Als Manuskript gedruckt im
Mathematischen Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen am 4. September 1972

# Eine Invariante für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
Bonn

vorgelegt von
Matthias Kreck

Bonn 1972

Überarbeitete Fassung 1973

Angefertigt mit Genehmigung der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. Hirzebruch

Korreferent: Prof. Dr. Arlt

Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

In den letzten Jahren fanden die Signatursätze von Hirzebruch, Atiyah und Singer zahlreiche Anwendungen in der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und neuerdings in elementarer Zahlentheorie [vgl. 10]. Dabei kommen interessante Ergebnisse häufig in den Fällen vor,, in denen die oben angesprochenen Sätze nicht anwendbar sind, z.B. für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der"Fehler" führt zur Definition neuer Invarianten und deren Berechnung häufig zu interessanten zahlentheoretischen Formeln. Ich erinnere z.B. an die $\alpha$ - Invariante und die Berechnung auf Linsenräumen, wo die verallgemeinerten Dedekindsummen in der Topologie auftauchen [ siehe z.B. 8].

In ähnlicher Weise ist die Invariante definiert, mit der wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen wollen. Eine Mannigfaltigkeit M mit einer Trivialisierung $\alpha$ des stabilen Tangentialbündels ist Rand einer Mannigfaltigkeit N. Dividiere das stabile Tangentialbündel STN von N durch die Trivialisierung $\alpha$, dann ist die $\delta$ - Invariante gegeben durch

$$\delta(M,\alpha) = \text{sign } N - L(p(STN_{\alpha}))[N/M] \text{ .}$$

$\delta(M,\alpha)$ hängt nur von der Homotopieklasse der Trivialisierung ab.

Im 1. Paragraphen zeigen wir, daß die obige Definition sinnvoll ist, stellen einige Eigenschaften zusammen, z.B.

daß bezüglich einer fest gewählten Trivialisierung $\delta$ eine affine Abbildung ist (Satz 2) und untersuchen, wie sich $\delta$ bei Überlagerungen verhält (Satz 3). Satz 3 stellt gleichzeitig eine Verbindung her zur $\alpha$ - Invariante, die im folgenden sehr nützlich sein wird.

Im 2. Paragraphen definieren wir eine Bordismusgruppe $\Omega^*_{\pi 0}$, indem wir zwei stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten M und M' äquivalent setzen, wenn es eine "große" Mannigfaltigkeit gibt, deren Rand M und -M' ist, auf die sich die Trivialisierung fortsetzen läßt und deren Signatur 0 ist. $\delta$ ist ein Homomorphismus $\Omega^*_{\pi 0} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Man sieht leicht, daß $\delta$ einen Isomorphismus $\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ induziert. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist Satz 7, in dem wir $\Omega^*_{\pi 0}$ beschreiben und $\delta$ auf Erzeugenden berechnen.

Anschließend stellen wir eine Verbindumg zwischen $\delta$ und der Adams - Invariante e her (Satz 8). Außerdem rechnen wir $\delta$ noch in einigen konkreten Fällen aus.

Im 3. Paragraphen beschäftigen wir uns mit Torusbündeln über Tori. Die Untersuchung der Torusbündel war der eigentliche Anlaß für die vorliegende Arbeit. Um dies klarzumachen und die Arbeit in einen Zusammen-Sie tauchen nämlich bei Untersuchungen von Hirzebruch über Hilbertsche Modulflächen als Umgebungsränder von Singularitäten auf, und in einer anderen Form wurde die $\delta$ - Invariante für solche Umgebungsränder von Singularitäten zunächst von Hirzebruch definiert [vgl. 9, 18].



Für Torusbündel geben wir eine Klasse von Trivialisierungen an, so daß die $\delta$ - Invariante unabhängig von diesen Trivialisierungen wohlbestimmt ist. Die Berechnung der $\delta$ - Invariante für Torusbündel erweist sich als sehr schwierig. Im Fall von Torusbündeln mit Faser $T^2$ über $S^1$ ist die $\delta$ - Invariante mit einer Invariante $\varphi$ identisch, die W. Meyer in seiner Dissertation [12] durch bekannte zahlentheoretische Funktionen vollständig ausgedrückt hat.

Im allgemeinen Fall haben wir die $\delta$ - Invariante durch eine andere Invariante, nämlich die $\alpha$ - Invariante vollständig ausgedrückt (Satz 11). Die Berechnung der $\alpha$ - Invarianten führt wieder im Fall von Torusbündeln mit Faser $T^2$ über $S^1$ zu bekannten zahlentheoretischen Funktionen (Satz 14). Im höherdimensionalen Fall haben wir die $\delta$ - Invariante nur in einigen einfachen Fällen ausrechnen können. (Satz 17).

Für die Anregung, den Problemkreis der vorliegenden Arbeit zu untersuchen, und die Bereitschaft zu häufigen und fruchtbaren Diskussionen möchte ich Herrn Prof. Hirzebruch herzlich danken. Die Möglichkeit, mit Institutsangehörigen über meine Probleme zu diskutieren, hat mir sehr genützt. Besonders dankbar bin ich U. Karras, W. Meyer, E. Ossa und D. Zagier.

## § 1

### Definitionen und Eigenschaften

Die Objekte, die wir im folgenden untersuchen, sind stabil parallelisierbare Mannigfaltigkeiten $M^n$ mit fester Trivialisierung $\alpha$ des stabilen Tangentialbündels. Wir schreiben dafür : $(M^n, \alpha)$ ist eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit. Das stabile Tangentialbündel von $M^n$ bezeichnen wir mit $STM^n$. Zwei stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten $(M^n, \alpha)$ und $(M'^n, \alpha')$ heißen isomorph, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : M^n \longrightarrow M'^n$ gibt, so daß $\alpha$ die unter $\varphi$ zurückgeholte Trivialisierung $\alpha'$ ist, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} STM^n & \xrightarrow{d\varphi} & STM'^n \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ M^n \times \mathbb{R}^\infty & \xrightarrow{\varphi \times Id} & M'^n \times \mathbb{R}^\infty \end{array}$$

ist kommutativ. Alle auftretenden Mannigfaltigkeiten sollen kompakt, orientiert und $C^\infty$- differenzierbar sein.

Sei $(M^n, \alpha)$ eine geschlossene stabil parallelisierte n - dim Mannigfaltigkeit. Wir wollen $(M^n, \alpha)$ eine rationale Zahl zuordnen. Sämtliche charakteristische Zahlen von $M^n$ sind Null und deshalb gibt es eine (n+1) - dim. berandete Mannigfaltigkeit $N^{n+1}$ mit $\partial N^{n+1} = M^n$.*) Das Tangentialbündel TM von M ist ein Unterbündel von $TN|_M$. Wähle einen orientierungserhaltenden Bündelisomorphismus $TM \oplus 1 \longrightarrow TN|_M$, der eingeschränkt auf TM die Inklusion ist ( 1 ist das eindimensionale reelle Produktbündel). Dieser Bündelisomorphismus

*) Orientiere N so, daß mit einem aus N herauszeigenden Normalenvektor $e_0$ und einer Orientierung $(e_1, .., e_n)$ von $T_x N$ $(e_0, .., e_n)$ Orientierung von $T_x N$ ist. Diese Definition stimmt mit der homologischen überein.

ist bis auf Homotopie wohldefiniert. Es ist nun $\alpha$ eine Trivialisierung vom $STN|_M$ und wir können das Vektorraumbündel $STN/_\alpha$ über $N/_M$ betrachten, das wir erhalten, wenn wir die Fasern über M mittels der Trivialisierung $\alpha$ zu einer Faser identifizieren [3, Seite 18ff]. Die Isomorphieklasse dieses Vektorraumbündels ist unabhängig von der Homotopieklasse von Trivialisierungen [3] und hängt somit nicht von der obigen Identifizierung von $TN|_M$ mit $TM \oplus 1$ ab.

<u>Definition</u>: $\delta(M^n, \alpha) = \operatorname{sign} N^{n+1} - L(STN^{n+1}/_\alpha)[N^{n+1}/_{M^n}]$.

Dabei ist L die L-Klasse, definiert in [7, Seite 12] als multiplikative Sequenz mit $\frac{\sqrt{z}}{\tanh\sqrt{z}}$ als charakteristische Potenzreihe und $p_i$ die i-te Pontrjagin - Klasse $p_i(STN/_\alpha)$, $[N/_M]$ das Bild der Fundamentalklasse von (N , M) unter der Abbildung $(N, M) \longrightarrow (N/_M, *)$ und sign N die Signatur von N.

$\delta(M,\alpha)$ ist eine rationale Zahl. Da Signatur und $L(STN/_\alpha)[N/_M]$ für $n \neq 3 \bmod 4$ verschwinden, ist $\delta$ in diesen Dimensionen Null. Interessant ist also nur der Fall $n = 4k - 1$.

Wir müssen uns nun überlegen, daß die obige Definition sinnvoll ist, d.h. unabhängig von der Auswahl von N. Sei also N' eine berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial N' = M$. Wir betrachten die kanonische Abbildung $\pi : N \underset{M}{\cup} (-N') \longrightarrow N/_M \cup (-N')/_M$.

Es gilt : $ST(N \underset{M}{\cup} (-N')) = \pi^*((STN/_\alpha \cup ST(-N')/_\alpha)$ und

$\pi_* : H_{n+1}(N/_M \cup N'/_M) \longrightarrow H_{n+1}(N \underset{M}{\cup} (-N'))$ ist gegeben durch

$$(x\cdot[N/_M],\ y\,[-N'/_M]) \longmapsto (x+y)\left[N \underset{M}{\cup} (-N')\right]$$ (Wenn wir

keine Koeffizientengruppe angeben, meinen wir immer mit



Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Da die L - Klasse eines Vektorraumbündels natürlich ist, folgt

$$L(ST(N \underset{M}{\cup} (-N')))\left[N \underset{M}{\cup} (-N')\right] = L(STN/_\alpha)[N/_M] + L(ST(-N')/_\alpha)[(-N')/_M].$$

Andererseits gilt : $\operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N') = \operatorname{sign} N - \operatorname{sign} N'$. Nach dem Hirzebruchschen Signatursatz [7, Seite 86] gilt :

$$L(ST(N \cup -N'))\left[N \underset{M}{\cup} -N'\right] = \operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N').$$

Also : $\operatorname{sign} N - L(STN/_\alpha)[N/_M] + \operatorname{sign}(-N') - L(ST(-N')/_\alpha)[-N'/_M]$

$= \operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N') - L(ST(N \underset{M}{\cup} -N'))\left[N \underset{M}{\cup} -N'\right] = 0$ ,

speziell für N = N' gilt :

$$\operatorname{sign} N' - L(STN'/_\alpha)[N'/_M] + \operatorname{sign}(-N') - L(ST(-N')/_\alpha)[-N'/_M] = 0$$

und somit ist gezeigt, daß die Definition von $\delta$ unabhängig von der Auswahl von N ist.

<u>Bemerkung</u> : Wenn auch N stabil parallelisierbar ist und es eine Trivialisierung $\beta$ auf N gibt, deren Einschränkung auf M $\alpha$ ist - wir schreiben dann $\partial(N,\beta) = (M,\alpha)$ - , dann ist das Vektorraumbündel $STN/_\alpha$ trivial und es gilt somit

$$\delta(M,\alpha) = \operatorname{sign} N .$$

Sei $\Omega_\pi^n$ die Bordismusgruppe aller stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten. Diese Gruppe ist bekanntlich endlich. Zu jeder stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(M^n,\alpha)$ gibt es deshalb $a \in \mathbb{N}$ und eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(N^{n+1}, \beta)$ , so daß $\partial(N^{n+1}, \beta) = a(M^n, \alpha)$.

Dann gilt :

$$\delta(M,\alpha) = \frac{1}{a} \operatorname{sign} N .$$

Wir halten hier zwei Eigenschaften von $\delta$ fest, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben.

1.) $\delta(M,\alpha) + \delta(M',\alpha') = \delta((M,\alpha) + (M',\alpha'))$

$\delta(-M,\alpha) = -\delta(M,\alpha)$

2.) Seien $\alpha$ und $\alpha'$ homotope Trivialisierungen von $STM$.

$\delta(M,\alpha) = \delta(M,\alpha')$ .

Sei nun $M^{4k-1}$ eine stabil parallelisierbare Mannigfaltigkeit und $\beta$ eine fest gewählte Trivialisierung von $STM^{4k-1}$. Alle anderen Trivialisierungen $\alpha$ von $STM^{4k-1}$ sind bezüglich $\beta$ durch Abbildungen $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ gegeben. Die $f$ zugeordnete Trivialisierung ist $\alpha = f\cdot\beta : STM^{4k-1} \longrightarrow M^{4k-1}\times\mathbb{R}^{\infty}$. Wenn klar ist, bezüglich welcher festen Trivialisierung $\beta$ diese Zuordnung gelten soll, schreiben wir für $(M,\alpha)$ auch $(M,f)$.

Eine stetige Abbildung $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ definiert ein stabiles Vektorraumbündel $E_f$ über $SM$, der Suspension von $M$. $f$ ist charakteristische Abbildung dieses Bündels.

<u>Satz 1</u> : Sei $\beta$ festgewählte Trivialisierung von $STM^{4k-1}$, $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ stetig und $\alpha$ die zugehörige Trivialisierung. Dann gilt :

$$\delta(M,\alpha) = \delta(M,\beta) - L(E_f)\left[SM^{4k-1}\right] .$$

Dabei ist $\left[SM^{4k-1}\right]$ Erzeugendes von $H_{4k}(SM) = H_{4k}(CM,M)$ (wobei $CM$ der Kegel über $M$ ist), das unter $\partial : H_{4k}(CM,M) \longrightarrow H_{4k-1}(M)$ auf die Fundamentalklasse von $M$ abgebildet wird.

<u>Beweis</u> : Sei $N^{4k}$ berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial N^{4k} = M^{4k-1}$. Betrachte das Bündel $STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^{\infty}$ .

Sei $\pi : N \underset{M}{\cup} CM \longrightarrow N/_M \cup SM$ die Projektion. Es gilt :



$\pi^*((STN/_{\alpha}) \cup E_f) = STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^{\infty}$ und

$\pi_*(x\left[N/_M\right], y\left[S(-M)\right]) = (x+y)\left[N \cup C(-M)\right]$ .

Daraus folgt:

$$L(STN/_{\alpha})\left[N/_M\right] + L(E_f)\left[S(-M)\right] =$$

$$L(STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^{\infty})\left[N \cup C(-M)\right] =$$

$$L(STN/_{\beta})\left[N/_M\right] .$$

Somit ist $\delta(M,\alpha) = \operatorname{sign} N - L(STN/_{\alpha})\left[N/_M\right]$

$= \operatorname{sign} N - L(STN/_{\beta})\left[N/_M\right] + L(E_f)\left[S(-M)\right]$

$= \delta(M,\beta) - L(E_f)\left[SM\right]$ .

Die Menge der stetigen Abbildungen $M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ ist eine Gruppe. Sei wieder $\beta$ eine feste Trivialisierung von $STM$. Dann ist $\delta$, aufgefaßt als Abbildung von der Menge aller stetigen Abbildungen $M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ nach $\mathbb{Q}$, eine affine Abbildung. Genauer gilt.

<u>Satz 2</u> : $\delta(M,f) + \delta(M,f') = \delta(M,ff') + \delta(M,\beta)$ .

<u>Beweis</u> : Bekanntlich gilt :

$E_{ff'} \cong E_f \oplus E_{f'}$ .

Da auf einer Suspension sämtliche Cup Produkte Null sind, gilt

$$L_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k \, p_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] \quad [7, \text{Seite } 12]$$

und

$$p_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] = p_k(E_f)\left[SM\right] + p_k(E_{f'})\left[SM\right] .$$

Also $L_k(E_f \oplus E_{f'})[SM] = L_k(E_f)[SM] + L_k(E_{f'})[SM]$ .

Nach Satz 1 gilt :

$$\begin{aligned}\delta(M,f) + \delta(M,f') &= 2\delta(M,\beta) - L(E_f)[SM] - L(E_{f'})[SM] \\ &= 2\delta(M,\beta) - L(E_{ff'})[SM] \\ &= \delta(M,ff') + \delta(M,\beta) .\end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich unsere Invariante bei endlichen Überlagerungen verhält. Sei $M^{4k-1}$ eine Mannigfaltigkeit, auf der die endliche Gruppe G differenzierbar[1] frei operiert. Sei $M/G$ stabil parallelisierbar. Das Tangentialbündel von M ist das unter der Projektion $\pi : M \longrightarrow M/G$ zurückgeholte Tangentialbündel von $M/G$. Eine Trivialisierung $\beta$ von $ST(M/G)$ kann mittels $\pi$ zu einer Trivialisierung von STM zurückgeholt werden, die wir mit $\pi^*\beta$ bezeichnen wollen. Es stellt sich die Frage, in welcher Beziehung $\delta(M/G, \beta)$ und $\delta(M,\pi^*\beta)$ stehen.

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die von Atiyah und Singer [5] eingeführte $\alpha$- Invariante. Wir wiederholen hier die Definition, die eine starke Analogie zur Definition der $\delta$ - Invariante aufweist.

Operiere wieder die endliche Gruppe G differenzierbar[1] und frei auf $M^{2k-1}$. Es gibt $a \in \mathbb{N}$ und eine G - Mannigfaltigkeit N, die aM äquivariant berandet. Sei $g \in G$ , $g \neq 1$ .

$$\alpha(g,M) = \frac{1}{a}(\mathrm{sign}(g,N) - L(g,N))$$

---
1) orientierungserhaltend



Dabei ist sign(g,N) die äquivariante Signatur und L(g,N) die Zahl, die im äquivarianten Signatursatz von Atiyah und Singer [5] auftritt. Diese Definition variiert von der Originaldefinition durch das Vorzeichen. Daß die Invariante wohldefiniert ist, folgt mit ähnlichen Additivitätsargumenten wie bei der $\delta$ - Invariante aus dem äquivarianten Signatursatz. Wie bei der $\delta$ - Invariante kann man a und N immer so wählen, daß L(g,N) = 0 ist. Denn aus der Bordismustheorie wissen wir, daß ein geeignetes Vielfaches a von M eine freie G - Mannigfaltigkeit N äquivariant berandet. Dann gilt :

$$\alpha(g,M) = \frac{1}{a}\mathrm{sign}(g,N) .$$

Wir können nun die $\delta$ - Invariante für Überlagerungen durch die $\delta$ - Invariante des Orbitraums und die $\alpha$ - Invariante ausdrücken.

<u>Satz 3</u> : $\delta(M,\pi^*\beta) = |G|\cdot\delta(M/G,\beta) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}} \alpha(g,M)$ .

<u>Beweis</u> : Wähle eine freie G-Mannigfaltigkeit N, die aM äquivariant berandet. Sei $\pi : N/\partial N \longrightarrow (N/G)/\partial(N/G)$ die Projektion. Es gilt :

$$\pi^*(ST(N/G)/\beta) = STN/\pi^*(\beta) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\pi_{4k} : H_{4k}(N/\partial N) &\longrightarrow H_{4k}((N/G)/\partial(N/G)) \\ [N/\partial N] &\longmapsto |G|\,[(N/G)/\partial(N/G)]\end{aligned}$$

Daraus folgt :

$$L(STN/\pi^*\beta)\left[N/\partial N\right] = |G|\,L(ST(N/G)/\beta)\left[(N/G)/\partial(N/G)\right]$$

Ferner ist bekanntlich :

$$\mathrm{sign}(N/G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{sign}(g,N) \ .$$

Zusammenfassend ergibt sich:

$$\delta(M,\pi^*\beta) = \frac{1}{a}(\mathrm{sign}\ N - L(STN/\pi^*\beta)\left[N/\partial N\right]) =$$

$$\frac{1}{a}(\ |G|\,\mathrm{sign}(N/G) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}\mathrm{sign}(g,N) - |G|\,L(ST(N/G)/\beta)\left[(N/G)/\partial(N/G)\right]) =$$

$$|G|\cdot\delta(M/G,\beta) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}\alpha(g,M) \ .$$

q.e.d.



