly of sexual nature by De la Harpe. An inspection of De la Harpe's figures seems to me to render it clear that this explanation is just (the objection of Munier-Chalmas that sex is unknown in Protozoa notwithstanding). The form named *Nummulites Lamarckii*, as better grown and less modified, with fewer partitions, and a *grand loge central*, seems to me distinctly the anabolic or female; the other, *N. lævigata*, since smaller and more modified, the male.

3. I have finally to record my obligations for much help, both in the discussion and preparation of the present paper, to my friend Mr J. Arthur Thomson.

PRIVATE BUSINESS.

Mr Robert Kidston, F.G.S., and the Rev. H. G. Bonavia Hunt, Mus.B., &c., were balloted for, and declared duly elected Fellows of the Society.

Monday, 19th July 1886.

ROBERT GRAY, Esq., Vice-President, in the Chair.

The following Communications were read:—

1. On the Colours of Thin Plates. By the Right Hon. Lord Rayleigh.

2. Ueber algebraische Knoten. Von Dr Franz Meyer a. o. Professor in Tübingen. (Plates XXXI., XXXII.)

Die ersten Untersuchungen von Herrn Tait über "Knoten," zusammengefasst in der grösseren Arbeit,* *Phil. Trans. of Edin-*

* Auf diese beziehen sich die im Texte gemachten Verweisungen.

burgh, 1877, veranlassten mich, im Jahre darauf, auch *algebraische* Curven vom *topologischen** Gesichtspunct aus zu studiren und zu classificiren (Münchener Dissertation, in Commission bei Mayer und Müller in Berlin).

Zunächst boten sich die rationalen ebenen Curven dar, und unter ihnen wiederum diejenigen vierter und fünfter Ordnung, welche lauter *reelle* Doppelpuncte mit reellen Zweigen besitzen. Nicht bloss die von H. Tait aufgestellten Eintheilungsprincipien der Knoten, sondern auch seine Schemata waren dabei für mich von Nutzen.

Seitdem sind die topologischen Untersuchungen von Herrn Tait (*loc. cit.*, 1884, 1886), Kirkman (*loc. cit.*, 1884, 1886), und Little (*Trans. of the Connecticut Academy*, 1885) fortgesetzt, indem ebene Knoten mit 8, 9, 10 crossings hereingezogen wurden. Von anderer Seite her haben namentlich Simony (*Mathem. Annalen*, von Klein u. Mayer, xix., sowie eine fortlaufende Reihe von Publicationen in den Wiener Sitzungsberichten) und Koller (*Wiener Berichte*, 1885) neue topologische Gesichtspuncte entwickelt. Auch die Arbeit von Weith (Züricher Dissertation, 1876) brachte einige neue Bemerkungen. Endlich hat Brill (*Mathem. Annalen*, von Klein u. Mayer, xviii.) einen topologisch-algebraischen Beitrag zur Verschlingung von Raumcurven geliefert.

Wenn diese Arbeiten auch keinen directen Bezug auf meine damalige Studie hatten, so zeigen sie doch, wie das Interesse für dieses Gebiet der Anschauungs-Mathematik seitdem gewachsen ist. Sie boten daher die Veranlassung, meine damals mehr auf *empirischem* Wege gefundenen Resultate einer sorgfältigen Neubearbeitung zu unterziehen. Diese lieferte einmal einige Berichtigungen und nicht unwesentliche *Ergänzungen* (über welche weiter unten), vor Allem aber eine *strengere, algebraische Begründung.*

Im Folgenden erlaube ich mir, einen kurzen Auszug meiner Untersuchungen vorzulegen. Um aber die ursprüngliche topologische Natur derselben nicht zu sehr zu verwischen, habe ich mich in den *algebraischen* Zugaben auf das Nothwendigste beschränkt.

In § 1 findet man eine gedrängte Zusammenstellung der *topologischen* Sätze und Methoden, die bei Behandlung *algebraischer* Knoten zu Grunde zu legen sind. Es folgt sofort die Anwendung auf die

* Dieser Name ist der grundlegenden Arbeit von Listing (Göttinger Studien, 1847) entnommen.

rationalen Curven vierte (§ 2) und fünfter Ordnung (§ 3). Auf diesen Theil beziehen sich die drei Schemata-Tabellen, wie die Figurentafeln, welche am Schlusse angehäugt sind: nur die letzten 15 Figuren gehören zu § 4.

Diese Betrachtungen werden in § 4 *umgekehrt*, und so eine neue *algebraische* Darstellung der einfachsten Tait, schen Knoten gewonnen.

Der zweite Abschnitt bringt die *algebraischen* Hülfsmittel behufs Erbringung der Beweise für die *Existenz* der vorher aufgestellten Typen. Dies geschieht einmal mit Hülfe von *quadratischen Transformationen* (§ 5). Zweitens aber—und dies ist der Weg, auf dem die *gezeichneten* Curventypen erhalten worden sind—unter Anwendung eines einfachen *Deformationsprocesses*, welcher lehrt, wie man von *zerfallenden* rationalen Curven zu *eigentlichen* in continuirlicher Weise gelangt. Diese Deformationen lassen sich, gerade für den Fall der Curven vierter und fünfter Ordnung, wiederum auf *quadratische Transformationen* (§ 6) stützen, in allgemeinerer und durchsichtigerer Art jedoch auf ein *Projectionsverfahren* (§ 7).

Die Combination beider Methoden liefert in § 8 eine dritte, welche zu den Resultaten des § 4 führt.

Zum Schluss werden gewisse *algebraische Relationen* entwickelt, welche den inneren Grund dafür enthalten, dass bei den rationalen Curven *fünfter* Ordnung eine ziemliche Anzahl von Typen *nicht existiren können.*

I. Algebraisch-topologische Knoten.

§ 1. *Die Schemata algebraischer Knoten.*

Wir recapituliren in Kürze* die Modificationen, welche die von H. Tait im Jahre 1877 über ebene "topologische" Knoten entwickelten Begriffe und Sätze zu erfahren haben, wenn ihre Uebertragung auf *algebraische* Curven stattfinden soll.

Es liege ein ebener, geschlossener Curvenzug C vor, der auch mehrmals *durch's Unendliche* laufen darf, mit den Knotenpuncten A, B, C. . . . . Diese werden beim Durchlaufen von C in einer gewissen *Folge* passirt, etwa:—

ACBACBD . . .

die das "*Stellenschema*" von C heissen soll.

* Ausführlicheres findet man in meiner Dissertation von 1878.

