Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.*)

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Der Grad einer stetigen Abbildung einer geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeit.

Unter einem *Simplexsterne* des n-dimensionalen Zahlenraumes verstehen wir eine in einer Umgebung eines Punktes O überall dicht liegende, endliche Menge von nicht in das Innere voneinander eindringenden und den Punkt O als Eckpunkt besitzenden Simplexen, deren je zwei eine p-dimensionale $(0 \leqq p \leqq n-1)$ Seite gemeinsam haben, sonst aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen.

Unter einem *n-dimensionalen Elemente E* verstehen wir das eineindeutige und stetige Bild eines Simplexes S des n-dimensionalen Zahlenraumes.

Unter den *Eckpunkten* bez. *p-dimensionalen Seiten* von E verstehen wir alsdann die Bilder der Eckpunkte bez. der p-dimensionalen Seiten von S.

Wir bilden nun aus n-dimensionalen Elementen eine solche zusammenhängende Punktmenge Z, daß je zwei dieser Elemente entweder keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, oder eine p-dimensionale $(0 \leqq p \leqq n-1)$ Seite (und dann zugleich alle in ihr liegenden Seiten geringerer Dimensionenzahl) gemeinsam haben, übrigens aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, während in jedem Eckpunkte die daselbst zusammenstoßenden Elemente in derselben Weise, wie die Simplexe eines gewissen Simplexsternes des n-dimensionalen Zahlenraumes, aneinander schließen.

Die in dieser Weise konstruierte Punktmenge Z soll eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* heißen, und zwar, wenn die Zahl ihrer Elemente

*) Während der Drucklegung dieser Abhandlung ist im zweiten Bande der „Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" von J. Tannery erschienen: J. Hadamard, „Sur quelques applications de l'indice de Kronecker". Die daselbst ausgeführte Theorie berührt sich mannigfach mit den vorliegenden Entwicklungen.

endlich ist, eine *geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit;* wenn die Zahl ihrer Elemente unendlich ist, eine *offene n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Diese Definition läßt sowohl endliche, wie unendliche Zusammenhangszahlen zu*).

Eine *geschlossene* n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine *abgeschlossene* Punktmenge**); eine *offene* n-dimensionale Mannigfaltigkeit aber eine *nicht abgeschlossene* Punktmenge. Sei nämlich $P_1, P_2, P_3, \cdots$ eine solche Fundamentalreihe von Punkten einer offenen Mannigfaltigkeit, daß keine zwei dieser Punkte demselben Elemente angehören, so existiert, weil es kein Element gibt, in dessen beliebiger Nähe Punkte unendlich vieler verschiedener Elemente liegen, für diese Fundamentalreihe kein Grenzpunkt.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit soll eine *gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit* heißen, wenn in jedem Elemente die Punkte in solcher Weise durch $n+1$ nicht negative, homogene Koordinaten (als „*Normalkoordinaten*" zu bezeichnen) eineindeutig und stetig repräsentiert sind, daß in jeder p-dimensionalen Seite die Punkte für jedes Element, dem diese Seite angehört, dieselben Koordinaten besitzen.

Wir behaupten nun, daß jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit zu einer gemessenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden kann.

Zum Beweise dieser Behauptung weisen wir zunächst den Punkten der eindimensionalen Seiten ihre Normalkoordinaten zu, und zwar soll,

---

*) Dasselbe leistet die Konstruktion, welche ich meinen gruppentheoretischen Untersuchungen zugrunde gelegt habe (vgl. Math. Ann. 67, S. 247, und die Berichtigung in 69, S. 180). Dort wird von einem willkürlichen endlichen Gebiete G des n-dimensionalen Zahlenraumes mit der Grenze $\mathfrak{G}$ ausgegangen; eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß, wenn ein Punkt P zu ihr gehört, auch der innerhalb einer gewissen im n-dimensionalen Zahlenraume um P beschriebenen Kugel liegende Teil von $\mathfrak{G}$ zu ihr gehört, wird ein *Teilgebiet* γ von $\mathfrak{G}$, und das innerhalb einer solchen Menge von Kugeln liegende Teilgebiet von G eine *Innenseite* von γ genannt. Sodann werden gewisse Gebiete γ zusammen mit ihren Grenzen g derart paarweise eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet und identifiziert, daß je zwei in dieser Weise zusammentreffende Innenseiten zusammen mit dem entsprechenden Gebiete γ eine auf ein Gebiet des n-dimensionalen Zahlenraumes eineindeutig und stetig abbildbare Punktmenge darstellen, und es werden erstens die paarweise identifizierten Gebiete γ, und zweitens diejenigen Punkte der Grenzen g, welche durch die Identifizierungen auf Gebiete des n-dimensionalen Zahlenraumes eineindeutig und stetig abbildbare Umgebungen bekommen haben, zum Gebiete G hinzugerechnet. Mit einer solchen Definition läßt sich aber, so lange die Theorie der gestaltlichen Invarianten des n-dimensionalen Zahlenraumes nicht genügend weit entwickelt ist, in vielen Fällen nicht weiter operieren; so sind wir z. B. für den Gegenstand der vorliegenden Arbeit auf den oben im Texte gewählten Ausgangspunkt angewiesen.

**) d. h. eine Punktmenge, in welcher jede Fundamentalreihe einen ebenfalls zur Punktmenge gehörigen Grenzpunkt besitzt.

wenn wir die nicht Null werdenden Normalkoordinaten der Punkte der eindimensionalen Seite $A_p A_q$ mit u_p und u_q bezeichnen, das Verhältnis $\frac{u_p}{u_q}$ in A_p unendlich sein, und von dort an stetig abnehmen, bis in A_q der Wert Null erreicht wird.

Um sodann die Normalkoordinaten der Punkte der zweidimensionalen Seiten zu bestimmen, bilden wir eine solche zweidimensionale Seite $A_p A_q A_r$ derart eineindeutig und stetig auf ein Euklidisches ebenes Dreieck FGH ab, daß den Seiten des Dreiecks die eindimensionalen Elementseiten $A_p A_q$, $A_q A_r$ und $A_r A_p$ entsprechen, repräsentieren die Punkte dieses Euklidischen Dreiecks durch homogene Schwerpunktskoordinaten in bezug auf die Eckpunkte F, G, H, und wählen innerhalb des Dreiecks einen willkürlichen Punkt O.

Sei B ein Punkt der zweidimensionalen Seite $A_p A_q A_r$, B' sein Bild im Dreiecke FGH. Das jenseits B' fortgesetzte geradlinige Segment OB' trifft eine der Seiten des Dreiecks, beispielsweise die Seite GH, in einem Punkte C'. Sei C derjenige Punkt der eindimensionalen Seite $A_q A_r$, der C' entspricht, ${}_C u_q$ und ${}_C u_r$ seine Normalkoordinaten, C'' der Punkt der Dreiecksseite GH mit den Schwerpunktskoordinaten 0, ${}_C u_q$ und ${}_C u_r$, und B'' der Schnittpunkt der geraden Linie OC'' mit der B' enthaltenden Parallellinie zu GH. Dann wählen wir als Normalkoordinaten von B die Schwerpunktskoordinaten von B''.