## § 2

### Berechnung der $\delta$ - Invariante

Wir wollen die $\delta$ - Invariante zunächst einmal in Spezialfällen berechnen. Als naheliegende Beispiele betrachten wir Standardsphären. Wir fassen $S^{4k-1}$ als Rand vom $D^{4k}$ auf, das wir mit der kanonischen Orientierung versehen. Wir wählen die Einschränkung der Standardtrivialisierung von $D^{4k}$ auf $S^{4k-1}$ als feste Trivialisierung von $ST(S^{4k-1})$. Sei wie wie üblich $\left[S^{4k-1}, SL(\infty,\mathbb{R})\right]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von $S^{4k-1}$ in $SL(\infty,\mathbb{R})$. $\left[S^{4k-1}, SL(\infty,\mathbb{R})\right] = \left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$. Da die Signatur von $D^{4k}$ Null ist, ist $\delta$ ein Homomorphismus von $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$ auf $\mathbb{Q}$. Bekanntlich ist $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right] \cong \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4k}) \cong \mathbb{Z}$, so daß wir $\delta$ berechnet haben, wenn wir für ein Erzeugendes h von $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$ $\delta(S^{4k-1},h)$ ausgerechnet haben.

Nach Satz 1 ist

$$\delta(S^{4k-1},h) = -L(E_h)\left[S^{4k}\right]$$

$$= -\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}\,B_k p_k(E_h)\left[S^{4k}\right] ,$$

wobei $B_k$ die Bernoullizahlen sind. $B_1=\frac{1}{6}$ , $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$; $B_4=\frac{1}{30}\cdots$ Betrachte die Komplexifizierung $c : \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4k}) \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$. Bekanntlich ist $c(E_h)$ in den Dimensionen k gerade ein Erzeugendes von $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$ und in den Dimensionen k ungerade zweimal ein Erzeugendes von $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$. Der Cherncharakter ist ein Isomorphismus ch : $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k}) \longrightarrow H^{4k}(S^{4k})$. Sei $h \in [S^{4k-1}, SO\infty]$ ein Erzeugendes und $ch(cE_h)[S^{4k}] = a_k$, wobei $a_k = 1$ für k gerade und $a_k = 2$ für k ungerade. Mit $ch(cE_h) = -\frac{1}{(2k-1)!} c_{2k}(cE_h) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} p_k(E_h)$ folgt.

Satz 4 :

$$\delta(S^{4k-1},h) = (-1)^k a_k \frac{2^{2k-1}(2^{2k-1}-1)}{k} B_k$$

Die Werte für k = 1,...,5 sind :

$$-\frac{2}{3},\ \frac{14}{15},\ -\frac{992}{63},\ \frac{2032}{15},\ -\frac{261632}{33}\ .$$

Um eine topologische Invariante vollständig zu berechnen, ist ein naheliegender Weg, auf den Objekten eine geeignete Äquivalenzrelation zu definieren, mit der die Invariante verträglich ist, und die Invariante auf Erzeugenden zu berechnen. In unserem Fall bietet sich als Äquivalenzrelation die Bordismusrelation für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten an. Die Bordismusgruppe aller n - dimensionalen parallelisierten geschlossenen Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir mit $\Omega^n_\pi$ . Nun ist aber klar, daß $\delta$ nicht mit dieser Bordismusrelation verträglich ist. Denn für eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(M,\alpha)$ , die Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ ist, gilt $\delta(M,\alpha)$ = sign N und die ist i.a. nicht Null. Damit bekommen wir nur, daß $\bar{\delta} = \delta \bmod 1$ ein Homomorphismus von $\Omega^n_\pi \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist.

Es liegt nun nahe, die Bordismusrelation für stabil



parallelisierte Mannigfaltigkeiten in der folgenden Weise zu verfeinern.

Definition : Seien $(M^n_1, \alpha_1)$ und $(M^n_2, \alpha_2)$ stabil parallelisierte n- dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wir setzen

$$(M_1,\alpha_1) \sim (M_2,\alpha_2)$$

genau dann, wenn es eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ gibt, so daß

$$\partial(N,\beta) = (M_1,\alpha_1) + (-M_2,\alpha_2) \quad \text{und}$$

sign N = 0 ist.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, die Transitivität folgt aus der Novikov - Additivität der Signatur. Die Menge der Äquivalenzklassen nach dieser Relation bildet eine Gruppe, die wir mit $\Omega^n_{\pi 0}$ bezeichnen wollen. Für $n \not\equiv 3 \bmod 4$ ist $\Omega^n_{\pi 0} = \Omega^n_\pi$ , da die Signatur von n+1 - dimensionalen Mannigfaltigkeiten in diesen Fällen Null ist.

Offensichtlich ist $\delta$ mit der obigen Äquivalenzrelation verträglich. $\delta$ ist also ein Homomorphismus von $\Omega^n_{\pi 0}$ in die rationalen Zahlen.

Erste Informationen über die Gruppe $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ bekommen wir, indem wir den Kern der Projektion $\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \longrightarrow \Omega^{4k-1}_\pi$ bestimmen. Der Kern besteht aus allen stabil parallelisierten geschlossenen Mannigfaltigkeiten $(M,\alpha)$, die Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ sind. Zwei Elemente des Kerns $(M,\alpha)$ bzw. $(M',\alpha')$ , die Rand von $(N,\beta)$ bzw. $(N',\beta')$

sind, sind in $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ gleich, genau dann, wenn sign N = sign N'

Sei $(T,\beta)$ eine 4k - dimensionale stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sign T = 1 . Eine solche Mannigfaltigkeit existiert in allen Dimensionen, denn z.B. ist das Scheibenbündel des Tangentialbündels über $S^{2k}$ stabil parallelisierbar und, da die Selbstschnittzahl des Nullschnitts $S^{2k}$, der die mittlere Homologie erzeugt, 2 ist, ist die Signatur dieser berandeten Mannigfaltigkeit gleich 1. $\partial(T,\beta)$ ist ein in $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ wohldefiniertes Element, das wir im folgenden als $\partial T \in \Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ bezeichnen wollen. Die Ordnung von $\partial T$ in $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ ist nicht endlich und die von $\partial T$ erzeugte unendliche zyklische **Untergruppe** ist der Kern der Projektion $\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \longrightarrow \Omega_{\pi}^{4k-1}$. Wir fassen zusammen.

<u>Satz 5</u> : 1.) Die folgende Sequenz ist exakt

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Omega_{\pi 0}^{4k-1} \longrightarrow \Omega_{\pi}^{4k-1} \longrightarrow 0$$
$$1 \longmapsto \partial T$$

2.) Sei $\{(M_i^{4k-1}, \alpha_i)\}$ ein Erzeugendensystem von $\Omega_{\pi}^{4k-1}$ , dann ist $\{(M_i^{4k-1}, \alpha_i), \partial T\}$ ein Erzeugendensystem von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ . Die Mannigfaltigkeiten $M_i$ können als Homotopiesphären gewählt werden, falls k>1.

3.) $\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tor}\,\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ .

<u>Beweis</u> : Daß $\Omega_{\pi}^{4k-1}$ für k>1 durch stabil parallelisierte Homotopiesphären erzeugt werden kann, folgt aus einem Satz von Kervaire und Milnor [11, Theorem 6.6] , die beweisen, daß für k>1 eine 4k-1 - dimensionale stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit durch eine Folge von Modifikationen, auf



deren Spur sich die Trivialisierung jeweils fortsetzen läßt, zu einer Homotopiesphäre gemacht werden kann. Daß $\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tor}\,\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ ist, folgt aus der schon erwähnten Tatsache, daß $\Omega_{\pi}^{4k-1}$ endlich ist.

Für die $\delta$- Invariante folgt aus unseren Überlegungen, daß $\delta$ , da es nicht identisch verschwindet, auf dem freien Teil von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ eine injektive Abbildung in $\mathbb{Q}$ ist. Um den Wert von $\delta$ auf einem Erzeugenden des freien Teils von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ zu bestimmen, beantworten wir die äquivalente Frage, welche Werte $\delta$ in $\mathbb{Q}$ annimmt.

Ehe wir diese Frage beantworten, geben wir einige Ergebnisse über die Bordismusgruppen $\Omega_{\pi}^{4k-1}$ an, die zum großen Teil von Adams [2] stammen.

Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ (n>k+1) bezeichnen wir mit $\pi_k^s$ . Wir identifizieren mittels der Thom - Pontrjagin Konstruktion $\Omega_{\pi}^{k}$ mit $\pi_k^s$ . Adams hat eine Invariante $e : \pi_{2k-1}^s \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eingeführt, mit deren Hilfe er die Ordnung des Bildes des Hopf - Whitehead Homomorphismus $J : \pi_k(SO\infty) \longrightarrow \pi_k^s$ bestimmt.

Die Invariante e kann mit Hilfe der Adamsoperationen folgendermaßen definiert werden [vgl. 3, Seite 145] .

Sei $f : S^{2m+2k-1} \longrightarrow S^{2m}$ eine Abbildung, m und k gerade. Bilde $m = 0 \bmod 4$
$D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}$ und betrachte die Inklusion
$i : S^{2m} \longrightarrow D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}$ und die Abbildung
$j : D^{2m+2k} \cup_f S^{2m} \longrightarrow S^{2m+2k}$ , die den Rand von $D^{2m+2k}$ zu einem Punkt identifiziert.

Man erhält die kurze exakte Sequenz :

$$0 \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m+2k}) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m}) \longrightarrow 0 .$$

Seien u und v Erzeugende von $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m+2k})$ und $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m})$ und $x \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m})$ , so daß $i^*x = v$. Sei $y = j^*u$ . Seien $\psi^l$ die Adams Operationen. Es gilt :

$\psi^l(x) = l^m x + b_l y$ . $\psi^l(y) = l^{m+k} y$ .

Wegen $\psi^l \psi^{l'} = \psi^{l'} \psi^l$ gilt $l^m(l^k - 1)b_{l'} = l'^m(l'^k - 1)b_l$ .

Also ist $\frac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ unabhängig von l in $\mathbb{Q}$ wohldefiniert.

Wenn man x in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m})$ verändert, so ändert sich $\frac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ um eine ganze Zahl. Deshalb ist $e(f) = \frac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wohldefiniert und induziert einen Homomorphismus

$e : \pi_{2m+2k-1}(S^{2m}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , der für $m > k$ die Adams Invariante $e : \pi^s_{2k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist .

Sei m(2k) der Nenner des gekürzten Bruchs $\frac{B_k}{4k}$ .

<u>Satz ( Adams )</u> : Das Bild von $e : \pi^s_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\left\{\frac{a}{m(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . $eJ : \pi_{4k-1}(SO\infty) \longrightarrow \mathbb{Z}_{m(2k)}$ ist surjektiv, $e(S^{4k-1},h) = (-1)^{k-1} \frac{B_k}{4k} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Das Bild von J ist eine zyklische Gruppe der Ordnung m(2k) für k gerade und der Ordnung m(2k) oder 2(m2k) für k ungerade. $\pi^s_{4k-1} \cong \mathbb{Z}_{m(2k)} \oplus$ Kern e . Mahowald hat gezeigt (Bull. A.M.S. 76 (1970)) daß die Ordnung von Bild J genau gleich m(2k) ist und somit $\pi^s_{4k-1}$ = Bild J $\oplus$ Kern e .



Sei n(2k) der Nenner des gekürzten Bruchs $a_k \frac{2^{2k-1}(2^{2k-1}-1)}{k} B_k$ . n(2k) ist ungerade, da der Nenner von $B_k$ durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist.

Sei $2^{lk-3}$ die höchste Zweierpotenz, die k teilt.

<u>Lemma 1</u>: $m(2k)/n(2k) = 2^{lk}$

<u>Beweis</u> : $e(J(S^{4k-1},h)) = \pm \frac{B_k}{4k}$ . Nach Definition von e folgt, daß es m und $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\frac{B_k}{4k} = \frac{b}{2^m(2^{2k}-1)}$ .

Da $2^{2k-1}-1$ und $2^{2k}-1$ teilerfremd sind, folgt damit,daß m(2k) und $2^{2k-1}-1$ teilerfremd sind.

Also ist n(2k) gleich dem Nenner von $a_k 2^{2k+1} \cdot \frac{B_k}{4k}$ .

Da der Nenner von $B_k$ durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist, und weiterhin $a_k\, 2^{2k+1} \geq 2^{lk}$ ist, folgt $m(2k)/n(2k) = 2^{lk}$ .

Wir kommen jetzt auf die Frage zurück, welche Werte $\delta$ in $\mathbb{Q}$ annimmt.

<u>Satz 6</u> : Das Bild von $\delta$ ist die Menge $\left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}$ .

<u>Beweis</u> : Auf Grund der Berechnung von $\delta$ für Sphären und der Tatsache, daß $\delta(\partial T) = 1$ ist, folgt, daß $\left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\}$ eine Teilmenge von Bild$\delta$ ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $\delta$ keine anderen Werte annimmt.

Zunächst der Fall $k = 1$. Stelle $\delta$ als gekürzten Bruch dar, dann ist nach Definition von $\delta$ der Nenner von $\delta$ ein Teiler des Nenners von $L_k$. Für $k = 1$ ist dieser aber 3. Andererseits ist $n(2) = 3$ und deshalb die Behauptung richtig.

Für den Fall $k>1$ wenden wir Satz 5 2.) an. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben:

Für jede stabil parallelisierte Homotopiesphäre $(\Sigma^{4k-1},\beta)$ gilt :

$$\delta(\Sigma,\beta) \in \left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\} .$$

Brumfiel [6, Theorem 3.8] hat bewiesen, daß es eine Spin Mannigfaltigkeit $N^{4k}$ gibt, deren Rand $\Sigma^{4k-1}$ ist, derart daß sämtliche Pontrjagin Zahlen von $STN/_\beta$ Null sind außer eventuell $p_k(STN/_\beta)[N/\partial N]$. Daraus folgt :

$$\delta(\Sigma,\beta) = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k p_k(STN/_\beta)[N/\partial N] \mod 1$$

Weiterhin hat Brumfiel [6, Lemma 3.5.] gezeigt, daß $\hat{A}^{-1}(STN/_\beta)[N/\partial N] \in a_k \cdot$ Bild $e$ in $\mathbb{Q}/a_k\cdot\mathbb{Z}$ ist.

$$\hat{A}^{-1}(STN/_\beta)[N/\partial N] = \frac{B_k}{4k\cdot(2k-1)!} p_k(STN/_\beta)[N/\partial N]$$ ; Also gilt:

$$\frac{\text{Zähler } B_k/4k}{(2k-1)!} \cdot p_k(STN/_\beta)[N/\partial N] \in a_k\cdot\mathbb{Z}$$. Wir setzen dies in die Formel für $\delta(\Sigma,\beta)$ ein und erhalten :

Es gibt $b \in a_k\mathbb{Z}$, so daß mod 1 gilt :

$$\delta(\Sigma,\beta) = \frac{2^{2k+1}(2^{2k-1}-1)\cdot b}{\text{Nenner } (B_k/4k)}$$

Also ergibt sich :

$$\delta(\Sigma,\beta) \in \left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\}$$ q.e.d.

Die Werte von $n(2k)$ für $k = 1,2,\ldots,5$ sind : 3,15,63,15,33.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Torsion von $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ aussieht.

Zunächst beschreiben wir, wie das Bild des J - Homomorphismus in $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ liegt.

<u>Lemma 2</u> : Das Bild von J ist die Untergruppe aller stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten $(M^{4k-1},\alpha)$ von $\Omega^{4k-1}_{\pi}$, so daß M Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit N ist (Die Parallelisierung braucht nicht auf N fortsetzbar sein) .

Beweis : Für $k = 1$ folgt die Aussage aus der Tatsache, daß das Bild von J gleich $\Omega^3_{\pi}$ ist und jede 3 - dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit ist.

Sei nun $k>1$ und $(M^{4k-1},\alpha)$ eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit, so daß M Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit ist. Nach dem Satz von Kervaire - Milnor [11, Theorem 6.6.] gibt es eine stabil parallelisierte Homotopiesphäre $(\Sigma^{4k-1},\beta)$, so daß in $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ $(\Sigma,\beta) = (M,\alpha)$. Die Homotopiesphäre $\Sigma$ liegt in $bP_{4k}$. Die Menge $\{(\Sigma,\gamma) \mid \gamma \text{ stabile Trivialisierung von } ST\Sigma\} \subset \Omega^{4k-1}_{\pi}$ ist eine Restklasse von $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ nach der Untergruppe $\{(S^{4k-1},\gamma) \mid \gamma \text{ stabile Trivialisierung von } S^{4k-1}\}$ [11, Lemma 4.5.] . Wir können uns also stabile Trivialisierun-

Angefertigt mit Genehmigung der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. Hirzebruch

Korreferent: Prof. Dr. Arlt

Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

In den letzten Jahren fanden die Signatursätze von Hirzebruch, Atiyah und Singer zahlreiche Anwendungen in der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten und neuerdings in elementarer Zahlentheorie [vgl. 10]. Dabei kommen interessante Ergebnisse häufig in den Fällen vor,, in denen die oben angesprochenen Sätze nicht anwendbar sind, z.B. für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der"Fehler" führt zur Definition neuer Invarianten und deren Berechnung häufig zu interessanten zahlentheoretischen Formeln. Ich erinnere z.B. an die $\alpha$ - Invariante und die Berechnung auf Linsenräumen, wo die verallgemeinerten Dedekindsummen in der Topologie auftauchen [siehe z.B. 8].

In ähnlicher Weise ist die Invariante definiert, mit der wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen wollen. Eine Mannigfaltigkeit M mit einer Trivialisierung $\alpha$ des stabilen Tangentialbündels ist Rand einer Mannigfaltigkeit N. Dividiere das stabile Tangentialbündel STN von N durch die Trivialisierung $\alpha$, dann ist die $\delta$ - Invariante gegeben durch

$$\delta(M,\alpha) = \text{sign } N - L(p(STN_{/\alpha}))[N/M] .$$

$\delta(M,\alpha)$ hängt nur von der Homotopieklasse der Trivialisierung ab.

Im 1. Paragraphen zeigen wir, daß die obige Definition sinnvoll ist, stellen einige Eigenschaften zusammen, z.B.

daß bezüglich einer fest gewählten Trivialisierung $\delta$ eine affine Abbildung ist (Satz 2) und untersuchen, wie sich $\delta$ bei Überlagerungen verhält (Satz 3) . Satz 3 stellt gleichzeitig eine Verbindung her zur $\alpha$ - Invariante, die im folgenden sehr nützlich sein wird.

Im 2. Paragraphen definieren wir eine Bordismusgruppe $\Omega^*_{\Pi O}$ , indem wir zwei stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten M und M' äquivalent setzen, wenn es eine "große" Mannigfaltigkeit gibt, deren Rand M und -M' ist, auf die sich die Trivialisierung fortsetzen läßt und deren Signatur 0 ist. $\delta$ ist ein Homomorphismus $\Omega^*_{\Pi O} \longrightarrow \mathbb{Q}$ .

Man sieht leicht, daß $\delta$ einen Isomorphismus $\Omega^{4k-1}_{\Pi O} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ induziert. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist Satz 7, in dem wir $\Omega^*_{\Pi O}$ beschreiben und $\delta$ auf Erzeugenden berechnen.

