**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

ЧЕЛЬЦОВ ИВАН АНАТОЛЬЕВИЧ

УДК 513.6

K-ТРИВИАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА УНИЛИНЕЙЧАТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук В.А.Исковских

Москва – 1998

СТРУКТУРА РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

§1. История поставленных задач.

Основные результаты диссертации восходят к пяти классическим работам: [No], [Fa1-3] и [Du]. В конце 19-го и начале 20-го века между этими работами было гораздо меньше общего, чем сегодня. Объясняется это в первую очередь революционным прорывом в бирациональной геометрии в конце 80-х годов, сделанным благодаря работам Ю.Кавамата, Ш.Мори и В.В.Шокурова. Новая концепция, названная Программой Минимальных Моделей (ПММ), позволила доказать множество нерешённых проблем и передоказать многие классические результаты. Но что не менее важно, огромное количество ранее казавшихся несвязанными друг с другом направлений оказались близкими с новой точки зрения.

В работах М.Нётера [No] и Дж.Фано [Fa1] исследовались структуры групп бирациональных автоморфизмов $\mathbb{P}^2$ и гладкой квартики в $\mathbb{P}^4$ соответственно. Несмотря на то, что временной интервал между двумя работами – почти полвека, их методы очень близки. Обе работы содержали ошибки, а работа [Fa1] практически была предана забвению до 70-х годов нашего столетия.

В 1971 году вышла работа В.А.Исковских и Ю.И.Манина [ИсМа], которая исправила ошибки работы [Fa1]. С этого момента начался новый период развития бирациональной геометрии. В работе [ИсМа] не только был усилен старый, давно забытый метод работ [No] и [Fa1], но также был изобретён принципиально новый метод – метод “пробного класса”.

Естественно, новые методы работы [ИсМа] были применены к широкому классу многообразий (см. [Ис3]). В основном это были гладкие многообразия с обильным антиканоническим дивизором. Основным стимулом для этого служил тот факт, что все такие многообразия очень напоминают рациональные, но некоторые из них, тем не менее, не рациональны. И первым таким примером среди трёхмерных многообразий была гладкая квартика в $\mathbb{P}^4$. Последнее известно как отрицательное решение Проблемы Люрота (см. [ИсМа]).

В 80-е годы в область действия методов работы [КаМа] попали расслоения на коники. В.Г.Саркисовым в работах [Са1-2] было получено классическое условие на бирациональную жёсткость расслоений на коники. И с помощью них был получен контрпример к Гипотезе Бовиля. А в работах [Ис4-5] был сформулирован и тщательно исследован Критерий Рациональности, который на сегодняшний день почти доказан.

Здесь стоит отметить, что геометрия расслоений на коники интенсивно изучалась с начала 70-х годов методом промежуточного якобиана. Как одно из применений, была доказана нерациональность гладкой трёхмерной кубики. Однако эти методы пока не перенесены в более высокую размерность. Прекрасный обзор о расслоениях на коники, промежуточном якобиане, многообразии Прима и вопросах рациональности содержится в работе [Тю].

С момента проникновения ПММ в бирациональную геометрию на работы о структуре групп бирациональных автоморфизмов стали смотреть несколько иначе. Во-первых, сам термин “бирационально жёсткое многообразие” несколько преобразился и теперь его принято рассматривать в смысле работы [Пу2]. Во-вторых, исследования расслоений на коники в работах [Са1-2] привели к созданию так называемой Программы Саркисова – алгоритму разложения бирациональных отображений на элементарные “линки”. И в-третьих, оказалось, что вместе с ПММ методы работы [ИсМа] способны решать следующую задачу.

Задача Фано-Исковских. *Найти все экстремальные*[1] *расслоения Фано бирационально изоморфные данному многообразию.*

Совсем недавно, в середине 90-х годов, В.А.Пухликову в работе [Пу2] удалось найти локальный аналог метода “пробного класса”. Мы будем называть, его неравенством Исковских-Пухликова по аналогии с глобальным неравенством Нётера-Фано (см. параграф 1 главы I). Первыми применениями неравенства Исковских-Пухликова стали доказательство результата аналогичного [ИсМа] для общих гиперповерхностей степени M в $\mathbb{P}^M$ в работе [Пу3] и решение в работе [Пу4] классической проблемы о бирациональной жёсткости расслоений на поверхности дель Пеццо. В работах [Гр1-2] это неравенство было применено для особых многообразий.

Теперь вернёмся более чем на полвека в прошлое. Вслед за вопросами рациональности отдельных трёхмерных многообразий Дж.Фано стал исследовать общие свойства этих многообразий. В последствии их стали называть многообразиями Фано. В современных терминах в работах [Fa2-3] были “классифицированы” трёхмерные многообразия Фано целого индекса. Однако, как в работе [Fa1], так и в работах [Fa2-3] был допущен ряд ошибок. Финально, исправление “неточностей” работы [Fa2] привело к классификации В.А.Исковских, Ш.Мори и Ш.Мукаем всех гладких трёхмерных многообразий Фано (см. [Ис2]). Идеи статьи [Fa3] попытались восстановить в [CoMu], но полностью сделать это не удалось, и большинство недоказанных утверждений были сформулированы в виде гипотез.

В 50-е годы в книге [Ro] были разобраны несколько статей Дж.Фано. В том числе и статьи [Fa1-3]. Однако из-за недостатка техники почти никаких исправлений не было сделано. Там же утверждалась без доказательства верность следующей гипотезы.

Гипотеза Фано. *Многообразия, чьё гиперплоское сечение есть поверхность Энриквеса, рациональны кроме конусов.*

Заметим, что многообразия в Гипотезе Фано – это в точности многообразия, которые Дж.Фано исследовал в работе [Fa3].

Несколько лет назад в работах [Be] и [Sa] были независимо классифицированы все многообразия из работы [Fa3], которые имеют циклические фактор-особенности. Результаты обеих работ удивительно точно предсказывались Дж.Фано ещё 60 лет назад.

Вновь вернёмся в первую половину нашего столетия. В классической работе [Du] были исследованы поверхности, которые сейчас принято называть поверхностями

---

[1] Под экстремальностью подразумевается терминальность и $\mathbb{Q}$-факториальность особенностей и равенство $\mathbb{Z}$ относительной группы Пикара.

дель Пеццо с Дю Валевскими (или каноническими) особенностями. В работе [BiBrDr] эти поверхности были исследованы с дополнительным условием, что группа Пикара равна $\mathbb{Z}$. Последнее условие в свете ПММ вполне естественно.

В многочисленных работах В.А.Алексеева и В.В.Никулина систематически исследовались поверхности дель Пеццо с лог терминальными особенностями. В частности, в работе [АлНи] были классифицированы все такие поверхности в предположении, что индекс горенштейновости равен 2. Несколько лет назад, используя технику Я.Коллара, в работе [KeMc] были классифицированы "почти все" поверхности дель Пеццо с лог терминальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$.

В 90-х годах бирациональная геометрия многомерных многообразий, ПММ, расслоения Фано и поверхности дель Пеццо стали связаны между собой настолько тесно, что описать это подробно даже в целой книге просто невозможно. В параграфе 4 мы покажем как используемые нами методы "двойственно" связывают исследуемые нами бирационально жёсткие многообразия Фано, рациональные многообразия Фано и особые поверхности дель Пеццо.

§2. Основные результаты.

Мы разработаем метод, позволяющий находить бирациональные перестройки бирационально жёстких многообразий в расслоения, чей общий слой имеет размерность Кодаиры ноль. Мы будем называть такие расслоения K-тривиальными, поскольку по модулю ПММ их можно перестроить в расслоения с численно тривиальным относительным каноническим классом.

С помощью полученных методов мы опишем все бирациональные перестройки в K-тривиальные расслоения следующих трёхмерных многообразий:

(1) двойного накрытия $\mathbb{P}^3$, разветвлённого в гладкой секстике,
(2) гладкой квартики в $\mathbb{P}^4$,
(3) двойного накрытия гладкой квадрики $\mathbb{P}^3$, разветвлённого в гладкой поверхности, высекаемой на квадрике квартикой,
(4) "сильно разветвлённого" расслоения на коники,
(5) общей гиперповерхности степени M в $\mathbb{P}^M$.

В частности, мы докажем, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвлённое в гладкой секстике, и общая гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}^M$ для $M > 4$ бирационально не перестраиваются в расслоение на эллиптические кривые, а все такие перестройки для гладкой квартики в $\mathbb{P}^4$ задаются проекциями из прямых.

Отрабатывая наши методы в двумерном случае, мы решим аналогичную задачу для экстремальных поверхностей дель Пеццо малых степеней и "сильно разветвлённых" расслоений на коники над алгебраически незамкнытым полем.

Наши методы, позволяют также находить бирациональные перестройки бирационально жёстких многообразий в произвольные расслоения Фано с каноническими особенностями. В случае, когда база такого расслоения отлична от точки, это не даёт ничего нового в трёхмерном случае в силу ПММ. Однако, бирациональные перестройки конкретного бирационально жёсткого многообразия в многообразия Фано с каноническими, возможно не $\mathbb{Q}$-факториальными, особенностями и с произвольной группой Пикара ещё нигде и никогда не рассматривались.

Мы покажем, что все перечисленные многомерные многообразия за исключением двойного накрытия квадрики не имеют бирациональных перестроек в многообразия Фано с каноническими особенностями, а для двойного накрытия квадрики мы опишем одномерное семейство таких перестроек.