Nachdem in dieser Weise von den Punkten aller zweidimensionalen Seiten die Normalkoordinaten bestimmt sind, betrachten wir eine dreidimensionale Seite $A_p A_q A_r A_s$, und bilden sie derart auf ein Euklidisches Tetraeder $FGHK$ ab, daß den Seiten und Kanten des Tetraeders der Reihe nach die zu $A_p A_q A_r A_s$ gehörigen zweidimensionalen und eindimensionalen Elementseiten entsprechen. Die Punkte dieses Euklidischen Tetraeders repräsentieren wir durch homogene Schwerpunktskoordinaten in bezug auf die Eckpunkte F, G, H, K, und wählen innerhalb des Tetraeders einen willkürlichen Punkt M.

Sei D ein Punkt der dreidimensionalen Seite $A_p A_q A_r A_s$, D' sein Bild im Tetraeder $FGHK$. Das jenseits D' fortgesetzte geradlinige Segment MD' trifft eine der Seiten des Tetraeders, beispielsweise die Seite GHK in einem Punkte E'. Sei E derjenige Punkt der zweidimensionalen Seite $A_q A_r A_s$, der E' entspricht, ${}_E u_q$, ${}_E u_r$, ${}_E u_s$ seine Normalkoordinaten, E'' der Punkt der Tetraederseite GHK mit den Schwerpunktskoordinaten 0, ${}_E u_q$, ${}_E u_r$, ${}_E u_s$, und D'' der Schnittpunkt der geraden Linie ME'' mit der D' enthaltenden Parallelebene zur Ebene GHK. Dann wählen wir als Normalkoordinaten von D die Schwerpunktskoordinaten von D''.

In dieser Weise fahren wir fort, bis wir schließlich mittels der Normalkoordinaten der Punkte der $(n-1)$-dimensionalen Elementseiten die Normalkoordinaten *aller* Punkte der Mannigfaltigkeit derart bestimmt haben, daß diese in der Tat als eine gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit vorliegt.

Wir wählen nun zu jedem Elemente einer gemessenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ein Euklidisches reguläres Simplex fester Kantenlänge als sein „*repräsentierendes Simplex*", und bilden es darauf in solcher Weise eineindeutig und stetig ab, daß die Schwerpunktskoordinaten in Bezug auf die Eckpunkte eines Punktes des repräsentierenden Simplexes den Normalkoordinaten des entsprechenden Punktes des n-dimensionalen Elementes gleich sind.

Unter einem *Teilsimplex* bez. einem *ebenen p-dimensionalen Raumstück* des Elementes verstehen wir alsdann das Bild eines Teilsimplexes bez. eines ebenen p-dimensionalen Raumstückes des repräsentierenden Simplexes.

Unter der *Länge* eines in einem Elemente liegenden geradlinigen Segmentes verstehen wir die Länge, welche das entsprechende Segment im repräsentierenden Simplexe besitzt. Unter der *Entfernung* zweier Punkte der Mannigfaltigkeit verstehen wir das Minimum der Länge eines sie verbindenden (eventuell mehrere Elemente durchziehenden) Streckenzuges.

Unter dem *Schwerpunkte* gewisser in Punkten desselben Elementes angebrachter Massen verstehen wir den Bildpunkt des Schwerpunktes von in den entsprechenden Punkten des repräsentierenden Simplexes angebrachten, jenen gleichen Massen.

Unter dem *Inhalte* eines Teilgebietes eines Elementes verstehen wir den Inhalt des entsprechenden Teilgebietes des repräsentierenden Simplexes.

Als *Indikatrix eines Elementes* bezeichnen wir eine gewisse Reihenfolge seiner Eckpunkte, wobei solche Reihenfolgen, welche durch eine gerade Zahl von Vertauschungen zweier Eckpunkte auseinander hervorgehen, als äquivalent betrachtet werden. Somit sind nur zwei Indikatrizen des Elementes möglich, von denen wir eine beliebige als die *positive* auswählen können; dann bezeichnen wir die andere als die *negative*. Durch die Wahl der positiven Indikatrix des Elementes ist zugleich die positive Indikatrix des repräsentierenden Simplexes, durch diese die positive Indikatrix jedes Teilsimplexes des repräsentierenden Simplexes, und durch letztere schließlich die positive Indikatrix jedes Teilsimplexes des Elementes bestimmt.

Wir betrachten nun eine solche endliche geschlossene Kette von untereinander verschiedenen Elementen der gemessenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, bei der je zwei aufeinanderfolgende Elemente n Eckpunkte gemeinsam haben, und nehmen für eines dieser Elemente eine positive Indikatrix an. Mittels dieser bestimmen wir die *negative* Indikatrix des folgenden Elementes, indem wir den für diesen neu auftretenden Eckpunkt an die Stelle des für ihn in Fortfall kommenden setzen. In dieser Weise bestimmen wir der Reihe nach für jedes Element der Kette eine positive Indikatrix, und finden schließlich, wenn wir zum Ausgangselemente zurückkommen, für dieses eine neue positive Indikatrix. Wenn für *jede* geschlossene Kette von Elementen diese neue positive Indikatrix mit derjenigen, von der wir ausgegangen sind, identisch ist, so soll die Mannigfaltigkeit *zweiseitig*, im entgegengesetzten Falle *einseitig* heißen.

In einer zweiseitigen gemessenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist somit durch die Wahl der positiven Indikatrix eines Elementes zugleich für jedes Element und für jedes Teilsimplex eines Elementes die positive Indikatrix festgelegt, sodaß wir von einer *positiven Indikatrix der Mannigfaltigkeit* sprechen können.

Wir denken uns mit einer zweiseitigen, geschlossenen, gemessenen, n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ eine eindeutige und stetige Abbildung α auf eine gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ' vorgenommen, und setzen zunächst auch μ' als zweiseitig und geschlossen voraus.

Wir unterziehen μ einer *simplizialen Zerlegung* ζ *von der Dichte* ε, d. h. wir zerlegen jedes Element von μ in solcher Weise in eine endliche Zahl von Teilsimplexen, daß je zwei davon entweder keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, oder eine p-dimensionale $(0 \leqq p \leqq n-1)$ Seite (und dann zugleich alle in ihr liegenden Seiten geringerer Dimensionenzahl) gemeinsam haben, im übrigen aber keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, und daß die Breite der Teilsimplexe die Größe ε als Maximum besitzt. Diese Teilsimplexe sollen die *Grundsimplexe*, ihre Eckpunkte die *Grundpunkte*, ihre Seiten die *Grundseiten* der Zerlegung heißen. Für die Dichte ε wählen wir eine obere Grenze ε_1, welche sie nicht übersteigen soll.

In der Mannigfaltigkeit μ wird eine positive Indikatrix angenommen, und dementsprechend jedes Grundsimplex mit einer positiven Indikatrix versehen.

Ein solches Grundsimplex, dessen Eckpunktsbilder alle demselben Elemente von μ' angehören, wollen wir ein *„gewöhnliches Grundsimplex“* nennen.