Dabei sollen auch "Schleifen" von der Form AA (die auch durch's *Unendliche* gehen können), und überhaupt die von H. Tait so genannten "*nugatory crossings*," wie BDFEDFEB* *gestattet* sein.

Ist C ganz im *Endlichen* befindlich, so sind nach H. Tait je zwei gleiche Buchstaben, wie A, A durch eine *gerade* Anzahl anderer getrennt. Dann ist es erlaubt, die Bezeichnung so zu wählen, dass an erster Stelle des Schema's A steht, an dritter B, an fünfter C, etc. und man kann das Schema auf das der *geraden* Stellen, "*reduciren.*"

So ist das Schema ACBACB des "trefoil Knot" (*loc. cit.*, pg. 153) reducibel auf CAB.

Es gilt nun der Satz: "*Läuft die Curve C eine ungerade Anzahl von Malen durch's Unendliche, so ist ihr Stellenschema ein reducibles.*"

Man unterwerfe nemlich die Curve C einer Inversion (*i.e.*, Transformation durch reciproke Radien), deren Mittelpunct O nicht auf der Curve liege. Dadurch geht die Curve C, die $(2l+1)$-mal durch's Unendliche gehen möge, über in eine Curve C mit $(2l+1)$ fachem Punct in O, die aber, von letzterem abgesehen, dieselbe Folge der Knotenpuncte aufweist, wie C. Variirt man jetzt die Curve so, dass sich der $(2l+1)$-fache Punct O zerspaltet in $(2l+1)\frac{2l}{2}$ einfache Knotenpuncte, so trägt jeder von den durch O gehenden Zweigen nach der Variation eine *gerade* Anzahl (nemlich $2l$) von Knotenpuncten. *Streicht* man daher im Stellenschema der *endlichen* (variirten) Curve C′ diejenigen Buchstaben, welche den aus O hervorgegangenen Knotenpuncten zugehören, so bleibt es ein *reducibles* (*q.e.d.*).

Läuft dagegen die Curve C eine gerade Anzahl, 2m, von Malen durch's Unendliche, so kann man ihr Stellenschema im Allgemeinen erst dadurch zu einem reduciblen machen, dass man es *ersetzt* durch das der variirten Curve C′.

Für $m=1$ tritt auf diese Weise nur *ein* weiterer Knotenpunct in das ursprüngliche Schema ein (Dieser Fall tritt in § 2 ein).

Wir wenden das Gesagte auf diejenigen algebraischen Curven an, die den geschlossenen topologischen am nächsten stehen, nemlich auf die (aus *einem* reellen Zuge bestehenden) *rationalen*, ebenen

* D. h., wo zwischen zwei gleichen Buchstaben, wie B, B, jeder andere Buchstabe zweimal auftritt.

Curven n^{ter} Ordnung "R_n" mit *lauter* reellen, eigentlichen (d. i. mit reellen, getrennten Tangenten versehenen) Doppelpuncten A, B, C, . . . Jedem einfachen Punct von R_n kommt ein, und nur ein reeller Zahlwerth λ,* sein "*Argument*" zu, das ihn repräsentirt: jedem Doppelpuncte, z.B. A, zwei Argumente $A_1 A_2$. Trägt man diese in das Stellenschema von R_n ein, so geht es über in eine gewisse *Folge von reellen Zahlwerthen.*

Wir sagen, die Curve R_n besitze a unzerstörbare "*Asymptoten*," wenn a die *Minimalzahl* von reellen Schnittpuncten ist, welche R_n im Schnitte mit einer Geraden aufweisen kann.

Dann kann man sie nemlich stets in eine solche zweite Curve R'_n mit gleichem Stellenschema projiciren, so, dass R'_n nur a-mal durch's Unendliche geht.

Ist a ungerade, so ist das Stellenschema von R_n ein reducibles; ist aber a gerade, so substituiren wir das reducible Stellenschema der nach obiger Methode invertirten und variirten Curve.

In beiden Fällen setzen wir das Schema in der *reducirten* Form voraus. Treten K Knotenpuncte im reducirten Schema auf, so kann dasselbe in 4 K Formen (von denen auch verschiedene identisch sein können) gebracht werden. Denn es kann das Zeichen A succ. *jedem* Doppelpuncte beigelegt werden, und von jedem kann man in vier verschiedenen Richtungen längs der Curve fortgehen. Da diese 4 K Formen nur aeusserlich verschieden sein können, so setzen wir fest:

"Zwei R_n sollen zu demselben '*Stellentypus*' gehören, wenn ihre reducirten Schemata demselben Systeme von 4 K Formen angehören."

Die Untersuchungen von H. Tait zeigen, dass die weit überwiegende Mehrzahl von Schemata nicht durch wirkliche ebene Knoten *realisirt* werden können. Entsprechendes gilt für die R_n: hier ist aber der Grund dieser Thatsache unmittelbar ersichtlich.

Denn zwischen den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Argumentenpaaren der Doppel-

* Ein solches "Argument" λ kann auch für jeden Punct eines *topologischen*, endlichen (oder auch unendlichen) Knotens construirt werden. Ist nemlich l die Länge der Curve, s der von einem festen Ausgangspunct längs ihrer gemessene Bogen, so spielt jede eindeutige, einfach-periodische Function von s (mit der Periode l) genau die Rolle von λ. Einen unendlichen Knoten *invertirt* man zuvor in einen endlichen.

puncte einer R_n herrschen gewisse algebraische Relationen: *jede Folge der Argumentenpaare, die diesen Relationen genügt, ist realisirbar und umgekehrt.*

Neben dem Stellenschema hat H. Tait noch ein "Felderschema" aufgestellt. Durch eine geschlossene, endliche, ebene Curve wird die Ebene in eine Anzahl von *Feldern* eingetheilt, deren *Ecken* von den Knotenpuncten gebildet werden. Ueberschreitet man den Contour der Curve in einem einfachen Puncte, so gelangt man von einem *positiven* Feld in ein *negatives* u. umg.

Das "*Felderschema*" giebt an, wieviel Ecken jedem der positiven resp. negativen Felder zukommen. So z. B. für den "trefoil knot":—

$$\left\{\begin{matrix} 3,\ 3 \\ 2,\ 2,\ 2 \end{matrix}\right\}$$

Unter dem "*Felderschema einer R_n*" soll dasjenige der invertirten (aber nicht weiter variirten) Curve verstanden werden. Es tritt im Folgenden nur in zweiter Linie, und als Ergänzung auf. Wir gehen jetzt über zur speciellen Behandlung der einfachsten Fälle $n = 4$ und 5.