Anschließend stellen wir eine Verbindumg zwischen $\delta$ und der Adams - Invariante e her (Satz 8). Außerdem rechnen wir $\delta$ noch in einigen konkreten Fällen aus.

Im 3. Paragraphen beschäftigen wir uns mit Torusbündeln über Tori. Die Untersuchung der Torusbündel war der eigentliche Anlaß für die vorliegende Arbeit. Um dies klarzumachen und die Arbeit in einen Zusammen-
Sie tauchen nämlich bei Untersuchungen von Hirzebruch über Hilbertsche Modulflächen als Umgebungsränder von Singularitäten auf, und in einer anderen Form wurde die $\delta$ - Invariante für solche Umgebungsränder von Singularitäten zunächst von Hirzebruch definiert [vgl. 9, 18].



Für Torusbündel geben wir eine Klasse von Trivialisierungen an, so daß die $\delta$ - Invariante unabhängig von diesen Trivialisierungen wohlbestimmt ist. Die Berechnung der $\delta$ - Invariante für Torusbündel erweist sich als sehr schwierig. Im Fall von Torusbündeln mit Faser $T^2$ über $S^1$ ist die $\delta$ - Invariante mit einer Invariante $\varphi$ identisch, die W. Meyer in seiner Dissertation [12] durch bekannte zahlentheoretische Funktionen vollständig ausgedrückt hat.

Im allgemeinen Fall haben wir die $\delta$ - Invariante durch eine andere Invariante, nämlich die $\alpha$ - Invariante vollständig ausgedrückt (Satz 11). Die Berechnung der $\alpha$ - Invarianten führt wieder im Fall von Torusbündeln mit Faser $T^2$ über $S^1$ zu bekannten zahlentheoretischen Funktionen (Satz 14). Im höherdimensionalen Fall haben wir die $\delta$ - Invariante nur in einigen einfachen Fällen ausrechnen können.(Satz 17).

Für die Anregung , den Problemkreis der vorliegenden Arbeit zu untersuchen, und die Bereitschaft zu häufigen und fruchtbaren Diskussionen möchte ich Herrn Prof. Hirzebruch herzlich danken. Die Möglichkeit, mit Institutsangehörigen über meine Probleme zu diskutieren, hat mir sehr genützt. Besonders dankbar bin ich U. Karras, W. Meyer, E. Ossa und D. Zagier.

# § 1

## Definitionen und Eigenschaften

Die Objekte, die wir im folgenden untersuchen, sind stabil parallelisierbare Mannigfaltigkeiten $M^n$ mit fester Trivialisierung $\alpha$ des stabilen Tangentialbündels. Wir schreiben dafür : $(M^n,\alpha)$ ist eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit. Das stabile Tangentialbündel von $M^n$ bezeichnen wir mit $STM^n$. Zwei stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten $(M^n,\alpha)$ und $(M'^n,\alpha')$ heißen isomorph, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : M^n \longrightarrow M'^n$ gibt, so daß $\alpha$ die unter $\varphi$ zurückgeholte Trivialisierung $\alpha'$ ist, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} STM^n \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & STM'^n \arrow[d, "\alpha'"] \\ M^n \times \mathbb{R}^\infty \arrow[r, "\varphi \times Id"] & M'^n \times \mathbb{R}^\infty \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Alle auftretenden Mannigfaltigkeiten sollen kompakt, orientiert und $C^\infty$- differenzierbar sein.

Sei $(M^n,\alpha)$ eine geschlossene stabil parallelisierte n - dim Mannigfaltigkeit. Wir wollen $(M^n,\alpha)$ eine rationale Zahl zuordnen. Sämtliche charakteristische Zahlen von $M^n$ sind Null und deshalb gibt es eine (n+1) - dim. berandete Mannigfaltigkeit $N^{n+1}$ mit $\partial N^{n+1} = M^n$.*) Das Tangentialbündel TM von M ist ein Unterbündel von $TN|_M$. Wähle einen orientierungserhaltenden Bündelisomorphismus $TM \oplus 1 \longrightarrow TN|_M$, der eingeschränkt auf TM die Inklusion ist ( 1 ist das eindimensionale reelle Produktbündel). Dieser Bündelisomorphismus

*) Orientiere N so, daß mit einem aus N herauszeigenden Normalenvektor $e_0$ und einer Orientierung $(e_1,\ldots,e_n)$ von $T_x N$ $(e_0,\ldots,e_n)$ Orientierung von $T_x N$ ist. Diese Definition stimmt mit der homologischen überein.

ist bis auf Homotopie wohldefiniert. Es ist nun $\alpha$ eine Trivialisierung vom $STN|_M$ und wir können das Vektorraumbündel $STN/_{\alpha}$ über $N/_M$ betrachten, das wir erhalten, wenn wir die Fasern über M mittels der Trivialisierung $\alpha$ zu einer Faser identifizieren [3, Seite 18ff]. Die Isomorphieklasse dieses Vektorraumbündels ist unabhängig von der Homotopieklasse von Trivialisierungen [3] und hängt somit nicht von der obigen Identifizierung von $TN|_M$ mit $TM \oplus 1$ ab.

<u>Definition</u>: $\delta(M^n,\alpha) = \operatorname{sign} N^{n+1} - L(STN^{n+1}/_{\alpha})\left[N^{n+1}/_{M^n}\right]$.

Dabei ist L die L-Klasse, definiert in [7, Seite 12] als multiplikative Sequenz mit $\frac{\sqrt{z}}{\tanh\sqrt{z}}$ als charakteristische Potenzreihe und $p_i$ die i-te Pontrjagin - Klasse $p_i(STN/_{\alpha})$, $\left[N/_M\right]$ das Bild der Fundamentalklasse von (N , M) unter der Abbildung $(N\ ,\ M) \longrightarrow (N/_M\ ,\ *\ )$ und sign N die Signatur von N.

$\delta(M,\alpha)$ ist eine rationale Zahl. Da Signatur und $L(STN/_{\alpha})\left[N/_M\right]$ für $n \not\equiv 3$ mod 4 verschwinden, ist $\delta$ in diesen Dimensionen Null. Interessant ist also nur der Fall $n = 4k - 1$.

Wir müssen uns nun überlegen, daß die obige Definition sinnvoll ist, d.h. unabhängig von der Auswahl von N. Sei also N' eine berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial N' = M$. Wir betrachten die kanonische Abbildung $\pi: N \underset{M}{\cup} (-N') \longrightarrow N/_M \cup (-N')/_M$.

Es gilt : $ST(N \underset{M}{\cup} (-N')) = \pi^*((STN/_{\alpha} \cup ST(-N')/_{\alpha})$ und

$\pi_* : H_{n+1}(N/_M \cup N'/_M) \longrightarrow H_{n+1}(N \underset{M}{\cup} (-N'))$ ist gegeben durch

$$(x\cdot\left[N/_M\right],\ y\left[-N'/_M\right]) \longmapsto (x+y)\left[N \underset{M}{\cup} (-N')\right]$$ (Wenn wir keine Koeffizientengruppe angeben, meinen wir immer mit



Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Da die L - Klasse eines Vektorraumbündels natürlich ist, folgt

$$L(ST(N \underset{M}{\cup} (-N')))\left[N \underset{M}{\cup} (-N')\right] = L(STN/_{\alpha})\left[N/_M\right] + L(ST(-N')/_{\alpha})\left[(-N')/_M\right].$$

Andererseits gilt : $\operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N') = \operatorname{sign} N - \operatorname{sign} N'$. Nach dem Hirzebruchschen Signatursatz [7, Seite 86] gilt :

$$L(ST(N \cup -N'))\left[N \underset{M}{\cup} -N'\right] = \operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N').$$

Also : $\operatorname{sign} N - L(STN/_{\alpha})\left[N/_M\right] + \operatorname{sign}(-N') - L(ST(-N')/_{\alpha})\left[-N'/_M\right]$
$= \operatorname{sign}(N \underset{M}{\cup} -N') - L(ST(N \underset{M}{\cup} -N'))\left[N \underset{M}{\cup} -N'\right] = 0$ ,

speziell für N = N' gilt :

$$\operatorname{sign} N' - L(STN'/_{\alpha})\left[N'/_M\right] + \operatorname{sign}(-N') - L(ST(-N')/_{\alpha})\left[-N'/_M\right] = 0$$

und somit ist gezeigt, daß die Definition von $\delta$ unabhängig von der Auswahl von N ist.

<u>Bemerkung</u> : Wenn auch N stabil parallelisierbar ist und es eine Trivialisierung $\beta$ auf N gibt, deren Einschränkung auf M $\alpha$ ist – wir schreiben dann $\partial(N,\beta) = (M,\alpha)$ – , dann ist das Vektorraumbündel $STN/_{\alpha}$ trivial und es gilt somit

$$\delta(M,\alpha) = \operatorname{sign} N\ .$$

Sei $\Omega^n_\pi$ die Bordismusgruppe aller stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten. Diese Gruppe ist bekanntlich endlich. Zu jeder stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(M^n,\alpha)$ gibt es deshalb $a \in \mathbb{N}$ und eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(N^{n+1},\beta)$, so daß $\partial(N^{n+1},\beta) = a(M^n,\alpha)$.

Dann gilt :

$$\delta(M,\alpha) = \tfrac{1}{a}\operatorname{sign} N\ .$$

Wir halten hier zwei Eigenschaften von $\delta$ fest, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben.

1.) $\delta(M,\alpha) + \delta(M',\alpha') = \delta((M,\alpha) + (M',\alpha'))$

$\delta(-M,\alpha) = -\delta(M,\alpha)$

2.) Seien $\alpha$ und $\alpha'$ homotope Trivialisierungen von $STM$.

$\delta(M,\alpha) = \delta(M,\alpha')$ .

Sei nun $M^{4k-1}$ eine stabil parallelisierbare Mannigfaltigkeit und $\beta$ eine fest gewählte Trivialisierung von $STM^{4k-1}$. Alle anderen Trivialisierungen $\alpha$ von $STM^{4k-1}$ sind bezüglich $\beta$ durch Abbildungen $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ gegeben. Die $f$ zugeordnete Trivialisierung ist $\alpha = f\cdot\beta : STM^{4k-1} \longrightarrow M^{4k-1}\times\mathbb{R}^\infty$. Wenn klar ist, bezüglich welcher festen Trivialisierung $\beta$ diese Zuordnung gelten soll, schreiben wir für $(M,\alpha)$ auch $(M,f)$.

Eine stetige Abbildung $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ definiert ein stabiles Vektorraumbündel $E_f$ über $SM$, der Suspension von $M$. $f$ ist charakteristische Abbildung dieses Bündels.

<u>Satz 1</u> : Sei $\beta$ festgewählte Trivialisierung von $STM^{4k-1}$, $f : M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ stetig und $\alpha$ die zugehörige Trivialisierung. Dann gilt :

$$\delta(M,\alpha) = \delta(M,\beta) - L(E_f)\left[SM^{4k-1}\right] .$$

Dabei ist $\left[SM^{4k-1}\right]$ Erzeugendes von $H_{4k}(SM) = H_{4k}(CM,M)$ (wobei $CM$ der Kegel über $M$ ist), das unter $\partial : H_{4k}(CM,M) \longrightarrow H_{4k-1}(M)$ auf die Fundamentalklasse von $M$ abgebildet wird.

<u>Beweis</u> : Sei $N^{4k}$ berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial N^{4k} = M^{4k-1}$. Betrachte das Bündel $STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^\infty$ .

Sei $\pi : N \underset{M}{\cup} CM \longrightarrow N/M \cup SM$ die Projektion. Es gilt :



$$\pi^*\left((STN/\alpha) \cup E_f\right) = STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^\infty \text{ und}$$

$$\pi_*\left(x\left[N/M\right], y\left[S(-M)\right]\right) = (x+y)\left[N \cup C(-M)\right] .$$

Daraus folgt:

$$L(STN/\alpha)\left[N/M\right] + L(E_f)\left[S(-M)\right] =$$

$$L(STN \underset{\beta}{\cup} CM \times \mathbb{R}^\infty)\left[N \cup C(-M)\right] =$$

$$L(STN/\beta)\left[N/M\right] .$$

Somit ist
$$\begin{aligned}\delta(M,\alpha) &= \operatorname{sign} N - L(STN/\alpha)\left[N/M\right] \\ &= \operatorname{sign} N - L(STN/\beta)\left[N/M\right] + L(E_f)\left[S(-M)\right] \\ &= \delta(M,\beta) - L(E_f)\left[SM\right] .\end{aligned}$$

Die Menge der stetigen Abbildungen $M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ ist eine Gruppe. Sei wieder $\beta$ eine feste Trivialisierung von $STM$. Dann ist $\delta$, aufgefaßt als Abbildung von der Menge aller stetigen Abbildungen $M \longrightarrow GL(\infty,\mathbb{R})$ nach $\mathbb{Q}$, eine affine Abbildung. Genauer gilt.

<u>Satz 2</u> : $\delta(M,f) + \delta(M,f') = \delta(M,ff') + \delta(M,\beta)$ .

<u>Beweis</u> : Bekanntlich gilt :

$$E_{ff'} \cong E_f \oplus E_{f'} .$$

Da auf einer Suspension sämtliche Cup Produkte Null sind, gilt

$$L_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k\, p_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] \quad [7, \text{Seite } 12]$$

und

$$p_k(E_f \oplus E_{f'})\left[SM\right] = p_k(E_f)\left[SM\right] + p_k(E_{f'})\left[SM\right] .$$

Also $L_k(E_f \oplus E_{f'})[SM] = L_k(E_f)[SM] + L_k(E_{f'})[SM]$ .

Nach Satz 1 gilt :

$$\begin{aligned}\delta(M,f) + \delta(M,f') &= 2\delta(M,\beta) - L(E_f)[SM] - L(E_{f'})[SM] \\ &= 2\delta(M,\beta) - L(E_{ff'})[SM] \\ &= \delta(M,ff') + \delta(M,\beta) .\end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich unsere Invariante bei endlichen Überlagerungen verhält. Sei $M^{4k-1}$ eine Mannigfaltigkeit, auf der die endliche Gruppe G differenzierbar[1] frei operiert. Sei $M/_G$ stabil parallelisierbar. Das Tangentialbündel von M ist das unter der Projektion $\pi : M \longrightarrow M/_G$ zurückgeholte Tangentialbündel von $M/_G$. Eine Trivialisierung $\beta$ von $ST(M/_G)$ kann mittels $\pi$ zu einer Trivialisierung von STM zurückgeholt werden, die wir mit $\pi^*\beta$ bezeichnen wollen. Es stellt sich die Frage, in welcher Beziehung $\delta(M/_G, \beta)$ und $\delta(M,\pi^*\beta)$ stehen.

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die von Atiyah und Singer [5] eingeführte $\alpha$ - Invariante. Wir wiederholen hier die Definition, die eine starke Analogie zur Definition der $\delta$ - Invariante aufweist.

Operiere wieder die endliche Gruppe G differenzierbar[1] und frei auf $M^{2k-1}$. Es gibt $a \in \mathbb{N}$ und eine G - Mannigfaltigkeit N, die aM äquivariant berandet. Sei $g \in G$ , $g \neq 1$ .

$$\alpha(g,M) = \frac{1}{a}(\mathrm{sign}(g,N) - L(g,N))$$

---

1) orientierungserhaltend



Dabei ist sign(g,N) die äquivariante Signatur und L(g,N) die Zahl, die im äquivarianten Signatursatz von Atiyah und Singer [5] auftritt. Diese Definition variiert von der Originaldefinition durch das Vorzeichen. Daß die Invariante wohldefiniert ist, folgt mit ähnlichen Additivitätsargumenten wie bei der $\delta$ - Invariante aus dem äquivarianten Signatursatz. Wie bei der $\delta$ - Invariante kann man a und N immer so wählen, daß L(g,N) = 0 ist. Denn aus der Bordismustheorie wissen wir, daß ein geeignetes Vielfaches a von M eine freie G - Mannigfaltigkeit N äquivariant berandet. Dann gilt :

$$\alpha(g,M) = \frac{1}{a}\mathrm{sign}(g,N) .$$

Wir können nun die $\delta$ - Invariante für Überlagerungen durch die $\delta$ - Invariante des Orbitraums und die $\alpha$ - Invariante ausdrücken.

<u>Satz 3</u> : $\delta(M,\pi^*\beta) = |G|\cdot\delta(M/_G,\beta) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}\alpha(g,M)$ .

<u>Beweis</u> : Wähle eine freie G-Mannigfaltigkeit N, die aM äquivariant berandet. Sei $\pi : N/\partial N \longrightarrow (N/_G)/\partial(N/_G)$ die Projektion. Es gilt :

$$\pi^*(ST(N/_G)/_\beta) = STN/_{\pi^*(\beta)} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\pi_{4k} : H_{4k}(N/\partial N) &\longrightarrow H_{4k}((N/_G)/\partial(N/_G)) \\ [N/\partial N] &\longmapsto |G|\,[(N/_G)/\partial(N/_G)]\end{aligned}$$

Daraus folgt :

$$L(STN/\pi^*\beta)\left[N/\partial N\right] = |G|\, L(ST(N/G)/\beta)\left[(N/G)/\partial(N/G)\right]$$

Ferner ist bekanntlich :

$$\operatorname{sign}(N/G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{sign}(g,N) .$$

Zusammenfassend ergibt sich:

$$\delta(M,\pi^*\beta) = \frac{1}{a}(\operatorname{sign} N - L(STN/\pi^*\beta)\left[N/\partial N\right]) =$$

$$\frac{1}{a}(\,|G|\operatorname{sign}(N/G) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}\operatorname{sign}(g,N) - |G|\, L(ST(N/G)/\beta)\left[(N/G)/\partial(N/G)\right]) =$$

$$|G|\cdot\delta(M/G,\beta) - \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}\alpha(g,M) .$$

q.e.d.



## § 2

### Berechnung der $\delta$ - Invariante

Wir wollen die $\delta$ - Invariante zunächst einmal in Spezialfällen berechnen. Als naheliegende Beispiele betrachten wir Standardsphären. Wir fassen $S^{4k-1}$ als Rand vom $D^{4k}$ auf, das wir mit der kanonischen Orientierung versehen. Wir wählen die Einschränkung der Standardtrivialisierung von $D^{4k}$ auf $S^{4k-1}$ als feste Trivialisierung von $ST(S^{4k-1})$. Sei wie wie üblich $\left[S^{4k-1}, SL(\infty,\mathbb{R})\right]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von $S^{4k-1}$ in $SL(\infty,\mathbb{R})$. $\left[S^{4k-1}, SL(\infty,\mathbb{R})\right] = \left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$. Da die Signatur von $D^{4k}$ Null ist, ist $\delta$ ein Homomorphismus von $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$ auf $\mathbb{Q}$. Bekanntlich ist $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right] \cong \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4k}) \cong \mathbb{Z}$, so daß wir $\delta$ berechnet haben, wenn wir für ein Erzeugendes h von $\left[S^{4k-1}, SO\infty\right]$ $\delta(S^{4k-1},h)$ ausgerechnet haben.