Рассматривая вместо канонического класса лог канонический класс, определим лог K-тривиальные расслоения как расслоения, чей общий слой имеет лог Кодаирову размерность ноль. По модулю Лог Программы Минимальных Моделей (ЛПММ) их можно перестроить в расслоения с численно тривиальным относительным лог каноническим классом. Заметим, что в класс лог K-тривиальных расслоений входят K-тривиальные расслоения и расслоения Фано.

Наши методы базируются на лог теории, поэтому все полученные результаты для K-тривиальных расслоений автоматически становятся верными также и для лог K-тривиальных расслоений. В дальнейшем мы лог K-тривиальные расслоения будем называть просто K-тривиальными расслоениями.

"Обратные" методы позволят нам доказать ограниченность размерности и числа семейств многообразий Фано с каноническими особенностями и целым индексом и их рациональность в случае, если куб антиканонического дивизора не меньше 10. Откуда мы выведем положительное решение Гипотезы Фано (см. параграф 1) и построим новую модель многообразия Энриквеса[2] (см. Пример 4.3).

С помощью применения "обратных" методов к поверхностям дель Пеццо, мы найдём эффективный алгоритм нахождения всех численных поверхностей дель Пеццо с группой Пикара $\mathbb{Z}$ и нерациональными особенностями.

§3. Предварительные понятия.

Все рассматриваемые в диссертации многообразия, если не оговорено иначе, проективны и определены над полем $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работе [KaMaMa].

Под подвижной лог парой

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i)$$

мы будем подразумевать многообразие X в совокупности с формальной конечной линейной комбинацией линейных систем $\mathcal{B}_i$ без неподвижных компонент, такой что все $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Поскольку мы будем рассматривать только подвижные лог пары, то мы будем называть их просто лог парами, а $K_X + B_X$ и B_X лог каноническим классом и границей лог пары (X, B_X) соответственно.

Заметим, что лог пару (X, B_X) можно рассматривать как обычную лог пару, если заменить каждую линейную систему $\mathcal{B}_i$ на её общий элемент, если $b_i < 1$, и на "взвешенное среднее" нескольких общих элементов в противном случае. Таким образом,

[2]Определение многообразия Энриквеса содержится в главе V.

в дальнейшем, если нужно, мы можем считать лог канонический класс и границу дивизорами[3].

Для лог пар, чей лог канонический класс является $\mathbb{Q}$-Картье дивизором, можно определить понятия дискрепантности, терминальности, каноничности, лог терминальности и лог каноничности аналогично с [KaMaMa]. Мы будем говорить, что лог пара (X, B_X) $\mathbb{Q}$-факториальна, если многообразие X таково.

Пример 3.1. *Рассмотрим линейную систему $\mathcal{B}$, состоящую из прямых на $\mathbb{P}^2$, проходящих через точку O. Тогда лог пара*

$$(\mathbb{P}^2, b\mathcal{B})$$

терминальна для $b \in [0,1)$, канонична для $b = 1$, лог терминальна для $b \in [0,2)$ и лог канонична для $b = 2$.

Пример 3.1 показывает незначительные и немного непривычные внешние отличия подвижных лог пар от обычных.

Мы будем говорить, что неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ – центр канонических особенностей лог пары (X, B_X), если существует бирациональный морфизм $f : W \to X$ и f-исключительный дивизор $E \subset W$, такие что

$$a(X, B_X, E) \leq 0 \text{ и } f(E) = Y.$$

Обозначим множество центров канонических особенностей лог пары (X, B_X) – $CS(X, B_X)$. Если лог пара (X, B_X) канонична и множество

$$\cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i)$$

не содержит элементов $CS(X, B_X)$, то мы скажем, что лог пара (X, B_X) имеет полутерминальные особенности.

Пример 3.2. *Рассмотрим квадратичный конус $Q \subset \mathbb{P}^3$ и свободную линейную систему его гиперплоских сечений $\mathcal{B}$. Тогда лог пара*

$$(Q, b\mathcal{B})$$

полутерминальна для всех $b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Отметим три важных свойства подвижных лог пар:

(1) естественным способом определён прямой образ границы при бирациональном отображении,
(2) вне $\cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i)$ особенности лог пары (X, B_X) совпадают с особенностями многообразия X,
(3) ЛПММ сохраняет каноничность и терминальность.

Если лог пара (X, B_X) терминальна и $\mathbb{Q}$-факториальна (канонична), то мы будем говорить, что она терминальная (слабо каноническая) модель, если дивизор $K_X + B_X$

[3] Мы будем называть $\mathbb{Q}$-дивизоры просто дивизорами.

численно эффективен. Если он к тому же и обилен, то мы будем говорить, что лог пара (X, B_X) – каноническая модель.

В приложениях однако не часто встречаются терминальные, слабо канонические и канонические модели. Мы скажем, что слабо каноническая (терминальная, каноническая) модель (V, B_V) есть каноническая (терминальная, каноническая) модель лог пары (X, B_X), если существует бирациональное отображение $\psi : X \dashrightarrow V$, такое что $B_V = \psi(B_X)$.

Заметим, что у лог пары (X, B_X) может быть много терминальных и слабо канонических лог моделей, но каноническая модель единственна если существует. Для обычных лог пар последнее утверждение хорошо известно (см. [Шо2]). В нашем случае нужно в доказательстве из [Шо2] заменить обычные лог пары на подвижные, лог прообраз границы при бирациональном морфизме на обратный образ подвижной границы и лог каноническую модель на каноническую.

Пример 3.3. *Рассмотрим антиканонически вложенное гладкое трёхмерное многообразие Фано V с $Pic(V) = \mathbb{Z}$ и $-K_V^3 = 16$ (см. [Ис2]). Пусть $\mathcal{H}_C$ – линейная система гиперплоских сечений V, дважды проходящих через достаточно общую прямую $C \subset V$. Тогда лог пара*

$$(V, b\mathcal{H}_C)$$

не канонична для $b > \frac{1}{2}$, а для $b > 4$ её каноническая модель есть

$$(\mathbb{P}^3, b|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|).$$

Если лог пара (X, B_X) не терминальна или не $\mathbb{Q}$-факториальна, то мы можем рассмотреть бирациональный морфизм $f : W \to X$, такой что лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X)),$$

терминальна и $\mathbb{Q}$-факториальна. Определим для лог пары (X, B_X) отображение Иитаки $I(X, B_X)$ и размерность Кодаиры $\kappa(X, B_X)$. Положим

$$I(X, B_X) = \phi_{|n(K_W + B_W)|} \circ f^{-1} \text{ для } n \gg 0$$

и

$$\kappa(X, B_X) = \begin{cases} dim(I(X, B_X)(X)) \text{ если } |n(K_W + B_W)| \neq \emptyset \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}, \\ -\infty \text{ если } \ |n(K_W + B_W)| = \emptyset \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Можно показать, что $\kappa(X, B_X)$ и $I(X, B_X)$ не зависят от морфизма f, даже если лог пара (W, B_W) только канонична.

Как в случае классических лог пар лог пара (W, B_W) называется терминальной модификацией лог пары (X, B_X), если дивизор $K_W + B_W$ численно эффективен относительно морфизма f.

§4. Используемые методы.

Поставим следующую задачу.

Задача 4.1. *Дать описание лог пар на унилинейчатом многообразии.*

Мы будем использовать два подхода к Задаче 4.1 и называть их Прямой и Обратной Задачей.

Под Прямой Задачей мы будем подразумевать описание Кодаировой размерности и ограничение "сверху" особенностей лог пар в одном когомологическом классе. Покажем это на примере.

Пример 4.2. *Пусть X – двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвлённое в гладкой секстике. Рассмотрим лог пару*

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i)$$

на нём и возьмём $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

причём $\lambda = +\infty$, если $B_X = \emptyset$. Тогда

$$\kappa(X, B_X) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \lambda > 1, \\ 0, \text{ если } \lambda = 1, \\ 1, \text{ если } \lambda < 1 \text{ и все } \mathcal{B}_i \text{ составлены из одного пучка } \mathcal{P} \subset |-K_X|, \\ 3 \text{ в оставшемся случае.} \end{cases}$$

Более того,

(1) *если $\kappa(X, B_X) = -\infty$, то лог пара (X, B_X) терминальна,*
(2) *если $\kappa(X, B_X) = 0$, то лог пара (X, B_X) канонична,*
(3) *если $\kappa(X, B_X) = 1$, то лог пара (X, B_X) не канонична и $I(X, B_X) = \phi_{\mathcal{P}}$.*

Мы докажем утверждения Примера 4.2 в параграфе 2 главы III, где покажем, что он обобщает Задачу Фано-Исковских для двойного накрытия $\mathbb{P}^3$, разветвлённого в гладкой секстике.

Методы решения Прямой Задачи базируются на глобальных и локальных методах, разработанных в работах [Со], [Ис3], [ИсМа], [Са1-2] и [Пу1-4], а также на применении усиленной ПММ (см. параграф 4 главы III).

Под Обратной Задачей мы будем подразумевать исследование особенностей, размерности Кодаиры и канонической модели некоторой "специальной" лог пары. Проиллюстрируем это на примере (см. также Пример 3.3), утверждения которого мы докажем в параграфе 6 главы V.

