Die Topologie der Mannigfaltigkeiten.[1])

Von HELLMUTH KNESER in Göttingen.

Meine Damen und Herren! Wenn ich Ihnen über die Topologie der Mannigfaltigkeiten berichten will, so habe ich dabei besonders diejenige Behandlungsweise im Auge, die bisher die meisten Erfolge gehabt hat und auch für die Zukunft dazu berufen erscheint: die kombinatorische. Ich möchte Ihnen zeigen, wie man von dem rein topologisch gefaßten Begriff der Mannigfaltigkeit zu dem kombinatorischen Ansatz und von diesem wieder zu topologischen Ergebnissen kommt, und welche Schwierigkeiten sich auf diesem Wege entgegenstellen, Schwierigkeiten, die zum erheblichen Teil noch nicht überwunden sind.

Von einer allgemeinen Definition der Mannigfaltigkeiten muß man verlangen, daß sie weit genug gefaßt ist, um diejenigen Gebilde unter sich zu begreifen, die man üblicherweise als Mannigfaltigkeiten bezeichnet, z. B. die Riemannsche Fläche bzw. das entsprechende Gebilde einer analytischen Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen, eine reguläre Fläche im Raume, den Phasenraum eines dynamischen Systems. Von der anderen Seite wird man die Definition so scharf zu gestalten suchen, daß man mit dem Begriff arbeiten kann. Um der ersten Forderung zu genügen, gehen wir aus von dem Hausdorffschen Begriff des *topologischen Raumes.*[2]) Ein topologischer Raum ist zunächst eine Menge irgend welcher mathematischer Gegenstände — bei den genannten Beispielen Funktionselemente, Punkte, Bewegungszustände —, die wir Punkte nennen. Um über den für die Topologie grundlegenden Stetigkeitsbegriff verfügen zu können, müssen wir die Punkte miteinander in Beziehung bringen, z. B. festsetzen, wann eine Punktfolge gegen einen Punkt konvergiert. Das geschieht hier, indem wir jedem Punkt P gewisse ihn enthaltende Teilmengen des Raumes, U_P, V_P usw., seine *Umgebungen,*

1) Vortrag, gehalten bei der 88. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Innsbruck, 21.—27. Sept. 1924. Die vorliegende Niederschrift ist gegenüber dem Wortlaut des Vortrages an vielen Stellen ergänzt; dagegen ist eine kurze Übersicht über die Hauptergebnisse der Topologie der Mannigfaltigkeiten weggelassen worden.

2) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), Kap. VII.

zuordnen; dann können wir definieren: eine Punktfolge konvergiert gegen den Punkt P, wenn jede Umgebung von P alle Punkte der Folge bis auf endlich viele enthält. Sollen die Umgebungen zum Aufbau der Topologie brauchbar sein, so müssen sie bestimmte Eigenschaften haben, etwa den folgenden, von Hausdorff aufgestellten Axiomen genügen.

1. *Zu jedem Punkt P gibt es mindestens eine Umgebung U_P; jede Umgebung von P enthält P.*

2. *Zu zwei Umgebungen von P gibt es eine in beiden enthaltene Umgebung von P.*

3. *Liegt der Punkt Q in einer Umgebung U_P, so enthält U_P auch eine Umgebung U_Q von Q.*

4. *Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es Umgebungen U_P und U_Q ohne gemeinsamen Punkt.*

Diese Axiome legen den Umgebungen Eigenschaften bei, die z. B. bei den kreisförmigen Umgebungen in der Ebene vorhanden sind. Axiom 1. bedarf keiner Erläuterung; 3. besagt, daß die Umgebungen offene Mengen sind; 2. und 4. geben einen gewissen Ersatz für die Möglichkeit, in der Ebene beliebig kleine Umgebungen anzunehmen.

Wie auf den Umgebungsbegriff eine Geometrie der allgemeinen topologischen Räume zu gründen ist, kann hier nicht näher beschrieben werden; nur soviel sei gesagt: 1. Jede Teilmenge eines topologischen Raumes ist auch einer; 2. wir können jetzt von topologischer, d. h. eineindeutiger stetiger Abbildung topologischer Räume aufeinander sprechen. Wir nennen eine eineindeutige Abbildung stetig, wenn den Punkten einer gegen einen Punkt P konvergierenden Folge immer eine gegen den Bildpunkt von P konvergierende Folge entspricht[1]) und dasselbe von der umgekehrten Abbildung gilt. Zwei Mengen heißen *homöomorph*, wenn sie sich eineindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen.

Wird eine Menge durch zwei verschiedene, den Axiomen 1. bis 4. genügende Umgebungssysteme $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zu einem topologischen Raume gemacht, so haben diese beiden topologischen Räume jedenfalls dann dieselben topologischen Eigenschaften, wenn jede dem System $\mathfrak{U}_1$ entnommene Umgebung eines Punktes P eine Umgebung von P aus $\mathfrak{U}_2$ enthält und umgekehrt. Dann sollen die Systeme $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ äquivalent heißen. Ein Beispiel geben die kreisförmigen und die quadratischen Umgebungen in der Ebene.

1) Diese Definition ist zwar unzulänglich, wenn Hausdorffs erstes Abzählbarkeitsaxiom nicht gilt; das macht aber hier nichts aus, da wir in den Axiomen 5. und 6. reichlichen Ersatz für jenes haben.