Nach Satz 1 ist

$$\delta(S^{4k-1},h) = -L(E_h)\left[S^{4k}\right]$$
$$= -\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}\, B_k p_k(E_h)\left[S^{4k}\right] ,$$

wobei $B_k$ die Bernoullizahlen sind. $B_1=\frac{1}{6}$ , $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$; $B_4=\frac{1}{30}\cdots$

Betrachte die Komplexifizierung $c : \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4k}) \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$. Bekanntlich ist $c(E_h)$ in den Dimensionen k gerade ein Erzeugendes von $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$ und in den Dimensionen k ungerade zweimal ein Erzeugendes von $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k})$. Der Cherncharakter ist ein Isomorphismus ch : $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4k}) \longrightarrow H^{4k}(S^{4k})$. Sei $h \in [S^{4k-1}, SO\infty]$ ein Erzeugendes und $ch(cE_h)[S^{4k}] = a_k$, wobei $a_k = 1$ für k gerade und $a_k = 2$ für k ungerade. Mit

$$ch(cE_h) = -\frac{1}{(2k-1)!}c_{2k}(cE_h) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}p_k(E_h) \text{ folgt.}$$

Satz 4 :

$$\delta(S^{4k-1}, h) = (-1)^k a_k \frac{2^{2k-1}(2^{2k-1}-1)}{k} B_k$$

Die Werte für k = 1,...,5 sind :

$$-\frac{2}{3},\ \frac{14}{15},\ -\frac{992}{63},\ \frac{2032}{15},\ -\frac{261632}{33}\ .$$

Um eine topologische Invariante vollständig zu berechnen, ist ein naheliegender Weg, auf den Objekten eine geeignete Äquivalenzrelation zu definieren, mit der die Invariante verträglich ist, und die Invariante auf Erzeugenden zu berechnen. In unserem Fall bietet sich als Äquivalenzrelation die Bordismusrelation für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten an. Die Bordismusgruppe aller n - dimensionalen parallelisierten geschlossenen Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir mit $\Omega_\pi^n$ . Nun ist aber klar, daß $\delta$ nicht mit dieser Bordismusrelation verträglich ist. Denn für eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(M,\alpha)$ , die Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ ist, gilt $\delta(M,\alpha)$ = sign N und die ist i.a. nicht Null. Damit bekommen wir nur, daß $\bar{\delta} = \delta \bmod 1$ ein Homomorphismus von $\Omega_\pi^n \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist.

Es liegt nun nahe, die Bordismusrelation für stabil



parallelisierte Mannigfaltigkeiten in der folgenden Weise zu verfeinern.

Definition : Seien $(M_1^n, \alpha_1)$ und $(M_2^n, \alpha_2)$ stabil parallelisierte n- dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wir setzen

$$(M_1,\alpha_1) \sim (M_2,\alpha_2)$$

genau dann, wenn es eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ gibt, so daß

$$\partial(N,\beta) = (M_1,\alpha_1) + (-M_2,\alpha_2) \quad \text{und}$$

sign N = 0 ist.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, die Transitivität folgt aus der Novikov - Additivität der Signatur. Die Menge der Äquivalenzklassen nach dieser Relation bildet eine Gruppe, die wir mit $\Omega_{\pi 0}^n$ bezeichnen wollen. Für $n \not\equiv 3 \bmod 4$ ist $\Omega_{\pi 0}^n = \Omega_\pi^n$ , da die Signatur von n+1 - dimensionalen Mannigfaltigkeiten in diesen Fällen Null ist.

Offensichtlich ist $\delta$ mit der obigen Äquivalenzrelation verträglich. $\delta$ ist also ein Homomorphismus von $\Omega_{\pi 0}^n$ in die rationalen Zahlen.

Erste Informationen über die Gruppe $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ bekommen wir, indem wir den Kern der Projektion $\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \longrightarrow \Omega_\pi^{4k-1}$ bestimmen. Der Kern besteht aus allen stabil parallelisierten geschlossenen Mannigfaltigkeiten $(M,\alpha)$, die Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ sind. Zwei Elemente des Kerns $(M,\alpha)$ bzw. $(M',\alpha')$ , die Rand von $(N,\beta)$ bzw. $(N',\beta')$

sind, sind in $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ gleich, genau dann, wenn sign N = sign N'

Sei $(T,\beta)$ eine 4k - dimensionale stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sign T = 1 . Eine solche Mannigfaltigkeit existiert in allen Dimensionen, denn z.B. ist das Scheibenbündel des Tangentialbündels über $S^{2k}$ stabil parallelisierbar und, da die Selbstschnittzahl des Nullschnitts $S^{2k}$, der die mittlere Homologie erzeugt, 2 ist, ist die Signatur dieser berandeten Mannigfaltigkeit gleich 1. $\partial(T,\beta)$ ist ein in $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ wohldefiniertes Element, das wir im folgenden als $\partial T \in \Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ bezeichnen wollen. Die Ordnung von $\partial T$ in $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ ist nicht endlich und die von $\partial T$ erzeugte unendliche zyklische Untergruppe ist der Kern der Projektion $\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \longrightarrow \Omega^{4k-1}_{\pi}$. Wir fassen zusammen.

Satz 5 : 1.) Die folgende Sequenz ist exakt

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Omega^{4k-1}_{\pi 0} \longrightarrow \Omega^{4k-1}_{\pi} \longrightarrow 0$$
$$1 \longmapsto \partial T$$

2.) Sei $\{(M_i^{4k-1}, \alpha_i)\}$ ein Erzeugendensystem von $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ , dann ist $\{(M_i^{4k-1}, \alpha_i), \partial T\}$ ein Erzeugendensystem von $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ . Die Mannigfaltigkeiten $M_i$ können als Homotopiesphären gewählt werden, falls k>1.

3.) $\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tor}\,\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ .

Beweis : Daß $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ für k>1 durch stabil parallelisierte Homotopiesphären erzeugt werden kann, folgt aus einem Satz von Kervaire und Milnor [11, Theorem 6.6] , die beweisen, daß für k>1 eine 4k-1 - dimensionale stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit durch eine Folge von Modifikationen, auf



deren Spur sich die Trivialisierung jeweils fortsetzen läßt, zu einer Homotopiesphäre gemacht werden kann.

Daß $\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tor}\,\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ ist, folgt aus der schon erwähnten Tatsache, daß $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ endlich ist.

Für die $\delta$- Invariante folgt aus unseren Überlegungen, daß $\delta$ , da es nicht identisch verschwindet, auf dem freien Teil von $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ eine injektive Abbildung in $\mathbb{Q}$ ist. Um den Wert von $\delta$ auf einem Erzeugenden des freien Teils von $\Omega^{4k-1}_{\pi 0}$ zu bestimmen, beantworten wir die äquivalente Frage, welche Werte $\delta$ in $\mathbb{Q}$ annimmt.

Ehe wir diese Frage beantworten, geben wir einige Ergebnisse über die Bordismusgruppen $\Omega^{4k-1}_{\pi}$ an, die zum großen Teil von Adams [2] stammen.

Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ (n>k+1) bezeichnen wir mit $\pi_k^s$ . Wir identifizieren mittels der Thom - Pontrjagin Konstruktion $\Omega^k_{\pi}$ mit $\pi_k^s$ . Adams hat eine Invariante $e : \pi^s_{2k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eingeführt, mit deren Hilfe er die Ordnung des Bildes des Hopf - Whitehead Homomorphismus $J : \pi_k(SO\infty) \longrightarrow \pi_k^s$ bestimmt.

Die Invariante e kann mit Hilfe der Adamsoperationen folgendermaßen definiert werden [vgl. 3, Seite 145] .

Sei $f : S^{2m+2k-1} \longrightarrow S^{2m}$ eine Abbildung, m und k gerade. Bilde m = 0 mod 4 $D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}$ und betrachte die Inklusion

$i : S^{2m} \longrightarrow D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}$ und die Abbildung

$j : D^{2m+2k} \cup_f S^{2m} \longrightarrow S^{2m+2k}$ , die den Rand von $D^{2m+2k}$ zu einem Punkt identifiziert.

Man erhält die kurze exakte Sequenz :

$$0 \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m+2k}) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m}) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Seien u und v Erzeugende von $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m+2k})$ und $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{2m})$ und $x \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m})$ , so daß $i^* x = v$. Sei $y = j^* u$ . Seien $\psi^l$ die Adams Operationen. Es gilt :

$\psi^l(x) = l^m x + b_l y$ . $\psi^l(y) = l^{m+k} y$ .

Wegen $\psi^l \psi^{l'} = \psi^{l'} \psi^l$ gilt $l^m(l^k - 1) b_{l'} = l'^m(l'^k - 1) b_l$ .

Also ist $\dfrac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ unabhängig von l in $\mathbb{Q}$ wohldefiniert.

Wenn man x in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(D^{2m+2k} \cup_f S^{2m})$ verändert, so ändert sich $\dfrac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ um eine ganze Zahl. Deshalb ist $e(f) = \dfrac{b_l}{l^m(l^k-1)}$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wohldefiniert und induziert einen Homomorphismus $e : \pi_{2m+2k-1}(S^{2m}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , der für $m > k$ die Adams Invariante $e : \pi^s_{2k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist .

Sei m(2k) der Nenner des gekürzten Bruchs $\frac{B_k}{4k}$ .

<u>Satz ( Adams )</u> : Das Bild von $e : \pi^s_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist $\left\{ \frac{a}{m(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . $eJ : \pi_{4k-1}(SO\infty) \longrightarrow \mathbb{Z}_{m(2k)}$ ist surjektiv, $e(S^{4k-1},h) = (-1)^{k-1} \frac{B_k}{4k} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Das Bild von J ist eine zyklische Gruppe der Ordnung m(2k) für k gerade und der Ordnung m(2k) oder 2(m2k) für k ungerade. $\pi^s_{4k-1} \cong \mathbb{Z}_{m(2k)} \oplus \operatorname{Kern} e$ . Mahowald hat gezeigt (Bull. A.M.S. 76 (1970)) daß die Ordnung von Bild J genau gleich m(2k) ist und somit $\pi^s_{4k-1} = \text{Bild } J \oplus \operatorname{Kern} e$ .



Sei n(2k) der Nenner des gekürzten Bruchs $a_k \dfrac{2^{2k-1}(2^{2k-1}-1)}{k} B_k$ . n(2k) ist ungerade, da der Nenner von $B_k$ durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist.

Sei $2^{l_k-3}$ die höchste Zweierpotenz, die k teilt.

<u>Lemma 1</u>: $m(2k)/n(2k) = 2^{l_k}$

<u>Beweis</u> : $e(J(S^{4k-1},h)) = \pm \frac{B_k}{4k}$ . Nach Definition von e folgt, daß es m und $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\dfrac{B_k}{4k} = \dfrac{b}{2^m(2^{2k}-1)}$ .

Da $2^{2k-1}-1$ und $2^{2k}-1$ teilerfremd sind, folgt damit, daß m(2k) und $2^{2k-1}-1$ teilerfremd sind.

Also ist n(2k) gleich dem Nenner von $a_k 2^{2k+1} \cdot \frac{B_k}{4k}$ .

Da der Nenner von $B_k$ durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist, und weiterhin $a_k\, 2^{2k+1} \geq 2^{l_k}$ ist, folgt $m(2k)/n(2k) = 2^{l_k}$ .

Wir kommen jetzt auf die Frage zurück, welche Werte $\delta$ in $\mathbb{Q}$ annimmt.

<u>Satz 6</u> : Das Bild von $\delta$ ist die Menge $\left\{ \frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ .

<u>Beweis</u> : Auf Grund der Berechnung von $\delta$ für Sphären und der Tatsache, daß $\delta(\partial T) = 1$ ist, folgt, daß $\left\{ \frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \right\}$ eine Teilmenge von Bild $\delta$ ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $\delta$ keine anderen Werte annimmt.

Zunächst der Fall $k = 1$ . Stelle $\delta$ als gekürzten Bruch dar, dann ist nach Definition von $\delta$ der Nenner von $\delta$ ein Teiler des Nenners von $L_k$ . Für $k = 1$ ist dieser aber 3 . Andererseits ist $n(2) = 3$ und deshalb die Behauptung richtig.

Für den Fall $k>1$ wenden wir Satz 5 2.) an. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben:

Für jede stabil parallelisierte Homotopieshäre $(\Sigma^{4k-1},\beta)$ gilt :

$$\delta(\Sigma,\beta) \in \left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a\in\mathbb{Z}\right\} .$$

Brumfiel [6, Theorem 3.8] hat bewiesen, daß es eine Spin Mannigfaltigkeit $N^{4k}$ gibt, deren Rand $\Sigma^{4k-1}$ ist, derart daß sämtliche Pontrjagin Zahlen von $STN/_\beta$ Null sind außer eventuell $p_k(STN/_\beta)[N/\partial N]$ . Daraus folgt :

$$\delta(\Sigma,\beta) = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k p_k(STN/_\beta)[N/\partial N] \quad \mathrm{mod}\ 1$$

Weiterhin hat Brumfiel [6, Lemma 3.5.] gezeigt, daß $\hat{A}^{-1}(STN/_\beta)[N/\partial N] \in a_k \cdot$ Bild e in $\mathbb{Q}/a_k\cdot\mathbb{Z}$ ist.

$$\hat{A}^{-1}(STN/_\beta)[N/\partial N] = \frac{B_k}{4k\cdot(2k-1)!}\, p_k(STN/_\beta)[N/\partial N]$$ ; Also gilt:

$\frac{\text{Zähler } B_k/4k}{(2k-1)!} \cdot p_k(STN/_\beta)[N/\partial N] \in a_k\cdot\mathbb{Z}$ . Wir setzen dies in die Formel für $\delta(\Sigma,\beta)$ ein und erhalten :

Es gibt $b\in a_k\mathbb{Z}$ , so daß mod 1 gilt :

$$\delta(\Sigma,\beta) = \frac{2^{2k+1}(2^{2k-1}-1)\cdot b}{\text{Nenner } (B_k/4k)}$$

Also ergibt sich :

$$\delta(\Sigma,\beta) \in \left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Werte von $n(2k)$ für $k = 1,2,\dots,5$ sind : 3,15,63,15,33.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Torsion von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ aussieht.

Zunächst beschreiben wir, wie das Bild des J - Homomorphismus in $\Omega_\pi^{4k-1}$ liegt.

<u>Lemma 2</u> : Das Bild von J ist die Untergruppe aller stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten $(M^{4k-1},\alpha)$ von $\Omega_\pi^{4k-1}$, so daß M Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit N ist (Die Parallelisierung braucht nicht auf N fortsetzbar sein) .

Beweis : Für $k = 1$ folgt die Aussage aus der Tatsache, daß das Bild von J gleich $\Omega_\pi^3$ ist und jede 3 - dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit ist.

Sei nun $k>1$ und $(M^{4k-1},\alpha)$ eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit, so daß M Rand einer stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit ist. Nach dem Satz von Kervaire - Milnor [11, Theorem 6.6.] gibt es eine stabil parallelisierte Homotopiesphäre $(\Sigma^{4k-1},\beta)$ , so daß in $\Omega_\pi^{4k-1}$ $(\Sigma,\beta) = (M,\alpha)$ . Die Homotopiesphäre $\Sigma$ liegt in $bP_{4k}$ . Die Menge $\{(\Sigma,\gamma) \mid \gamma \text{ stabile Trivialisierung von } ST\Sigma\} \subset \Omega_\pi^{4k-1}$ ist eine Restklasse von $\Omega_\pi^{4k-1}$ nach der Untergruppe $\{(S^{4k-1},\gamma) \mid \gamma \text{ stabile Trivialisierung von } S^{4k-1}\}$ [11, Lemma 4.5.] . Wir können uns also stabile Trivialisierungen $\beta_1$ von $\Sigma$ und $\beta_2$ von $S^{4k-1}$ wählen, so daß $(\Sigma, \beta_1)$ Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $N^{4k}$ ist und $(\Sigma, \beta) = (\Sigma, \beta_1) + (S^{4k-1}, \beta_2)$ in $\Omega_{\pi}^{4k-1}$. Wegen $(\Sigma, \beta_1) = 0$ in $\Omega_{\pi}^{4k-1}$ folgt die Behauptung.

Definition : $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1} := \{(M,\alpha) \mid M$ ist Rand einer stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit$\} \subset \Omega_{\pi 0}^{4k-1}$.

Die Projektion $p : \Omega_{\pi 0}^{4k-1} \longrightarrow \Omega_{\pi}^{4k-1}$ induziert einen Isomorphismus

$\Omega_{\pi 0}^{4k-1}/b\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \longrightarrow \Omega_{\pi}^{4k-1}/\text{Bild } J$ . $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ wird von $(S^{4k-1},h)$ und $\partial T$ erzeugt. $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1} \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Tor}\, b\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ .

$\delta(1,x) = \pm \frac{1}{n(2k)}$ , d.h. $\delta$ nimmt schon auf $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ alle seine Werte an.

Wir wollen nun ein Erzeugendes für den freien Teil von $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ und damit auch von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ angeben und bestimmen, wie der Kern von p , die von $\partial T$ erzeugte Untergruppe, bezüglich einer solchen Aufspaltung in $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ liegt.

Nach Kervaire und Milnor [11, Lemma 7.4.] gibt es auf $S^{4k-1}$ stabile Trivialisierungen $\alpha$ , derart daß $(S^{4k-1},\alpha)$ Rand einer parallelisierten Mannigfaltigkeit $(N,\beta)$ ist mit sign $N \neq 0$ . Die Werte für die Signatur von N sind $l \cdot \sigma(k)$ , wobei

$\sigma(k) = a_k 2^{2k+1}(2^{2k-1}-1) \cdot \text{Zähler}(B_k/4k) \cdot$



Da $\delta$ injektiv auf $S^{4k-1}$ ist, sind die stabilen Trivialisierungen $\alpha$ auf $S^{4k-1}$ , derart daß $(S^{4k-1},\alpha)$ Rand einer parallelisierten Mannigfaltigkeit ist, gerade durch die Bedingung $\delta(S^{4k-1},\alpha) = 0 \bmod \sigma(k)$ gegeben. Nun gilt :

$$m(2k) \cdot \delta(S^{4k-1},h) = (-1)^k m(2k)\ a_k 2^{2k+1}(2^{2k-1}-1)\ \frac{\text{Zähler}(B_k/4k)}{\text{Nenner}(B_k/4k)}$$

$$= (-1)^k \quad \sigma(k) \ .$$

Also ist $m(2k)(S^{4k-1},h)$ gleich $(-1)^k \quad \sigma(k) \cdot \partial T$ in $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ . Da $2^{2k-1}-1$ und $n(2k)$ teilerfremd sind, wissen wir, daß $\sigma(k)$ und $n(2k)$ teilerfremd sind . Es gibt also $z_1$ und $z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1(-1)^k \quad \sigma(k) + z_2 n(2k) = 1$ . Setze

$z_1 \frac{m(2k)}{n(2k)}(S^{4k-1},h) + z_2 \cdot \partial T = \rho_k \in \Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ . Dann gilt :

Lemma 3 : $\rho_k$ ist ein Erzeugendes des freien Summanden von $b\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ bzw. $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ . $n(2k) \cdot \rho_k = \partial T$ .

Beweis : Wir brauchen nur die Aussage $n(2k) \cdot \rho_k = \partial T$ zu beweisen, denn daraus folgt $\delta(\rho_k) = \frac{1}{n(2k)}$ .

$n(2k) \cdot \rho_k = z_1 m(2k) \cdot (S^{4k-1},h) + z_2 n(2k) \cdot \partial T$ .

Nun gilt aber

$m(2k)(S^{4k-1},h) = (-1)^k \quad \sigma(k) \cdot \partial T$

und aus $z_1(-1)^k \quad \sigma(k) + z_2 n(2k) = 1$ folgt die Behauptung.

Bemerkung : Aus diesem Lemma folgt die bekannte Tatsache,

<u>Korollar</u> : Die exakte Sequenz aus Satz 5 sieht folgendermaßen aus

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\cdot\rho_k \oplus \mathrm{Tor}\,\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \longrightarrow \Omega^{4k-1}_{\pi} \longrightarrow 0$$
$$1 \longmapsto n(2k)\,\rho_k$$

bzw.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\cdot\rho_k \oplus \mathrm{Tor}\; b\Omega^{4k-1}_{\pi 0} \longrightarrow \mathrm{Bild}\ J \longrightarrow 0$$
$$1 \longmapsto n(2k)\,\rho_k \quad .$$

Zusammenfassend erhaltem wir.