Jetzt definieren wir, was unter einer *zu* ζ *gehörigen simplizialen Ab-*

bildung β, welche die Abbildung α approximiert, verstanden werden soll. Es ist eine Abbildung, welche sich nur auf die gewöhnlichen Grundsimplexe erstreckt, und zwar in folgender Weise:

Sei π ein gewöhnliches Grundsimplex mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$, denen für die Abbildung α die demselben Elemente von μ' angehörigen Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ entsprechen. Ein im Inneren oder auf der Grenze von π liegender Punkt P läßt sich als Schwerpunkt von gewissen in $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ konzentrierten positiven Massen auffassen. Wenn wir dieselben Massen der Reihe nach in $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ anbringen, so bestimmen sie einen Schwerpunkt Q, den wir für die Abbildung β dem Punkte P entsprechen lassen. Alsdann wird, falls die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ nicht in einem ebenen $(n-1)$-dimensionalen Raumstücke liegen, das Grundsimplex π auf ein Bildsimplex ϱ, dessen Inhalt wir, je nachdem die Bildindikatrix positiv oder negativ ausfällt, positiv oder negativ rechnen werden, eineindeutig und stetig abgebildet. Wenn aber die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ in einem $(n-1)$-dimensionalen Raumstücke enthalten sind, so wird das Bildsimplex singulär und bekommt den Inhalt Null.

Die Entfernung zwischen den Bildpunkten für α und für β desselben Punktes von μ besitzt eine gewisse obere Grenze e_1, welche mit ε_1 unter jede Grenze herabsinkt.

Wir definieren weiter eine *zu ζ gehörige modifizierte simpliziale Abbildung γ, welche die Abbildung α approximiert.* Sie wird bestimmt durch die Größe ε_1 nicht übersteigende Verrückungen der Grundpunktsbilder, und wird sodann aus ihren Grundpunktsbildern in derselben Weise wie β konstruiert, wobei für γ im allgemeinen nicht dieselben gewöhnlichen Grundsimplexe auftreten, wie für β.

Wir bestimmen nun beliebig in jedem Elemente von μ' als sein „*Innensimplex*" ein solches Teilsimplex, dessen Grenze die Grenze des Elementes nicht trifft, und wählen ε_1 in solcher Weise, daß jeder Punkt von μ, der für *eine* Abbildung β oder γ in einem Innensimplexe abgebildet wird, für *jede* Abbildung β oder γ nur gewöhnlichen Grundsimplexen angehört, welche dann natürlich stets in demselben Elemente von μ' abgebildet werden.

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer solchen Abbildung γ, welche keine singulären Bildsimplexe aufweist, und zwar in bezug auf das Innensimplex J eines gewissen Elementes E. Die Menge derjenigen im Inneren von J enthaltenen Punkte, welche *nicht* dem Bilde einer $(n-2)$-dimensionalen Grundseite angehören, bezeichnen wir mit σ, und bemerken, daß je zwei Punkte von σ sich durch einen aus einer endlichen Zahl von Strecken bestehenden, ganz in σ verlaufenden Streckenzug verbinden lassen.

Einen solchen zu σ gehörigen Punkt, welcher *nicht* dem Bilde einer $(n-1)$-dimensionalen Grundseite angehört, nennen wir einen *gewöhnlichen Punkt von J*.

Seien P_1 und P_2 zwei beliebige gewöhnliche Punkte von J, welche durch einen ganz in σ verlaufenden Streckenzug s verbunden sind, und sei P ein variabler gewöhnlicher Punkt von J. Die Zahl der positiven bez. negativen Bildsimplexe, welche P_1 bedecken, bezeichnen wir mit p_1 bzw. p_1', die analogen Zahlen für P_2 mit p_2 und p_2', die analogen Zahlen für P mit p und p'.

Diese Zahlen p und p' können sich bei Bewegung von P an s entlang nur dann ändern, wenn das Bild τ einer $(n-1)$-dimensionalen Grundseite passiert wird. Wenn dabei die beiden Bildsimplexe, welche in τ zusammenstoßen, auf verschiedenen Seiten von τ liegen, so besitzen sie dasselbe Vorzeichen, und die Kreuzung von τ hat auf die Zahlen p und p', also auch auf die Zahl $p-p'$, keinen Einfluß. Wenn aber die beiden Bildsimplexe, welche in τ zusammenstoßen, auf derselben Seite von τ liegen, so besitzen sie entgegengesetzte Vorzeichen, und die Kreuzung von τ führt entweder eine Zunahme von p und p' je um eins, oder eine Abnahme von p und p' je um eins herbei, läßt also wieder die Zahl $p-p'$ ungeändert. Mithin ist $p_1-p_1'=p_2-p_2'$, und *für die Abbildung γ ist in den gewöhnlichen Punkten von J die Zahl $p-p'$ eine Konstante.*

Wir wenden uns nunmehr zu einer Abbildung β, für welche wir die gewöhnlichen Punkte von J, und die Zahlen p und p' in analoger Weise, wie in Bezug auf γ, definieren. Wenn dann für β in J zwei gewöhnliche Punkte P_1 und P_2 existierten, für welche p_1-p_1' und p_2-p_2' verschieden wären, so könnten wir β mit solcher Genauigkeit durch eine zu ζ gehörige und keine singulären Bildsimplexe aufweisende modifizierte simpliziale Abbildung γ_ν approximieren, daß die Punkte P_1 und P_2 auch in bezug auf γ_ν gewöhnliche Punkte von J wären, und die Zahlen p_1, p_1', p_2, p_2' in bezug auf γ_ν dieselben Werte, wie in bezug auf β, besäßen, sodaß für γ_ν die Zahl $p-p'$ in den gewöhnlichen Punkten von J keine Konstante sein könnte. Aus diesem Widerspruche folgern wir, *daß auch für die Abbildung β in den gewöhnlichen Punkten von J die Zahl $p-p'$ eine Konstante ist.*

Wir behaupten weiter, daß *der Wert dieser Konstante, den wir mit c bezeichnen, für jede simpliziale Abbildung, welche die Abbildung α approximiert, derselbe ist*, und zwar zeigen wir zunächst für zwei derartige simpliziale Abbildungen β_1' und β_2', daß die β_1' zugrunde liegende simpliziale Zerlegung ζ_1' aus der β_2' zugrunde liegenden simplizialen Zerlegung ζ_2' durch simpliziale Zerlegung der Grundsimplexe von ζ_2' hervorgeht, wir sagen kurz, daß ζ_1' eine *Unterteilung* von ζ_2' ist.

In diesem Falle können wir nämlich die Bilder der Grundpunkte von ζ_1' für β_1', insofern die entsprechenden Bilder für β_2' existieren, in diese auf den kürzesten verbindenden Streckenzügen stetig überführen, und für die Folge festhalten, wobei, was J betrifft, die Abbildung β_2' stetig in β_1' übergeht. Der Gesamtinhalt der in J enthaltenen Teile der Bildsimplexe, welcher c mal so groß ist als J, kann bei diesem stetigen Übergange keine Sprünge erleiden, sodaß die ganze Zahl c sich nicht ändern kann.

Es seien jetzt β_1 und β_2 zwei willkürliche simpliziale Abbildungen, welche die Abbildung α approximieren. Seien ζ_1 und ζ_2 die ihnen zugrunde liegenden simplizialen Zerlegungen von μ. Wir konstruieren eine so dichte Unterteilung ζ_3 von ζ_1, daß es für die zugehörige simpliziale Abbildung β_3, welche die Abbildung β_2 approximiert, möglich ist, in J einen solchen sowohl für β_2, wie für β_3 gewöhnlichen Punkt P zu wählen, daß die Eckpunkte eines willkürlichen, P bedeckenden Bildsimplexes für β_3 in jedem P bedeckenden Bildsimplexe für β_2 enthalten sind. Dann aber gehört zu jedem P bedeckenden Bildsimplex für β_2 *ein und nur ein* P bedeckendes Bildsimplex für β_3, und zwar besitzen je zwei einander in dieser Weise entsprechende Bildsimplexe denselben Sinn der Indikatrix. Hieraus folgern wir, daß die Zahl c, welche schon für β_1 und β_3 dieselbe ist, auch für β_2 und β_3, und deshalb schließlich auch für β_1 und β_2 dieselbe ist.