Пример 4.3. *Рассмотрим трёхмерное многообразие Энриквеса (см. параграф 2) Y с терминальными фактор-особенностями. Положим $B_Y = b\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – линейная система поверхностей в $|-K_Y|$, проходящих через негоренштейновую точку многообразия Y. Тогда, лог пара (Y, B_Y) не канонична для $b > \frac{1}{2}$ и $\kappa(Y, B_Y) \geq 0$ для*

$b \geq 2$. *Более того, если* $b > 2$, *то канонической моделью лог пары* (Y, B_Y) *является лог пара* (V, B_V), *такая что* V *– двойное накрытие* $\mathbb{P}^3$, *разветвлённое в квартике с шестью изолированными особыми точками и*

$$K_V + \frac{2}{b} B_V \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Основные методы решения Обратной Задачи состоят из ЛПММ (см. [Шо2]), исследования экстремальных окрестностей экстремальных лучей (см. [Mo]), локального анализе особенностей терминальных лог пар (см. [Ал]) и классификации многообразий Фано большого индекса (см. [CaFl]).

§5. Краткое описание диссертации.

Сначала отметим, что описание основных результатов каждой главы содержится в её первом параграфе.

Глава I посвящена исследованию глобальных и локальных свойств лог пар на экстремальных расслоениях Фано

Напомним, что экстремальные расслоения Фано принято называть расслоениями Мори (см. [KaMaMa]).

В параграфе 2 главы I мы опишем ряд глобальных неравенств, которые обобщают неравенства Нётера-Фано. В параграфе 3 главы I мы перенесём неравенство Исковских-Пухликова в более слабые предположения.

Глава II иллюстрирует применение результатов главы I. А именно, мы разберём Прямую Задачу для бирационально жёстких двумерных расслоений Мори.

В главе III мы используем результаты главы I для решения Прямой Задачи для двойного накрытия $\mathbb{P}^3$, квартики, двойного накрытия трёхмерной квадрики и трёхмерных расслоенний на коники. И как следствие мы классифицируем все бирациональные перестройки этих многообразий в K-тривиальные расслоения.

Отметим, что в параграфе 3 главы III мы опишем все бирациональные перестройки двойного накрытия квадрики в многообразия Фано с каноническими особенностями.

Главы IV-VI посвящены Обратной Задаче для трёхмерных многообразий Фано целого индекса.

Глава IV является вспомогательной для глав V и VI. В ней мы покажем, что многообразия, рассмотренные Дж.Фано в работах [Fa2-3], это в точности трёхмерные многообразия Фано с целым индексом.

В главе V с помощью методов Обратной Задачи мы докажем рациональность негоренштейновых трёхмерных многообразий Фано с целым индексом и кубом антиканонического дивизора не меньше 10. Откуда будет следовать положительное решение Гипотезы Фано.

В главе VI мы докажем ограниченность числа семейств многообразий из главы V. В частности, мы получим оценку на куб антиканонического дивизора трёхмерного многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями и непустым базисным множеством антиканонической линейной системы.

В главе VII мы исследуем Обратную Задачу для “тривиальной” лог пары на численных поверхностях дель Пеццо с нерациональными особенностями.

В Добавлении к главе III мы вернёмся к Прямой Задаче и найдём все K-тривиальные расслоения бирационально изоморфные общей гиперповерхности степени M в $\mathbb{P}^M$.

В Заключении мы опишем возможные применения полученных результатов и перспективу дальнейших исследований, продолжающих исследования, изложенные в диссертации.

Ввиду того, что различные главы тесно связаны между собой, мы будем практически в каждой главе использовать теоремы, леммы, конструкции и определения из других глав. При этом в ссылках на результаты, полученные в той же главе диссертации, мы будем опускать номер главы.

Все результаты диссертации содержатся в работах [Че1-6].

ГЛАВА I

СВОЙСТВА ПОДВИЖНЫХ ЛОГ ПАР

§1. Основные результаты главы I.

В этом параграфе мы сформулируем основные теоремы о локальных и глобальных свойствах лог пар, которые затем докажем в этой главе.

Сейчас мы приведём две теоремы, которые накладывают глобальные условия на лог пары на расслоениях Мори. В главах II и III мы применим их для исследования Прямой Задачи для лог пар на бирационально жёстких многообразиях.

Теорема 1.1. *Рассмотрим такую лог пару* (X, B_X), *что* $\kappa(X, B_X) \in [0, dim(X))$, *а* X *есть многообразие Фано с группой Пикара* $\mathbb{Z}$ *и терминальными* $\mathbb{Q}$*-факториальными особенностями. Зафиксируем* $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, *такое что*

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Предположим, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ *терминальна. Тогда* $\lambda = 1$, $\kappa(X, B_X) = 0$ *и у лог пары* (X, B_X) *нет слабо каноничных моделей отличных от неё самой.*

Заметим, что Теорема 1.1 является аналогом так называемого неравенства Нётера-Фано, а следующая теорема связана с Программой Саркисова.

Теорема 1.2. *Пусть* $\pi : X \to S$ *– расслоение Мори, то есть* $-K_X$ π*-обилен,* $Pic(X/S) = \mathbb{Z}$ *и особенности* X *терминальны* $\mathbb{Q}$*-факториальны. Рассмотрим лог пару* (X, B_X) *с* $\kappa(X, B_X) \in [0, dim(X))$ *и такое* $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, *что*

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(L)$$

для некоторого $\mathbb{Q}$*-Картье дивизора* L *на многообразии* S.

Допустим, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ *канонична, а дивизор* L *численно эффективен и объёмен. Тогда существует доминантное отображение*

$$\psi : I(X, B_X)(X) \dashrightarrow S,$$

такое что $\pi = \psi \circ I(X, B_X)$.

Многочисленные примеры показывают, что глобальных условий Теорем 1.1 и 1.2 не хватает для продуктивного исследования свойств лог пар на многомерных многообразиях. Как уже упомяналось в Введении в работе [Пу2] был найден локальный аналог метода “пробного класса” – неравенство Исковских-Пухликова. Следующая теорема является уточнением этого неравенства.

Теорема 1.3. *Пусть нам дана лог пара (X, B_X) на трёхмерном многообразии X, такая что $CS(X, B_X)$ содержит гладкую точку O. Тогда*

$$mult_O(B_X^2) \geq 4.$$

Причём, если выполнено равенство, то $a(X, B_X, E) = 0$, где E – исключительный дивизор раздутия точки O.

§2. Глобальные методы: лог пары на расслоениях Мори.

В этом параграфе мы докажем Теоремы 1.1 и 1.2.

Зафиксируем расслоение Мори $\pi : X \to S$, лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{2.1}$$

с $\kappa(X, B_X) \in [0, dim(X))$ и $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, такое что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(L)$$

для $\mathbb{Q}$-Картье дивизора L на многообразии S.

Доказательство Теоремы 1.1. По условию $dim(S) = 0$ и лог пара $(X, \lambda B_X)$ терминальна. Нам нужно показать, что $\lambda = 1$ и слабо каноническая модель (2.1) единственна.

Предположим, что $\lambda < 1$. Рассмотрим $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$, такое что лог пара $(X, \delta B_X)$ терминальна. Тогда

$$dim(X) = \kappa(X, \delta B_X) \leq \kappa(X, B_X) < dim(X).$$

Таким образом, $\lambda = 1$, лог пара (2.1) терминальна и $\kappa(X, B_X) = 0$.

Допустим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & Y \end{tikzcd}$$

такая что многообразие W гладко, морфизмы f и g бирациональны, лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$

канонична и дивизор $K_Y + B_Y$ численно эффективен. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} a(X, B_X, F_j) F_j \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_Y + B_Y) + \sum_{i=1}^{l} a(Y, B_Y, G_i) G_i,$$

где дивизоры G_i и F_j исключительны для морфизмов g и f соответственно. Из Леммы 2.19 работы [Ko1] следует, что для всех дивизоров E на многообразии W

$$a(X, B_X, E) = a(Y, B_Y, E).$$

В частности, $K_Y + B_Y \sim_{\mathbb{Q}} 0$, лог пара (Y, B_Y) терминальна и $k = l$.

Поскольку $Pic(X) = \mathbb{Z}$ и многообразие X $\mathbb{Q}$-факториально, то

$$rk(Pic(W)) = 1 + k.$$

Но с другой стороны,

$$rk(Pic(W)) \geq rk(Pic(Y)) + l.$$

Следовательно, многообразие Y $\mathbb{Q}$-факториально и $Pic(Y) = \mathbb{Z}$.

Теперь остаётся заметить, что существует $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, такое что обе лог пары $(X, \zeta B_X)$ и $(Y, \zeta B_Y)$ будут каноническими моделями. Откуда следует, что отображение ρ – изоморфизм. $\square$

Условия Теоремы 1.1 нельзя ослабить.

Пример 2.1. *Рассмотрим гладкую трёхмерную квартику V вместе с линейной системой её гиперплоских сечений $\mathcal{H}_C$, проходящих через фиксированную прямую $C \subset X$. Положим $B_V = b\mathcal{H}_C$ для $b \in \mathbb{Q}_{>1}$. Тогда*

$$K_V + \frac{1}{b} B_V \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

$\kappa(V, B_V) = 1$ *и лог пара* $(X, \frac{1}{b} B_V)$ *канонична, но не терминальна.*

Доказательство Теоремы 1.2. По условию дивизор L численно эффективен и объёмен, а лог пара $(X, \lambda B_X)$ канонична. Пусть $\lambda = 1$. Тогда $I(X, B_X) = \psi_{|n\pi^*(L)|}$ для $n \gg 0$. Откуда следует существование даже бирационального искомого отображения ψ.