§ 2 *Die Typen der R_4.*

Die R_4 hat drei Doppelpuncte (α_i, β_i) $(i = 1, 2, 3)$, Die 6 Argumente α_i, β_i sind ganz willkürlich (*cf.* § 9). Man erhält 5 Typen (*cf.* die Schemata der Tabelle III. und die Figuren, Blatt I.), die sich bereits bei H. Brill * befinden. Jedem Stellenschema gehört nur *ein* Felderschema zu, und umgekehrt. Die reducirten Schemata der beiden Typen (4) und (5) mit zwei Asymptoten sind:—

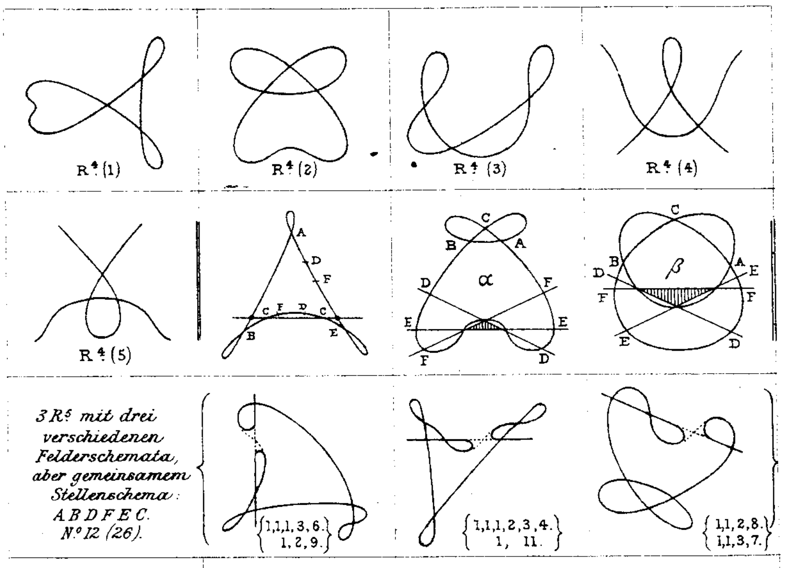
(4) A D B C

(5) C D A B

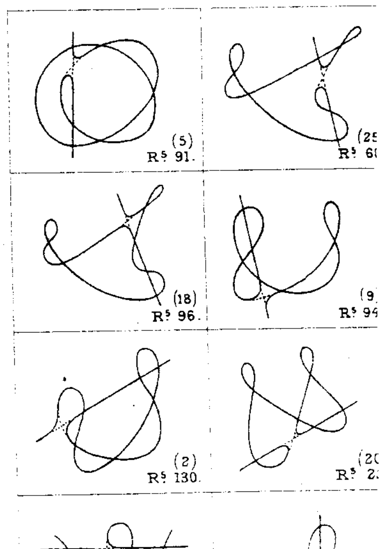
wo in (4) D den, die beiden unendlich fernen Puncte der Curve repräsentirenden, Doppelpunct angiebt, während dies in (5) jeder der 4 Buchstaben leistet. *Umgekehrt* zeigt man leicht, dass alle aus 4 Buchstaben herstellbaren reducirten Schemata (die auch Schleifen aufweisen können), wenn sie R_4 darstellen sollen, nur zu (4) und (5) führen.

Für die Aufstellung der Typen der R_5 (*cf.* § 3) ist es unbedingt erforderlich, sich von der *Existenz* und *Lage der reellen Wendepuncte* bei den R_4 Rechenschaft zu geben.

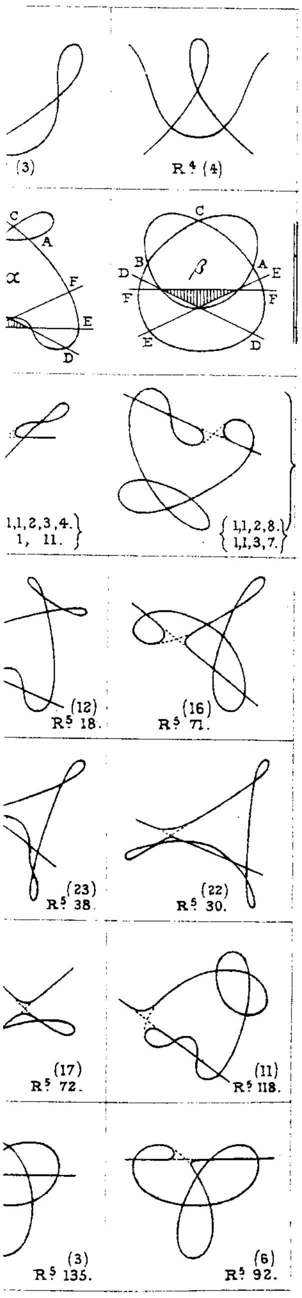
* *Mathem. Annalen*, von Klein & Mayer, XII.



