30.

Zur Theorie der Mannigfaltigkeiten

18. November 1960, Vortragsauszug

Int. Math. Nachrichten, Nr. 67, Jhg. 15, 1961, S. 50

Dem nebenstehenden Baum ordne man folgende (8×8)-Matrix zu: Nach irgendeiner Ecken-Numerierung sei $a_{ij}=a_{ji}=1$, wenn die i-te Ecke mit der j-ten durch eine Strecke verbunden ist $(i\neq j)$. Es sei $a_{ii}=2$, sonst sei $a_{ij}=0$. Diese Matrix ist positiv-definit und hat die Determinante 1. Dies ist bekannt aus der Theorie der Lieschen Gruppen: Der Baum ist das Schläfli-Diagramm von E_8. Ähnlich wie bei Milnor (*Differentiable manifolds which are homotopy spheres;* Princeton, mimeographed) kann man aus 8 Exemplaren des Tangentialbündels von S^{2k} eine Mannigfaltigkeit M^{4k-1} dem E_8-Baume gemäß installieren. Für $k\geqq 2$ ist M^{4k-1} eine Homotopiesphäre und nach Stallings-Smale eine Sphäre, ist jedoch nicht zu S^{4k-1} diffeomorph, liefert also eine zur gewöhnlichen inäquivalente differenzierbare Struktur auf der Sphäre. M^{4k-1} berandet eine W^{4k}. Für gewisse Werte von k läßt die Mannigfaltigkeit W^{4k}/M^{4k-1} keine differenzierbare Struktur zu. M^3 ist der sphärische Dodekaeder-Raum (fünffache zyklische Überlagerung von S^3 längs der Kleeblattschlinge).

Die Konstruktion wurde motiviert durch die Singularität der affinen algebraischen Fläche $z_1^2+z_2^3+z_3^5=0$ in $(0,0,0)$. Löst man auf, dann wird der singuläre Punkt aufgeblasen in einen E_8-Baum von 8 nichtsingulären rationalen Kurven der Selbstschnittzahl -2.