Wir werden jetzt zeigen, daß die Werte c_1 und c_2, welche c in den Innensimplexen J_1 und J_2 zweier solcher Elemente E_1 und E_2, welche eine $(n-1)$-dimensionale Seite S gemeinsam haben, besitzt, einander gleich sind.

Dazu wählen wir zwei solche Euklidische reguläre Simplexe T_1 und T_2, welche in bezug auf eine gemeinsame $(n-1)$-dimensionale Seite Σ die Spiegelbilder voneinander sind, der Reihe nach als repräsentierende Simplexe von E_1 und E_2, sodaß die $(n-1)$-dimensionalen Seiten S und Σ einander entsprechen.

Sodann werden die Begriffe „*Teilsimplex*", „*p-dimensionales Raumstück*", „*Schwerpunkt*" und „*Inhalt*" von $T_1 + T_2$ (d. h. von der von T_1 und T_2 zusammen gebildeten Punktmenge) in genau derselben Weise auf $E_1 + E_2$ übertragen, wie sie früher von einem einzigen repräsentierenden Simplex auf das von ihm repräsentierte Element übertragen worden sind.

Wir bestimmen in E_1 und E_2 solche der Reihe nach J_1 und J_2 enthaltende Teilsimplexe U_1 und U_2, welche eine in S liegende $(n-1)$-dimensionale Seite gemeinsam haben, deren Grenzen aber die übrigen Seiten von E_1 und E_2 nicht treffen.

Diejenigen Grundsimplexe, deren Eckpunktsbilder für die Abbildung α

alle zum Inneren der Punktmenge $E_1 + E_2$ gehören, rechnen wir nunmehr zu den gewöhnlichen Grundsimplexen, und bestimmen eine simpliziale Abbildung β', welche α approximiert, und welche sich auch auf die neu hinzugekommenen gewöhnlichen Grundsimplexe erstreckt; zu ihr gehören wieder modifizierte simpliziale Abbildungen γ'. Die obere Grenze für ε wählen wir jetzt derart, daß in bezug auf $U_1 + U_2$ und auf die gewöhnlichen Grundsimplexe in der neuen Bedeutung dieselbe Eigenschaft, welche früher den Innensimplexen und den gewöhnlichen Grundsimplexen im alten Sinne auferlegt ist, gültig bleibt. Dann können wir nach der schon oben angewandten Methode folgern, daß *für die Abbildung β' in den gewöhnlichen Punkten von $U_1 + U_2$ die Zahl $p - p'$ eine Konstante ist.*

Diese zu β' und $U_1 + U_2$ gehörige Konstante ist aber einerseits mit der zu β und J_1 gehörigen Konstante c_1, andererseits mit der zu β und J_2 gehörigen Konstante c_2 identisch, sodaß in der Tat die Konstante c in J_1 und J_2, *dann aber auch in allen Elementen von μ'*, denselben Wert hat.

Die Konstante c, welche einerseits in allen Elementen von μ', und andererseits für alle simplizialen Abbildungen, welche α approximieren, denselben Wert besitzt, *stellt mithin eine Eigenschaft von α dar.* Wir nennen sie *den Grad der eindeutigen und stetigen Abbildung α.*

Zwei eindeutige und stetige Abbildungen von μ auf μ', welche sich stetig ineinander überführen lassen, besitzen denselben Grad.

Approximieren wir sie nämlich beide durch solche simpliziale Abbildungen, denen paarweise dieselbe simpliziale Zerlegung von μ zugrunde liegt, so können wir zwischen jedes Paar dieser Abbildungen eine solche endliche Reihe von auf dieselbe Zerlegung gegründeten simplizialen Abbildungen einschalten, daß jede von ihnen den oben der simplizialen Abbildung β auferlegten Bedingungen genügt, und daß je zwei aufeinanderfolgende von ihnen sich nur im Bildpunkte *eines* der Grundpunkte, und zwar beliebig wenig, unterscheiden, sodaß es sicher ein Innensimplex von μ' gibt, in dem sie beide genau dieselbe Bildmenge, also denselben Wert der Konstante c bestimmen. Mithin kann sich dieser Wert an der genannten Reihe von Abbildungen entlang nicht ändern, was nur möglich ist, wenn die beiden eindeutigen und stetigen Abbildungen, von denen wir ausgegangen sind, von gleichem Grade sind.

Daß jede endliche, positive oder negative, ganze Zahl als Grad einer Abbildung auftreten kann, zeigen am einfachsten diejenigen eindeutigen und stetigen Abbildungen einer Kugel auf eine andere Kugel, welche rationale Funktionen der komplexen Variabeln darstellen. Der absolute Wert des Grades der Abbildung ist hier mit dem Grade der entsprechenden Funktion identisch.

Schließlich bemerken wir, daß, *falls für die Abbildung* α *die Bildmenge nicht überall dicht in* μ' *ist, der Grad von* α *sicher Null ist.*

Dann existiert nämlich sicher auch eine simpliziale Abbildung β, welche α approximiert, zu der wir in μ' ein solches Innensimplex J wählen können, in dem die von ihr bestimmte Bildmenge nicht überall dicht liegt. In einem Teilgebiete eines Innensimplexes, wo die Bildmenge von μ für β nicht eindringt, sind aber sowohl p wie p', also auch c gleich Null.

Wir haben bis jetzt μ' als zweiseitig und geschlossen angenommen. Wenn aber μ' einseitig und geschlossen ist, so bleiben die vorstehenden Überlegungen sowohl in bezug auf ein einziges Innensimplex, wie in bezug auf die Innensimplexe zweier in einer $(n-1)$-dimensionalen Seite aneinander grenzenden Elemente, vollständig in Kraft. Betrachten wir dann aber weiter eine solche geschlossene Kette von Elementen, in welcher der Sinn der Indikatrix umkehrt, so muß in dieser Kette die Zahl $c = p - p'$ einerseits konstant sein, und andererseits bei einem vollen Umlaufe ihr Zeichen wechseln, was nur möglich ist, wenn sie *gleich Null ist.*

Wenn schließlich μ' offen ist, so kann man, weil die Bildmenge von μ in μ' abgeschlossen ist, in μ' eine solche *endliche* Menge μ'' von Elementen angeben, daß sowohl für α, wie für die verschiedenen Abbildungen β und γ die Bildmenge von μ ganz in μ'' enthalten ist, ohne jedoch in μ'' überall dicht zu liegen. Erstere Eigenschaft bringt mit sich, daß sowohl hinsichtlich eines einzigen Innensimplexes, wie hinsichtlich der Innensimplexe zweier in einer $(n-1)$-dimensionalen Seite aneinander grenzenden Elemente die obigen Überlegungen wieder völlig gültig bleiben. Aus der Eigenschaft, daß die Bildmenge von μ in μ'' *nicht* überall dicht liegt, folgern wir dann weiter, daß auch hier der Grad von α *nur Null sein kann.*

Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen wie folgt zusammen:

Satz 1. *Wenn eine zweiseitige, geschlossene, gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ auf eine gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ' eindeutig und stetig abgebildet wird, so existiert eine bei stetiger Modifizierung der Abbildung sich nicht ändernde endliche ganze Zahl c mit der Eigenschaft, daß die Bildmenge von μ jedes Teilgebiet von μ' im ganzen c Male positiv überdeckt. Ist μ' einseitig oder offen, so ist c stets gleich Null.**)

*) Man bemerkt gleich, daß dieser Abbildungsgrad in hohem Maße von der speziellen Zerlegung von μ und μ' in Elemente, sowie von der speziellen Herstellung ihrer Messungsskalen unabhängig ist. Für $n = 2$ kann sogar leicht bewiesen werden,

§ 2.