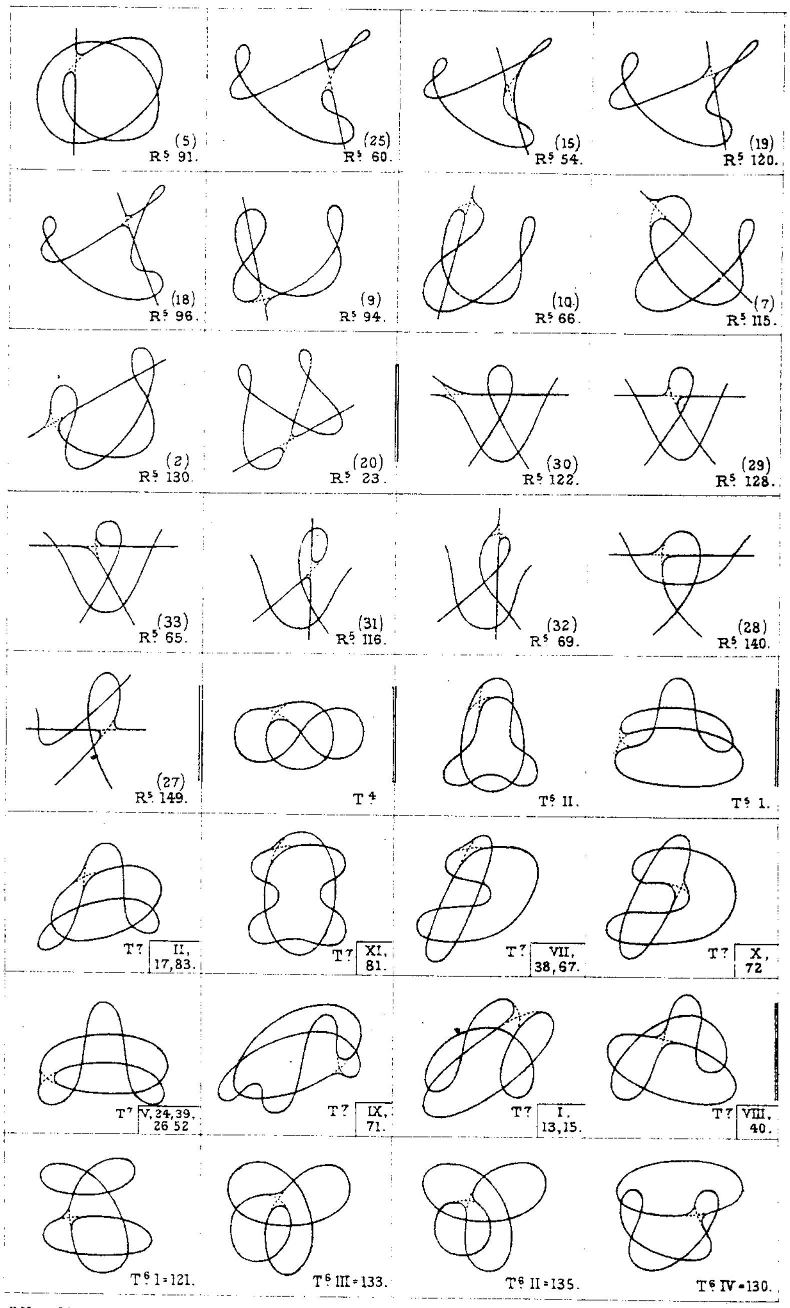
F. Meyer del. F. Huth, Lithr Edinr



F. Meyer del.



F Huth, Lithʳ Edinʳ



F Meyer del.

F Huth, Lithʳ Edinʳ

Nach der von H. Klein * aufgestellten allgemeinen Formel besitzt die R_4 entweder zwei reelle Wendepuncte, oder keinen (und dann eine isolirte Doppeltangente).

Mittelst der im zweiten Abschnitt entwickelten algebraischen Methoden lässt zich zeigen, in welchen Fällen zwei reelle Wendepuncte auftreten können, und auf welchen Zweigen der R_4 sie sich dann befinden.

So z. B. kann der eine der beiden Wendepuncte im Typus (3) auf einer Schleife liegen, oder auf einem der übrigen (passend gewählten) Verbindungszweige.

Dadurch wird es möglich ALLE *Lagen einer Geraden, die vier reelle Schnittpuncte mit der R_4 gemein haben soll, einer R_4 gegenüber zu bestimmen d.h. man kann* GENAU *angeben, welche Zweige der R_4, und wie oft jeder einzelne, von einer Geraden getroffen werden können.*

Nur dadurch gelingt es, *alle* Typen der R_5 mit Hülfe des (unten erörterten) Auflösungsprocesses aus den R_4 herzuleiten.

§ 3. *Die Typen der R_5* (*cf.* die Figuren auf Blatt I., II.).

Eine R_5 hat eine oder drei Asymptoten. In beiden Fällen sind die Stellenschemata der sechs Doppelpuncte von vorn herein reducirte. Man hat daher *alle* reducirten Schemata für sechs Buchstaben aufzustellen, und nachzuweisen, welche von ihnen realisirbar, und welche es nicht sind. Das Letztere wird öfters eintreten, da (*cf.* § 9) zwischen den sechs Argumentenpaaren der Doppelpuncte drei Relationen herrschen.

Die Zahl der Schemata ohne Schleifen (*cf.* Tabelle II.) ist 80, wie auch H. Tait angiebt. Diese ziehen sich aber auf nur 9 wirklich verschiedene zusammen (die in der Tabelle durch einen *Stern* markirt sind). Von diesen sind 4 die Schemata der von H. Tait aufgestellten endlichen Curven, nemlich No. 121, 130, 133, 135. Diese führen zu R_5 mit einer Asymptote, während aus vier weiteren, nemlich No. 122, 128, 140, 149 R_5 mit drei Asymptoten hervorgehen.

Nur ein einziges Schema No. 127 ist nicht realisirbar: dieses ist in der That nicht einmal als endliche Curve, die noch ausserdem einen dreifachen Punct besitzt, zu construiren.

Die Zahl der Schemata mit Schleifen beträgt in erster Aufstel-

* *Mathematische Annalen* von Klein & Mayer, X. pg. 200.

lung $5\,! = 120$ (*cf.* Tabelle I.), da man *einer* Schleife stets die Bezeichnung AA beilegen kann.

Diese ziehen sich auf 44 wirklich verschiedene zusammen. Von diesen sind 25* realisirbar, davon 3 durch R_5 mit drei Asymptoten. In der That sind die letzteren, No. 65, 69, 116 überhaupt nicht realisirbar durch *endliche* Knoten.

Kein realisirbares Schema (von den 33, die es thun) *führt gleichzeitig zu einer R_5 mit* EINER *und* DREI *Asymptoten.*

(Dies gilt nicht mehr für R_n, wo $n > 5$).

Die 33 *Stellentypen der R_5 besitzen auch* 33 *verschiedene Felderschemata* (die in dieser kurzen Mittheilung unterdrückt sind). Umgekehrt aber kommt es häufig vor, dass einem *einzigen* Stellentypus *mehrere* Felderschemata zugehören.

So z. B. kann der Stellentypus No. 12 (26) † durch *drei verschiedene* Felderschemata repräsentirt werden (*cf.* Blatt II.).

§ 4. *Algebraische Darstellung topologischer Knoten.*

Im Vorhergehenden haben wir algebraische Knoten auf topologische (endliche) Knoten zurückgeführt: jetzt soll das Umgekehrte geschehen. Wir können nemlich nach solchen endlichen algebraischen Knoten fragen, welche die gleiche Verschlingung aufweisen, wie ein *gegebener* topologischer (endlicher) Knoten. Diese Aufgabe ist für die (von H. Tait aufgestellten) Knoten mit 3, 4, 5, 6, 7 Knotenpuncten mit Hülfe des weiter unten geschilderten Auflösungsprocesses unschwer lösbar.