<u>Satz 7</u> : Sei $\rho_k$ wie in Lemma 3.

$$b\Omega^{4k-1}_{\pi 0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2^{l_k}}$$
$$\rho_k \longleftarrow 1$$

$$\Omega^{4k-1}_{\pi 0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2^{l_k}} \oplus \ \mathrm{Kern}\ e$$
$$\rho_k \longleftarrow 1$$

$$\delta(a,x,y) = \frac{a}{n(2k)} \quad .$$

Zum Beispiel :

$\Omega^{3}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$ $\qquad$ $\Omega^{7}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{16}$ $\qquad$ $\Omega^{11}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$

$\Omega^{15}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_2$ $\qquad$ $\Omega^{19}_{\pi 0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ $\qquad$ [vgl. 15].



Auf eine naheliegende Frage können wir jetzt eine Antwort geben. $\bar{\delta} = \delta \bmod 1$ und e sind beides Homomorphismen von $\Omega^{4k-1}_{\pi} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Welches sind die Beziehungen zwischen $\bar{\delta}$ und e ?

<u>Satz 8</u> : Sei $(M,\alpha) \in \Omega^{4k-1}_{\pi}$ .

$$\bar{\delta}(M,\alpha) = -a_k 2^{2k+1}(2^{2k-1}-1)\ e(M,\alpha) \quad .$$

<u>Beweis</u> : Für $(M,\alpha) \in$ Bild J folgt die Aussage, da Bild J von $(S^{4k-1},h)$ erzeugt wird aus unseren Berechnungen von $\delta$ und den Ergebnissen über e . Also ist die Behauptung für $(M,\alpha) \in \mathbb{Z}_{n(2k)} \subset \mathbb{Z}_{n(2k)} \oplus \mathbb{Z}_{2^{l_k}} \oplus \mathrm{Kern}\ e = \Omega^{4k-1}_{\pi}$ richtig. Für $(M,\alpha) \in \mathbb{Z}_{2^{l_k}} \oplus \mathrm{Kern}\ e$ gilt $\bar{\delta}(M,\alpha) = 0$ und andererseits wegen $l_k < 2k+1$ $\ 2^{2k+1}e(M,\alpha) = 0$ .

Um weitere konkrete Beispiele für die Berechnung von $\delta$ zu erhalten, beschäftigen wir uns zum Schluß dieses Paragraphen mit Linsenräumen.

Sei $G_p = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ z^p = 1\}$ die Gruppe der p - ten Einheitswurzeln. Seien $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p . $G_p$ operiert frei auf $S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ durch $z(z_1,\dots,z_k) = (z^{a_1}z_1,\dots,z^{a_k}z_k)$ . Den Orbitraum $S^{2k-1}/G_p$ bezeichnen wir wie üblich mit $L(p;a_1,\dots,a_k)$, die Projektion $S^{2k-1} \longrightarrow L(p;a_1,\dots,a_k)$ mit $\pi$ . Er wird in Analogie zum 3 - dimensionalen Fall verallgemeinerter Linsenraum genannt.

Wir untersuchen nun zunächst, wie die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $L(p;a_1,\dots,a_k) \longrightarrow SO\infty$ aussehen. Diese Menge ist gleich $K_{\mathbb{R}}^{-1}(L(p;a_1,\dots,a_k))$ .

Satz 9 : Sei $\Lambda = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ .

$$\pi^* \otimes \mathrm{Id} : K_{\Lambda}^{*}(L(p;a_1,\dots,a_k)) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_{\Lambda}^{*}(S^{2k-1}) \otimes \mathbb{Q}$$

ist ein Isomorphismus und für k gerade gilt :

$$K_{\Lambda}^{-1}(L(p;a_1,\dots,a_k))/_{Tor} \cong \mathbb{Z} .$$

Für $\Lambda = \mathbb{C}$ gilt : $\pi^* 1 = \pm p \in K_{\mathbb{C}}^{-1}(S^{2k-1}) = \mathbb{Z}$ ,

für $\Lambda = \mathbb{R}$ und k/2 gerade bzw. für k/2 ungerade, wenn p ungerade, gilt : $\pi^* 1 = \pm p \in K_{\mathbb{R}}^{-1}(S^{2k-1}) \cong \mathbb{Z}$ und für k/2 ungerade und p gerade : $\pi^* 1 = \pm p$ oder $\pm p/2 \in K_{\mathbb{R}}^{-1}(S^{2k-1}) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis : Die erste Behauptung folgt aus einem Satz für allgemeine Kohomologietheorien. Damit ist auch klar, daß $K_{\Lambda}^{-1}(L(p;a_1,\dots,a_{2k}))/_{Tor} \cong \mathbb{Z}$ . Es bleibt also zu zeigen, daß das Bild von $\pi^*$ gleich $p\mathbb{Z}$ oder $p/2\mathbb{Z}$ ist.

Sei $D^{4k-1} \subset L(p;a_1,\dots,a_{2k})$ . Durch $x \longmapsto x$ für $x \in \mathring{D}^{4k-1}$ und $x \longmapsto \infty$ für $x \in L(p;a_1,\dots,a_{2k}) - D^{4k-1}$ ist eine stetige Abbildung $h : L(p;a_1,\dots,a_{2k}) \longrightarrow S^{4k-1} = D^{4k-1}/\partial D^{4k-1}$ gegeben. Betrachte das folgende kommutative Diagramm :

$$\begin{array}{ccccc}
K_{\mathbb{R}}^{-1}(S^{4k-1}) & \xrightarrow{\cdot a_k} & K_{\mathbb{C}}^{-1}(S^{4k-1}) & \xrightarrow{ch_{4k-1}} & H^{4k-1}(S^{4k-1}) \\
\uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\
K_{\mathbb{R}}^{-1}(L(p;a_i))/_{Tor} & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}^{-1}(L(p;a_i))/_{Tor} & \xrightarrow{ch_{4k-1}} & H^{4k-1}(L(p;a_i))/_{Tor} \\
\uparrow h^* & & \uparrow h^* & & \uparrow h^* \\
K_{\mathbb{R}}^{-1}(S^{4k-1}) & \xrightarrow{\cdot a_k} & K_{\mathbb{C}}^{-1}(S^{4k-1}) & \xrightarrow{ch_{4k-1}} & H^{4k-1}(S^{4k-1})
\end{array}$$



Alle auftretenden Gruppen sind isomorph zu $\mathbb{Z}$. Die Abbildungen $\pi^* h^*$ sind in allen drei Kohomologietheorien Multiplikation mit p. Deshalb gilt :

$$p\mathbb{Z} \subset \mathrm{Bild}\, \pi^* : K_{\Lambda}^{-1}(L(p;a_i))/_{Tor} \longrightarrow K_{\Lambda}^{-1}(S^{4k-1}) .$$

Andererseits ist aus dem obigen Diagramm unmittelbar klar, daß für $\Lambda = \mathbb{C}$ und $\Lambda = \mathbb{R}$, wenn k gerade (dann $a_k = 1$) oder k ungerade und p ungerade ist, $\pi^* 1 = \pm p \in K_{\Lambda}^{-1}(S^{4k-1})$ ist, und wenn k ungerade und p gerade ist, $\pi^* 1 = \pm p$ oder $\pm p/2$ ist.

Bekanntlich sind höherdimensionale Linsenräume i.a. nicht stabil parallelisierbar. Wir beschränken uns deshalb bei der Berechnung von $\delta$ auf den 3 - dimensionalen Fall.

Auf Grund der obigen Berechnungen sind wir für einen Linsenraum L(p;q,r) fertig, wenn wir für eine stabile Trivialisierung $\alpha$ von L(p;q,r) $\delta(L(p;q,r),\alpha)$ berechnet haben, denn für ein geeignetes Erzeugendes h von $[L(p;q,r),SO\infty]/_{Tor}$ ist nach Satz 9 $p_1 L(E_h)[SL(p;q,r)] = \frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ - je nachdem ob $\pi^* 1 = \pm p$ oder $\pm p/2$ ist. Es ist also $\delta(L(p;q,r),h) = \delta(L(p;q,r),\alpha) + \frac{2}{3}$ ( oder eventuell $+\frac{1}{3}$, wenn p gerade) .

Aus Satz 3 folgt nun leicht.

Lemma 4 : Sei $\alpha$ eine Trivialisierung von STL(p;q,r), dann gilt :

$$\delta(L(p;q,r),\alpha) = \frac{1}{p}\Big( \delta(S^3,\pi^*\alpha) + \sum_{\substack{z^p=1 \\ z\neq 1}} \alpha(z,S^3)\Big)$$

Der letzte Ausdruck wurde von Atiyah und Bott berechnet.

$$\sum_{\substack{z^p=1\\ z\neq 1}} \alpha(z,S^3) = -d(p;q,r) = -\sum_{\substack{z^p=1\\ z\neq 1}} \frac{z^q+1}{z^q-1}\,\frac{z^r+1}{z^r-1}$$ [Atiyah Bott 4, Theorem 6.27 .]

$d(p;q,r)$ ist bis auf einen Faktor die klassische Dedekind Summe und genügt folgendem Reziprozitätsgesetz [siehe z.B. 16] :

$$\frac{1}{p}d(p;q,r) + \frac{1}{q}d(q;p,r) + \frac{1}{r}d(r;p,q) = 1 - \frac{p^2+q^2+r^2}{3pqr} .$$

Speziell für $q = r = 1$ folgt daraus :

$$d(p;1,1) = -\frac{p^2-3p+2}{3} .$$

In diesem Fall sind auf $TS^3 \oplus 1$ durch

$$S^3 \longrightarrow TS^3 \oplus 1 = S^3 \times \mathbb{C}^2$$
$$(q_1,q_2) \longmapsto ((q_1,q_2),(q_1,q_2))$$
$$(q_1,q_2) \longmapsto ((q_1,q_2),(-q_2,q_1))$$
$$(q_1,q_2) \longmapsto ((q_1,q_2),(iq_1,-iq_2))$$
$$(q_1,q_2) \longmapsto ((q_1,q_2),(iq_2,iq_1))$$

vier über $\mathbb{R}$ linear unabhängige und bezüglich der Operation von $G_p$ auf $TS^3 \oplus 1$ äquivariante Schnitte gegeben. Die dadurch gegebene Trivialisierung von $TS^3 \oplus 1$ ist bezüglich der Standardtrivialisierung ein Erzeugendes von $[S^3, SO\infty]$ [14], die auf $TL(p;1,1) \oplus 1$ induzierte Trivialisierung bezeichnen wir mit $\alpha$ und erhalten :

$$\delta(L(p;1,1),\alpha) = -1 + \frac{p}{3} .$$

Denn $\delta(S^3,\pi^*\alpha) = \pm\frac{2}{3}$ . $\delta(S^3,\pi^*\alpha) = \frac{2}{3}$ führt zum Widerspruch,



da $3\delta\in\mathbb{Z}$, also folgt mit $\delta(S^3,\pi^*\alpha) = -\frac{2}{3}$ die Behauptung aus Lemma 4 .

Wir beenden diesen Paragraphen mit einer Bemerkung über höher dimensionale Linsenräume. Ist ein Linsenraum $L(p;a_1,\dots,a_{2k})$ stabil parallelisierbar und $\alpha$ eine stabile Trivialisierung, so verallgemeinert sich Lemma 4 zu:

$$\delta(L(p;a_1,\dots,a_{2k}),\alpha) = \frac{1}{p}\left[\delta(S^{4k-1},\pi^*\alpha) + \sum_{\substack{z^p=1\\ z\neq 1}} \alpha(z,S^{4k-1})\right]$$

und

$$\sum_{\substack{z^p=1\\ z\neq 1}} \alpha(z,S^{4k-1}) = -d(p;a_1,\dots,a_{2k}) = -\sum_{\substack{z^p=1\\ z\neq 1}} \prod_{j=1}^{2k} \frac{z^{a_j}+1}{z^{a_j}-1} .$$

Da Bild $\delta$ gleich $\left\{\frac{a}{n(2k)} \,\middle|\, a\in\mathbb{Z}\right\}$ , folgt unter der Bedingung, daß $L(p;a_1,\dots,a_{2k})$ stabil parallelisierbar ist, daß der Nenner von $d(p;a_1,\dots,a_{2k})$ ein Teiler von $n(2k)$ ist. Wir können damit festhalten .

<u>Bemerkung</u> : Ist der Nenner von $d(p;a_1,\dots,a_{2k})$ kein Teiler von $n(2k)$ , dann ist $L(p;a_1,\dots,a_{2k})$ nicht stabil parallelisierbar.

Zum Beispiel ist für $p = 3$ der Nenner von $d(p;a_1,\dots,a_{2k})$ gleich $3^k$ und für $k>1$ $3^k$ nicht Teiler von $n(2k)$ [1, Theorem 2.5] , so daß für $p \equiv 0 \bmod 3$ $L(p;a_1,\dots,a_{2k})$ nicht stabil parallelisierbar ist, was andererseits auch klar ist, da die Pontrjaginklassen in diesem Fall nicht verschwinden.

## § 3

## Torusbündel über Tori

### A) Definitionen und allgemeine Resultate

Thema dieses Paragraphen ist die Berechnung der $\delta$ - Invariante in einigen konkreten Fällen. Nachdem wir im vorigen Paragraphen $\delta$ berechnet haben, indem wir auf Erzeugenden von $\Omega_{\pi 0}^{4k-1}$ $\delta$ bestimmt haben, zeigt sich, daß die Berechnung auf konkreten stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten schwierig ist. Das Haupthindernis ist das Auffinden einer Mannigfaltigkeit, die die vorgegebene zum Rand hat.

Wir untersuchen Torusbündel über Tori oder genauer differenzierbare Faserbündel, deren Basis und Faser Tori sind, und deren Strukturgruppe $SL(n;\mathbb{Z})$ ist, die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{Z}^n$ mit Determinante 1. Der Grund, warum wir uns mit Torusbündeln beschäftigen, liegt darin, daß solche Bündel als Umgebungsränder von Singularitäten auftreten, die im Zusammenhang mit Untersuchungen von Hirzebruch der Hilbertschen Modulgruppe eines total reellen Zahlkörpers auftauchen, und daß die $\delta$ - Invariante zunächst bei quadratischen Körpererweiterungen zur Berechnung gewisser Invarianten dient, so z.B. für $p>3$, $p = 3 \bmod 4$ von $h(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ und von sign $H^2/_G$ , wobei $G$ die Hilbertsche Modulgruppe für $\mathbb{Q}\sqrt{p}$ ist. [vgl. 9, 18] . Es liegt also nahe, die $\delta$ - Invariante allgemein für Torusbündel zu berechnen. Das ist mir nur in Spezialfällen gelungen, da das oben angesprochene Hindernis, nämlich das Auffinden einer Mannigfaltigkeit, die das Torusbündel zum Rand hat, i.a. unüberwindlich war.



__Definition__ : Seien $A_1,\dots,A_n \in SL(m;\mathbb{Z})$ und $A_iA_j = A_jA_i$ $1 \leq i \leq n$ , $1 \leq j \leq n$. Die Matrizen $A_i$ induzieren Diffeomorphismen von $T^m = \mathbb{R}^m/_{\mathbb{Z}^m}$ auf sich. Wir konstruieren induktiv differenzierbare Faserbündel $E(A_1,\dots,A_i)$ $1 \leq i \leq n$ über $T^i$ mit Faser $T^m$ und Strukturgruppe $SL(m;\mathbb{Z})$ .

$E(A_1) := I \times T^m/_\sim \quad (1,x) \sim (0,A_1x)$ . $E(A_1)$ ist über $S^1$ gefasert, und $A_i$ $i>1$ operiert auf $E(A_1)$ durch $(t,x) \longmapsto (t,A_ix)$ .

Sei nun $E(A_1,\dots,A_j)$ konstruiert und operiere $A_i$ $(i>j)$ auf $E(A_1,\dots,A_j)$.

$E(A_1,\dots,A_{j+1}) := I \times E(A_1,\dots,A_j)/_\sim \quad (1,x) \sim (0,A_{j+1}x)$ .

$A_i$ $(i>j+1)$ operiert auf $E(A_1,\dots,A_{j+1})$ durch $(t,x) \longmapsto (t,A_ix)$ .

Sei $\pi_j : E(A_1,\dots,A_j) \longrightarrow T^j$ die Projektion.

$$\pi_{j+1} : E(A_1,\dots,A_{j+1}) \longrightarrow T^{j+1} = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \times T^j$$
$$(t,x) \longmapsto (t, \pi_j(x)) .$$

$E(A_1,\dots,A_j)$ trage die durch die kanonischen Orientierungen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^j$ induzierten Orientierungen.

__Beispiel__ [vgl. 18] :

Sei $K$ ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grad $n$ über $\mathbb{Q}$, $M$ eine additive Untergruppe von $K$, die als $\mathbb{Z}$ - Modul frei vom Rang $n$ ist. Mit $U_M^+$ wird die Gruppe der total positiven Einheiten von K betrachtet, die M in sich überführt, also $U_M^+ \cdot M = M$. $U_M^+$ ist frei vom Rang n-1.

Sei $V \subset U_M^+$ von endlichem Index. $M \rtimes V = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \varepsilon \in V, \mu \in M \right\}$ operiert folgendermaßen frei auf $H^n$, H die obere Halbebene. Seien für $x \in K$ die n konjugierten Elemente mit $x^{(1)} = x, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ bezeichnet.

$z = (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\varepsilon^{(1)} z_1 + \mu^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(n)} z_n + \mu^{(n)})$. Da $\varepsilon^{(1)} \cdot \ldots \cdot \varepsilon^{(n)} = 1$ ist, führt $M \rtimes V$ die Menge $\left\{ z \in H^n \middle| \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Im} z_j = 1 \right\}$ in sich über. Den Orbitraum $\left\{ z \in H^n \middle| \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Im} z_j = 1 \right\}_{/M \rtimes V}$ bezeichnen wirmit $E(M,V)$. Er ist eine 2n-1-dim orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. $H^n{}_{/M \rtimes V} \cup \infty$ kann in naheliegender Weise als komplexer Raum aufgefaßt werden [vgl. 18], in dem $\infty$ isolierte Singularität ist. $E(M,V)$ ist Umgebungsrand dieser Singularität.

Wir wollen uns nun überlegen, daß $E(M,V)$ ein Torusbündel über $T^{n-1}$ mit Faser $T^n$ ist. Identifiziere $H^n$ mit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch $H^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n; \ln \operatorname{Im} z_1, \ldots, \ln \operatorname{Im} z_n)$$

Die Menge $\left\{ z \in H^n \middle| \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Im} z_j = 1 \right\}$ entspricht dabei dem Unterraum $\mathbb{R}^n \times U$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$ ist. $M \rtimes V$ operiert dann auf $\mathbb{R}^n \times U$ durch

$$(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \longmapsto (\varepsilon^{(1)} x_1 + \mu^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(n)} x_n + \mu^{(n)}; y_1 + \ln \varepsilon^{(1)}, \ldots, y_n + \ln \varepsilon^{(n)})$$

Der Quotient $\mathbb{R}^n \times U_{/M \rtimes V} = E(M,V)$ ist ein Bündel mit Faser $\mathbb{R}^n{}_{/M} = T^n$ über $U_{/V} = T^{n-1}$, also ein Torusbündel.