Den wichtigsten Schritt auf dem Wege von den allgemeinen topologischen Räumen zu den n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten tun wir, indem wir fordern:

5. *Zu jedem Punkt gibt es eine Umgebung, die sich topologisch auf die offene Vollkugel des n-dimensionalen Zahlenraumes:* $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1$ *abbilden läßt.* (Im Falle $n = 0$ werde hierunter ein einziger Punkt verstanden.)

Diese Fassung hat den Schönheitsfehler, daß sie auf einen speziellen Raum, eben den Zahlenraum, Bezug nimmt. Wie sie durch eine allgemein topologische zu ersetzen ist, d. h. unter welchen allgemein topologischen Bedingungen sich ein topologischer Raum im Kleinen wie der Zahlenraum verhält, diese Frage ist noch nicht voll beantwortet.

Auch die bisherigen Axiome lassen noch Raum für Gebilde, die von unserem eigentlichen Ziel seitab liegen. Zunächst bemerkt man, daß eine beliebige Menge (beliebiger Mächtigkeit) topologischer Räume, zwischen denen kein Zusammenhang besteht, von denen aber jeder für sich den Axiomen 1. bis 5. genügt, diese auch im Ganzen erfüllt. Das wäre nicht schlimm: man brauchte einen solchen Raum nur in größte zusammenhängende Teilmengen zu zerlegen und jede für sich zu behandeln. Wesentlicher ist es, daß auch ein zusammenhängender topologischer Raum, der 1. bis 5. erfüllt, noch Eigenschaften haben kann, die eine Behandlung mit den bisher angewandten Methoden unmöglich machen.[1]) Um diese Räume auszuschließen, nehmen wir noch Hausdorffs zweites Abzählbarkeitsaxiom hinzu:

6a. *Unter den Umgebungen des den topologischen Raum definierenden oder eines äquivalenten Systems befinden sich nur abzählbar unendlich viele verschiedene Mengen.*

Da nach 5. im Falle $n > 0$ die Mächtigkeit der Menge aller Punkte mindestens die des Kontinuums ist, müssen notwendig verschiedenen Punkten unter anderen auch gleiche Umgebungen zukommen. Ein Beispiel bietet wieder die Ebene, in der wir als Umgebung eines Punktes jede ihn enthaltende offene Kreisscheibe mit rationalem Radius und rationalen Mittelpunktskoordinaten bestimmen können.

Ein topologischer Raum, in dem die Axiome 5. und 6a. gelten, heißt eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^n$.

Von einer *geschlossenen* $\mathfrak{M}^n$ reden wir, wenn dazu noch der Heine-Borelsche Überdeckungssatz gilt:

6b. *Ist jedem Punkt eine Umgebung zugeordnet, so gibt es unter diesen endlich viele, die den ganzen Raum bedecken.*

1) Ein möglichst einfaches Beispiel dieser Art gibt P. Alexandroff, Math. Ann. 91 (1924), S. 235.

Man überzeugt sich leicht davon, daß 6a. aus 1. bis 5. und 6b. folgt.

Nach den Axiomen 1. bis 6. kann nun eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ auf die folgende Weise gegeben sein. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf geschlossene Mannigfaltigkeiten — die allgemeinen (offenen) bieten bei diesen grundlegenden Fragen keine wesentlich anderen Schwierigkeiten —, so haben wir eine endliche Zahl von Umgebungen $U_1, \ldots, U_r$, die $\mathfrak{M}^n$ ganz bedecken, und von denen sich jede topologisch auf eine Vollkugel V_i des n-dimensionalen Zahlenraumes abbilden läßt. Der Durchschnitt D_{ik} von U_i und U_k $(i \neq k)$ ist eine offene Menge in $\mathfrak{M}^n$; ihm entspricht in V_i und V_k je eine offene Teilmenge V_{ik} und V_{ki}, und diese sind durch Vermittlung von D_{ik} topologisch aufeinander abgebildet. Die Punkte der Menge $W_i = V_i - \sum\limits_k V_{ik}$, deren Bilder in $\mathfrak{M}^n$ also nur der einzigen Umgebung U_i angehören, liegen alle innerhalb einer konzentrischen Kugel mit kleinerem Radius. Zum Beweise konstruieren wir die folgenden Umgebungen. Jedem Punkt von U_k $(k \neq i)$ werde U_k zugeordnet. Jeder andere Punkt ist Bild eines Punktes von W_i. Jedem von ihnen ordnen wir eine Vollkugel vom Radius $\frac{1-\varrho}{2}$ als Umgebung zu, wenn ϱ seine Entfernung vom Mittelpunkte von V_i ist. Nach 6b. genügt eine endliche Zahl von Umgebungen dieses Systems, um $\mathfrak{M}^n$ zu überdecken. Ist $\varrho_0 < 1$ der größte Wert von ϱ, der dabei auftritt, so enthalten die dabei benutzten Umgebungen von Punkten von W_i keinen Punkt mit $\varrho \geqq \frac{1+\varrho_0}{2}$. Diese Punkte müssen also in den anderen Umgebungen, d. h. in den Mengen V_{ik} enthalten sein. Umgekehrt ist durch r Vollkugeln V_i, durch die offenen Teilmengen V_{ik} und die Abbildungen von V_{ik} auf V_{ki} eine geschlossene $\mathfrak{M}^n$ definiert, wenn die letztgenannte Eigenschaft und noch eine selbstverständliche[1]) vorhanden ist.