Die stetigen Vektorfelder auf n-dimensionalen Kugeln.

Wir betrachten eine n-dimensionale Kugel K, welche wir in einem $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raume R_{n+1} durch die Gleichung $\Sigma x_h^2 = 1$ in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten darstellen. Daß diese Kugel unter den im vorigen Paragraphen entwickelten Begriff der gemessenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit fällt, zeigt sich, wenn wir die 2^{n+1} sphärischen Simplexe, in welche sie durch die n-dimensionalen ebenen Räume $x_h = 0$ des R_{n+1} zerlegt wird, als ihre Elemente, und die Teilgebiete der in ihr liegenden p-dimensionalen großen Kugeln als ihre ebenen p-dimensionalen Raumstücke auffassen, während wir in jedem Elemente denjenigen Punkt, dessen Cartesische Koordinaten im R_{n+1} alle gleich $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$ sind, als Einheitspunkt der Normalkoordinaten wählen. Nachdem weiter für eines der Elemente eine positive Indikatrix gewählt ist, ist zugleich für jedes sphärische Simplex (ein solches wird von $n+1$ verschiedenen $(n-1)$-dimensionalen Großkugeln gebildet, und ist gänzlich in einer gewissen Halbkugel von K enthalten) eine positive Indikatrix festgelegt.

In jedem Punkte P von K existiert nun eine $(n-1)$-dimensionale Richtungskugel λ_P, in der wir mittels Großkugeln analog wie für K selbst, die Elemente, die Simplexe, die ebenen p-dimensionalen Raumstücke und Normalkoordinaten definieren können. Weiter soll die positive Indikatrix von λ_P in folgender Weise aus der positiven Indikatrix von K hergeleitet werden: Sei s ein zu λ_P gehöriges $(n-1)$-dimensionales sphärisches Simplex; wir bestimmen in K ein solches n-dimensionales Simplex S, das P als Eckpunkt besitzt, während seine P enthaltenden $(n-1)$-dimensionalen Seiten durch die $(n-2)$-dimensionalen Seiten von s bestimmt werden, und die letzte $(n-1)$-dimensionale Seite beliebig ist. Sodann schreiben wir die positive Indikatrix von S in solcher Weise, daß in der Reihe der Eckpunkte P die letzte Stelle erhält. Die übrigen Eckpunkte dieser Reihe bestimmen dann eine gewisse Reihenfolge der in P zusammenkommenden Kanten von S, mithin ebenso eine gewisse Reihenfolge der Eckpunkte von s. Letztere Reihenfolge wählen wir als positive Indikatrix von s.

daß diese Unabhängigkeit vollkommen ist. Der entsprechende Nachweis für höhere Dimensionenzahlen dürfte ziemlich tief liegen, doch läßt sich auch ohne ihn Satz 1 verwenden, wie die folgenden Paragraphen zeigen.

Wir denken uns in K ein solches stetiges Vektorfeld, daß nur die Richtung, nicht die Größe der Vektoren in Betracht kommt, während nur eine endliche Zahl von singulären Punkten (d. h. Punkten, in denen die Stetigkeit der Vektorrichtung gestört wird) existiert, und zerlegen K mittels einer keinen singulären Punkt des Vektorfeldes enthaltenden, $(n-1)$-dimensionalen Großkugel $\varkappa$, mit den Polen π_1 und π_2, in eine π_1 enthaltende Hälfte H_1 und eine π_2 enthaltende Hälfte H_2 (die Großkugel $\varkappa$ betrachten wir als zu beiden Hälften gehörig). Sowohl H_1 wie H_2 zerlegen wir mittels $(n-1)$-dimensionaler Großkugeln keinen singulären Punkt des Vektorfeldes enthalten, die in eine endliche Zahl von n-dimensionalen sphärischen Simplexen $S_{11}, S_{12}, S_{13}, \cdots$ bez. $S_{21}, S_{22}, S_{23}, \cdots$, welche alle ebenso, wie die Elemente einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, aneinander schließen, während die Teilsimplexe von H_2 die Spiegelbilder in bezug auf $\varkappa$ der Teilsimplexe von H_1 sind.

Sei σ eine $(n-1)$-dimensionale Seite eines Teilsimplexes $S_{\alpha\beta}$. Aus der positiven Indikatrix von $S_{\alpha\beta}$ leiten wir in folgender Weise eine „positive Indikatrix von σ, betrachtet als Seite von $S_{\alpha\beta}$" her: Wir schreiben die positive Indikatrix von $S_{\alpha\beta}$ in solcher Weise, daß in der Reihe der Eckpunkte der *nicht* in σ liegende Eckpunkt die letzte Stelle erhält. Die Reihenfolge der übrigen Eckpunkte bestimmt die positive Indikatrix von σ, betrachtet als Seite von $S_{\alpha\beta}$. In dieser Weise wird zugleich für den *Umfang* von $S_{\alpha\beta}$, welcher sich derart als zweiseitige, geschlossene, gemessene $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen läßt, daß die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $S_{\alpha\beta}$ seine Elemente, und die Teilgebiete der in ihm liegenden p-dimensionalen Großkugeln seine ebenen p-dimensionalen Raumstücke repräsentieren, eine positive Indikatrix festgelegt.

Wir projizieren im R_{n+1} den Umfang $U_{\alpha\beta}$ eines Simplexes $S_{\alpha\beta}$ zusammen mit den in seinen Punkten angebrachten Vektoren aus einem außerhalb $S_{\alpha\beta}$ liegenden Punkte Q von K auf den im Q diametral entgegengesetzten Punkte O angebrachten n-dimensionalen ebenen Berührungsraum ϑ. Dadurch wird eine eindeutige und stetige Abbildung von $U_{\alpha\beta}$ auf die Kugel der Richtungen von ϑ, deren positive Indikatrix durch die positive Indikatrix der Kugel λ_O festgelegt ist, bestimmt; wir behaupten von dieser Abbildung, daß ihr Grad unabhängig ist von der speziellen Wahl des Projektionszentrums Q.

Zum Beweise dieser Behauptung bemerken wir, daß durch die stereographische Projektion die $(n-1)$-dimensionale Richtungskugel λ_P eines willkürlichen zu $U_{\alpha\beta}$ gehörigen Punktes P in eine kongruente Beziehung zur $(n-1)$-dimensionalen Richtungskugel von ϑ gesetzt wird, wodurch zugleich zwischen den Richtungskugeln λ_P und λ_R von zwei willkürlichen zu $U_{\alpha\beta}$ gehörigen Punkten P und R eine kongruente Beziehung b_{PR} hergestellt wird, und zwar in folgender Weise:

Sei V eine willkürliche zu λ_P gehörige Richtung. Sie bestimmt mit Q und R eine in K liegende zweidimensionale Kugel l, in welcher die Punkte P, Q und R einen Kreis k bestimmen. In R gibt es dann eine solche zu l gehörige Richtung, welche in l mit k denselben Winkel bestimmt wie V. Diese Richtung korrespondiert mit V für die Beziehung b_{PR}.