Пусть теперь $\lambda \in (0, 1)$. Рассмотрим бирациональный морфизм $f : W \to X$, такой что лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

терминальна и $\mathbb{Q}$-факториальна. Тогда

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} K_W + \lambda B_W + (1 - \lambda) B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(\pi^*(L)) + \sum_{i=1}^{k} a(X, \lambda B_X, F_i) F_i + (1 - \lambda) B_W,$$

где дивизоры F_i f-исключительны и все $a(X, \lambda B_X, F_i) \geq 0$. Поскольку

$$I(X, B_X) = I(W, B_W) \circ f^{-1},$$

то мы сразу получаем существование искомого отображения. $\square$

Следствие 2.2. *В условиях Теоремы 1.2 если морфизм π и отображение $I(X, B_X)$ бирационально не эквивалентны, то лог пара $(X, \lambda B_X)$ не терминальна в окрестности общего слоя морфизма π.*

Доказательство. Нужно применить Теорему 1.1 к общему слою морфизма π. $\square$

Отметим без доказательства одно следствие из доказательства Теоремы 1.2.

Следствие 2.3. *В условиях Теоремы 1.2 следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение ψ бирационально,*
(2) $\lambda = 1$,
(3) *общий слой отображения $I(X, B_X)$ – унилинейчатое многообразие,*
(4) $\kappa(X, B_X) = dim(S)$.

Дадим без доказательства одно обобщение Теоремы 1.2.

Теорема 2.4. *Пусть лог пара $(X, \lambda B_X)$ канонична. Тогда для $n \gg 0$ существует доминантное отображение*

$$\psi : I(X, B_X)(X) \dashrightarrow \phi_{|nL|}(S),$$

такое что

$$\psi \circ I(X, B_X) = \phi_{|nL|} \circ \pi.$$

Условия Теоремы 2.4 нельзя ослабить.

Пример 2.5. *Пусть на поверхности $S \cong \mathbb{P}^2$ дана двумерная свободная линейная система кубик $\mathcal{C}$, чьи элементы мы отождествим с точками поверхности $Z \cong \mathbb{P}^2$. Зададим трёхмерное многообразие V в $S \times Z$ соотношением*

$$(x, y) \in V \iff \text{кубика } y \text{ содержит точку } x.$$

Можно показать, что V гладко. Обозначим $\pi : V \to S$ и $\tau : V \to Z$ естественные проекции. Тогда τ есть расслоение на эллиптические кривые, а π есть $\mathbb{P}^1$-расслоение с сечением. В частности, многообразие V рационально.

Лог пара

$$(V, B_V) = (V, b|\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|)$$

терминальна для всех $b > 0$ и

$$K_V + \frac{2}{b} B_V \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Заметим, что без условия $\kappa(X, B_X) \geq 0$ утверждения Теоремы 2.1 и 2.3 в общем случае просто не верны (см. Пример 4.3 Введения).

§3. Локальные методы: гладкая точка как центр канонических особенностей.

В этом параграфе мы докажен Теорему 1.3, воспользовавшись аргументами работы [Пу2].

Пусть нам даны: трёхмерное многообразие X, лог пара

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{3.1}$$

и гладкая точка $O \in X$.

Мы разобъём доказательство Теоремы 1.3 на несколько лемм.

Лемма 3.1. *Теорема 1.3 верна, если*

$$a(X, B_X, E) \leq 0,$$

где E – исключительный дивизор раздутия точки O.

Доказательство. Мы имеем

$$a(X, B_X, E) \leq 0 \Rightarrow mult_O(B_X) \geq 2 \Rightarrow mult_O(B_X^2) \geq 4$$

и

$$mult_O(B_X^2) = 4 \Rightarrow mult_O(B_X) \leq 2 \Rightarrow a(X, B_X, E) \geq 0.$$

□

Будем считать далее, что выполнено условие Теоремы 1.3, но не выполнено условие Леммы 3.1. Тогда существует набор бирациональных морфизмов

$$\psi_{i,i-1} : X_i \to X_{i-1} \text{ для } i = 1, \ldots, K,$$

удовлетворяющих следующим свойствам:

(1) $X_0 = X$ и $\psi_{1,0}$ есть раздутие точки $P_0 = O$,

(2) если $E_i = \psi_{i,i-1}^{-1}(P_{i-1})$, то

  (а) для $i \in [2, L]$ морфизм $\psi_{i,i-1}$ есть раздутие точки $P_{i-1} \in E_{i-1}$,

  (б) морфизм $\psi_{L+1,L}$ есть раздутие общей точки[4] кривой $P_L \subset E_L$,

  (в) для $i \in [L+2, K]$ морфизм $\psi_{i,i-1}$ есть раздутие общей точки кривой $P_{i-1} \subset E_{i-1}$, не лежащей в слоях морфизма $\psi_{i-1,i-2}|_{E_{i-1}}$,

(3) $a(X, B_X, E_K) \leq 0$, но $a(X, B_X, E_i) > 0$ для всех $i < K$.

Обозначим $\psi_{j,i} = \psi_{i+1,i} \circ \ldots \circ \psi_{j,j-1}$ для $j > i$ и $\psi_{j,j} = id_{X_j}$. Введём лог пары

$$(X_i, B_{X_i}) = (X_i, \psi_{i,0}^{-1}(B_X)) \text{ для } i = 0, \ldots, K.$$

Пусть $C_0 = B_X^2$, а для $i \geq 1$ зададим эффективный 1-цикл $C_i \subset E_i$ соотношением

$$B_{X_i}^2 = \psi_{i,i-1}^{-1}(B_{X_{i-1}}^2) + C_i.$$

Положим

(1) $d_i = deg_{E_i}(C_i)$ для $i = 1, \ldots, L$ ($E_i \cong \mathbb{P}^2$),

(2) $C_j^i = \psi_{i,j}^{-1}(C_j)$ для $i \geq j$,

(3) $m_{i,j} = mult_{P_{j-1}}(C_i^{j-1})$ для $i < j \leq L$,

(4) $\nu_i = mult_{P_{i-1}}(B_{X_{i-1}})$.

[4]Многообразия X_i следует считать неполными для $i > L$.

В принятых обозначениях нам нужно показать, что

$$m_{0,1} > 4.$$

Заметим, что $B^2_{X_i} = C^i_0 + \ldots + C^i_i$.

Лемма 3.2. *Для* $i \in [1, L]$ *выполнено равенство*

$$\sum_{j=0}^{i-1} m_{j,i} = \nu_i^2 + d_i.$$

Доказательство. Мы будем считать, что $i = 1$, поскольку случай $i \neq 1$ доказывается идентично, но обозначения более громоздкие. Во-первых,

$$m_{0,1} = \sum_{i=1,j=1}^{N} b_i b_j mult_O(\mathcal{B}_i \cdot \mathcal{B}_j).$$

Во-вторых,

$$\nu_1^2 = \sum_{i=1,j=1}^{N} b_i b_j mult_O(\mathcal{B}_i) mult_O(\mathcal{B}_j).$$

В-третьих,

$$d_1 = \sum_{i=1,j=1}^{N} b_i b_j deg_{E_1}(Q_{i,j}),$$

где кривая $Q_{i,j} \in E_1$ задана условием

$$\psi_{1,0}^{-1}(\mathcal{B}_i) \cdot \psi_{1,0}^{-1}(\mathcal{B}_j) = \psi_{1,0}^{-1}(\mathcal{B}_i \cdot \mathcal{B}_j) + Q_{i,j}.$$

Таким образом, можно считать, что $B_X = \mathcal{B}_1$. В последнем случае равенство

$$m_{0,1} = \nu_1^2 + d_1$$

хорошо известно (см. [Пу2]). Его легко получить, если ограничить все дивизоры на общее гиперплоское сечение многообразия X, содержащего точку O. □

В дальнейшем, используя Лемму 3.2, мы получим оценку снизу для $m_{0,1}$ в виде линейной функции от d_L и ν_i^2 $(i = 1, \ldots, L)$ с коэффициентами в $\mathbb{N}$. Поэтому нам понадобится оценка снизу для d_L.

Лемма 3.3. *Выполнено неравенство*

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2 deg(\psi_{i-1,L}|_{P_{i-1}}).$$

Доказательство. Определим числа d_i для $i > L$ как пересечение 1-цикла $C_i \subset E_i$ со слоем морфизма $\psi_{i,i-1}|_{E_i}$. Тогда

$$d_L \geq mult_{P_L}(B^2_{X_L}) \text{ и } d_i \geq mult_{P_i}(B^2_{X_i}) deg(\psi_{i,i-1}|_{P_i}) \text{ для } i > L.$$

Но, как и в доказательстве Леммы 3.2, можно показать, что

$$mult_{P_i}(B^2_{X_i}) = \nu^2_{i+1} + d_{i+1} \text{ для } i \geq L.$$

Откуда следует, что

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2 \prod_{j=L}^{i-1} deg(\psi_{j+1,j}|_{P_{j+1}}) = \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2 deg(\psi_{i-1,L}|_{P_{i-1}}).$$

□

Ослабим неравенство в Лемме 3.3.