Diese Darstellungsweise ist nichts anderes als die aus der Funktionentheorie bekannte „dachziegelartige Überdeckung". So brauchbar sie dort ist, für topologische Zwecke hat sie den Mangel, daß in sie die Abbildungen zwischen V_{ik} und V_{ki}, also in weitem Maße willkürliche Funktionen eingehen. Frei von diesem Mangel ist eine andere Darstellungsweise, die durch das Schlagwort „Ränderzuordnung" bezeichnet werden kann. Haben wir bisher eine $\mathfrak{M}^n$ mit Teilmengen *überdeckt*, die der offenen Vollkugel homöomorph sind, so soll sie jetzt in ähnliche Teilmengen *zerlegt* werden. Als *Elementarraum* k-ter Di-

---

1) Nennt man zwei Punkte von V_i und V_k äquivalent, wenn ihnen derselbe Punkt von $\mathfrak{M}^n$ entspricht, d. h. wenn sie einander vermöge der Abbildung von V_{ik} auf V_{ki} entsprechen, so muß diese Äquivalenz natürlich transitiv sein.

mension, $\mathfrak{E}^k$, bezeichnen wir eine der k-dimensionalen abgeschlossenen Einheitsvollkugel $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leqq 1$ homöomorphe Menge, für $k = 0$ einen Punkt. *Sphäre* k-ter Dimension, $\mathfrak{S}^k$, heiße eine der „Kugelfläche" $x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = 1$ homöomorphe Menge. Es ist unser Ziel, in $\mathfrak{M}^n$ eine Anzahl Elementarräume $\mathfrak{E}_\nu^k$ $(\nu = 1, \ldots, \alpha_k;\ k = 1, \ldots, n)$ zu bestimmen, derart, daß der Rand jedes $\mathfrak{E}_\nu^k$ $(k > 0)$ (d. h. das Bild des Randes der Vollkugel) sich aus einigen von den Elementarräumen der niederen Dimensionen zusammensetzt, daß davon abgesehen niemals zwei von ihnen gemeinsame Punkte haben, und daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}^n$ einem von ihnen angehört. (Es ist also α_k die Anzahl der Elementarräume k-ter Dimension bei unserer Zerlegung.) Dann wird nämlich $\mathfrak{M}^n$ durch die Elementarräume 0-ter bis $(n-1)$-ter Dimension in Teile zerlegt, von denen jeder mit seinem Rande zusammen eben einen $\mathfrak{E}^n$

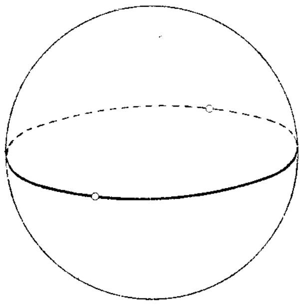

Fig. 1.

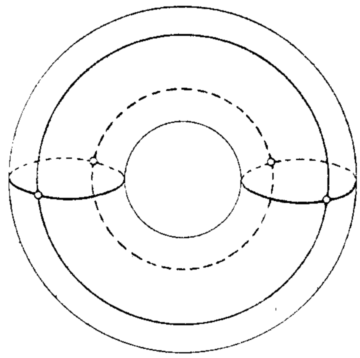

Fig. 2.

darstellt, und diese $\mathfrak{E}^n$ grenzen noch auf besonders einfache Weise aneinander. Daß die beschriebene Zerlegung einer $\mathfrak{M}^n$ immer möglich ist, hat bisher nur für $n \leqq 2$ allgemein, für höhere Dimension dagegen nur unter erleichternden Voraussetzungen bewiesen werden können. Beispiele der Zerlegung zeigen die Figuren 1 und 2: die Kugel- bzw. Torusfläche ist hier in je zwei bzw. vier, acht und vier Elementarräume nullter, erster und zweiter Dimension zerlegt.

Um eine $\mathfrak{M}^n$ mit Hilfe einer Zerlegung zu beschreiben, ist zunächst anzugeben, wieviel Elementarräume jeder Dimension verwendet werden, und aus welchen Elementarräumen niederer Dimension der Rand eines jeden von ihnen besteht. *Diese rein kombinatorischen Angaben charakterisieren* $\mathfrak{M}^n$ *vollständig;* zwei $\mathfrak{M}^n$, die isomorphe Zerlegungen gestatten, sind homöomorph (siehe den Anhang).