Stetige Bewegung von Q in endlicher Entfernung von P und R kann diese kongruente Beziehung b_{PR} nur stetig ändern; mithin kann stetige Bewegung von Q in endlicher Entfernung von $S_{\alpha\beta}$ das ganze System der kongruenten Beziehungen zwischen den $(n-1)$-dimensionalen Richtungskugeln der Punkte von $U_{\alpha\beta}$ nur stetig ändern, sodaß der Grad der durch das Vektorfeld bestimmten Abbildung von $U_{\alpha\beta}$ auf die $(n-1)$-dimensionale Richtungskugel des Projektionsraumes keine Sprünge erleiden kann, was nur möglich ist, wenn er eine Konstante $c_{\alpha\beta}$ ist, welche wir den *Grad des Simplexes* $S_{\alpha\beta}$ nennen. Wir stellen uns als Ziel, die Summe dieser Grade der verschiedenen $S_{\alpha\beta}$ zu ermitteln.

Wir projizieren die Hälfte H_1 stereographisch aus π_2, und H_2 aus π_1. Die entsprechenden n-dimensionalen ebenen Projektionsräume bezeichnen wir mit ϑ_1 und ϑ_2, betrachten die durch diese stereographische Projektion bestimmten Abbildungen der $U_{1\beta}$ auf die Richtungskugel von ϑ_1, und suchen die Summe der Grade dieser Abbildungen.

In dieser Summe liefert jede solche $(n-1)$-dimensionale Seite eines $S_{1\beta}$, welche *nicht* in $\varkappa$ enthalten ist, weil die in ihr enthaltenen Grundsimplexe zweimal mit entgegengesetzter Indikatrix abgebildet werden, zwei einander zerstörende Beiträge, sodaß nur die Beiträge der in $\varkappa$ enthaltenen $(n-1)$-dimensionalen Seiten $\sigma_\varkappa$ von Einfluß sind.

Fassen wir nun aber $\varkappa$ in solcher Weise als eine zweiseitige, geschlossene, gemessene $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit auf, daß die $\sigma_\varkappa$ ihre Elemente, und die Teilgebiete der in ihr liegenden p-dimensionalen Großkugeln ihre ebenen p-dimensionalen Raumstücke repräsentieren, während ihre positive Indikatrix von der positiven Indikatrix der $\sigma_\varkappa$, betrachtet als Seiten der $S_{1\beta}$, bestimmt wird, so ruft die stereographische Projektion von $\varkappa$ auf ϑ_1 eine eindeutige und stetige Abbildung von $\varkappa$ auf die Richtungskugel von ϑ_1 hervor, zu deren Grad c_1 die $\sigma_\varkappa$ genau dieselben Beiträge liefern, wie zur Summe der $c_{1\beta}$, sodaß c_1 der Summe der $c_{1\beta}$ gleich ist.

Versehen wir aber $\varkappa$ mit derjenigen positiven Indikatrix, welche der positiven Indikatrix der $\sigma_\varkappa$, betrachtet als Seiten der $S_{2\beta}$, entspricht, und projizieren wir sodann $\varkappa$ stereographisch auf ϑ_2, so zeigt sich in derselben Weise, daß der Grad c_2 der in dieser Weise hervorgerufenen eindeutigen und stetigen Abbildung von $\varkappa$ auf die Richtungskugel von ϑ_2 der Summe der $c_{2\beta}$ gleich ist.

Sei ϱ der $\varkappa$ enthaltende n-dimensionale ebene Raum des R_{n+1}, so entspricht bei einer Spiegelung des R_{n+1} in bezug auf ϱ die Projektionskugel $\varkappa_2$ von $\varkappa$ in ϑ_2 der Projektionskugel $\varkappa_1$ von $\varkappa$ in ϑ_1 mit entgegengesetzter Indikatrix, die Richtungskugel von ϑ_2 der Richtungskugel von ϑ_1, ebenfalls mit entgegengesetzter Indikatrix, und die vorliegende Vektorverteilung in $\varkappa_2$ der *Reflexionsverteilung* in $\varkappa_1$, d. h. derjenigen Verteilung, welche aus der vorliegenden in jedem Punkte durch Spiegelung am ebenen in ϑ_1 liegenden Berührungsraum erhalten wird.

Um die Summe der $c_{\alpha\beta}$, d. h. die Summe von c_1 und c_2 zu ermitteln, haben wir mithin die Frage zu erörtern: *wieviel in einem ebenen Euklidischen n-dimensionalen Raume ϑ die Summe der Grade derjenigen Abbildungen δ und ϱ einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel $\mathfrak{f}$ auf die Richtungskugel λ von ϑ beträgt, welche durch eine stetige Vektorverteilung in den Punkten von $\mathfrak{f}$ und ihre Reflexionsverteilung bestimmt ~~wird~~.* werden

Zu diesem Zwecke bestimmen wir in $\mathfrak{f}$ mittels eines $(n-1)$-dimensionalen ebenen Raumes f eine $(n-2)$-dimensionale Großkugel mit den Polen q_1 und q_2, und nehmen mit $\mathfrak{f}$ eine solche Fundamentalreihe von simplizialen Zerlegungen $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \cdots, \zeta_m', \cdots$ vor, daß für keine von ihnen p_1 in einer Grundseite liegt, und daß ihre Dichte mit steigendem m unter jede Grenze herabsinkt. Wir bezeichnen mit z_m dasjenige Grundsimplex, welches q_1 für ζ_m' enthält, und mit u_m den Umfang von z_m.

Für jedes m leiten wir in folgender Weise aus δ eine neue eindeutige und stetige Abbildung δ_m von $\mathfrak{f}$ auf λ her: Sei j ein willkürlicher halber Großkreis, welcher in $\mathfrak{f}$ die Punkte q_1 und q_2 verbindet, und h sein Schnittpunkt mit u_m. Den Bogen $q_1 h$ von j bilden wir auf den Halbkreis j ähnlich ab. Wird dabei ein willkürlicher Punkt F in F' abgebildet, so soll dem Punkte F für die Abbildung δ_m derjenige Punkt von λ entsprechen, welcher für die Abbildung δ dem Punkte F' entspricht, während die nicht zum Bogen $q_1 h$ gehörigen Punkte von j für δ_m alle in den Bildpunkt g von q_2 für δ abgebildet werden.

Die Reflexionsabbildung (d. h. die zur Reflexionsverteilung gehörige Abbildung) von δ_m bezeichnen wir mit ϱ_m.

Weil δ sich stetig in δ_m überführen läßt, wobei zugleich ϱ stetig in ϱ_m übergeht, so ist die Gradsumme von δ und ϱ derjenigen von δ_m und ϱ_m gleich.

Durch weitere simpliziale Zerlegungen der Grundsimplexe von ζ_m' gelangen wir zu einer solchen simplizialen Zerlegung ζ_m von $\mathfrak{F}$, daß die entsprechenden simplizialen Abbildungen δ_m' und ϱ_m', welche δ_m und ϱ_m approximieren, den Bedingungen, welche im § 1 der approximierenden Abbildung β auferlegt sind, genügen.