Следствие 3.4. *Выполнено неравенство*

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2.$$

Введём ориентированный граф Γ. В качестве его вершин рассмотрим исключительные дивизоры $\{E_i\}$. Пусть $E_j \to E_i$ обозначает, что вершины E_j и E_i соединены направленным ребром идущим от первого к последнему. Положим

$$E_j \to E_i \iff j > i \text{ и } P_{j-1} \subset \psi^{-1}_{j-1,i}(E_i).$$

Определим функцию $T(i)$ как количество ориентированных путей в графе Γ, идущих из вершины E_K к вершине E_i.

Лемма 3.5. *Имеют место равенство*

$$a(X, B_X, E_K) = \sum_{i=1}^{L} T(i)(2 - \nu_i) + \sum_{i=L+1}^{K} T(i)(1 - \nu_i)$$

и неравенство

$$T(i) \geq \sum_{E_j \to E_i} T(j).$$

Доказательство. Оба утверждения несложно выводятся из определений графа Γ и функции $T(i)$. □

Теперь воспользуемся функциями $T(i)$ и Леммой 3.2, чтобы получить основное неравенство этого параграфа.

Лемма 3.6. *Выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{L} T(i) m_{0,i} \geq \sum_{i=1}^{L} T(i) \nu_i^2 + T(L) d_L.$$

Доказательство. Умножим равенство из Леммы 3.2

$$\sum_{i=0}^{j-1} m_{i,j} = \nu_j^2 + d_j \ (j = 1, \dots, L)$$

на $T(j)$, а затем просуммируем по j. Мы получим равенство

$$\sum_{j=1}^{L} \sum_{i=0}^{j-1} T(j) m_{i,j} = \sum_{j=1}^{L} T(j) \nu_j^2 + \sum_{j=1}^{L} T(j) d_j.$$

Изменим порядок суммирования –

$$\sum_{j=1}^{L} \sum_{i=0}^{j-1} T(j) m_{i,j} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=i+1}^{L} T(j) m_{i,j}.$$

Заметим, что если $1 \leq i < j \leq L$, то $m_{i,j} \leq d_i$ и

$$m_{i,j} > 0 \iff E_j \to E_i.$$

Откуда, учитывая Лемму 3.5, мы получим, что

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=i+1}^{L} T(j) m_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{L} T(j) m_{0,j} + \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{E_j \to E_i} T(j) d_i \leq \sum_{j=1}^{L} T(j) m_{0,j} + \sum_{i=1}^{L-1} T(i) d_i.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{L} T(j) m_{0,j} + \sum_{i=1}^{L-1} T(i) d_i \geq \sum_{j=1}^{L} T(j) \nu_j^2 + \sum_{j=1}^{L} T(j) d_j$$

и после сокращения

$$\sum_{j=1}^{L} T(j) m_{0,j} \geq \sum_{j=1}^{L} T(j) \nu_j^2 + T(L) d_L.$$

□

Доказательство Теоремы 1.3. Ввиду Леммы 3.1 мы можем считать, что $a(X, B_X, E) > 0$, где E есть исключительный дивизор раздутия точки O.

Из Леммы 3.6 и Следствия 3.4 следует, что

$$m_{0,1} \sum_{i=1}^{L} T(i) \geq \sum_{i=1}^{L} T(i) m_{0,i} \geq \sum_{i=1}^{L} T(i)\nu_i^2 + T(L) \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{K} T(i)\nu_i^2.$$

Пусть $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^{L} T(i)$ и $\Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^{K} T(i)$. Из Леммы 3.5 следует, что

$$\sum_{i=1}^{K} T(i)\nu_i \geq 2\Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Несложный вариационный анализ показывает, что

$$m_{0,1} \geq \frac{1}{\Sigma_0} \sum_{i=1}^{K} T(i)\nu_i^2 \geq \frac{(\Sigma_1 + 2\Sigma_0)^2}{\Sigma_0(\Sigma_1 + \Sigma_0)} = 4 + \frac{\Sigma_1^2}{\Sigma_0(\Sigma_1 + \Sigma_0)} > 4,$$

поскольку $\Sigma_1 \neq 0$. $\square$

ГЛАВА II

ЛОГ ПАРЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

§1. Основные результаты главы II.

В этой главе мы применим результаты главы I к решению Прямой Задачи для гладких поверхностей дель Пеццо и двумерных расслоений на коники. Случай алгебраически замкнутого поля неявно рассмотрен в работах [Co] и [До]. Поэтому мы будем рассматривать поверхности над произвольным полем $\mathbb{F}$ с алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}$.

Заметим, что все результаты главы I остаются верными несмотря на произвольность поля $\mathbb{F}$. Под точками мы будем подразумевать нульмерные схемные точки. Геометрически неприводимые точки мы будем называть $\mathbb{F}$-точками.

Основные результаты этой главы сосредоточены в утверждениях Теорем 2.3, 2.4, 2.5, 3.1, 3.3 и 3.4. Сформулируем несколько следствий из них.

Теорема 1.1. *Пусть X – гладкая поверхность дель Пеццо с $Pic(X) = \mathbb{Z}$. Тогда если $K_X^2 \leq 3$, то*

(1) *поверхность X бирационально не изоморфна расслоению на коники,*
(2) *с точностью до действия группы $Bir(X)$ все бирациональные перестройки поверхности X в поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями исчерпываются стандартными,*
(3) *с точностью до действия группы $Bir(X)$ все эллиптические расслоения, бирационально изоморфные поверхности X, заданны пучками Альфана.*

Отметим, что определения пучка Альфана и стандартной перестройки поверхности дель Пеццо содержаться в следующем параграфе.

Теорема 1.2. *Пусть $\pi : X \to S$ – гладкое расслоение на коники с $Pic(X/S) = \mathbb{Z}$ и $K_X^2 < 0$. Тогда поверхность X бирационально не изоморфна поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями, расслоению на эллиптические кривые и расслоению на коники бирационально неэквивалентному расслоению π.*

Заметим, что геометрия поверхностей, удовлетворяющих условиям Теоремы 1.1 и 1.2, хорошо изучена в работах [Ис1], [Ис6] и [Ма1-2].

§2. Поверхности дель Пеццо.

Зафиксируем гладкую поверхность дель Пеццо X с $Pic(X) = \mathbb{Z}$ и $K_X^2 \leq 3$. Рассмотрим лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{2.1}$$

и $\lambda \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, такое что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

причём $\lambda = +\infty$ для $B_X = \emptyset$.

Мы хотим исследовать свойства лог пары (2.1) в зависимости от числа λ. Но сначала нам нужно сказать несколько слов о самой поверхности X.

В работе [Ko2] показано, что поверхность X может быть задана одним из следующих способов:

(1) как секстика в $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ в случае $K_X^2 = 1$,
(2) как квартика в $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ в случае $K_X^2 = 2$,
(3) как кубика в $\mathbb{P}^3$ в случае $K_X^2 = 3$.

В какие поверхности дель Пеццо, расслоения на коники и эллиптические кривые можно бирационально перестроить поверхность X? Хорошо известно, что поверхность X бирационально не изоморфна расслоению на коники и гладкой поверхности дель Пеццо с группой Пикара $\mathbb{Z}$, отличной от самой X (см. [Ma1-2]).

Разберём одну конструкцию бирациональной перестройки X в поверхность дель Пеццо с каноническими особенностями.

Предположим, что существует бирациональный морфизм $f : W \to X$, такой что поверхность W гладкая и $K_W^2 > 0$.

Лемма 2.1. *В сделанных предположениях дивизор $-K_W$ численно эффективен и объёмен.*

Доказательство. Легко видеть, что морфизм f есть один из следующих:

(а) изоморфизм,
(б) раздутие $\mathbb{F}$-точки O поверхности X,
(в) раздутие двух $\mathbb{F}$-точек O_1 и O_2 поверхности X,
(г) последовательное раздутие двух различных $\mathbb{F}$-точек,
(д) раздутие точки поверхности X, которая распадается над полем $\bar{\mathbb{F}}$ на две компоненты.

Опуская случай (а), разберём случай (б). Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H}_O$, состоящую из кривых в $|-K_X|$, проходящих через точку O. Тогда

$$dim(Bs(\mathcal{H}_O)) = 0.$$

Последнее следует из того, что в случае $K_X^2 = 2$ линейная система $|-K_X|$ свободна и задаёт двулистное накрытие $\mathbb{P}^2$, а в случае $K_X^2 = 3$ поверхность X можно отождествить с гладкой кубикой. Численная эффективность дивизора $-K_W$ следует из соотношения

$$f^{-1}(\mathcal{H}_O) \sim -K_W.$$

Поскольку, $K_W^2 > 0$, то дивизор $-K_W$ объёмен.

Заметим, что в случаях (в)-(д) необходимо $K_X^3 = 3$. Мы рассмотрим только случай (в) ввиду того, что случаи (г) и (д) рассматриваются практически идентично.

Рассмотрим прямую L, проходящую через точки O_1 и O_2 и пучок $\mathcal{H}_L$ гиперплоских сечений поверхности X, содержащих прямую L. Как и в случае (а)

$$f^{-1}(\mathcal{H}_L) \sim -K_W.$$

Поэтому нам достаточно показать, что

$$dim(Bs(\mathcal{H}_L)) = 0.$$

Последнее следует из того, что прямая L не принадлежит поверхности X, так как $Pic(X)=\mathbb{Z}$. $\square$

Из теоремы о свободе от базисных точек (см. [KaMaMa]) следует, что линейная система $|-nK_W|$ свободна для $n\gg 0$ и задаёт бирациональный морфизм на нормальную поверхность V. По построению V является поверхностью дель Пеццо с каноническими особенностями.