Um dieses Torusbündel im Sinne der obigen Definition durch ein n - Tupel von Matrizen zu beschreiben, gehen wir zunächst



auf $\mathbb{R}^n$ zu einer Basis über, bezüglich derer die Operation von M auf $\mathbb{R}^n$ gleich der Standardoperation von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ wird. Solch eine Basis erhalten wir, indem wir eine $\mathbb{Z}$ - Basis $\mu_1, \ldots, \mu_n$ von M angeben. Dann ist nämlich $(\mu_i^{(1)}, \ldots, \mu_i^{(n)})$ $1 \leq i \leq n$ eine solche Basis des $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ eine $\mathbb{Z}$ - Basis von V. Betrachte die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varepsilon_i^{(1)} x_1, \ldots, \varepsilon_i^{(n)} x_n).$$

Bezüglich der Basis $(\mu_i^{(1)}, \ldots, \mu_i^{(n)})$ $1 \leq i \leq n$ ist diese lineare Abbildung durch eine Matrix $A_i$ gegeben, und, da $A_i$ den durch $(\mu_i^{(1)}, \ldots, \mu_i^{(n)})$ $1 \leq i \leq n$ aufgespannten $\mathbb{Z}$ - Modul in sich überführt, gilt $A_i \in SL(n;\mathbb{Z})$.

Man kann sich leicht überlegen, daß $E(M,V) = E(A_1, \ldots, A_{n-1})$ ist.

Wir wollen nun den Kohomologiering von $E(A_1, \ldots, A_n)$ untersuchen. Bekanntlich gilt für ein Bündel $F \longrightarrow E \downarrow S^1$ mit charakteristischer Abbildung $A : F \rightarrow F$ :

$H^n(E;\mathbb{R}) \cong \text{Kokern } H^{n-1}(A-1) \oplus \text{Kern } H^n(A-1)$. Das ergibt sich z.B. aus dem Studium der Spektralsequenz.

Wenn $\text{Kern } H^n(A-1) \longrightarrow \text{Kokern } H^n(A-1)$, $x \longmapsto [x]$ für alle n ein Isomorphismus ist, folgt:

$H^*(E;\mathbb{R}) = H^*(S^1;\mathbb{R}) \otimes H^*(F;\mathbb{R})^{A^*}$ (als Gruppen), wobei $H^*(F;\mathbb{R})^{A^*}$ die unter $H^*(A)$ invariante Teilmenge ist.

Für Torusbündel folgt daraus induktiv :

<u>Lemma 5</u> : Wenn für alle i,n $\text{Kern } H^n(A_i-1) \longrightarrow \text{Kokern } H^n(A-1)$, $x \longmapsto [x]$ ein Isomorphismus ist, gilt:

$$H^*(E(A_1,..,A_n);\mathbb{R}) = H^*(T^n;\mathbb{R}) \otimes H^*(T^m;\mathbb{R})^{A_1^*,\dots,A_n^*}$$
$$= \Lambda^*(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^*(\mathbb{R}^m)^{A_1^*,\dots,A_n^*} \qquad \text{(als Grupp}$$

Wenn die $A_i$ in $GL(m;\mathbb{R})$ simultan diagonalisierbar sind (z.B. $E(A_1,..,A_n) = E(M;V)$ ), ist die obige Vorraussetzung erfüllt. Dann ist

$$\begin{aligned} \Lambda^*(\mathbb{R}^n)\otimes\Lambda^*(\mathbb{R}^m)^{A_i^*} &\longrightarrow H^*(E(A_1,..,A_n);\mathbb{R}) \\ a \otimes b &\longmapsto [f_{a\otimes b}] \end{aligned}$$

sogar ein Ringisomorphismus, wobei $f_{a\otimes b}:E(A_i) \to \Lambda^*T(E(A_i))$ der durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)\otimes\Lambda^*(\mathbb{R}^m) \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, a\otimes b) \end{aligned}$$

induzierte Schnitt ist und $[f_{a\otimes b}]$ das durch $f_{a\otimes b}$ repräsentierte Element in der de Rham Kohomologie ist.

Wenn wir die $\delta$ - Invariante für Torusbündel berechnen wollen, müßen wir zunächst untersuchen, ob Torusbündel stabil parallelisierbar sind.

Diese Frage kann für die Torusbündel $E(M,V)$ sehr leicht positiv beantwortet werden. $TE(M,V) = T(\mathbb{R}^n \times U)_{/M \rtimes V}$ .
Sei $f_1,\dots,f_{n-1}$ eine Basis von $U$, $e_1,..,e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. $T(\mathbb{R}^n \times U) = (\mathbb{R}^n \times U) \times (\mathbb{R}^n \times U)$ . Auf $T(\mathbb{R}^n \times U)$ sind durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times U &\longrightarrow T(\mathbb{R}^n \times U) = (\mathbb{R}^n \times U) \times (\mathbb{R}^n \times U) \\ ((x_i),(y_i)) &\longmapsto \big(((x_i),(y_i)) , (\exp(y_j)e_j , 0)\big) \quad 1 \leq j \leq n \text{ und} \\ ((x_i),(y_i)) &\longmapsto \big(((x_i),(y_i)) , (0 , f_j)\big) \quad 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

2n-1 linear unabhängige Schnitte gegeben, die mit der Aktion von $M \rtimes V$ verträglich sind. Sie induzieren also eine Trivialisierung auf $E(M,V)$.



Im allgemeinen ist mir für Torusbündel nicht bekannt, ob sie stabil parallelisierbar sind. Man kann aber zeigen, daß die Komplexifizierung $TE(A_1,..,A_n)\otimes\mathbb{C}$ parallelisierbar ist. Das ist insofern von Interesse, als man die Definition der $\delta$ - Invariante in natürlicher Weise auf Mannigfaltigkeiten $M$ mit Trivialisierung von $STM\otimes\mathbb{C}$ erweitern kann. Wir werden das später tun und zunächst zeigen, daß $TE(A_1,..,A_n)\otimes\mathbb{C}$ parallelisierbar ist.

<u>Lemma 6</u> : Seien $A_1,..,A_n \in SL(m;\mathbb{Z})$. Dann ist $TE(A_1,..,A_n)\otimes\mathbb{C}$ parallelisierbar.

<u>Beweis</u> : 1.) Es gibt stetige Abbildungen $f_i : I \longrightarrow GL(m;\mathbb{C})$, so daß $f_i(0) = Id$ , $f_i(1) = A_i$ und $f_i(t)A_j = A_jf_i(t)$ für $1 \leq i \leq n$ , $1 \leq j \leq n$ und $t \in I$ .

Denn betrachte in $L(m;\mathbb{C})$ den von $A_1,..,A_n$ aufgespannten Unterraum $[A_1,..,A_n]$. Für $B,C \in [A_1,..,A_n]$ gilt $BC = CB$ . Die Determinante ist eine analytische Funktion det : $[A_1,..,A_n] \longrightarrow \mathbb{C}$ . Daraus folgt $[A_1,..,A_n] - \det^{-1}(0)$ ist zusammenhängend. Wähle $f_i$ so, daß Bild$f_i \in [A_1,..,A_n] - \det^{-1}(0)$ . Dann ist klar, daß $f_i$ die obigen Eigenschaften erfüllt.

2.) Seien $f_i$ wie oben angegeben. Wir geben nun induktiv eine Trivialisierung von $TE(A_1,..,A_n)\otimes\mathbb{C}$ an.

Sei $\varphi_j : TE(A_1,..,A_j)\otimes\mathbb{C} \longrightarrow E(A_1,..,A_j)\times\mathbb{C}^{j+m}$ bereits konstruiert, und $dA_i\otimes 1 : TE(A_1,..,A_j)\otimes\mathbb{C} \longrightarrow TE(A_1,..,A_j)\otimes\mathbb{C}$ bzgl. $\varphi_j$ für $i > j$ gegeben durch

$$\begin{aligned} dA_i\otimes 1 : E(A_1,..,A_j)\times\mathbb{C}^{j+m} &\longrightarrow E(A_1,..,A_j)\times\mathbb{C}^{j+m} \\ (x, v) &\longmapsto \left(A_i x , \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix} v\right) \end{aligned}$$

Es ist $TE(A_1,..,A_{j+1})\otimes\mathbb{C} = I\times E(A_1,..,A_{j+1})\times\mathbb{C}^{j+1+m}/_{\approx}$

$(1,x,v)\approx\left(0,A_{j+1}x,\begin{pmatrix}Id&0\\0&A_{j+1}\end{pmatrix}v\right)$

Wir definieren nun

$$\varphi_{j+1}: I\times E(A_1,..,A_j)\times\mathbb{C}^{j+1+m}/_{\approx} \longrightarrow I\times E(A_1,..,A_j)/_{\sim}\times\mathbb{C}^{j+1+m}$$

$$(t,x,v)\longmapsto \left(t,x,\begin{pmatrix}Id&0\\0&f_{j+1}(t)\end{pmatrix}v\right)$$

Man rechnet leicht nach, daß $\varphi_{j+1}$ wohldefiniert, faserweise linear und bijektiv und somit ein Vektorbündelisomorphismus ist, und daß $dA_i\otimes 1$ bzgl. $\varphi_{j+1}$ für $i>j+1$ gegeben ist durch

$$dA_i\otimes 1: E(A_1,..,A_{j+1})\times\mathbb{C}^{j+1+m}\longrightarrow E(A_1,..,A_{j+1})\times\mathbb{C}^{j+1+m}$$

$$(x,v)\longmapsto\left(A_ix,\begin{pmatrix}Id&0\\0&A_i\end{pmatrix}v\right)$$

Bemerkung : Eine Trivialisierung wie beim obigen Beweis angegeben nennen wir im folgenden eine Trivialisierung vom Typ W . z.B. induziert die oben für $E(M,V)$ angegebene Trivialisierung eine vom Typ W.

Wir erweitern nun die Definition der $\delta$ - Invariante auf Mannigfaltigkeiten M mit Trivialisierung $\alpha$ von $STM\otimes\mathbb{C}$ . Da sämtliche Pontrjaginzahlen von M verschwinden, gibt es $k\in\mathbb{N}$ und Mannigfaltigkeit N, so daß $kM=\partial N$. Wir definieren Pontrjaginklassen $p_i(STN,\alpha)\in H^{4i}(N/\partial N)$ durch $p_i(STN,\alpha) = (-1)^i\, c_{2i}(STN\otimes\mathbb{C}/_{\alpha})$ .

Definition : $\delta(M,\alpha)=\frac{1}{k}(\text{sign } N - L(p_i(STN,\alpha))[N/M]\ )$



Überlegungen wie im § 1 ergeben unmittelbar, daß $\delta(M,\alpha)$ wohldefiniert ist. Jede Trivialisierung $\alpha$ von STM induziert eine Trivialisierung von $STM\otimes\mathbb{C}$, und das eben definierte $\delta$ für diese Trivialisierung stimmt mit dem früher definierten $\delta(M,\alpha)$ überein. Die Sätze von §1 verallgemeinern sich in natürlicher Weise.

Wir wollen nun für Torusbündel $E(A_1,\dots,A_n)$ mit Trivialisierung $\varphi$ vom Typ W $\delta(E(A_1,\dots,A_n),\alpha)$ bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst folgende Situation. Sei $SL(m;\mathbb{Z})_N\subset SL(m;\mathbb{Z})$ die Untergruppe aller Matrizen, deren Koeffizienten modulo N die Koeffizienten der Einheitsmatrix sind. Seien $A_i\in SL(m;\mathbb{Z})_N$ . Schreibe $\mathbb{Z}_N$ als $\left\{\frac{s}{N}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ \middle|\ s\in\mathbb{Z}\right\}$ . $(\mathbb{Z}_N)^m$ operiert auf $T^m=\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ durch

$$\left(\frac{s_1}{N},\dots,\frac{s_m}{N}\right)(x_1,\dots,x_m)=\left(x_1+\frac{s_1}{N},\dots,x_m+\frac{s_m}{N}\right) .$$

Diese Operation ist frei und mit den Diffeomorphismen $A_i$ verträglich. Sie induziert deshalb eine Operation von $(\mathbb{Z}_N)^m$ auf $E(A_1,\dots,A_n)$.

Satz 10 : $\delta(E(A_1,\dots,A_n),\varphi)=\frac{1}{N^m-1}\sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}_N^m\\ g\neq 0}}\alpha(g,E(A_1,\dots,A_n))$ .

Beweis : Durch die Abbildung $h: T^m/\mathbb{Z}_N^m\longrightarrow T^m$, $x\longmapsto Nx$ ist ein Diffeomorphismus gegeben. Wir identifizieren auf diese Weise $T^m/\mathbb{Z}_N^m$ mit $T^m$. Die durch $A_i$ auf $T^m/\mathbb{Z}_N^m\cong T^m$ induzierte Abbildung ist $h^{-1}A_ih=A_i$. Also ist $E(A_1,\dots,A_n)/\mathbb{Z}_N^m\cong E(A_1,\dots,A_n)$.

Die Abbildung $\begin{array}{l} T^m \longrightarrow T^m \\ x \longmapsto Nx \end{array}$ ist vertauschbar mit den $A_i$ und induziert deshalb eine Abbildung $\pi_N : E(A_1,\dots,A_n) \longrightarrow E(A_1,\dots,A_n)$. Bezüglich der obigen Identifizierung von $E(A_1,\dots,A_n)/\mathbb{Z}_N^m$ mit $E(A_1,\dots,A_n)$ ist $\pi_N$ die Projektion von $E(A_1,\dots,A_n)$ auf $E(A_1,\dots,A_n)/\mathbb{Z}_N^m$.

Sei $\varphi$ die vorgegebene Trivialisierung auf $E(A_1,\dots,A_n)$. Die unter $\pi_N$ zurückgeholte Trivialisierung ist gleich $N\cdot\varphi$. Dabei ist $N = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & N\cdot Id \end{pmatrix} \in SL(n+m;\mathbb{C})$

Diese Trivialisierung ist aber homotop zu $\varphi$. Also ist

$$\delta(E(A_1,\dots,A_n),\varphi) = \delta(E(A_1,\dots,A_n),\pi_N^*\varphi) = \delta(E(A_1,\dots,A_n)).$$

Nach Satz 3 gilt somit :

$$\delta(E(A_1,\dots,A_n)) = N^m\cdot\delta(E(A_1,\dots,A_n)) - \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}_N^m\\ g\neq 0}} \alpha(g,E(A_1,\dots,A_n)).$$

Mithin ist der Satz bewiesen .

Bemerkung : Das Ergebnis dieses Satzes ist in mehrerer Hinsicht interessant. Zum einen haben wir die $\delta$ - Invariante für gewisse Torusbündel durch eine andere Invariante, die $\alpha$ - Invariante einer bestimmten Gruppenoperation ausgedrückt. Für $N = 2$ ist das möglicherweise ein guter Ansatzpunkt für die allgemeine Berechnung der $\delta$ - Invariante für Torusbündel. Denn die $\alpha$ - Invariante einer Involution kann intrinsisch, d.h. ohne Benutzung einer Mannigfaltigkeit, die die gegebene zum Rand hat, definiert werden. Das Hauptproblem bei dieser Definition ist allerdings, eine charakteristische Untermannigfaltigkeit zu finden. Wir haben diesen



Weg in der vorliegenden Arbeit nicht eingeschlagen. Es ergibt sich also das folgende

Problem : Bestimme eine charakteristische Untermannigfaltigkeit von $(E(A_1,\dots,A_n),g)$ , $A_i \in SL(m;\mathbb{Z})_2$ , $g \in \mathbb{Z}_2^m$ .

Zum anderen folgt aus Satz 10 , daß für die dort betrachteten Torusbündel die $\delta$ - Invariante unabhängig von der Trivialisierung $\varphi$ vom Typ W ist.

Wir haben durch Satz 10 für eine große Anzahl von Torusbündeln die $\delta$ - Invariante durch die $\alpha$ - Invariante ausgedrückt. Um das Ergebnis zu verallgemeinern, nutzen wir aus, daß $SL(m;\mathbb{Z})/SL(m;\mathbb{Z})_N$ endlich ist. Für $A \in SL(m;\mathbb{Z})$ liegt also eine geeignete Potenz von A in $SL(m;\mathbb{Z})_N$

Wir sind deshalb fertig, wenn wir die $\delta$ - Invariante von $E(A_1^{s_1},\dots,A_n^{s_n})$ durch die $\delta$ - Invariante von $E(A_1,\dots,A_n)$ ausdrücken können.

Betrachte die Überlagerung $\begin{array}{l} T^n \longrightarrow T^n \\ (x_i) \longmapsto (s_ix_i) \end{array}$ . Wenn wir diese Überlagerung unter der Projektion $E(A_1,\dots,A_n) \longrightarrow T^n$ zurückholen, erhalten wir eine Überlagerung von $E(A_1^{s_1},\dots,A_n^{s_n})$ über $E(A_1,\dots,A_n)$ und damit eine $\mathbb{Z}_{s_1}\times\dots\times\mathbb{Z}_{s_n}$ - Operation auf $E(A_1^{s_1},\dots,A_n^{s_n})$ mit Orbitraum $E(A_1,\dots,A_n)$. Sei $\varphi$ eine Trivialisierung vom Typ W auf $E(A_1,\dots,A_n)$. Dann ist die unter der Projektion $E(A_1^{s_1},\dots,A_n^{s_n}) \longrightarrow E(A_1,\dots,A_n)$ zurückgeholte Trivialisierung $\tilde{\varphi}$ auch vom Typ W. Mit Satz 3 erhalten wir.

<u>Lemma 7</u> : $\delta(E(A_1^{s_1},\ldots,A_n^{s_n}),\tilde{\varphi}) = s_1\cdot\ldots\cdot s_n\cdot\delta(E(A_1,\ldots,A_n),\varphi) - \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}_{s_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{s_n}\\ g\neq 0}} \alpha(g,E(A_1^{s_1},\ldots,A_n^{s_n}))$

Sei $s_N$ die Anzahl der Elemente von $SL(m;\mathbb{Z})/SL(m;\mathbb{Z})_N$ . Aus Satz 10 und Lemma 7 erhalten wir.

<u>Satz 11</u> : Sei $\varphi$ eine Trivialisierung von $TE(A_1,\ldots,A_n)\otimes\mathbb{C}$ vom Typ W. Dann ist $\delta(E(A_1,\ldots,A_n),\varphi)$ unabhängig von der Auswahl von $\varphi$. Wir schreiben deshalb für $\delta(E(A_1,\ldots,A_n),\varphi)$ im folgenden $\delta E(A_1,\ldots,A_n)$ .

Ferner gilt:

$$\delta E(A_1,\ldots,A_n) = \frac{1}{s_N^n}\left[\frac{1}{N^m-1}\sum_{g\in\mathbb{Z}_N^m;\,g\neq 0}\alpha(g,E(A_1^{s_N},\ldots,A_n^{s_N})) - \sum_{g\in\mathbb{Z}_{s_N}^n;\,g\neq 0}\alpha(g,A_1^{s_N},\ldots,A_n^{s_N}))\right] .$$

<u>Bemerkung</u> : Falls m ungerade ist, induziert die Abbildung
$$\begin{aligned} T^m &\longrightarrow T^m \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$
auf $E(A_1,\ldots,A_n)$ eine orientierungsumkehrende Abbildung, die die Parallelisierung respektiert. Also gilt dann $\delta E(A_1,\ldots,A_n) = 0$ .

Wir wollen nun Satz 10 in einem einfachen Fall zur Berechnung der $\delta$ - Invariante anwenden.

<u>Beispiel</u>: Sei $A\in SL(2;\mathbb{Z})_2$ , $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1\end{pmatrix}$

Wir können $E(A)$ als Bündel über $T^2$ mit Faser $S^1$ interpretieren: $E(A) = (I\times S^1)\times S^1/\sim \quad (1,x_1,x_2)\sim(0,x_1,x_1^c x_2)$ . Das assoziierte Bündel mit Faser $D^2$ bezeichnen wir mit $D(A)$.