Wir suchen zunächst die Beiträge, welche die von δ_m' und ϱ_m' erzeugten Bildmengen von z_m zur Gradsumme von δ_m und ϱ_m liefern. Wenn wir mit g' den Reflexionsvektor der Richtung g im Punkte q_1 von $\mathfrak{F}$ bezeichnen, so ist außerhalb einer für unbegrenzt wachsendes m unter jede Grenze herabsinkenden Umgebung von g' sowohl für die von δ_m' erzeugte Bildmenge von z_m, wie für die von ϱ_m' erzeugte Bildmenge von z_m, die Zahl $p-p'$ eine Konstante. Von diesen beiden Konstanten ändert die letztere sich nicht, wenn wir die von ϱ_m' erzeugte Bildmenge derart modifizieren, daß als Bildpunkt eines jeden in z_m liegenden Grundpunktes P von ζ_m, dem für δ_m die Richtung e_P entspricht, an Stelle des Reflexionsvektor von e_P in P der Reflexionsvektor von e_P in q_1 tritt. Nach dieser Modifizierung ist aber die von ϱ_m' erzeugte Bildmenge von z_m in das Spiegelbild in bezug auf f der von δ_m' erzeugten Bildmenge von z_m übergegangen, und zwei solche Spiegelbilder besitzen entgegengesetzte Indikatrizen, sodaß die beiden Bildmengen der Reihe nach in zwei Punkten von λ, welche die Spiegelbilder voneinander in Bezug auf f sind, entgegengesetzte Zahlen $p-p'$ bestimmen; dann aber bestimmen außerhalb der unter jede Grenze herabsinkenden Umgebung von g' die von δ_m' und ϱ_m' erzeugten Bildmengen von z_m *überall* entgegengesetzte Zahlen $p-p'$, und zerstören mithin die beiderseitigen Beiträge zur Gradsumme von δ_m und ϱ_m.

Wir haben jetzt die Beiträge zu ermitteln, welche die von δ_m' und ϱ_m' erzeugten Bildmengen des von z_m in $\mathfrak{F}$ bestimmten Restgebietes t_m zur Gradsumme von δ_m und ϱ_m liefern. Zunächst reduziert sich die von δ_m' erzeugte Bildmenge auf den einzigen Punkt g, liefert also keinen Beitrag. Sodann ist für die von ϱ_m' erzeugte Bildmenge außerhalb einer für unbegrenzt wachsendes m unter jede Grenze herabsinkenden Umgebung von g' *die Zahl $p-p'$ dem Grade derjenigen Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf λ gleich, welche durch die Reflexionsverteilung eines konstanten Vektors in den Punkten von $\mathfrak{F}$ bestimmt wird.*

Um diesen Grad zu ermitteln, bezeichnen wir mit χ_1 denjenigen Punkt von $\mathfrak{F}$, dessen Radius dem konstanten Vektor entgegengesetzt ist, mit χ_2 den χ_1 diametral entgegengesetzten Punkt von $\mathfrak{F}$, mit w die zu $\mathfrak{F}$ gehörige $(n-2)$-dimensionale Großkugel, welche χ_1 und χ_2 zu Polen hat, mit a_1 bez. a_2 die χ_1 bez. χ_2 enthaltende Hälfte, welche w in $\mathfrak{F}$ bestimmt. Wir können dann mit der Hälfte a_1 leicht eine solche simpliziale Zerlegung vornehmen, daß die Bilder der mit positiver Indikatrix versehenen Grundsimplexe die Kugel λ genau einmal, und zwar mit positiver Indikatrix überdecken. Zerlegen wir weiter die Hälfte a_2 in solche Grundsimplexe, welche denjenigen von a_1 diametral entgegengesetzt sind, und versehen wir diese je mit einer solchen Indikatrix, welche derjenigen des entsprechenden Grundsimplexes von a_1 ebenfalls diametral entgegengesetzt ist, was bewirkt, daß diese Indikatrix für gerades n positiv, für ungerades n negativ ausfällt, so bestimmen zwei entsprechende Grundsimplexe von a_1 und a_2 in λ dasselbe mit positiver Indikatrix versehene Bildsimplex.

Wenn wir also auch die Grundsimplexe von a_2 mit einer positiven Indikatrix versehen, so überdecken ihre Bildsimplexe die Kugel λ wieder genau einmal, und zwar für gerades n mit positiver, für ungerades n mit negativer Indikatrix, *sodaß der gesuchte Abbildungsgrad für n gerade gleich zwei, für n ungerade gleich Null ist.*

Also sind auch die Gradsumme von δ_m und ϱ_m, die Gradsumme von δ und ϱ, und schließlich die Summe der $c_{\alpha\beta}$ für n gerade gleich zwei, für n ungerade gleich Null.

Wenn das Vektorfeld in K *keine* singulären Punkte aufweist, so ist seine Stetigkeit gleichmäßig. Wir können dann die $S_{\alpha\beta}$ so klein wählen, daß die Richtungsvariation der auf ϑ_1 resp. ϑ_2 stereographisch projizierten Vektoren desselben $U_{\alpha\beta}$ eine beliebig klein gewählte Größe nicht übersteigt, daß mithin jedes $c_{\alpha\beta}$ gleich Null ist. Dies ist aber nach dem obigen Ergebnisse für gerades n unmöglich, sodaß wir bewiesen haben:

Satz 2. *Ein stetiges Vektorfeld auf einer Kugel gerader Dimensionenzahl besitzt wenigstens einen singulären Punkt.*

Daß dieser Satz für Kugeln ungerader Dimensionenzahl *nicht* zutrifft, erhellt am einfachsten aus der Betrachtung eines solchen Vektorfeldes auf der dreidimensionalen Kugel, für welches die Berührungskurven von einer (zweifach unendlichen) Schar von untereinander im Cliffordschen Sinne parallelen großen Kreisen gebildet werden.

§ 3.

Die eindeutigen und stetigen Transformationen n-dimensionaler Kugeln und n-dimensionaler Elemente in sich.

Wir denken uns jetzt die n-dimensionale Kugel K einer eindeutigen und stetigen Transformation r unterworfen, welche keinen Punkt fest läßt. Wir nehmen mit K solche beliebig dichte simpliziale Zerlegungen vor, für welche die Grundsimplexe in derselben Weise, wie im § 2 die Simplexe $S_{\alpha\beta}$, gebildet werden, und konstruieren die entsprechenden simplizialen Transformationen von K in sich, welche r approximieren. Dann existiert sicher eine simpliziale r approximierende Transformation t, welche ebenfalls keinen Punkt fest läßt. Sonst nämlich gäbe es eine Fundamentalreihe von solchen gegen r konvergierenden simplizialen Transformationen, welche der Reihe nach die Punkte $F_1, F_2, F_3, \cdots$ fest ließen; dann aber wäre jeder Grenzpunkt dieser Fundamentalreihe $F_1, F_2, F_3, \cdots$ Fixpunkt für die Transformation r.

Wir wählen einen willkürlichen, für t gewöhnlichen und nicht in einer Seite eines Grundsimplexes liegenden Punkt O von K, verbinden jeden Punkt P von K mit seinem Bildpunkte P' für die Transformation t durch einen O enthaltenden Kreis, und bringen in P denjenigen Vektor an, welcher von dem O *nicht* enthaltenden Bogen dieses Kreises bestimmt wird. Dann entsteht auf K ein stetiges Vektorfeld, das nur eine endliche Zahl von singulären Punkten aufweist, nämlich erstens die Punkte, welche O zum Bildpunkt haben, zweitens den Punkt O selbst.