Мы будем говорить, что бирациональная перестройка $\phi_{|-nK_W|}\circ f^{-1}$ поверхности X в поверхность V стандартна. Как мы увидим, в общем случае поверхность X имеет много нестандартных бирациональных перестроек в поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями.

Теперь рассмотрим одну конструкцию эллиптического расслоения, бирационально изоморфного поверхности X.

Назовём пучок $\mathcal{P}$ в линейной системе $|-nK_X|$ пучком Альфана (см. [До]) если отображение $\phi_{\mathcal{P}}$ может быть задано посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f\swarrow & & \searrow\phi_{|-nK_W|}, \\ X & \stackrel{\phi_{\mathcal{P}}}{\dashrightarrow} & Z \end{array}$$

где f есть раздутие K_X^2 точек, и линейная система $|-nK_W|$ свободна. Из построения следует, что морфизм $\phi_{|-nK_W|}$ – эллиптическое расслоение.

Мы также будем называть любое эллиптическое расслоение, бирационально эквивалентное расслоению $\phi_{|-nK_W|}$, эллиптическим расслоением, заданным пучком Альфана $\mathcal{P}$.

Заметим, что любой пучок в линейной системе $|-K_X|$ является пучком Альфана, и заданное им эллиптическое расслоение не имеет кратных слоёв.

Легко видеть, что кривая Z рациональна над полем $\bar{\mathbb{F}}$. Однако верно большее.

Лемма 2.2. *В данном определении пучка Альфана кривая Z рациональна.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, принятыми нами для определения пучка Альфана. В случае $n=1$ утверждение леммы очевидно. Таким образом, можно считать, что $n>1$.

Из Теоремы Римана-Роха следует, что

$$H^0(-K_W)=\mathbb{F}.$$

Единственный элемент F линейной системы $|-K_W|$ является кратным слоем расслоения $\phi_{|-nK_W|}$. Действие группы $Gal(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ на поверхности $W\otimes\bar{\mathbb{F}}$ оставляет инвариантным дивизор $F\otimes\bar{\mathbb{F}}$. Таким образом, кривая Z содержит $\mathbb{F}$-точку $\phi_{|-nK_W|}(F)$ и, следовательно, рациональна. $\square$

Введём понятие максимальности лог пары (2.1).

Рассмотрим естественное действие группы $Bir(X)$ на лог парах на поверхности X. Для каждого отображения $g\in Bir(X)$ существует $\lambda(g)\in\mathbb{Q}_{>0}\cup\{+\infty\}$, такое что

$$K_X+\lambda(g)g(B_X)\sim_{\mathbb{Q}}0.$$

Поскольку
$$\frac{1}{\lambda(g)} = \sum_{i=1}^{N} b_i d_i(g), \text{ где } g(\mathcal{B}_i) \sim_{\mathbb{Q}} -d_i(g)K_X \text{ и } d_i(g) \in \mathbb{N},$$
то множество чисел $\{\lambda(g)\}$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. В частности, оно обладает максимальным элементом $\lambda(g_{max})$. Соответствующую лог пару
$$(X, g_{max}(B_X)) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i g_{max}(\mathcal{B}_i))$$
мы будем называть максимальной.

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 2.3. *Пусть лог пара (2.1) максимальна и* $\lambda = 1$. *Тогда* $\kappa(X, B_X) = 0$ *и лог пара (2.1) канонична, и если она не терминальна, то либо все линейные системы* $\mathcal{B}_i$ *составлены из одного пучка Альфана* $\mathcal{P}$, *либо существует стандартная бирациональная перестройка* ρ *поверхности* X *в поверхность дель Пеццо с каноническими особенностями* V, *такая что лог пара*
$$(V, B_V) = (V, \rho(B_X))$$
полутерминальна.

Мы разобъём доказательства Теоремы 2.1 на несколько лемм, но сначала выведем из неё две теоремы.

Теорема 2.4. *Пусть лог пара (2.1) максимальна и* $\lambda > 1$. *Тогда* $\kappa(X, B_X) = -\infty$ *и лог пара (2.1) терминальна.*

Доказательство. Можно считать, что $\lambda \neq +\infty$. Умножение на положительное число не влияет на максимальность лог пары. Из Теоремы 2.3 следует, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ канонична. Следовательно, лог пара (2.1) терминальна, и по определению $\kappa(X, B_X) = -\infty$. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть лог пара (2.1) максимальна и* $\lambda < 1$. *Тогда либо* $\kappa(X, B_X) = 2$, *либо лог пара (2.1) не канонична, все линейные системы* $\mathcal{B}_i$ *составлены из пучка Альфана* $\mathcal{P}$, $I(X, B_X) = \phi_{\mathcal{P}}$ *и* $\kappa(X, B_X) = 1$.

Доказательство. Будем считать, что $\kappa(X, B_X) \neq 2$. Как и в доказательстве Теоремы 2.4, из Теоремы 2.3 вытекает, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ канонична и $\kappa(X, \lambda B_X) = 0$. Поскольку
$$\kappa(X, B_X) \geq \kappa(X, \lambda B_X),$$
то по Теореме 1.1 главы I лог пара $(X, \lambda B_X)$ не терминальна. Следовательно, лог пара (2.1) не канонична.

Допустим, что не все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка Альфана. Из Теоремы 2.3 следует, что $K_X^2 > 1$ и существует стандартная бирациональная перестройка ρ поверхности X на поверхность дель Пеццо V с каноническими особенностями, такая что лог пара
$$(V, \lambda B_V) = (V, \lambda\rho(B_X))$$

полутерминальна. Возьмём $\zeta \in \mathbb{Q} \cap (1, \frac{1}{\lambda})$, такое что лог пара $(V, \zeta\lambda B_V)$ канонична. Тогда

$$2 > \kappa(X, B_X) \geq \kappa(X, \zeta\lambda B_X) = 2.$$

$\square$

Чтобы прояснить понятие максимальности лог пары опишем несколько бирациональных автоморфизмов поверхности X.

Сначала построим бирациональную инволюцию поверхности X в предположении, что $K_X^2 = 2$.

Предположим, что на поверхности X есть $\mathbb{F}$-точка O, такая что ни одна исключительная кривая поверхности $X \otimes \bar{\mathbb{F}}$ не содержит точку $O \otimes \bar{\mathbb{F}}$, и в линейной системе $|-K_{X\otimes\bar{\mathbb{F}}}|$ нет кривых, имеющих особенность в точке $O \otimes \bar{\mathbb{F}}$. Рассмотрим раздутие $f : W \to X$ $\mathbb{F}$-точки O. Морфизм $\phi_{|-2K_W|}$ – двулистное накрытие. Обозначим μ инволюцию, переставляющую его слои. Несложно подсчитать, что

$$\mu^*(f^*(H)) = 3f^*(H) - 4E \text{ и } \mu^*(E) = 2f^*(H) - 3E,$$

где $E = f^{-1}(O)$. Определим инволюцию $\psi(O) \in Bir(X)$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mu} & W \\ f\downarrow & & \downarrow f \cdot \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Инволюцию $\psi(O)$ обычно называют инволюцией Бертини.

Теперь мы построим аналог инволюции Бертини, в случае когда поверхность X есть кубика.

Предположим, что поверхность X содержит неприводимую точку O, такую что

(1) над полем $\bar{\mathbb{F}}$ точка O распадается на две точки,
(2) в линейной системе $|-K_{X\otimes\bar{\mathbb{F}}}|$ нет кривых, содержащих обе компоненты $O \otimes \bar{\mathbb{F}}$ и имеющих особенность в одной из них,
(3) на кубике $X \otimes \bar{\mathbb{F}}$ нет прямых, проходящих через одну из компонент $O \otimes \bar{\mathbb{F}}$.

Раздуем точку O – $f : W \to X$. Можно показать, что морфизм $\phi_{|-2K_W|}$ – двулистное накрытие. Обозначим μ инволюцию, переставляющую его слои. Несложно подсчитать, что

$$\mu^*(f^*(H)) = 5f^*(H) - 6E \text{ и } \mu^*(E) = 4f^*(H) - 5E,$$

где $E = f^{-1}(O)$. Определим инволюцию $\psi(O) \in Bir(X)$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mu} & W \\ f\downarrow & & \downarrow f \cdot \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Инволюцию $\psi(O)$ также принято называть инволюцией Бертини.

Построим ещё одну бирациональную инволюцию на кубике.

Предположим, что на нашей кубике X лежит $\mathbb{F}$-точка O, такая что ни одна прямая на кубике $X \otimes \bar{\mathbb{F}}$ не проходит через точку $O \otimes \bar{\mathbb{F}}$. Пусть $f : W \to X$ есть раздутие $\mathbb{F}$-точки O. Тогда морфизм $\phi_{|-K_W|}$ есть двулистное накрытие. Обозначим μ инволюцию, переставляющую его слои. Несложно подсчитать, что

$$\mu^*(f^*(H)) = 2f^*(H) - 3E \text{ и } \mu^*(E) = f^*(H) - 2E,$$

где $E = f^{-1}(O)$. Определим инволюцию $\psi(O) \in Bir(X)$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mu} & W \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Инволюцию $\psi(O)$ принято называть инволюцией Гейзера.