Und zwar sind jene Knoten (die mit T_3, T_4, T_5, T_6, T_7 ‡ bezeichnet seien) *sämmtlich* NOCH *als endliche R_6* (die T_3 noch als R_4) *darstellbar*, wobei natürlich die letzteren ausser dem reellen Curvenzug noch eine Anzahl isolirter resp. imaginärer Doppelpuncte besitzen. Die Figuren (auf Blatt II.) zeigen jene Knoten gerade in der Gestalt, wie sie aus einer, in eine R_4 und einen Kegelschnitt R_2 *zerfallenden*

* Diese sind gleichfalls (in Tabelle I.) durch einen *Stern* ausgezeichnet.

† Die 33 Typen der R_5 sind *doppelt* numerirt, einmal nach der Zahl, die sie in den Tabellen I. II. angiebt, sodann in Tabelle III. in natürlichen Reihenfolge, durch in *Klammern* eingeschlossene Zahlen. Von diesen Typen waren No. 23, 29, 60, 65 in meiner Dissertation noch *nicht* enthalten.

‡ Die T_3 (das "trifolium") findet sich unter den R_4 als (2): die T_5, T_6 sind nach der Reihenfolge, in der sie bei H. Tait auftreten, mit römischen Indexziffern versehen: endlich sind die den T_7 beigegebenen Ziffern *genau* die von H. Tait selbst gewählten.

Curve durch eine einfache *Variation* (bei der einer der reellen Schnittpuncte von R_4 und R_2 verschwindet) als R_6 hervorgehen.

Damit ist auch, wie der zweite Abschnitt lehrt, eine Darstellung jener Knoten *durch algebraische Gleichungen* ermöglicht.

II. Algebraische Hülfsmittel.

§ 5. *Beweis für Existenz der Typen der R_4 und R_5 mittelst quadratischer Transformation.*

Es erübrigt noch, für die Richtigkeit der in I aufgestellten algebraischen Knoten, sowie des in den Figuren vorgenommenen Deformationsprocesses die strengen algebraischen Beweise nachzuholen.

Die 5 Typen der R_4 bedürfen, wie schon in § 2 bemerkt, keines weiteren Existenzbeweises (soweit es nur auf ihre Verschlingung ankommt); will man sich jedoch von ihrer Entstehung genauere Rechenschaft geben, so unterwerfe man die Puncte in der Ebene der R_4 einer quadratischen, involutorischen Verwandschaft * T_2, deren drei Fundamentalpuncte in die Doppelpuncte der R_4 fallen. Dann geht die R_4 über in eine R_2 d.h. einen Kegelschnitt, und umgekehrt erhält man vermöge passender T_2 aus einer beliebigen R_2 z. B. einem Kreise, ohne Weiteres alle Typen der R_4.

Gehen wir zu den Typen der R_5 über, so handelt es sich um zweierlei, einmal um die *Existenz* der aufgestellten 33 Typen, andererseits um die *Nichtrealisirbarkeit* der 20 noch verbleibenden Stellenschemata (*cf.* § 3). Beides ist mittelst der Transformationen T_2 ausführbar.

Nimmt man nemlich drei Doppelpuncte der R_5 zu Fundamentalpuncten einer T_2, so transformirt sich die R_5 in eine R_4, von der diese drei Puncte einfache Puncte sind. *Umgekehrt lassen sich für jeden der 33 Typen der R_5 R_4 mit drei auf ihr gelegenen Fundamentalpuncten einer T_2 so wählen dass die R_4 in die verlangte R_5 übergeht.* (§ 6 weist nach, wie dies am einfachsten ausführbar ist.)

Versucht man nunmehr *dasselbe* Verfahren für die 20 restirenden Schemata, so erweist sich jedesmal die Ausführung als *unmöglich.* So z. B. zeigt die Figur der R_4 mit dem Schema: ABE (Blatt II.)

* Diese ist z. B. ausführlich behandelt in Salmon's *Higher plane curves.* Am einfachsten wird sie repräsentirt durch die Verwandtschaft zwischen den beiden Brennpuncten der einem Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitte. Die Ecken des Dreiecks sind die Fundamentalpuncte der Verwandtschaft.

unmittelbar, wie eine T_2 gar nicht existiren kann, die die R_4 in die R_5 mit dem Schema: A B F C E D (No(20)) überführe. Die entsprechende Durchführung für die 19 weiteren Schemata unterbleibe hier: sie stützt sich auf die genaue (in § 3 erörterte) Kenntniss aller möglichen Lagen einer Geraden zu einer R_4.

Die Methode dieses § genügt so zwar völlig dem Zwecke der Auffindung aller Typen der R_5: behufs einer wirklichen Anschauung derselben ist sie indessen viel zu zeitraubend. Wir bedienen uns daher eines andern Processes, der auch sonst in der Lehre von den Gestalten algebraischer Curven eine Rolle spielt, nemlich des *stetigen Ueberganges zerfallender Curven in nicht-zerfallende*, oder des sog. "*Auflösungsprocesses.*"

§ 6. *Der Auflösungsprocess mit Hülfe quadratischer Transformationen.*

Sei wieder das Fundamentaldreieck einer T_2 einer R_4 einbeschrieben. A sei einer der Eckpuncte, a die gegenüberliegende Seite, die noch die reellen Puncte A_1, A_2 aus der R_4 ausschneide.

Jetzt bewege sich A auf der R_4, bis er mit einem Doppelpuncte der R_4 zusammenfällt. In diesem Augenblick zerfällt die (sich mit A bewegende) R_5 in eine R'_4 und die Gerade a.

Verlassen wir umgekehrt den Doppelpunct, indem der Punct A längs eines der vier vom Doppelpuncte auslaufenden Zweige fortschreitet, so vereinigt sich die R'_4 mit der Geraden a zu einer R_5, und zwar "*löst sich,*" jenen vier Richtungen entsprechend, entweder der Punct A_1, oder der Punct A_2, je in einem der beiden * möglichen Sinne, "*auf.*"

Soll sich daher eine gegebene R_4 mit einer Geraden R_1 so zu einer R_5 vereinigen, dass sich ein bestimmter der vier reellen Schnittpuncte von R_4 und R_1 auflöst, so verfahre man, wie folgt:

"Man nehme zwei der weiteren Schnittpuncte von R_4 und R_1 nebst einem Doppelpuncte A der R_4 zu Fundamentalpuncten einer T_2. Vermöge der T_2 geht die R_4 über in eine R'_4 mit Doppelpunct in A. Variirt man nunmehr die T_2 dadurch in eine T'_2, dass an die Stelle des Fundamentalpunctes A ein in passender Richtung auf R'_4 benachbarter Punct A′ tritt, so verwandelt sich die R'_4 vermöge T'_2 in eine R_5, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllt."

* Diese beiden Sinne der Auflösung erhellen unmittelbar aus der Anschauung einer, aus einem Geradenpaar hervorgehenden Hyperbel.