Während also der kombinatorische Charakter einer Zerlegung die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ vollständig bestimmt, ist das Umgekehrte natürlich nicht der Fall: $\mathfrak{M}^n$ läßt sich auf die verschiedensten Arten in Elementarräume zerlegen. Wir brauchen z. B. nur einen in der Zerlegung auftretenden $\mathfrak{E}^1$, d. h. einen Kurvenbogen, durch einen $\mathfrak{E}^0$, d. h. einen Punkt, in zwei $\mathfrak{E}^1$ zu teilen; dadurch werden die Zahlen α_0 und α_1 der auftretenden $\mathfrak{E}^0$ bzw. $\mathfrak{E}^1$ um je eins vermehrt. Ein etwas allgemeinerer Übergang von einer Zerlegung zu einer anderen ist die Teilung eines $\mathfrak{E}^k$ durch einen $\mathfrak{E}^{k-1}$ in zwei neue $\mathfrak{E}^k$ $(k > 0)$. Die Rand-$\mathfrak{S}^{k-1}$ von $\mathfrak{E}^k$ werde durch eine auf ihr liegende, aus Elementarräumen der Zerlegung bestehende $\mathfrak{S}^{k-2}$ in zwei $\mathfrak{E}^{k-1}$ zerlegt (im Falle $k=1$ zerfällt $\mathfrak{S}^{k-1}$ ohnehin in zwei $\mathfrak{E}^0$, d. h. Punkte); genauer: es gebe eine Abbildung von $\mathfrak{E}^k$ auf die Vollkugel $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leqq 1$, die $\mathfrak{S}^{k-2}$ in den „Äquator" $x_1 = 0$, $x_2^2 + \cdots + x_k^2 = 1$ überführt. Dann zerlegen wir $\mathfrak{E}^k$ durch den der „Ebene" $x_1 = 0$, $x_2^2 + \cdots + x_k^2 \leqq 1$ entsprechenden $\mathfrak{E}^{k-1}$ in zwei Hälften, die den Halbvollkugeln $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leqq 1$, $x_1 \geqq 0$ bzw. $\leqq 0$ entsprechen. Diese Operation und ihre Umkehrung, die Vereinigung zweier $\mathfrak{E}^k$ durch Weglassen eines sie trennenden $\mathfrak{E}^{k-1}$, sollen *elementare Transformationen* (e. T.) genannt werden. Praktische Versuche zeigen, daß sich die e. T. — durch Wechsel in der Dimensionszahl k und Wechsel zwischen Teilung und Vereinigung — in der verschiedenartigsten Weise verwenden lassen. Dies führte Dehn und Heegaard[1]) dazu, ihre Begründung der kombinatorischen Topologie so anzulegen, daß zur freien Anwendung der dort gewonnenen Ergebnisse auf eigentlich topologische Fragen der folgende Satz erforderlich ist:

Hauptvermutung. Sind $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ zwei Zerlegungen einer Mannigfaltigkeit in Elementarräume, so kann man von $\mathfrak{Z}_1$ durch (endlich viele) e. T. zu $\mathfrak{Z}_2$ oder einer mit $\mathfrak{Z}_2$ isomorphen Zerlegung gelangen.

Steinitz[2]) stellte die Frage nach der allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes; bewiesen ist er für zwei und drei Dimensionen[3]); als Argument für seine Gültigkeit in höheren Dimensionen kann man höchstens den später zu besprechenden kombinatorischen allgemeinen Transformationssatz ansehen. Nehmen wir die Hauptvermutung als gültig an, so öffnet sich der Weg zur kombinatorischen Topologie. Die e. T. äußern sich am kombinatorischen Schema der Zerlegung als ziemlich einfache Abänderungen. Können wir nun aus dem Schema eine kombinatorische Invariante, d. h. eine Zahl (oder irgend einen mathematischen Gegenstand, z. B. eine Gruppe) gewinnen, die bei diesen Änderungen erhalten bleibt, so ist sie auf Grund der Hauptvermutung bei allen Zerlegungen der Mannigfaltigkeit dieselbe, hängt also nur von der Mannigfaltigkeit selbst ab

1) Enz. d. math. Wiss. III A B 3.

2) Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 7 (1907), Fußnote auf S. 32.

3) v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I (1923), S. 134—135; Furch, Abhandlungen a. d. Math. Sem. Hamburg 3 (1923), S. 69—88, 237—245.

und hat bei homöomorphen Mannigfaltigkeiten denselben Wert. Aus der Hauptvermutung folgt also: *kombinatorische Invarianten sind topologische Invarianten.* Das einfachste Beispiel einer kombinatorischen Invariante ist die Eulersche Charakteristik $K = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha_k$. Da nämlich bei einer e. T., z. B. der Teilung eines $\mathfrak{E}^k$, die Zahlen α_k und α_{k-1} um je eins vermehrt werden, bleibt K ungeändert. Hier entsteht das Problem, ein *vollständiges Invariantensystem* zu finden, d. h. ein System topologischer Invarianten, die bei zwei Mannigfaltigkeiten nur dann alle dieselben Werte haben, wenn die Mannigfaltigkeiten homöomorph sind. Für die geschlossenen $\mathfrak{M}^2$ (Flächen) bilden bekanntlich Orientierbarkeit und Eulersche Charakteristik ein vollständiges Invariantensystem.

Die kombinatorische Methode, die viele Ergebnisse so einfach liefert, lädt dazu ein, eine selbständige rein kombinatorische Disziplin zu schaffen, die sofort topologische Anwendung findet, sobald die dazu nötigen Voraussetzungen, etwa die Hauptvermutung, erfüllt sind. Das ist jetzt in der Tat möglich.

Die nicht weiter definierten Grundelemente unserer kombinatorischen Gebilde nennen wir *Zellen* k-ter Dimension Z_ν^k ($\nu = 1, \ldots, \alpha_k$; $k = 0, \ldots, n$); sie sollen den bei der Zerlegung auftretenden Elementarräumen entsprechen. Jeder Zelle sind eine Anzahl Zellen niederer Dimension, ihre *Randzellen,* zugeordnet; dies ist eine nicht weiter definierte Grundbeziehung zwischen den Zellen. Die Festsetzung der Randzellen soll derart getroffen sein, daß jede Randzelle einer Randzelle einer Zelle Z auch selbst Randzelle von Z ist. Ein Aggregat auf diese Weise durch die Beziehung zwischen Zelle und Randzelle verknüpfter Zellen heiße ein *Zellengebäude* n-ter Dimension. Damit können wir noch keine geometrische Vorstellung verbinden, bei der den Zellen Elementarräume entsprächen; denn der Rand eines $\mathfrak{E}^k$ ist von besonderer Art, nämlich eine $\mathfrak{S}^{k-1}$. Wollen wir also Zellengebäude n-ter Dimension mit geometrischer Bedeutung definieren — sie sollen *Komplexe* C^n heißen —, so müssen vorher unter den Komplexen $(n-1)$-ter Dimension C^{n-1} diejenigen ausgesondert werden, die uns eine $\mathfrak{S}^{n-1}$ darstellen, die (kombinatorischen) Sphären S^{n-1}. Auf Grund der Hauptvermutung kann dies dadurch geschehen, daß wir eine besondere S^{n-1} angeben und sie durch kombinatorische Operationen abändern, die den e. T. entsprechen und die hier *interne Transformationen* (i. T.) heißen. Hierzu brauchen wir wiederum die Kenntnis derjenigen Komplexe, die einen $\mathfrak{E}^{n-1}$ darstellen, der kombinatorischen Elementarräume E^{n-1} und derjenigen Teilkomplexe, die dem Rande der $\mathfrak{E}^{n-1}$ entsprechen. Es zeigt sich also:

die Begriffe C^n, S^n, E^n, i. T. eines C^n müssen gleichzeitig durch vollständige Induktion nach n definiert werden.

Zuerst ist, wie gesagt, eine besondere S^n und ein besonderer E^n zu erklären. Dabei halten wir uns an eine möglichst einfache Zerlegung von $\mathfrak{S}^n$ in Elementarräume. Die Sphäre $\mathfrak{S}^n$: $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ werde durch den von der Ebene $x_{n+1} = 0$ ausgeschnittenen Äquator in zwei $\mathfrak{E}^n$ zerlegt. Der Äquator ist eine $\mathfrak{S}^{n-1}$; sie wird durch den von der Ebene $x_n = 0$ ausgeschnittenen Äquator in zwei $\mathfrak{E}^{n-1}$ zerlegt usw., bis zuletzt eine $\mathfrak{S}^1$ (Kreislinie) durch einen Äquator, d. h. zwei Punkte, in zwei $\mathfrak{E}^1$ zerlegt wird. So erhalten wir für $k = 0, \ldots, n$ je zwei $\mathfrak{E}^k$, und der Rand jedes dieser Elementarräume besteht aus allen $2(k-1)$ Elementarräumen niederer Dimension. Im Falle $n = 2$ ist dies die Zerlegung der Fig. 1. Nehmen wir zu der so zerlegten $\mathfrak{S}^n$ noch den $\mathfrak{E}^{n+1}$: $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqq 1$ hinzu, so erhalten wir die einfachste Zerlegung eines $\mathfrak{E}^{n+1}$. Demnach definieren wir:

S_N^n, *d. h. die kombinatorische Sphäre n-ter Dimension in der Normalgestalt, besteht aus je zwei Zellen der Dimensionen 0 bis n, von denen jede von allen Zellen niederer Dimension berandet wird.*

E_N^n, *d. h. der kombinatorische Elementarraum n-ter Dimension in der Normalgestalt, besteht aus je zwei Zellen 0-ter bis $(n-1)$-ter Dimension und einer Zelle n-ter Dimension, wobei wieder jede Zelle von allen niederer Dimension berandet wird.*

Jetzt setzt die vollständige Induktion ein.

Ein C^0 (nulldimensionaler Komplex) besteht aus einer Anzahl Z^0 (Punkten).

S^0 und E^0 sind gleichbedeutend mit S_N^0 bzw. E_N^0.

Der Rand eines E^0 besteht aus keiner Zelle, ist leer.

Es sei $n > 0$; für $0 \leq k < n$ seien definiert: C^k, S^k, E^k, Rand eines E^k, und sei bewiesen, daß der Rand eines E^k $(k > 0)$ eine S^{k-1} ist.

Ein C^n ist ein Zellengebäude aus Zellen bis zur n-ten Dimension, in dem die Zellen bis zur $(n-1)$-ten Dimension einen C^{n-1} bilden und der Rand jeder Z^n eine S^{n-1} ist.

Der Rand einer Z^k $(k > 0)$ eines C^n ist eine S^{k-1}. Sie werde, wenn $k > 1$ ist, durch eine S^{k-2} in zwei E^{k-1} (E_1^{k-1} und E_2^{k-1}) zerlegt, d. h. E_1^{k-1} und E_2^{k-1} sollen zusammen S^{k-1} ergeben und ihren Rand, aber sonst keine Zelle gemeinsam haben. Der gemeinsame Rand ist eine S^{k-2}. Dann ersetzen wir Z^k durch die Zellen Z^{k-1}, Z_1^k und Z_2^k, die von S^{k-2} bzw. Z^{k-1} und E_1^{k-1}, bzw. Z^{k-1} und E_2^{k-1} berandet werden, und bestimmen, daß diese Zellen alle diejenigen beranden sollen, die vorher Z^k zur Randzelle hatten. Diese Operation, ihre Umkehrung und eine beliebige Folge solcher Operationen heißen interne Transformationen (i. T.).

Hier *beweist* man, daß durch i. T. aus einem C^n immer wieder ein C^n entsteht.

S^n bzw. E^n ist ein C^n, der durch i. T. aus S^n_N bzw. E^n_N hervorgeht.

Der Rand eines E^n besteht aus allen denjenigen Z^{n-1}, die Randzelle genau einer Z^n sind, und ihren sämtlichen Randzellen.

Jetzt kann man beweisen:

Der Rand eines E^n ist eine S^{n-1}.