Теперь докажем первую часть Теоремы 2.1.

Лемма 2.6. *В Теореме 2.3 лог пара (2.1) канонична.*

Доказательство. Допустим, лог пара (2.1) не канонична в точке O. Последнее означает, что

$$mult_O(B_X) > 1.$$

Пусть

$$O \otimes \bar{\mathbb{F}} = \{\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_k\}.$$

Тогда

$$K_X^2 = B_X^2 \geq mult_O(B_X)^2 k.$$

Откуда сразу следует противоречие в случае $K_X^2 = 1$, равенство $k = 1$ в случае $K_X^2 = 2$ и неравенство $k < 2$ в случае $K_X^2 = 3$.

Возьмём произвольную кривую C на поверхности $X \otimes \bar{\mathbb{F}}$, содержащую точку $\bar{O}_i$. Рассмотрим лог пару

$$(X \otimes \bar{\mathbb{F}}, B_{X\otimes\bar{\mathbb{F}}}),$$

индуцированную лог парой (2.1) на поверхности $X \otimes \bar{\mathbb{F}}$. Тогда

$$-C \cdot K_{X\otimes\bar{\mathbb{F}}} = C \cdot B_{X\otimes\bar{\mathbb{F}}} \geq mult_O(B_X) mult_{\bar{O}_i}(C) > mult_{\bar{O}_i}(C).$$

Пусть $K_X^2 = 2$. Из полученных неравенств следует, что точка O геометрически неприводима и выполнены условия построения инволюции Бертини $\psi(O)$. Тогда

$$\lambda(\psi(O)) > 1,$$

что противоречит максимальности лог пары (2.1).

Осталось рассмотреть случай, когда поверхность X является кубикой. Если точка O геометрически неприводима, то мы вновь видим, что полученные неравенства влекут выполнение условий построения инволюции Геизера $\psi(O)$. Если же точка

O геометрически приводима, то из полученных неравенств следует, что $k = 2$ и выполнены условия построения инволюции Бертини $\psi(O)$. Как и раньше противоречие вытекает из неравенства

$$\lambda(\psi(O)) > 1.$$

□

Теперь все готово для доказательства Теоремы 2.3.

Доказательство Теоремы 2.3. По Лемме 2.6 лог пара (2.1) канонична. Предположим, что она не терминальна. Рассмотрим её терминальную модификацию $f : W \to X$. Последнее означает, что лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

имеет терминальные особенности и

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

В частности, дивизор $-K_W$ численно эффективен.

Пусть $K_W^2 > 0$. Тогда по теореме о свободе от базисных точек (см. [KaMaMa]) линейная система $|-nK_W|$ свободна для $n \gg 0$, и поверхность $\phi_{|-nK_W|}(W)$ нормальна. Положим

$$\rho = \phi_{|-nK_W|} \circ f^{-1} \text{ и } V = \phi_{|-nK_W|}(W).$$

Заметим, что по построению V – поверхность дель Пеццо с каноническими особенностями, а бирациональная перестройка ρ стандартная.

Нам нужно доказать полутерминальность лог пары

$$(V, B_V) = (V, \rho(B_X)),$$

имеющей по построению канонические особенности. Для этого возьмём $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$ такое, что лог пара $(W, \zeta B_W)$ терминальна. Морфизм $\phi_{|-nK_W|}$ крепантен относительно лог пары $(W, \zeta B_W)$. Следовательно, лог пара $(V, \zeta B_V)$ канонична. Но последнее и означает искомую полутерминальность.

Пусть теперь $K_X^2 = 0$. Тогда

$$0 = B_W^2 = \sum_{i=1,j=1}^{N} b_i b_j f^{-1}(\mathcal{B}_i) \cdot f^{-1}(\mathcal{B}_j).$$

Откуда сразу следует, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка Альфана $\mathcal{P}$. □

Доказательство Теоремы 1.1. Докажем первое утверждение Теоремы 1.1. Допустим, что поверхность X бирационально изоморфна расслоению на коники $\tau : Y \to Z$ посредством отображения θ. Рассмотрим лог пару

$$(X, B_X) = (X, \gamma\theta^{-1}(|\tau^*(D)|)) \text{ для } deg(D) \gg 0.$$

Можно считать её максимальной. Тогда для всех γ $\kappa(X, B_X) = -\infty$, что противоречит Теореме 2.5.

Теперь докажем второе утверждение Теоремы 1.1. Пусть θ есть бирациональное отображение поверхности X на поверхности дель Пеццо Y с каноническими особенностями. Рассмотрим лог пару

$$(X, B_X) = (X, \frac{1}{n}\theta^{-1}(|-nK_Y|)) \text{ для } n \gg 0.$$

По построению $\kappa(X, B_X) = 0$. Можно также считать лог пару (X, B_X) максимальной.

Из Теоремы 2.3 следует, что существует стандартная бирациональная перестройка $\rho : X \dashrightarrow V$, такая что лог пара

$$(V, B_V) = (V, \frac{1}{n}\rho \circ \theta^{-1}(|-nK_Y|))$$

полутерминальна, и V есть поверхность дель Пеццо с каноническими особенностями.

Возьмём $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, такое что лог пара $(V, \zeta B_V)$ канонична. Поскольку линейную систему $|-nK_Y|$ можно считать свободной, то лог пара

$$(Y, \frac{\zeta}{n}(|-nK_Y|)$$

также канонична. Из единственности канонической модели следует, что отображение $\rho \circ \theta^{-1}$ есть изоморфизм.

Наконец, докажем последнее утверждение Теоремы 1.1. Предположим, что поверхность X бирационально изоморфна эллиптическому расслоению $\tau : Y \to Z$ посредством отображения θ. Рассмотрим лог пару

$$(X, B_X) = (X, \theta^{-1}(|\tau^*(D)|)) \text{ для } deg(D) \gg 0.$$

По построению $\kappa(X, B_X) = 1$ и $I(X, B_X) = \tau \circ \theta$. С точностью до действия группы $Bir(X)$ можно считать лог пару (X, B_X) максимальной. Тогда по Теореме 2.5 $I(X, B_X) = \phi_{\mathcal{P}}$ для некоторого пучка Альфана $\mathcal{P}$ на поверхности X. $\square$

Из Теоремы 1.1 и доказательства Теоремы 2.3 вытекает, что группа $Bir(X)$ порождается инволюциями Бертини и Гейзера. В частности, если $K_X^2 = 1$, то $Bir(X) = Aut(X)$. В последнем случае поверхность X не может быть бирационально изоморфна поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями, отличными от самой поверхности X.

Мы пока не затрагивали вопрос о существовании поверхности X. Приведём конкретный пример над полем $\mathbb{Q}$.

Пример 2.7. *Пусть поверхность X задана над полем $\mathbb{Q}$ уравнением*

$$2x_0^4 + 3x_1^4 + 5x_2^4 = x_3^2$$

степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. Легко видеть, что X есть гладкая поверхность дель Пеццо и $K_X^2 = 2$.

Чтобы показать, что $Pic(X) \cong \mathbb{Z}$, мы рассмотрим действие группы $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ исключительных кривых поверхности $X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$.

Поверхность $X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ содержит ровно 56 исключительных кривых. Несложно видеть, что каждое из уравнений

$$2^{\frac{1}{4}}x_0+3^{\frac{1}{4}}x_1+5^{\frac{1}{4}}x_2=0,\ 2^{\frac{1}{4}}x_0+(-3)^{\frac{1}{4}}x_1=0,\ 2^{\frac{1}{4}}x_0+(-5)^{\frac{1}{4}}x_2=0 \text{ и } 3^{\frac{1}{4}}x_1+(-5)^{\frac{1}{4}}x_2=0,$$

задаёт пару исключительных кривых на поверхности X. Откуда несложно показать, что группа $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ так действует на исключительных кривых на поверхности X, что каждая орбита содержит по крайней мере 3 взаимно пересекающиеся исключительные кривые. Из последнего следует, что $Pic(X) = \mathbb{Z}$.

§3. Двумерные расслоения на коники.

Зафиксируем гладкое расслоение на коники $\pi : X \to S$ с $Pic(X/S) = \mathbb{Z}$ и $K_X^2 < 0$. Рассмотрим лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{3.1}$$

и $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(L),$$

где L это дивизор на кривой S, причём если граница B_X лежит в слоях морфизма π, то мы формально положим $\gamma = +\infty$ и $L = f(B_X)$.

Как свойства лог пары (3.1) зависят от числа λ? Заметим, что если все компоненты границы B_X свободные “достаточно большие” линейные системы, то лог пара (3.1) будет терминальной и

$$\kappa(X, B_X) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \lambda > 1, \\ 1, \text{ если } \lambda = 1, \\ 2, \text{ если } \lambda < 1. \end{cases}$$

Рассмотрим класс $\mathcal{U}$ бирациональных отображений

$$\psi : X/S \dashrightarrow W/S,$$

таких что поверхность W гладкая, $Pic(W/S) = \mathbb{Z}$ и $K_X^2 = K_W^2$. Заметим, что класс $\mathcal{U}$ непуст.

Оказывается, что если морфизм π достаточно сильно разветвлён, то с точностью до отображений из класса $\mathcal{U}$ основные свойства лог пары (2.1) могут быть описаны аналогично разобранному выше “тривиальному” случаю.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda = 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = 1$, $I(X, B_X) = \pi$ и существует бирациональное отображение*

$$\rho : X/S \dashrightarrow Y/S$$

из класса $\mathcal{U}$, такое что лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$

имеет канонические особенности.