Wir wählen in K eine positive Indikatrix, bezeichnen mit $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_p$ diejenigen Grundsimplexe, deren Bildsimplexe ${}_bS_1, {}_bS_2, {}_bS_3, \cdots, {}_bS_p$ den Punkt O mit positiver Indikatrix bedecken, mit $S_1', S_2', S_3', \cdots, S_{p'}'$ diejenigen Grundsimplexe, deren Bildsimplexe ${}_bS_1', {}_bS_2', {}_bS_3', \cdots, {}_bS_{p'}'$ den Punkt O mit negativer Indikatrix bedecken, mit S'' das O enthaltende Grundsimplex. Weiter dürfen wir die t zugrunde liegende simpliziale Zerlegung von K so dicht voraussetzen, daß kein Grundsimplex mit seinem Bildsimplex einen gemeinschaftlichen Punkt besitzt; dann ist auch sicher S'' von allen S_α und von allen S_α' verschieden.

Um die Grade der Simplexe S_α und S_α' zu ermitteln, projizieren wir im R_{n+1} die Kugel K samt ihren Vektorfelde stereographisch aus O auf den in dem O diametral entgegengesetzten Punkte O' angebrachten n-dimensionalen ebenen Berührungsraum ϑ.

Die Projektion des Simplexes S_α bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_\alpha$, seine Grenze mit $\mathfrak{U}_\alpha$, die Projektion der Grenze des Simplexes ${}_bS_\alpha$ mit ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$. Die Bildindikatrix in ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ gehört nun aber in ϑ zu einer *negativen* Indikatrix des von ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ begrenzten sphärischen Simplexes ${}_b\mathfrak{S}_\alpha$.

Die Vektoren in den Punkten $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{U}_\alpha$, denen die Punkte $\mathfrak{P}'$ von ${}_b\mathfrak{U}_\alpha$ entsprechen, werden durch die geradlinigen Verbindungsstrecken $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ bestimmt; durch gleichmäßig stetige Abänderung lassen diese sich in diejenigen Vektoren überführen, welche in jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der geradlinigen Verbindungsstrecke $O'\mathfrak{P}'$ parallel sind. Letztere Vektoren überdecken aber die Richtungskugel $\lambda_{O'}$ genau einmal mit negativer Indikatrix, sodaß der Grad von S_α gleich -1 ist.

In derselben Weise wird für den Grad jedes Simplexes S_α' der Wert $+1$ gefunden.

Um den Grad von S'' zu ermitteln, führen wir die Vektorverteilung in der Grenze U'' von S'' durch stetige Abänderung in eine solche über, für welche in jedem Punkte P von U'' der Vektor durch den O nicht enthaltenden Bogen eines O und P verbindenden Großkreises bestimmt wird. Projizieren wir sodann U'' samt seinem Vektorfelde im R_{n+1} stereographisch aus O' auf den ebenen n-dimensionalen Raum ϑ', welcher K in O berührt, in $\mathfrak{U}''$, so wird in jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{U}''$ der Vektor bestimmt durch die Richtung der geradlinigen Verbindungsstrecke $O\mathfrak{P}$; somit überdeckt die Vektorverteilung in $\mathfrak{U}''$ die Richtungskugel λ_0 genau einmal mit positiver Indikatrix, und der Grad von S'' ist gleich $+1$.

Was die übrigen Grundsimplexe angeht, so lassen sie sich in solche Teilsimplexe zerlegen, sodaß innerhalb jedes einzelnen bei stereographischer Projektion die Variation der Vektorrichtung eine beliebig klein gewählte Größe nicht übersteigt. Jedes dieser Teilsimplexe besitzt also den Grad Null, und dasselbe gilt für die sich aus ihnen zusammensetzenden Grundsimplexe.

Die Summe der Grade aller Grundsimplexe ist mithin gleich $-p+p'+1$, was für gerades n gleich zwei, für ungerades n gleich Null sein muß. Hieraus folgern wir, daß $p-p'$, d. h. der Grad der Transformationen r und t, für gerades n gleich -1, für ungerades n gleich $+1$ ist, womit wir zu folgendem Ergebnis gelangt sind:

Satz 3. *Eine eindeutige und stetige Transformation einer n-dimensionalen Kugel in sich, welche keinen Fixpunkt aufweist, besitzt für gerades n den Grad -1, für ungerades n den Grad $+1$.*

Von diesem Satze formulieren wir folgende besonderen Fälle:

Folgerung 1. *Wenn bei einer eindeutigen und stetigen Transformation einer n-dimensionalen Kugel in sich die Bildmenge nicht in der ganzen Kugel überall dicht liegt, so existiert sicher ein Fixpunkt.*

Folgerung 2. *Jede eineindeutige und stetige Transformation einer Kugel gerader Dimensionenzahl in sich, welche sich stetig in die Identität überführen läßt, besitzt sicher einen Fixpunkt.**)

Folgerung 3. *Jede eineindeutige und stetige Transformation einer Kugel ungerader Dimensionenzahl in sich, welche sich stetig in eine Spiegelung überführen läßt, besitzt sicher einen Fixpunkt.*

*) Von diesem Satze habe ich früher den speziellen Fall bewiesen, daß jede eineindeutige und stetige Transformation der zweidimensionalen Kugel in sich, welche den Umlaufssinn nicht ändert, sicher einen Fixpunkt aufweist. Vgl. Amsterd. Ber., holl. Ausg. XVII 2, S. 750, XIX 1, S. 48; engl. Ausg. XI 2, S. 797, XIII 1, S. 184.

Daß Transformationen -1^{ten} Grades für gerades n, und Transformationen $+1^{\text{ten}}$ Grades für ungerades n *nicht* notwendig einen Fixpunkt aufweisen, erhellt am einfachsten aus der Betrachtung der Rotationen und Spiegelungen eines Euklidischen R_{n+1} um einen festen Punkt.

Wir betrachten nunmehr eine eindeutige und stetige Transformation $\mathfrak{T}$ eines n-dimensionalen Elementes E in sich. Wir bringen E in eine eineindeutige und stetige Beziehung zu einer Kugelhälfte H_1, welche in einer n-dimensionalen Kugel K von einer $(n-1)$-dimensionalen Großkugel $\varkappa$ bestimmt wird. Dabei entspricht der eindeutigen und stetigen Transformation von E in sich eine eindeutige und stetige Transformation $\mathfrak{A}$ von H_1 in sich. Erweitern wir nun die Transformation $\mathfrak{A}$ in solcher Weise auf die andere Hälfte H_2 von K, daß je zwei Punkte von K, welche die Spiegelbilder voneinander in Bezug auf $\varkappa$ sind, für $\mathfrak{A}$ in denselben Punkt von H_1 transformiert werden, so liegt eine solche eindeutige und stetige Transformation von K in sich vor, bei welcher die Bildmenge nicht überall dicht in K ist, für welche also sicher ein, notwendig in H_1 liegender, Fixpunkt existiert. Diesem Fixpunkte muß aber ein Fixpunkt der Transformation $\mathfrak{T}$ von E in sich entsprechen, sodaß wir bewiesen haben:

Satz 4: *Eine eindeutige und stetige Transformation eines n-dimensionalen Elementes in sich besitzt sicher einen Fixpunkt.*

Amsterdam, Juli 1910.