Damit ist die vollständige Induktion fertig.[1])

Die Komplexe C^n sind zur kombinatorischen Darstellung der Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ geeignet, aber noch zu allgemein. Jeder C^n kann als Zerlegungsschema eines topologischen Raumes $\mathfrak{C}^n$ von besonderer Art aufgefaßt werden, nämlich gerade eines solchen, der eine Zerlegung in Elementarräume erlaubt, und $\mathfrak{C}^n$ ist auch bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt; aber nicht immer ist $\mathfrak{C}^n$ eine $\mathfrak{M}^n$. Wir suchen kombinatorische Bedingungen, die, wenn ihnen C^n genügt, uns versichern, daß $\mathfrak{C}^n$ eine $\mathfrak{M}^n$ ist, also zuerst hinreichende Bedingungen. Die Umgebung eines Punktes von $\mathfrak{M}^n$ läßt sich topologisch auf ein Gebiet des n-dimensionalen Zahlenraumes abbilden (Axiom 5). Fragen wir also, wie die Elementarräume einer Zerlegung von $\mathfrak{M}^n$, die an einen von ihnen, und zwar einen $\mathfrak{C}^0$ angrenzen, miteinander zusammenhängen, so dürfen wir dabei an eine Zerlegung eines Gebietes im Zahlenraume denken. Wir machen nun die — zunächst unberechtigte — Annahme, daß sich die zerlegenden $\mathfrak{C}^k$ linear darstellen, daß sie gerade Strecken, ebene Polygonbereiche usw. sind. Dann schlagen wir um den Punkt $\mathfrak{C}^0$ eine genügend kleine Kugel $\mathfrak{S}^{n-1}$. Sie schneidet jeden an $\mathfrak{C}^0$ grenzenden $\mathfrak{C}^k$ in einem $\mathfrak{C}^{k-1}$, und wenn $\mathfrak{C}^k$ dem Rande von $\mathfrak{C}^l$ angehört, so gehört auch $\mathfrak{C}^{k-1}$ dem von $\mathfrak{C}^{l-1}$ an. Kombinatorisch bedeutet das: wir nehmen alle Zellen, zu deren Randzellen eine bestimmte Z^0 gehört, vermindern ihre Dimension um je eins, lassen aber die Berandungsbeziehungen bestehen. So erhalten wir, wie sich herausstellt, einen Komplex, den Umgebungskomplex von Z^0. Dieser stellt aber die um $\mathfrak{C}^0$ geschlagene $\mathfrak{S}^{n-1}$ dar, ist also auf Grund der Hauptvermutung eine S^{n-1}. Wir definieren demnach:

---

1) Die hiermit gegebene Definition des C^n unterscheidet sich nur darin von der von Bilz (Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 1—41, insbes. § 5), daß die Bilzschen Forderungen 64 b und c weggelassen sind (die eine ist für den Aufbau der Kombinatorik zu entbehren, die andere ist von selbst erfüllt), und daß die Zerlegung von S^{k-1} in E^{k-1}_1 und E^{k-1}_2 genauer gefaßt ist mit Hilfe des Begriffes „Rand einer E^n". Die Definition des Randes ist eine äußerliche; ihren tieferen Sinn erhält sie erst dadurch, daß bei i. T. des E^n der Rand für sich transformiert wird und wieder in den Rand übergeht.

Eine M^n (kombinatorische Mannigfaltigkeit) ist ein C^n, in dem der Umgebungskomplex jeder Z^0 eine S^{n-1} ist.

Man wird einwenden, daß hier nur die Punkte von $\mathfrak{M}^n$ in Betracht gezogen sind, die in der Zerlegung als $\mathfrak{E}^0$ auftreten; es zeigt sich aber, daß die Bedingungen, die aus der Betrachtung der übrigen Punkte entspringen würden, in der hier ausgesprochenen enthalten sind. Diese ist also jedenfalls hinreichend dafür, daß ein Zellengebäude eine $\mathfrak{M}^n$ darstellt; ob sie notwendig ist, hängt unter anderem von der Hauptvermutung ab.[1]

Die hier eingeführten Begriffe setzen uns in den Stand, die kombinatorische Theorie der Mannigfaltigkeiten in vollem Umfange anzugreifen, die bekannten Begriffe, wie Zusammenhang, Orientierung, Homologie, Bettische und Torsionszahlen, Kroneckersche Charakteristik, Fundamentalgruppe, auf einleuchtende Weise kombinatorisch zu begründen und zu verwerten. Doch sind dabei, besonders bei Einführung der nur auf Mannigfaltigkeiten bezüglichen Begriffe, wie der Kroneckerschen Charakteristik, noch allerlei Hilfsbetrachtungen und -sätze nötig. Bei unserer Definition der i. T. fällt die große Zahl der Voraussetzungen auf, die bei einer Zellenteilung erfüllt sein müssen; bei einer Zellenvereinigung sind es sogar noch mehr. Das ist nötig, und es ist bequem, wenn es sich darum handelt, eine kombinatorische Invarianz zu beweisen, d. h. zu beweisen, daß eine Größe sich bei i. T. nicht ändert; denn je mehr Bedingungen die i. T. erfüllen muß, um so weniger Unheil kann sie stiften. Anders, wenn, wie es häufig vorkommt, ein C^n durch i. T. in eine bestimmte Gestalt gebracht werden soll, wenn wir i. T. von bestimmter Art ausführen wollen. Dann müssen wir jedesmal zeigen, daß die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind. Wir brauchen also Sätze, die besagen: unter diesen und jenen Bedingungen ist ein C^n eine S^n bzw. ein E^n. Ich stelle einige Sätze dieser Art zusammen.