Die Operation von $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ läßt sich in natürlicher Weise auf D(A) fortsetzen. Zur Berechnung der $\alpha$ - Invariante bestimmen wir für $(\frac{s_1}{2}\ ,\ \frac{s_2}{2})\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ die Fixpunktmannigfaltigkeit. Nur $(0\ ,\ \frac{1}{2})$ hat Fixpunkte, nämlich die Basis $T^2$. Das Normalenbündel an die Fixpunktmannigfaltigkeit ist D(A). Es gilt:

$$\begin{aligned} L((0\ ,\ \tfrac{1}{2})\ ,\ D(A)) &= \tanh c_1 D(A)\left[T^2\right] \\ &= c_1 D(A)\left[T^2\right] \\ &= c\ . \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ trivial auf $H^2(D(A),E(A);\mathbb{R})$ operiert. Daraus folgt für $g\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
$\mathrm{sign}(g,D(A)) = \mathrm{sign}\ d(A) = \mathrm{sign}\ c$ .

Also
$$\alpha(g,E(A)) = \begin{cases} \mathrm{sign}\ c - c & \text{für } g = (0,\tfrac{1}{2}) \\ \mathrm{sign}\ c & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit Satz 10 erhalten wir
$$\delta E(A) = \mathrm{sign}\ c - \frac{c}{3}\ .$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften von $\delta E(A_1,\ldots,A_n)$ beweisen.

<u>Satz 12</u> :

1.) $\delta E(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_n) = -\delta E(A_1,\ldots,A_j^{-1},\ldots,A_n)$

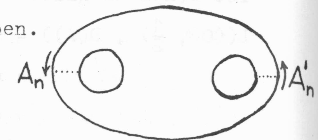
2.) Sei $\sigma$ eine Permutation von $\{1,\ldots,n\}$ .
$\delta E(A_{\sigma(1)},\ldots,A_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}\sigma\cdot\delta E(A_1,\ldots,A_n)$

3.) Sei für $i\neq j$ $A_j'A_i = A_iA_j'$
$\delta E(A_1,\ldots,A_jA_j',\ldots,A_n) = \delta E(A_1,\ldots,A_j'A_j,\ldots,A_n)$

4.) Sei für $i \neq j$ $BA_i = A_iB$

$\delta E(A_1,..,A_j,..,A_n) = \delta E(A_1,..,B^{-1}A_jB,..,A_n)$

5.) Sei $A'_nA_i = A_iA'_n$ für $i \neq n$. Sei $N(A_n,A'_n)$ das Bündel über der kanonisch orientierten 2-mal gelochten Kreisscheibe mit Faser $E(A_1,..,A_{n-1})$, das wir erhalten, indem wir - wie in der folgenden Skizze - entlang der gepunkteten Linie mittels $A_n$ bzw. $A'_n$ verkleben.




Es ist $\partial N(A_n,A'_n) = E(A_1,..,A_nA'_n) - E(A_1,..,A_n) - E(A_1,..,A'_n)$

Es gilt:

$\delta E(A_1,..,A_nA'_n) - \delta E(A_1,..,A_n) - \delta E(A_1,..,A'_n) = \operatorname{sign} N(A_n,A'_n)$

6.) Seien $A_1,..,A_{2n-1},A'_j \in SL(2n;\mathbb{Z})$. Sei für $i \neq j$ $A_iA'_j = A'_jA_i$. Ferner gebe es eine Basis von $\mathbb{R}^{2n}$ bzgl. derer $A_1,..,A_{2n-1},A'_j$ Diagonalgestalt haben. Die von $A_1,..,\hat{A}_j,..,A_{2n-1}$ aufgespannte Gruppe sei vom Rang 2n-2.

Dann gilt:

$$\delta E(A_1,..,A_jA'_j,..,A_{2n-1}) = \delta E(A_1,..,A_j,..,A_{2n-1}) + \delta E(A_1,..,A'_j,..,A_{2n-1})$$

7.) Seien $A_1,..,A_{2n-1} \in SL(2n;\mathbb{Z})$ simultan diagonalisierbar und die von $A_1,..,A_{2n-1}$ aufgespannte Gruppe vom Rang 2n-1.

Dann gilt:

$$\delta E(A_1,..,A_i,..,A_{2n-1}) = \delta E(A_1,..,-A_i,..,A_{2n-1}) \quad .$$

Beweis : Die Eigenschaften 1 und 2 folgen aus Orientierungsgründen .

Die Eigenschaften 3 und 4 folgen aus der Tatsache, daß



die zugrundeliegenden Räume diffeomorph sind.

Man überlegt sich leicht, daß die Trivialisierungen von $E(A_1,..,A_nA'_n)$ , $E(A_1,..,A_n)$ und $E(A_1,..,A'_n)$ auf $N(A_n,A'_n)$ fortsetzbar sind. Mithin gilt die 5. Eigenschaft.

Die 7. Eigenschaft folgt unmittelbar aus der 6. .

Die 6. Eigenschaft braucht wegen der 2. nur für $j = 2n-1$ gezeigt zu werden. Es bleibt also wegen 5. unter den Voraussetzungen der 6. Eigenschaft nur gezeigt zu werden:

$\operatorname{sign} N(A_{2n-1},A'_{2n-1}) = 0$ .

Um das zu beweisen, benutzen wir einen Satz von Wall über die Nichtadditivität der Signatur von berandeten Mannigfaltigkeiten. Wir formulieren den Satz zunächst.

Satz von Wall : [vgl. 12, Seite14]

Seien $Y,Y_-,Y_+$ kompakte orienterte 2m - dim Mannigfaltigkeiten mit Rand,. so daß

(a) $Y = Y_- \cup Y_+$ , $Y_- \cap Y_+ = \partial Y_- \cap \partial Y_+ =: X_0$ , wobei $X_0$ eine berandete Untermannigfaltigkeit von $\partial Y_-$ und $\partial Y_+$ ist,

(b) $X_0$ mit der induzierten Orientierung von $\partial Y_-$ versehen ist.

Sei ferner $X_\pm = \partial Y_\pm \setminus \mathring{X}_0$ , also $\partial Y = X_+ \cup X_-$ , $Z := \partial X_0$ .

Mit $V = H^{m-1}(Z;\mathbb{R})$,

$A = \text{Bild}(H^{m-1}(X_-;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{m-1}(Z;\mathbb{R}))$,

$B = \text{Bild}(H^{m-1}(X_0;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{m-1}(Z;\mathbb{R}))$,

$C = \text{Bild}(H^{m-1}(X_+;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{m-1}(Z;\mathbb{R}))$

ist

$\operatorname{sign} Y = \operatorname{sign} Y_- + \operatorname{sign} Y_+ - \tau(V;A,B,C)$ .

Dabei ist $\tau(V;A,B,C)$ die Signatur der Bilinearform $\hat{\beta}$ auf $W := (A\cap(B+C))/((A\cap B)+(A\cap C))$, gegeben durch

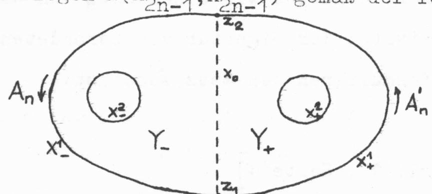
$\hat{\beta}(w_1,w_2) := (-1)^m(b_1 \cup c_2)[Z]$

mit $w_i = a_i + (A\cap B) + (A\cap C) \in W$, $a_i = b_i + c_i$, $a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C$.

$\tau(V;A,B,C)$ ändert sich bei einer Permutation von $A,B,C$ mit dem Vorzeichen der Permutation.

Beweis von Satz 12. 6: Behauptung : $\operatorname{sign} N(A_{2n-1},A'_{2n-1}) = 0$.

Wir zerlegen $N(A_{2n-1},A'_{2n-1})$ gemäß der folgenden Skizze.




Nach dem Satz von Wall gilt wegen $\operatorname{sign} Y_+ = \operatorname{sign} Y_- = 0$ :

$\operatorname{sign} N(A_{2n-1},A'_{2n-1}) = -\tau(V;A,B,C)$ .

Wir berechnen zunächst $V = H^{2n-1}(Z;\mathbb{R})$ . $Z = Z_1 + Z_2$ $= E(A_1,..,A_{2n-2}) + (-E(A_1,..,A_{2n-2}))$. Nach Lemma 5 gilt $H^*(E(A_1,..,A_{2n-2});\mathbb{R}) = H^*(T^{2n-2};\mathbb{R}) \otimes H^*(T^{2n};\mathbb{R})^{A_i^*}$, wobei $H^*(T^{2n};\mathbb{R})^{A_i^*}$ der unter $H^*(A_1),\dots,H^*(A_{2n-2})$ festgelassene Unterraum ist. Wir wählen eine Basis von $\mathbb{R}^{2n}$, bzgl. derer $A_1,..,A_{2n-1},A'_{2n-1}$ Diagonalgestalt

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} a_j^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_j^{(2n)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{A}'_{2n-1} = \begin{pmatrix} a'^{(1)}_{2n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'^{(2n)}_{2n-1} \end{pmatrix}$$

haben. Dann ist $H^*(T^{2n};\mathbb{R})^{A_j^*} = \Lambda^*(\mathbb{R}^{2n})^{\tilde{A}_j}$ . Der Unterraum



$\Lambda^*(\mathbb{R}^{2n})^{\tilde{A}_j}$ wird von den Elementen $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ $(i_1<\dots<i_k)$ erzeugt mit $a_j^{(i_1)}\cdot\ldots\cdot a_j^{(i_k)} = 1$ für alle $j = 1,..,2n-2$ . Da die von $A_1,..,A_{2n-2}$ erzeugte Gruppe den Rang $2n-2$ hat, gibt es für $0<k<2n$ höchstens ein $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ bzw. das duale Element $e_{l_1}\wedge\dots\wedge e_{l_{2n-k}}$ mit der Eigenschaft $a_j^{(i_1)}\cdot\ldots\cdot a_j^{(i_k)} = 1$ bzw $a_j^{(l_1)}\cdot\ldots\cdot a_j^{(l_{2n-k})} = 1$ für alle $j = 1,..,2n-2$.

Wenn es kein $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ mit dieser Eigenschaft gibt, folgt $H^*(T^{2n};\mathbb{R})^{A_i^*} = H^0(T^{2n};\mathbb{R}) \oplus H^{2n}(T^{2n};\mathbb{R})$ und damit $H^{2n-1}(E(A_1,..,A_{2n-2});\mathbb{R}) = \{0\}$. Daraus folgt aber $V = \{0\}$ und damit $\operatorname{sign} N(A_{2n-1},A'_{2n-1}) = 0$.

Sei nun $a_j^{(i_1)}\cdot\ldots\cdot a_j^{(i_k)} = a_j^{(l_1)}\cdot\ldots\cdot a_j^{(l_{2n-k})} = 1$ für $1 \leq j \leq 2n-2$. Dann gilt

$$H^{2n-1}(E(A_1,..,A_{2n-2});\mathbb{R}) = H^{2n-k-1}(T^{2n-2};\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} \oplus H^{k-1}(T^{2n-2};\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}e_{l_1}\wedge\dots\wedge e_{l_{2n-k}}$$

Wir identifizieren $H^{2n-1}(E(A_1,..,A_{2n-2});\mathbb{R})$ mit

$$H^{2n-k-1}(T^{2n-2};\mathbb{R}) \oplus H^{k-1}(T^{2n-2};\mathbb{R}) = \Lambda^{2n-k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) .$$

Die Multiplikation auf $H^{2n-1}(E(A_1,..,A_{2n-2};\mathbb{R})$ ist dann gegeben durch

$(v,w) \cup (v',w') = \varepsilon(v\wedge w' - v'\wedge w)$,

wobei $\varepsilon$ das Signum der Permutation $(i_1,..,i_k,l_1,..,l_{2n-k})$ ist. Wir haben damit $V$ bestimmt.

Wir wollen nun $A,B$ und $C$ bestimmen. Da $X_-^1$ , $X_0$ , $X_+^1$ homotopieäquivalent zu $E(A_1,..,A_{2n-2})$ sind, gilt

$$H^{2n-1}(X_\mp^1;\mathbb{R}) = H^{2n-1}(X_0;\mathbb{R}) = \Lambda^{2n-k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}).$$

Bezeichne die Inklusion $Z \to X_-$ mit $i_-$ . Entsprechend

$i_o$ , $i_+$ . Dann gilt:

$$V = H^{2n-1}(Z;\mathbb{R}) = \Lambda^{2n-k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{2n-k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{2n-2})$$

$$A = i_-^* H^{2n-1}(X_-;\mathbb{R}) = \left\{((v,w),(a^{-1}v,aw))\right\} \quad , a = a_{2n-1}^{(i_1)} \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}^{(i_k)}$$

$$B = i_0^* H^{2n-1}(X_\theta;\mathbb{R}) = \left\{((v,w),(v,w))\right\}$$

$$C = i_+^* H^{2n-1}(X_+;\mathbb{R}) = \left\{((v,w),(a'v,a'^{-1}w))\right\} \quad ,a' = a'^{(i_1)}_{2n-1} \cdot \ldots \cdot a'^{(i_k)}_{2n-1}$$

Zur Berechnung von $\tau(V;A,B,C) = -\tau(V;B,A,C)$. Falls $a = 1$ oder $a' = 1$ oder $aa' = 1$ ist, gilt $W = B \cap (A+C)/B\cap A + B\cap C = 0$ und damit $\tau(V;B,A,C) = 0$.

Falls das nicht der Fall ist folgt $B\cap A = B\cap C = 0$ und

$$W = B\cap(A+C) = B = A+C =$$
$$\Big\{\underbrace{((v,w),(a^{-1}v,aw))}_{\in A} + \frac{1-a^{-1}}{1-a'^{-1}}\underbrace{((a'^{-1}v,aw),(v,aa'^{-1}w))}_{\in C}\Big\}$$

Eine einfache Rechnung ergibt für $\hat\beta$ auf $W$ :

$$\hat\beta\langle[((v,w),\ldots],[((v',w'),\ldots]\rangle$$
$$= \varepsilon\frac{1-a^{-1}}{1-a'^{-1}}(a-a'^{-1})(v\wedge w' + v'\wedge w) \quad .$$

Die kanonische Basis von $\Lambda^{2n-k-1}(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{2n-2})$ induziert eine Basis auf $W$, bzgl. derer die Schnittmatrix $\hat\beta$ bei geeigneter Anordnung der Basiselemente eine Matrix ist, bei der außer in der Nebendiagonale nur Nullen stehen. Die Signatur einer solchen Matrix ist 0.

Also gilt:

$$\operatorname{sign} N(A_{2n-1},A'_{2n-1}) = \tau(V;B,A,C) = 0.$$

q.e.d.



Als Anwendung von Satz 12 betrachten wir folgende Situation. Sei $U \subset SL(2n;\mathbb{Z})$ eine abelsche Untergruppe frei vom Rang 2n-1, deren Elemente bzgl. einer geeigneten Basis von $\mathbb{R}^{2n}$ Diagonalgestalt haben. Sei $A_1,\ldots,A_{2n-1}$ eine Basis von U. Aus Satz 12 2. und 6. fogt, daß $\delta E(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ unabhängig von der Auswahl dieser Basis ist. Wir schreiben deshalb für $\delta E(A_1,\ldots,A_{2n-1}) = \delta(U)$.

Sei ferner $U' \subset U$ eine Untergruppe von endlichem Index in U. Dann gilt:

$$\delta(U') = [U:U']\cdot\delta(U) \quad .$$

z.B. betrachte das einer Spitze vom Typ (M,V) zugeordnete Torusbündel E(M,V). V operiert auf M, kann also bzgl. einer Basis von M als Untergruppe U von $SL(2n;\mathbb{Z})$ aufgefaßt werden. $\delta E(M,V) = \delta(U)$ .

<u>Satz 13</u> : Sei gegeben eine Spitze vom Typ (M,V) und $V' \subset V$ von endlichem Index. Dann gilt:

$$\delta(M,V') = [V:V']\cdot\delta(M,V) \quad .$$

Weiterhin folgt für $A_1,\ldots,A_{2n-1}$ wie oben:

$$\delta E(A_1^{s_1},\ldots,A_{2n-1}^{s_{2n-1}}) = s_1\cdot\ldots\cdot s_{2n-1}\,\delta E(A_1,\ldots,A_{2n-1})$$ und

damit vereinfacht sich Satz 11 zu

<u>Satz 11'</u> : Seien $A_1,\ldots,A_{2n-1} \in SL(2n;\mathbb{Z})$ simultan über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und die davon erzeugte Gruppe vom Rang 2n-1. Dann gilt:

$$\delta E(A_1,\dots,A_{2n-1}) = \frac{1}{s_N^n(N^m-1)} \sum_{\substack{g\in \mathbb{Z}_N^m \\ g\neq 0}} \alpha(g,E(A_1^{s_N},\dots,A_n^{s_N})) .$$

B) Spezielle Berechnungen

In der Dissertation von W. Meyer [12] wurde eine Funktion $\varphi : SL(2;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ definiert, die der folgenden Bedingung genügt:

$\varphi(AB) - \varphi(A) - \varphi(B) = -\operatorname{sign} N(A,B)$ .

Da auch $-\delta E(A)$ dieser Bedingung genügt, und $SL(2;\mathbb{Z})$ abelsch gemacht $\mathbb{Z}_{12}$ ist, folgt

$\varphi(a) = -\delta E(A)$ .

W. Meyer hat diese Funktion in Beziehung zu bekannten zahlentheoretischen Funktionen gesetzt, die im Zusammenhang mit Dedekindsummen betrachtet wurden, und die $\varphi$ - Invariante vollständig dadurch ausgedrückt. Wir geben das Ergebnis hier an.

**Satz (W. Meyer)** : $\delta(E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}) = \frac{a+d}{3c} - \frac{2}{3c} \operatorname{sign} c\cdot(a,c)$

$- \operatorname{sign}(c(a+d)) - \sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(a+d))$ für $c \neq 0$ ,

$\delta(E\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}) = \pm \frac{b}{3} - \operatorname{sign} b\cdot\frac{1\pm 1}{2}$ .

Dabei ist $(a,c)$ die am Ende von § 2 erwähnte klassische Dedekindsumme, $(a,c) = 6c\sum_{k=0}^{c-1} ((\frac{k}{c}))\,((\frac{ka}{c}))$ mit

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ist die Signatur von $\begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b\end{pmatrix}$ .



Bemerkung : Für $|a+d| \geqslant 3$ gilt $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = 0$ . Ebenfalls für $|a+d| \geqslant 3$ ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und deshalb nach Satz 12.6. $\delta E(A^k) = k\cdot\delta E(A)$ .

Für $A \in SL(4k-2;\mathbb{Z})$ , $k > 1$ ist $\delta E(A)$ ganzzahlig. Denn $SL(4k-2;\mathbb{Z})$ wird von Elementen $ABA^{-1}B^{-1}$ erzeugt. Mit Satz 12.5. erhalten wir

$\delta E(ABA^{-1}B^{-1}) - \delta E(AB) - \delta E(A^{-1}B^{-1}) = \operatorname{sign} N(AB,A^{-1}B^{-1})$

und, da $\delta E(AB) = \delta E(BA) = -\delta E(A^{-1}B^{-1})$ :

$\delta E(ABA^{-1}B^{-1}) = \operatorname{sign} N(AB,A^{-1}B^{-1})$ .