Auf diese Weise haben sich die Figuren für die Typen der R_5 sämmtlich ergeben: in der Nähe des aufgelösten Punctes sind die R_4 und R_1 PUNCTIRT.

Man hätte den Punct A′ noch um eine *endliche* Strecke auf der R'_4 vorwärts bewegen können, ohne dass die successive so entstehenden R_5 ihre Verschlingung geändert hätten. Man ersieht daraus, wie sich der in § 5 geschilderte Uebergang einer R_4 in eine R_5 in mannigfaltigster Weise bewerkstelligen lässt.

Es kann sich freilich ereignen, dass, wie z. B. Figur α auf Blatt I. lehrt, von den drei Fundamentalpuncten der T_2 keiner längs der R_4 in die Lage eines Doppelpunctes rücken kann, ohne dass nicht inzwischen die R_5 ihren Typus gewechselt hätte. Dagegen zeigt Figur β ebenda, wie man diesen Missstand (stets) vermeiden *kann.*

Ganz ebenso lassen sich die Typen der R_4 durch Auflösung aus der R_3 gewinnen: dies erweist sich zugleich thatsächlich als der einfachste Weg, um über die in § 2 besprochenen Lagen der beiden reellen Wendepuncte Aufschluss zu erhalten.

§ 7. *Der Auflösungsprocess mit Hülfe der Projection.*

Der im vorigen § vorgenommene Process der Auflösung einer R_n und R_1 hört auf, anwendbar zu sein, sobald $n > 4$. Wir theilen daher noch ein anderes Verfahren mit, das allgemein für ebene (auch räumliche) R_n brauchbar ist.

Man kann nemlich eine *gegebene* R_n auf die mannigfaltigste Art als Projection einer rationalen Raumcurve C_{n+1} ($n+1^{ter}$ Ordnung) von einem ihrer Puncte P aus, erscheinen lassen.

In der That, wenn die R_n dargestellt ist durch die Gleichungen,

$$(1)\ x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda),$$

wo die x Punctcoordinaten, und die f ganze Functionen n^{ten} Grades von λ bedeuten, so liefert, wenn $\phi(\lambda)$ eine ebensolche Function vom Grade $n+1$ ist, das Gleichungssystem (bei beliebigem, reellem a):

$$(2)\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = f_1(\lambda)(\lambda - a) : f_2(\lambda)(\lambda - a), : f_3(\lambda)(\lambda - a) : \phi(\lambda),$$

immer eine C_{n+1} von der gewünschten Art. Dabei ist P der Raumpunct $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$. Ist t die Tangente in P, und P′ ein, zu P benachbarter, *nicht* auf C_{n+1} gelegener Punct, und projicirt man jetzt die C_{n+1} von P′ aus auf die Ebene $x_4 = o$ *d.i.* die Ebene der R_n, so gelangt man zu einer R_{n+1}, die *durch Auflösuug des Punctes* $\lambda = a$ aus der R_n und derjenigen Geraden hervorgeht, welche von der durch t und P′ gelegten Ebene aus der Ebene der R_n ausgeschnitten wird.

Dies ist geometrisch evident. Daraus folgt umgekehrt die Regel: "Soll eine R_n und eine R_1 durch Auflösung eines ihrer reellen Schnittpuncte A continuirlich in eine R_{n+1} übergehen, so fasse man die R_n auf als Projection einer räumlichen C_{n+1}, von einem ihrer Puncte, P, aus. Deren Tangente t in P geht nothwendig durch A. Ist dann Q ein beliebiger Punct auf R_1, und schreitet man von P aus in einer der beiden Richtungen PQ um ein beliebig kleines Stück zu einem Puncte P′, so ist die Projection der C_{n+1} von P′ aus eine R_{n+1} der gewünschten Art, die zudem noch die Gerade R_1 im Puncte Q berührt."

Wir unterlassen die genauere algebraische Verfolgung dieses Projectionsprocesses, und gehen sogleich über zu der in § 4 benützten Vereinigung einer R_n und R_2 zu einer R_{n+2}, wiederum mittelst Auflösung einer ihrer reellen Schnittpuncte.

§ 8. *Die Deformation einer $R_n + R_2$ in eine R_{n+2}.*

A sei der reelle Schnittpunct beider Curven, in dem die Auflösung vor sich gehen soll. Wir greifen noch drei weitere reelle * Schnittpuncte der R_n und R_2 heraus, A_1 A_2 A_3. Dann geht vermöge einer quadratischen Transformation T_2 mit den Fundamentalpuncten A_1 A_2, A_3, die R_n über in eine R_{2n-3} mit $(n-2)$ fachen Puncten in A_1, A_2, A_3; die R_2 dagegen in eine durch den Punct A laufende R_1.

Löst man jetzt nach der Regel des § 7 den Punct A auf, so dass aus dem Aggregat R_{2n-3} & R_1 eine R_{2n-2} hervorgeht, so besitzt diese gleichfalls drei $(n-2)$ fache Puncte in der Nähe der früheren, wir wollen sagen, in A'_1, A'_2, A'_3.

Dann verwandelt sich vermöge einer neuen Transformation T'_2 mit den Fundamentalpuncten in A'_1, A'_2, A'_3 die R_{2n-2} in eine eigentliche R_{n+2}, die, wie verlangt wurde, der $R_n + R_2$ benachbart ist.

Wir bemerken am Schlusse dieser Betrachtungen nur noch kurz, dass man ganz allgemein algebraische Processe angeben kann, die das Aggregat aus einer R_n und R_m continuirlich in eine $R_{+\,n}$ überführen, sobald nur einer der Schnittpuncte von R und R_n reell ist.†

* Von diesen könnten auch zwei conjugirt imaginär sein.

† Dabei zeigt sich vor Allem—und dies gilt natürlich im Besondern von

Um aber den Character dieser Mittheilung als einer topologisch algebraischen zu wahren, sei es nur noch gestattet, einen Blick auf die in § 3 erwähnten Relationen zwischen den Doppelpuncts-argumenten einer R_5 zu werfen.

§ 9. *Die Relationen zwischen den Doppelpunctsargumenten einer R_5.*

Wir bezeichnen die zwölf Argumente mit $(a_i, \beta_i), (a'_i, \beta'_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Wie in § 6, führen wir die R_5 vermöge einer Transformation T_2, mit den Fundamentalpuncten in den drei ersteren Doppelpuncten, über in eine R_4, die darstellbar sein muss durch die Gleichungen :

$$(1)\ \rho y_i = (\lambda - a_{k'})(\lambda - \beta_{k'})(\lambda - a_{i}')(\lambda - \beta_i') = f_i(\lambda) (i, k, l = 1, 2, 3),$$

wo ρ ein Proportionalitätsfactor, und die y_i lineare homogene Functionen der Coordinaten sind.