1. Fügen wir zu einem E^n eine von seiner Rand-S^{n-1} berandete Z^n hinzu, so ergibt sich eine S^n.

2. Nehmen wir von einer S^n die Zellen eines E^n bis auf seine Randzellen weg, so bleibt ein E^n übrig.

3. Haben zwei E^n ihren Rand und sonst keine Zelle gemeinsam, so bilden sie zusammen eine S^n.

4. Eine S^n wird durch jede auf ihr liegende S^{n-1} in zwei E^n zerlegt.

Von diesen Sätzen ist 1. eine fast unmittelbare Folge aus den

1) Außer der Hauptvermutung kommt noch der folgende Satz in Frage: Ist eine $\mathfrak{S}^n$ stetig mit dem Brouwerschen Abbildungsgrade 1 auf eine $\mathfrak{M}^n$ abgebildet, so ist diese selbst eine $\mathfrak{S}^n$. Mir ist kein Beweis dieses Satzes bekannt.

Definitionen, muß sogar schon im Laufe der großen Induktion bewiesen werden. 4. ist bisher nur bis zur dritten Dimension bewiesen[1]) und scheint zum Beweise mehr Kenntnis der M^{n-1} zu erfordern als wir für $n > 3$ besitzen. Die Sätze 2. und 3. sind unentbehrlich, wenn man sich in unserem Gebiete frei bewegen will.[2]) Mit 3. nahezu gleichwertig, mit 2. aufs engste verknüpft ist der folgende

Allgemeine Transformationssatz: Die Ersetzung einer Zelle Z^k eines C^n durch einen E^k mit isomorpher Rand-S^{k-1} läßt sich durch i. T. bewirken.

Die Schwierigkeit beim Beweise dieses Satzes liegt allein in der Transformation des Randes. Um sie ausführen zu können, benötigt man den Satz 2 für $k-1$ Dimensionen. Diesen wiederum beweist man mit Hilfe der allgemeinen Transformation einer Z^{k-1}. Man sieht: Satz 2 und der allgemeine Transformationssatz sind gleichzeitig durch vollständige Induktion nach der Dimensionenzahl zu beweisen.

Der allgemeine Transformationssatz trägt den Charakter eines Hilfssatzes; seine Behauptung hat kein besonderes selbständiges Interesse. Trotzdem kann man ihm vielleicht im Hinblick auf die Hauptvermutung eine gewisse prinzipielle Bedeutung beilegen. Wäre er nicht richtig, so käme man durch die Ersetzung einer Z^k durch einen E^k zu einer Klasse weiter greifender Umformungen, als es die i. T. sind. Nennen wir diese i. T. zweiter Stufe und jeden C^n, der aus E^n_N durch i. T. zweiter Stufe entsteht, einen E^n zweiter Stufe, so können wir wieder die Ersetzung einer Z^k durch einen E^k zweiter Stufe als i. T. dritter Stufe bezeichnen usw. Der allgemeine Transformationssatz besagt nun, daß alle diese Stufen schon mit der ersten zusammenfallen, daß also das System der i. T. in hohem Maße in sich abgeschlossen ist. Sollte sich nun die Hauptvermutung als irrig herausstellen, sollte es unter allen Zerlegungsschematen, die etwa eine $\mathfrak{S}^n$ darstellen, außer denen, die wir als S^n definiert haben, noch andere geben, so müßte es als eine höchst merkwürdige Tatsache gelten, daß es in diesem einheitlich definierten System kombinatorischer Schemata ein so ausgedehntes Teilsystem gibt, dessen

1) J. W. Alexander, Proc. of the Nat. Ac. of Sc. 10 (1923), S. 6—8.

2) Für 2. und 3. sind noch keine Beweise publiziert. Da sie aber z. B. notwendig sind, um zu beweisen, daß man die sogenannte reguläre Unterteilung stets durch i. T. bewirken kann, so ergibt sich die merkwürdige Lage, daß der rein kombinatorische Satz von der Dualität der Bettischen Zahlen einer orientierbaren M^n ($P_k = P_{n-k}$) bisher keinen kombinatorischen Beweis hatte. Bewiesen ist er dadurch, daß die reguläre Unterteilung topologisch (nicht gerade durch i. T.) sofort auszuführen ist, und daß die Bettischen Zahlen direkt (unabhängig von der Hauptvermutung) als topologisch invariant erkannt worden sind (J. W. Alexander, Trans. Am. Math. Soc. 16 (1915), S. 148—154).

Elemente selbst durch eine umfassende Gruppe tiefgreifender Änderungen, wie die i. T. eine sind, nicht mit den übrigen in Verbindung zu bringen sind.

Der geschilderte Aufbau der kombinatorischen Topologie ist zwar sicher gegründet und entwicklungsfähig, hat aber, wie schon gesagt, den Mangel, daß seine freie Anwendung auf eigentlich topologische Fragen wesentlich von der für mehr als drei Dimensionen noch unbewiesenen Hauptvermutung abhängt. Diesen Mangel hat man auf zwei Weisen zu beheben gesucht, worüber ich noch in aller Kürze berichten will.