Für $A \in SL(4k-2;\mathbb{Z})_N$ haben wir eine freie $\mathbb{Z}_N^{4k-2}$ - Aktion auf $E(A)$ definiert. Seien $A,B \in SL(4k-2;\mathbb{Z})_N$ . Die $\mathbb{Z}_N^{4k-2}$ - Aktion auf $E(A)$ , $E(B)$ und $E(AB)$ läßt sich auf $N(A,B)$ fortsetzen, es gilt also für $g \in \mathbb{Z}_N^{4k-2}$ , $g \neq 0$ :

$$\alpha(g,E(AB)) - \alpha(g,E(A)) - \alpha(g,E(B)) = \operatorname{sign}(g,N(A,B)) = \operatorname{sign} N(A,B) .$$

Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, daß g auf $H_{2k-1}(N(A,B);\mathbb{R})$ trivial operiert, was sich aus der Mayer - Vietoris Sequenz ergibt, wenn man $N(A,B)$ wie beim Beweis von Satz 12.6. zerlegt.

Aus der obigen Gleichung folgt, daß für $g \in \mathbb{Z}_N^{4k-2}$ , $g = (\frac{s_1}{N},\dots,\frac{s_{4k-2}}{N})$ , $g \neq 0$ die Abbildung

$$\Delta^N_{s_1,\dots s_{4k-2}} : SL(4k-2;\mathbb{Z})_N \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$A \longmapsto \alpha(g,E(A)) - \delta E(A)$$

ein Homomorphismus ist.

Es stellt sich das Problem, diese Homomorphismen zu berechnen und Beziehungen zu bekannten zahlentheoretischen Funktionen zu suchen. Solche Funktionen kann man z.B. mit Hilfe der allgemeinen Dedekindschen Summen bekommen, die für $a = 1 \bmod N$ , $c = 0 \bmod N$ , $(\frac{g}{N},\frac{h}{N}) \in \mathbb{Z}_N^2$ folgendermaßen definiert sind

$$s_{g,h}(a,c) = 6c\sum_{k=0}^{c-1}\left(\left(\frac{ak}{c} + \frac{ag+ch}{Nc}\right)\right)\left(\left(\frac{k}{c} + \frac{g}{Nc}\right)\right).$$

C. Meyer hat für $0 \neq (\frac{g}{N},\frac{h}{N}) \in \mathbb{Z}_N^2$ folgende Abbildungen

$$\Phi^N_{g,h} : SL(2;\mathbb{Z})_N \longrightarrow \mathbb{Q} \text{ betrachtet } [19] .$$

$$\Phi^N_{g,h}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} P_2(\frac{g}{N})\cdot\frac{a+d}{c} - \frac{\operatorname{sign} c}{3c}\cdot s_{g,h}(a,c) & \text{für } c \neq 0 \\ P_2(\frac{g}{N})\cdot\frac{b}{d} & \text{für } c = 0 . \end{cases}$$

Dabei ist $P_2(x) = (x - [x])^2 - x + [x] + \frac{1}{6}$ .

Diese Abbildungen sind Homomorphismen, und es stellt sich die Frage, welche Beziehungen zu den Homomorphismen $\Delta^N_{g,h}$ bestehen. Für $N = 2$ ergibt sich der folgende Satz.

Satz 14 : $\Delta^2_{g,h}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4\,\Phi^2_{h,g}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Beweis : Elementare Überlegungen ergeben, daß $SL(2;\mathbb{Z})_2$ von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



erzeugt wird. Wegen $\Delta^2_{g,h}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Phi^2_{h,g}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

ergibt sich die Aussage des Satzes aus der folgenden

| Tabelle. | $\Delta^2_{0,1}(A)$ | $\Delta^2_{1,0}(A)$ | $\Delta^2_{1,1}(A)$ | $\Phi^2_{1,0}(A)$ | $\Phi^2_{0,1}(A)$ | $\Phi^2_{1,1}(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Die Werte von $\Delta$ ergeben sich aus dem Beispiel nach Satz 11 bzw. analogen Rechnungen.

Wir wollen zum Abschluß in einigen einfacheren Fällen die $\delta$ - Invariante für höherdimensionale Torusbündel berechnen. Wir betrachten Torusbündel $E(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ , derart daß die $A_i \in SL(2k;\mathbb{Z})_2$ von der Form sind :

$$A_i = \begin{pmatrix} & \tilde{A}_i & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots\ b_{i_{2k-1}} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{A}_i \in SL(2k-1;\mathbb{Z})_2$$

Die Operation von $A_i$ auf $T^{2k}$ läßt sich in natürlicher Weise auf $T^{2k-1} \times D^2$ fortsetzen. Wir können deshalb das an $E(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ assoziierte Bündel mit Faser $T^{2k-1} \times D^2$ betrachten. Wir bezeichnen es mit $D(A_1,\ldots,A_{2n-1})$. Die $\mathbb{Z}_2^{2k}$ - Operation auf $E(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ läßt sich auf $D(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ erweitern. $D(A_1,\ldots,A_{2n-1})$ ist ein

2 - Scheibenbündel über $E(\tilde{A}_1,..,\tilde{A}_{2n-1})$ .

<u>Satz 15</u> : $\delta E(A_1,..,A_{2n-1}) = \operatorname{sign} D(A_1,..,A_{2n-1}) +$

$$(-1)^{\frac{n+k}{2}} \frac{2^{n+k}(2^{n+k}-1)}{(n+k)!(2^{2k}-1)} B_{\frac{n+k}{2}} c_1^{n+k-1} D(A_1,..,A_{2n-1})\left[E(\tilde{A}_1,..,\tilde{A}_{2n-1})\right]$$

<u>Beweis</u> : Nach Satz 10 gilt

$$\delta(E(A_1,...,A_{2n-1})) = \frac{1}{2^{2k}-1}\cdot \sum_{\substack{g\in \mathbb{Z}_2^{2k}\\ g\neq 0}} \alpha(g,E(A_1,...,A_{2n-1}))$$

$$= \frac{1}{2^{2k}-1}\left[\sum_{\substack{g\in \mathbb{Z}_2^{2k}\\ g\neq 0}} (\operatorname{sign}(g,D(A_1,...,A_{2n-1})) - L(g,D(A_1,...,A_{2n-1}))\right].$$

Um $L(g,D(A_1,...,A_{2n-1}))$ zu bestimmen, müssen wir die Fixpunktmannigfaltigkeiten von g bestimmen. Für $g \neq 0$ , $g \neq (0,0,...,1)$ operiert g fixpunktfrei auf $D(A_1,...,A_{2n-1})$. Also ist dann $L(g,D(A_1,...,A_{2n-1})) = 0$ .

Für $g = (0,0,...,1)$ ist die Fixpunktmannigfaltigkeit gleich dem Nullschnitt $E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})$ von $D(A_1,...,A_{2n-1})$. Das Normalenbündel von $E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})$ in $D(A_1,...,A_{2n-1})$ ist $D(A_1,...,A_{2n-1})\times_{S^1}\mathbb{C}$ . $(0,0,...,1)$ operiert auf $D(A_1,...,A_{2n-1})\times_{S^1}\mathbb{C}$ durch Multiplikation mit $-1$, so daß wir nach Definition von $L(g,D(A_1,...,A_{2n-1}))$ erhalten :

$$L((0,0,..,1),D(A_1,..,A_{2n-1})) =$$

$$L(E(\tilde{A}_1,..,\tilde{A}_{2n-1}))\cup \tanh c_1(D(A_1,..,A_{2n-1}))\left[E(\tilde{A}_1,..,\tilde{A}_{2n-1})\right] =$$

$$\tanh c_1(D(A_1,...,A_{2n-1}))\left[E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})\right] ,$$



da $E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})$ **stabil parallelisierbar und somit** $L(E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})) = 1$ **ist. Andererseits ist**

$$\tanh c_1(D(A_1,...,A_{2n-1}))\left[E(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_{2n-1})\right] =$$

$$(-1)^{\frac{n+k-2}{2}} \frac{2^{n+k}(2^{n+k}-1)}{(n+k)!} B_{\frac{n+k}{2}} c_1^{n+k-1} D(A_1,..,A_{2n-1})\left[E(\tilde{A}_1,..,\tilde{A}_{2n-1})\right]$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\frac{1}{2^{2k}-1} \sum_{\substack{g\in \mathbb{Z}_2^{2k}\\ g\neq 0}} \operatorname{sign}(g,D(A_1,...,A_{2n-1})) = \operatorname{sign} D(A_1,...,A_{2n-1}) .$$

Bekanntlich gilt :

$$\operatorname{sign}(D(A_1,...,A_{2n-1})/\mathbb{Z}_2^{2k}) = \frac{1}{2^{2k}}\cdot \sum_{g\in \mathbb{Z}_2^{2k}} \operatorname{sign}(g,D(A_1,...,A_{2n-1})).$$

Nun ist aber $D(A_1,...,A_{2n-1})/\mathbb{Z}_2^{2k}$ diffeomorph zu $D(A_1,...,A_{2n-1})$ .

Also erhalten wir:

$$\operatorname{sign}(g,D(A_1,..,A_{2n-1})) = (2^{2k}-1)\operatorname{sign} D(A_1,..,A_{2n-1}).$$

q.e.d.

Wir wollen nun sign $D(A_1,..,A_{2n-1})$ und $c_1^{n+k-1}D(A_1,..,A_{2n-1})$ für den Fall $\tilde{A}_i = \mathrm{Id}$ ausrechnen.

<u>Lemma 8</u> : Sei $\tilde{A}_i = \mathrm{Id}$.

$$c_1^{n+k-1}D(A_1,..,A_{2n-1})\left[E(A_1,..,A_{2n-1})\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq n \\ (-1)^{k-1}(2k-1)! \cdot \operatorname{Det}(b_{ij}) & \text{für } k=n \end{cases}$$

Beweis : $D(A_1,\dots,A_{2n-1})$ ist in dem vorliegenden Fall ein 2 - Scheibenbündel über $T^{2n+2k-2}$. Identifiziere $H^*(T^{2n+2k-2};\mathbb{R})$ mit $\Lambda^*(\mathbb{R}^{2n+2k-2})$. Es gilt:

$$c_1 D(A_1,\dots,A_{2n-1}) = \begin{array}{cc} & 2n-1 \\ 2n-1 & \left(\begin{array}{c|c} 0 & b_{ij} \\ \hline -b_{ji} & 0 \end{array}\right) \end{array} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n+2k-2})$$

wie man leicht sieht, indem man die Einschränkung von $D(A_1,\dots,A_{2n-1})$ auf $S^1 \times S^1 = \{(0,\dots,x,0\dots y,\dots,0) \in T^{2n+2k-2}\}$ betrachtet.

Eine einfache Rechnung ergibt für $A = (a_{ij}) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})$ $A^n = n!\ \mathrm{Pfaff}\ A$ . Die obige Matrix ist für $k \neq n$ nicht regulär. Dann ist aber $\mathrm{Pfaff}\ A = 0$. Für $k = n$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß mit $A = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A} \\ -\tilde{A}^T & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} \in L(n;\mathbb{R})$ $\mathrm{Pfaff}\ A = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \mathrm{Det}\ \tilde{A}$ ist.

Zur Berechnung von $\mathrm{sign}\ D(A_1,\dots,A_{2n-1})$ erinnern wir daran, daß die Signatur eines 2 - Scheibenbündels über einer Mannigfaltigkeit $M^{4k-2}$ gegeben ist als Signatur der Bilinearform

$$\begin{array}{ccc} H^{2k-2}(M;\mathbb{R}) \times H^{2k-2}(M;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \longmapsto & x \cup y \cup c_1 D[M]\ . \end{array}$$

[siehe 13]

Lemma 9 : Sei $A \in L(4k-2;\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix,



also $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{4k-2})$. Die Signatur der durch

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{2k-2}(\mathbb{R}^{4k-2}) \times \Lambda^{2k-2}(\mathbb{R}^{4k-2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \longmapsto & x \wedge y \wedge A \end{array}$$

gegebenen Bilinearform ist $S(k)\ \mathrm{sign}(\mathrm{Pfaff}\ A)$.

Dabei ist $S(k)$ die Signatur der obigen Bilinearform für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis : Bezüglich einer geeigneten Basis können wir A auf Normalform bringen. Besitze A also Normalform. Ist A nicht regulär, dann folgt unmittelbar aus Orientierungsgründen, daß die Signatur der obigen Bilinearform Null ist. Andererseits ist dann auch die Pfaffsche von A Null, so daß die Behauptung in dem Fall richtig ist.

$$\text{Sei nun } A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & 0 & \\ & & 0 & a_2 & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & 0 & a_{2k-1} \\ & & & & & & -a_{2k-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad a_i \neq 0$$

Für $\varphi \in GL^+(4k-2;\mathbb{R})$ ist die Signatur der Bilinearform $(x,y) \longmapsto x \wedge y \wedge \varphi^* A$ gleich der Signatur der Bilinearform $(x,y) \longmapsto x \wedge y \wedge A$ . Durch geeignete Auswahl von $\varphi$ können wir $\varphi^* A$ auf die Form bringen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & -1 & 0 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \pm 1 \\ & & & & & & \mp 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das letzte Vorzeichen ist aber das Vorzeichen der Pfaffschen von A . Also gilt das Lemma.

Es bleibt also die Berechnung von S(k). Wir betrachten dazu folgende Situation. Sei $M^n$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit Kählermetrik H, sei Im H $= \Omega$. E. Ossa hat mich auf Methoden hingewiesen, mit denen man die Signatur der Bilinearform $\mu$ auf $H^{n-s}(M; \mathbb{R})$ , n-s gerade, ausrechnen kann,

$$\mu: H^{n-s}(M; \mathbb{R}) \times H^{n-s}(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x \cup y \cup \Omega^s)[M] .$$

Alle Sätze, die wir dazu benötigen, stehen in [17] , wir übernehmen die Bezeichnungen.

Sei also $M^n$ wie oben eine Kähler Mannigfaltigkeit und $\mu$ wie oben definiert. Auf $H^{a,b}$ ist durch $\langle\omega_1,\omega_2\rangle = \int_M \bar{\omega}_1 \wedge *\omega_2$ eine Metrik gegeben.

Wir betrachten $\int_M \bar{\omega}_1 \wedge L^s\omega_2$ . Wegen $L\omega = \omega\wedge\Omega$ ist dieses Integral für reelle Formen gleich $\mu(\omega_1,\omega_2)$, jeweils $\omega_i \in H^{n-s}$ .

Der entscheidende Baustein zum Beweis ist das folgende Ergebnis [17, Seite 76] :

Sei $\omega \in \mathcal{P}^{a,b}$ , a+b = k und $k+r \leq n$

$$*L^r\omega = (-1)^{k(k+1)/2}\, i^{a-b} \frac{r!}{(n-k-r)!} L^{n-k-r}\omega .$$

Daraus folgt mit $\omega_2 = L^r\eta$ , $\eta \in \mathcal{P}^{a,b}$   k = a+b, k+2r = n-s

$$\begin{aligned}\langle\omega_1,\omega_2\rangle = \int_M \bar{\omega}_1 \wedge *\omega_2 &= \int_M \bar{\omega}_1 \wedge (*L^r\eta) \\ &= (-1)^{k(k+1)/2}\, i^{a-b} \frac{r!}{(n-k-r)!} \int_M \omega_1 \wedge L^s\omega_2 \\ &= (-1)^a \frac{r!}{(n-k-r)!} \int_M \bar{\omega}_1 \wedge L^s\omega_2 .\end{aligned}$$



Speziell für $\omega_i$ reell erhalten wir :

$$\mu(\omega_1,\omega_2) = (-1)^a \frac{(n-k-r)!}{r!} \langle\omega_1,\omega_2\rangle .$$

Gemäß [17, Theoreme 5, Seite 75] ist aber

$$H^{n-s} = \bigoplus_{a+b+2r=n-s} L^r\mathcal{P}^{a,b} .$$

Somit folgt : $\operatorname{sign}\mu = \sum_{\substack{a \text{ gerade} \\ a+b+2r=n-s}} \dim L^r\mathcal{P}^{a,b} - \sum_{\substack{a \text{ ungerade} \\ a+b+2r=n-s}} \dim L^r\mathcal{P}^{a,b}$

Mit $\dim L^r\mathcal{P}^{a,b} = h^{a,b} - h^{a-1,b-1}$ für $a+b<n$ erhalten wir.

<u>Satz 16</u> : $$\operatorname{sign}\mu = \sum_{\substack{a+b\leq n-s \\ a\equiv b\equiv 0(2)}} h^{a,b} - \sum_{\substack{a+b\leq n-s-2 \\ a\equiv b\equiv 1(2)}} h^{a,b} - \sum_{\substack{a+b\leq n-s \\ a\equiv b\equiv 1(2)}} h^{a,b} + \sum_{\substack{a+b\leq n-s-2 \\ a\equiv b\equiv 0(2)}} h^{a,b} .$$

Speziell für $M = T^{4k-2}$ und $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{4k-2})$ erhalten wir für sign $\mu$ gleich S(k). Mit $h^{a,b} = \binom{n}{a}\binom{n}{b}$ ergibt eine Rechnung das Resultat

<u>Lemma 10</u> : $S(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{2k-2}{k-1}$ .

Aus den Lemmata 8, 9 und 10 ergibt sich zusammenfassend das folgende Resultat.

<u>Satz 17</u> : Sei $A_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & O \\ & \ddots & & \\ O & & \ddots & \\ b_{i_1} & \cdots & b_{i_{2k-1}} & 1 \end{pmatrix} \in SL(2k;\mathbb{Z})_2$

Dann gilt:

$$\delta E(A_1,\ldots,A_{2n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq k \\ \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} \operatorname{sign} \operatorname{Det}(b_{ij}) - \frac{2^{2k-1}}{k} B_k \operatorname{Det}(b_{ij}) & \text{falls } k = n \end{cases}$$



## Literaturverzeichnis


[1] J.F. Adams : On the groups J(X) - II, Topology 3 (1956), 137 - 171

[2] J.F. Adams : On the groups J(X) - IV, Topology 5 (1966), 21 - 71

[3] M.F. Atiyah : K - Theory, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam 1967

[4] M.F. Atiyah und R. Bott : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes : II. Applications, Annals of Math. 88 (1968) 451 - 491

[5] M.F. Atiyah und I.M. Singer : The index of elliptic operators : III, Ann. of Math. 87 (1968) 546-604

[6] G. Brumfiel : On the homotopy groups of BPL and PL/O, Ann. of Math. 88 (1968) 291 - 311

[7] F. Hirzebruch : Topological methods in algebraic geometry, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966

[8] F. Hirzebruch : Free involutions on manifolds and some elementary number theory, Symposia Mathematica, Vol. 5, Academic Press, 1971, 411 - 419

[9] F. Hirzebruch : The Hilbert modular group, resolution of the singularities at the cusps and related problems, Séminaire Bourbaki 23eme anne, 1970/71

[10] F. Hirzebruch : The signature theorem : Reminiscences and recreations, in : Prospects in Mathematics, Princeton University Press, 1971

[11] M.A. Kervaire und J. Milnor : Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math. 77 (1963), 504 - 537

[12] W.Meyer : Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln , Dissertation , Bonn 1971

[13] E. Ossa : Cobordismustheorie von fixpunktfreien und semifreien $S^1$ Mannigfaltigkeiten , Dissertation , Bonn 1969

[14] N. Steenrod : Topology of fibre bundels, Princeton Univ. Press 1951

[15] H. Toda : Composition methods in homotopy groups of spheres, Princeton Univ. Press , Princeton , New Jersey 1961

[16] D. Zagier : Higher dimensional Dedekind sums , Preprint 1972

[17] A. Weil : Introduction à l'étude des variétés kählériennes , Hermann , Paris 1958

[18] F. Hirzebruch : Hilbert modular surfaces , Preprint Bonn 1973

[19] C. Meyer : Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen, Journal für r. u. a. Math. 198 1957, 143 - 203