Die drei (a_i, β_i) repraesentiren jetzt irgend drei Punctepaare der R_4 *die allein der Forderung zu genügen haben, auf den Seiten irgend eines, der* R_4 *einbeschriebenen Dreiecks zu liegen.* Die Anzahl der gesuchten Relationen ist demnach drei.

Seien a_i, a_k, a, die Argumente der Eckpuncte des Dreiecks, so hängen a_k, a_l, ab von der quadratischen Gleichung :

$$(2)\ Gi = \frac{1}{(\lambda - a_i)(\lambda - \beta_i)(a_i - \beta_i)} \left| f(\lambda), f(a_i) f(\beta_i) \right| = o (i = 1, 2, 3),$$

wo die beiden verticalen Striche eine dreireihige Determinante bedeuten. Ist R_{ik} die Resultante von G_i und G_k, so sind die oben aufgestellten Bedingungen erfüllt durch die drei Gleichungen :

$$(3)\ R_{ik} = 0\ (i,k = 1, 2, 3).$$

Es ist aber leicht nachweisbar, dass die R_{ik} noch einen, der Frage fremden Factor enthalten. So ergiebt sich :

$$(4)\ R_{ik} = \Delta R'_{ik},$$

wo $\Delta = 0$ gesetzt, bedeutet, dass die R_4 einen dreifachen Punct erhält. Unsere gesuchten drei Relationen lauten daher in der einfachsten Form :—

$$(5)\ R'_{ik} = 0.$$

den im Texte benützten Deformationen der $R_3 + R_1$, und $R_4 + R_1$—dass man deutlich übersieht welche von den beim Uebergang von den zerfallenden Curve in die eigentliche *neu auftretenden Singularitäten reell* sind.

I. *Tafel* der* 120 *Stellenschemata für* 6 *Doppelpuncte, incl. Schleifen.*

	(1)	BCDEF
	(2)	BCDFE
(2)=	(3)	BCEDF
	(4)	BCEFD
	(5)	BCFDE
	(6)	BCFED
(2)=	(7)	BDCEF
	(8)	BDCFE
(4)=	(9)	BDECF
(4)=	(10)	BDEFC
	(11)	BDFCE
	(12)*	BDFEC
(5)=	(13)	BECDF
(11)=	(14)	BECFD
(6)=	(15)	BEDCF
(12)=	(16)	BEDFC
	(17)	BEFCD
	(18)*	BEFDC
	(19)	BFCDE
	(20)	BFCED
(20)=	(21)	BFDCE
	(22)	BFDEC
	(23)*	BFECD
	(24)*	BFEDC
(2)=	(25)	CBDEF
	(26)	CBDFE
(8)=	(27)	CBEDF
(12)=	(28)	CBEFD
	(29)*	CBFDE
	(30)*	CBFED
(4)=	(31)	CDBEF
(12)=	(32)	CDBFE
(4)=	(33)	CDEBF
(2)=	(34)	CDEFB
(11)=	(35)	CDFBE
(8)=	(36)	CDFEB
(11)=	(37)	CEBDF
	(38)*	CEBFD
(12)=	(39)	CEDBF
(26)=	(40)	CEDFB
	(41)*	CEFBD
(29)=	(42)	CEFDB
(41)=	(43)	CFBDE
	(44)*	CFBED
(38)=	(45)	CFDBE
(12)=	(46)	CFDEB
(44)=	(47)	CFEBD
(30)=	(48)	CFEDB
(5)=	(49)	DBCEF
(29)=	(50)	DBCFE
(11)=	(51)	DBECF
(11)=	(52)	DBEFC
	(53)	DBFCE
	(54)*	DBFEC
(6)=	(55)	DCBEF
(30)=	(56)	DCBFE
(12)=	(57)	DCEBF
(8)=	(58)	DCEFB
(54)=	(59)	DCFBE
	(60)*	DCFEB
(17)=	(61)	DEBCF
(41)=	(62)	DEBFC
(18)=	(63)	DECBF
(29)=	(64)	DECFB
	(65)*	DEFBC
	(66)*	DEFCB
	(67)*	DFBCE
	(68)	DFBEC
	(69)*	DFCBE
(54)=	(70)	DFCEB
	(71)*	DFEBC
	(72)*	DFECB
(19)=	(73)	EBCDF
(41)=	(74)	EBCFD
(20)=	(75)	EBDCF
(38)=	(76)	EBDFC
(67)=	(77)	EBFCD
(69)=	(78)	EBFDC
(20)=	(79)	ECBDF
(44)=	(80)	ECBFD
(22)=	(81)	ECDBF
(12)=	(82)	ECDFB
(68)=	(83)	ECFBD
(54)=	(84)	ECFDB
(23)=	(85)	EDBCF
(44)=	(86)	EDBFC
(24)=	(87)	EDCBF
(30)=	(88)	EDCFB
(71)=	(89)	EDFBC
(72)=	(90)	EDFCB
	(91)*	EFBCD
	(92)*	EFBDC
(92)=	(93)	EFCBD
	(94)*	EFCDB
	(95)	EFDBC
	(96)*	EFDCB
	(97)	FBCDE
	(98)	FBCED
	(99)	FBDCE
(20)=	(100)	FBDEC
(71)=	(101)	FBECD
(72)=	(102)	FBEDC
(98)=	(103)	FCBDE
	(104)	FCBED
(20)=	(105)	FCDBE
(6)=	(106)	FCDEB
(44)=	(107)	FCEBD
(30)=	(108)	FCEDB
(71)=	(109)	FDBCE
(44)=	(110)	FDBEC
(72)=	(111)	FDCBE
(30)=	(112)	FDCEB
(23)=	(113)	FDEBC
(24)=	(114)	FDECB
	(115)*	FEBCD
	(116)*	FEBDC
(116)=	(117)	FECBD
	(118)*	FECDB
(96)=	(119)	FEDBC
	(120)*	FEDCB

* Aus Raumersparniss ist bei diesen 120 Schemata überall der *erste* Buchstabe A *fortgelassen.* Im Uebrigen vgl. § 3.

Im Texte siud die 200 Schemata in Tafel I. und II. *ohne* Klammern citirt, zum Unterschiede von der Klammerbezeichnung der Tafel III.