Der eine Weg kann mit dem historischen Namen méthode mixte bezeichnet werden.[1]) Man arbeitet nicht rein kombinatorisch, sondern hat immer die topologisch definierte Mannigfaltigkeit im Auge, behandelt sie aber mit Hilfe der Zerlegung in Elementarräume und des Übergangs von einer Zerlegung zur andern durch Teilung eines Elementarraumes in mehrere, also allgemeinerer Übergänge, als wir sie zugrunde gelegt hatten. Das kombinatorische Schema dient wesentlich nur dazu, die topologisch definierten Invarianten auszuwerten. Man kann dieser Behandlungsweise höchstens den ästhetischen Vorwurf der Methodenunreinheit machen[2]); aber das will wenig sagen gegenüber der schwerwiegenden Tatsache, daß für vier und mehr Dimensionen bis jetzt nur auf diesem Wege gesicherte topologische Ergebnisse zu gewinnen sind.

Neuerdings hat Weyl[3]) einen anderen Weg beschritten. Da wir die Gesamtheit der eine $\mathfrak{S}^n$ darstellenden kombinatorischen Schemata nicht übersehen (und daher bei dem geschilderten Aufbau einen Teil von ihnen herausgegriffen haben, von dem wir vermuten mögen, daß er schon die Gesamtheit ist), verzichtet Weyl darauf, die S^n zu definieren, sondern führt sie als axiomatischen Grundbegriff ein, dessen Inhalt durch Axiome erst umschrieben wird. Die Axiome sind von zweierlei Art. Einerseits kennen wir topologische Eigenschaften der

---

1) Er ist z. B. beschritten worden in den Arbeiten von Poincaré und der Darstellung von Veblen (The Cambridge Colloquium II, New-York 1920).

2) So ist z. B. hier die topologische Invarianz der Eulerschen Charakteristik $K = \sum(-1)^k \alpha_k$, die kombinatorisch sofort in die Augen springt, erst auf dem Umweg über die Invarianz der Bettischen Zahlen und die Darstellung

$$K = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (P_k - 1) \quad \text{zu erweisen.}$$

3) Analisis situs combinatorio (Revista matematica Hispano-Americana 1923).

Sphären, die sich kombinatorisch ausdrücken lassen. Die „qualitativen Axiome“ fordern diese Eigenschaften (z. B.: Jede S^n ist „einfach zusammenhängend“); sie schränken den Begriff ein. Andererseits kennen wir gewisse kombinatorische Konstruktionen, die aus einer oder mehreren Sphären eine neue von derselben oder höherer Dimension entstehen lassen. Ein Beispiel dafür ist die i. T., ein anderes das folgende Verfahren: man erhöhe die Dimension jeder Zelle um eins, lasse die Berandungsbeziehungen bestehen und füge zwei Z^0 hinzu, die alle Zellen höherer Dimension beranden: so entsteht aus jeder S^n eine S^{n+1}. Daß auf diese und ähnliche Weise aus Sphären wieder Sphären entstehen, fordern die „genetischen Axiome“; sie geben dem Begriff S^n die nötige Weite. Das eine, auf die i. T. bezügliche genetische Axiom wurde bei unserem Aufbau zur Definition der S^n benutzt, den anderen entsprechen Sätze mit ähnlichem Inhalt. So wie dort diese Sätze zu beweisen sind, ist hier nachzuweisen, daß die beiden Axiomengruppen nicht im Widerspruch miteinander stehen. Während dort die Hauptvermutung eine offene Frage blieb, fragt man hier nach der Vollständigkeit des Axiomensystems in dem Sinne, daß es nur eine Klasse von Zellengebäuden gibt, die in ihrer Gesamtheit den Axiomen genügt. Während man dort verschiedene Satzgruppen methodisch danach zusammenstellen kann, welche Begriffe dazu gebraucht werden, sie auszusprechen und zu beweisen (z. B. wird der Umgebungskomplex bei den Sätzen über Homologie und Bettische Zahlen nicht gebraucht), wird hier dieselbe Einteilung dadurch bewirkt, daß man bei jedem Ergebnis fragt, von welchen Axiomen es wesentlich abhängt, von welchen es unabhängig ist.

Anhang. Homöomorphie zweier $\mathfrak{M}^n$ mit isomorpher Zerlegung.

Einen topologischen Raum, der eine Zerlegung in Elementarräume bis zur n-ten Dimension zuläßt, nennen wir einen Komplex, $\mathfrak{C}^n$. Ein Beispiel eines $\mathfrak{C}^2$, der keine $\mathfrak{M}^2$ ist, gibt Fig. 3. Zwei Komplexe $\mathfrak{C}^n$ und $\overline{\mathfrak{C}}^n$ heißen isomorph zerlegt in die Elementarräume, $\mathfrak{E}^k_\nu$ ($k = 1, \ldots, n$; $\nu = 1, \ldots, \alpha_k$) bzw. $\overline{\mathfrak{E}}^k_\nu$ ($k = 1, \ldots, n$; $\nu = 1, \ldots, \overline{\alpha}_k$), wenn $\alpha_k = \overline{\alpha}_k$ ist und — bei passender Numerierung — $\mathfrak{E}^k_\mu$ dann und nur dann zum Rande von $\mathfrak{E}^l_\nu$ gehört, wenn $\overline{\mathfrak{E}}^k_\mu$ zum Rande von $\overline{\mathfrak{E}}^l_\nu$ gehört.

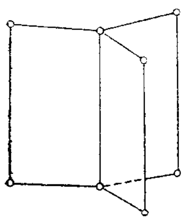

Fig. 3.

Hilfssatz. **Ist zwischen den Rändern zweier Elementarräume gleicher Dimension eine topologische Abbildung gegeben, so läßt sich eine topologische Abbildung der ganzen Elementarräume aufeinander angeben, die auf den Rändern mit der gegebenen übereinstimmt.**