II. *Tafel der* 80 *Stellensc*
excl.

	(121)*	CABFDE
	(122)*	CAEFBD
(121)=	(123)	CAEFDB
(122)=	(124)	CAFBDE
(122)=	(125)	CDAFBE
(121)=	(126)	CDBFAE
	(127)	CDEFAB
	(128)*	CDFABE
(122)=	(129)	CDFBAE
	(130)*	CEAFBD
(122)=	(131)	CEAFDB
(122)=	(132)	CEBFAD
	(133)*	CEFABD
(128)=	(134)	CEFADB
	(135)*	CEFBAD
(128)=	(136)	CFABDE
(122)=	(137)	CFBADE
(135)=	(138)	CFEABD
(122)=	(139)	CFEADB
	(140)*	CFEBAD
(122)=	(141)	DABFCE
(128)=	(142)	DAEFBC
(122)=	(143)	DAEFCB
(135)=	(144)	DAFBCE
(140)=	(145)	DAFCBE
(133)=	(146)	DEAFBC
(135)=	(147)	DEAFCB
(128)=	(148)	DEBFAC
	(149)*	DEFABC
(133)=	(150)	DEFACB
(133)=	(151)	DEFBAC
(128)=	(152)	DEFCAB
(133)=	(153)	DFABCE
(135)=	(154)	DFACBE
(130)=	(155)	DFBACE
(122)=	(156)	DFBCAE
(133)=	(157)	DFEABC
(130)=	(158)	DFEACB
(135)=	(159)	DFEBAC
(122)=	(160)	DFECAB

II. *Tafel der* 80 *Stellenschemata für* 6 *Doppelpuncte, excl. Schleifen.*

(121)*	CABFDE	(128)=(161)	EABFCD
(122)*	CAEFBD	(122)=(162)	EABFDC
(121)=(123)	CAEFDB	(133)=(163)	EAFBCD
(122)=(124)	CAFBDE	(130)=(164)	EAFBDC
(122)=(125)	CDAFBE	(135)=(165)	EAFCBD
(121)=(126)	CDBFAE	(122)=(166)	EAFCDB
(127)	CDEFAB	(135)=(167)	EDAFBC
(128)*	CDFABE	(140)=(168)	EDAFCB
(122)=(129)	CDFBAE	(122)=(169)	EDBFAC
(130)*	CEAFBD	(133)=(170)	EDFABC
(122)=(131)	CEAFDB	(135)=(171)	EDFACB
(122)=(132)	CEBFAD	(130)=(172)	EDFBAC
(133)*	CEFABD	(122)=(173)	EDFCAB
(128)=(134)	CEFADB	(149)=(174)	EFABCD
(135)*	CEFBAD	(133)=(175)	EFABDC
(128)=(136)	CFABDE	(133)=(176)	EFACBD
(122)=(137)	CFBADE	(128)=(177)	EFACDB
(135)=(138)	CFEABD	(133)=(178)	EFBACD
(122)=(139)	CFEADB	(135)=(179)	EFBADC
(140)*	CFEBAD	(128)=(180)	EFBCAD
(122)=(141)	DABFCE	(127)=(181)	FABCDE
(128)=(142)	DAEFBC	(128)=(182)	FAEBCD
(122)=(143)	DAEFCB	(122)=(183)	FAEBDC
(135)=(144)	DAFBCE	(122)=(184)	FAECBD
(140)=(145)	DAFCBE	(121)=(185)	FAECDB
(133)=(146)	DEAFBC	(128)=(186)	FDABCE
(135)=(147)	DEAFCB	(122)=(187)	FDACBE
(128)=(148)	DEBFAC	(122)=(188)	FDBACE
(149)*	DEFABC	(121)=(189)	FDBCAE
(133)=(150)	DEFACB	(128)=(190)	FDEABC
(133)=(151)	DEFBAC	(122)=(191)	FDEACB
(128)=(152)	DEFCAB	(122)=(192)	FDEBAC
(133)=(153)	DFABCE	(121)=(193)	FDECAB
(135)=(154)	DFACBE	(133)=(194)	FEABCD
(130)=(155)	DFBACE	(135)=(195)	FEABDC
(122)=(156)	DFBCAE	(130)=(196)	FEACBD
(133)=(157)	DFEABC	(122)=(197)	FEACDB
(130)=(158)	DFEACB	(135)=(198)	FEBACD
(135)=(159)	DFEBAC	(140)=(199)	FEBADC
(122)=(160)	DFECAB	(122)=(200)	FEBCAD

III. *Haupt-Tafel für die Stellenschemata der* R_4 *und* R_5.

I. 5 Schemata der R_4:

(*a*) mit keiner Asymptote.

AABBCC (1)
ACBACB (2)
AABCCB (3)

(*b*) mit zwei Asymptoten.

AABCBC (4)
ABCACB (5)

II. 33 Schemata* der R_5.

(*a*) 26 mit einer Asymptote.

Keine Schleife.

133. CEFABD (1)
130. CEAFBD (2)
135. CEFBAD (3)
121. CABFDE (4)

Eine Schleife.

91. AEFBCD (5)
92. AEFBDC (6)
115. AFEBCD (7)
67. ADFBCE (8)
94. AEFCDB (9)
66. ADEFCB (10)
118. AFECDB (11)

Vier Schleifen.

12. ABDFEC (26)

Zwei Schleifen.

18. ABEFDC (12)
29. ACBFDE (13)
41. ACEFBD (14)
54. ADBFEC (15)
71. ADFEBC (16)
72. ADFECB (17)
96. AEFDCB (18)
120. AFEDCB (19)

Drei Schleifen.

23. ABFECD (20)
24. ABFEDC (21)
30. ACBFED (22)
38. ACEBFD (23)
44. ACFBED (24)
60. ADCFEB (25)

(*b*) 7 mit drei Asymptoten.

Keine Schleife.

149. DEFABC (27)
140. CFEBAD (28)
128. CDFABE (29)
122. CAEFBD (30)

Eine Schleife.

116. AFECBD (31)
69. ADFCBE (32)
65. ADEFBC (33)

* Diese sind sämmtlich in "reducirter" Form angegeben (*cf.* § 1), wie auch diejenigen in Tafel I. & II.

3. On Amagat
B

4. On the Electrical
F

5. Electro-Chemical
By Thomas A
Works, near S

Electro-Chemical R
present communicati
electrical reactions at
The interchanges
as platinum and c
noticed by the aut
the metals of varie
same fusing salt.
A number of re
A salt was mai
faction in a large
platinum wires
piece, were imm
were connected
and constants.
no current wa

portion of
powerful