Прежде чем приступать к доказательству Теоремы 3.1, определим функцию q на классе $\mathcal{U}$ со значениями в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для бирационального отображение ψ, принадлежащего классу $\mathcal{U}$, положим

$$q(\psi) = \text{количество точек в } CS(\psi(X), \psi(B_X)).$$

Как мы увидим, доказательство Теоремы 3.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.2. *Пусть бирациональное отображение*

$$\rho : X/S \dashrightarrow Y/S$$

принадлежит классу $\mathcal{U}$ и минимизирует функцию q. Тогда лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$

имеет канонические особенности.

Доказательство. Предположим лог пара (Y, B_Y) не канонична в точке $y \in Y$.

Введём следующие обозначения:

$$\bar{Y} = Y \otimes \bar{\mathbb{F}},\ \bar{S} = S \otimes \bar{\mathbb{F}},\ B_{\bar{Y}} = B_Y \otimes \bar{\mathbb{F}}.$$

Рассмотрим индуцированный морфизм $\bar{\tau}$ поверхности $\bar{Y}$ на кривую $\bar{S}$. Если

$$y \otimes \bar{\mathbb{F}} = \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\},$$

то кратность границы $B_{\bar{Y}}$ в каждой из точек точек $\bar{y}_i$ строго больше 1.

Пусть $\bar{F}_i$ обозначает слой морфизма $\bar{\tau}$, содержащий точку $\bar{y}_i$. Покажем, что слой $\bar{F}_i$ неприводим и не содержит точек $\bar{y}_j$ для $j \neq i$. Во-первых,

$$2 = \bar{B}_Y \cdot \bar{F}_i = \sum_{\bar{y}_j \in \bar{F}_i} (\bar{B}_Y \cdot \bar{F}_i)_{\bar{y}_j} \geq \sum_{\bar{y}_j \in \bar{F}_i} mult_{\bar{y}_j}(\bar{B}_Y) mult_{\bar{y}_j}(\bar{F}_i) > \#\{\bar{y}_j \in \bar{F}_i\}.$$

Следовательно, слой $\bar{F}_i$ содержит ровно одну точку среди $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\}$, которая неособа на $\bar{F}_i$. Во-вторых, поскольку $Pic(Y/S) = \mathbb{Z}$, то нет неприводимых компонент приводимых слоёв морфизма $\bar{\tau}$, инвариантных относительно действия группы $Gal(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Таким образом, если слой $\bar{F}_i$ приводим, то он должен содержать как минимум две точки из числа $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\}$, но мы уже показали, что это невозможно.

Рассмотрим слой F морфизма τ, содержащий точку y. Тогда в принятых обозначениях

$$F \otimes \bar{\mathbb{F}} = \{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k\}.$$

Определим отображение $\mu : Y/S \dashrightarrow V/S$ как композицию раздутия точки y и сдутия собственного прообраза слоя F. Предыдущие рассуждения показывают, что отображение μ определено корректно. Тогда

$$K_V^2 = K_X^2 \text{ и } q(\mu \circ \rho) < q(\rho),$$

что противоречит нашему предположению об отображении ρ. $\square$

Доказательство Теоремы 3.1. Из Леммы 3.2 следует, что мы имеем бирациональное отображение ρ из класса $\mathcal{U}$, такое что лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$

имеет канонические особенности, и на поверхности Y выполнено соотношение

$$K_Y + B_Y \sim_{\mathbb{Q}} \tau^*(D)$$

для некоторого дивизора D на кривой S.

Нам нужно показать, что $deg(D) > 0$. Допуская противное, получим

$$0 > K_Y^2 = B_Y^2 - 2B_Y\tau^*(D) \geq 0.$$

$\square$

Лог пары (3.1) с λ отличным от единицы явно не описываются Теоремой 3.1. Однако, как и в параграфе 4 мы покажем, что этот случай можно свести к уже разобранному.

Теорема 3.3. *Пусть $\lambda > 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = -\infty$ и существует бирациональное отображение*

$$\rho : X/S \dashrightarrow Y/S$$

из класса $\mathcal{U}$, такое что лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$

терминальна.

Доказательство. Если $\lambda = +\infty$, то можно положить $\rho = id_X$. В противном случае достаточно применить Теорему 3.1 к лог паре $(X, \lambda B_X)$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $\lambda < 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = 2$.*

Доказательство. По Теореме 3.1 $\kappa(X, \lambda B_X) = 1$ и можно считать, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ канонична, а дивизор L обилен. Из неравенства

$$\kappa(X, B_X) \geq \kappa(X, \lambda B_X)$$

и Следствия 2.3 главы I следует, что $\kappa(X, B_X) = 2$. $\square$

Доказательство Теоремы 1.2. Нужно применить рассуждения Теорем 2.7-2.9 к поверхности X и воспользоваться Теоремами 3.1, 3.3 и 3.4. $\square$

Тривиальный пример прямого произведения рациональной и эллиптической кривых показывает, что ослабить условия Теоремы 1.2 нельзя.

Осталось показать, что поверхности X, удовлетворяющие нашим условиям, действительно существуют.

Пример 3.5. *Зададим поверхность W над полем $\mathbb{Q}$ обращением в нуль многочлена*

$$t_0(t_0^2-4t_1^2)(t_0^2-25t_1^2)x_0^2+(t_0-4t_1)(t_0^2-9t_1^2)(t_0^2-t_1^2)x_1^2+(t_0+4t_1)(t_0^2-36t_1^2)(t_0^2-49t_1^2)x_2^2$$

бистепени $(5,2)$ в $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$, где t_i и x_j обозначают однородные координаты в $\mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^2$ соответственно. Можно показать, что поверхность W гладкая и $K_X^2=-7$. Проекция $\theta : W\to\mathbb{P}^1$ есть расслоение на коники с пятью приводимыми слоями. Стягивая исключительные кривые в слоях морфизма θ, мы получим гладкое расслоение на коники $\pi : X\to\mathbb{P}^1$ с $Pic(X/\mathbb{P}^1)=\mathbb{Z}$ и $K_X^2=-2$.

ГЛАВА III

ЛОГ ПАРЫ НА БИРАЦИОНАЛЬНО ЖЁСТКИХ ТРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

§1. Основные результаты главы III.

В этой главе мы применим результаты главы I к решению Прямой Задачи для следующих гладких бирационально жёстких трёхмерных многообразий:

(1) двойное накрытие $\mathbb{P}^3$,
(2) квартика,
(3) двойное накрытие квадрики,
(4) расслоение на коники.

Заметим, что гладкие трёхмерные многообразия Фано с $-K_X^3 \leq 4$ исчерпываются двойным накрытием $\mathbb{P}^3$, квартикой и двойным накрытием квадрики. Поэтому эту главу можно рассматривать как трёхмерный аналог главы II.

Основные результаты, которые будут получены в этой главе, содержатся в Теоремах 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.5, 3.6, 4.4, 4.5, 4.6, 5.1, 5.2 и 5.3. Сформулируем несколько следствий из перечисленных теорем.

Теорема 1.1. *Пусть X – двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвлённое в гладкой секстике. Тогда*

(1) *многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоения на коники, рациональные поверхности и эллиптические кривые,*
(2) *если X бирационально изоморфно расслоению на поверхности с размерностью Кодаиры ноль $\tau : Y \to Z$ посредством отображения ρ, то существует пучок в линейной системе $|-K_X|$, такой что $\tau \circ \rho = \phi_{\mathcal{P}}$,*
(3) *$Bir(X) = Aut(X)$ и многообразие X бирационально не изоморфно никакому многообразию Фано с каноническими особенностями отличному от самого многообразия X.*

Теорема 1.2. *Пусть X – гладкая квартика. Тогда*

(1) *квартика X бирационально не перестраивается в расслоения на коники и расслоения на рациональные поверхности,*
(2) *если квартика X бирационально изоморфна расслоению на эллиптические кривые $\tau : Y \to Z$ посредством отображения ρ, то отображение $\tau \circ \rho$ есть проекция из прямой,*
(3) *если квартика X бирационально изоморфна расслоению на поверхности с размерностью Кодаиры ноль $\tau : Y \to Z$ посредством отображения ρ, то суще-*

ствует пучок в линейной системе $|-K_X|$, такой что $\tau \circ \rho = \phi_{\mathcal{P}}$,

(4) *$Bir(X) = Aut(X)$ и квартика X бирационально не изоморфна никакому многообразию Фано с каноническими особенностями отличному от неё самой.*

Теорема 1.3. *Пусть $\theta : X \to Q$ – двойное накрытие гладкой квадрики Q, разветвлённое в гладкой поверхности высекаемой на квадрике Q квартикой. Тогда*

(1) *многообразие X бирационально не изоморфно никакому расслоению на коники и расслоению на рациональные поверхности,*

(2) *если многообразие X бирационально изоморфно расслоению на эллиптические кривые $\tau : Y \to Z$ посредством отображения ρ, то отображение $\tau \circ \rho$ есть композиция двулистного накрытия θ и проекции из некоторой прямой на квадрике Q,*

(3) *если многообразие X бирационально изоморфно расслоению на поверхности с размерностью Кодаиры ноль $\tau : Y \to Z$ посредством отображения ρ, то существует пучок $\mathcal{P}$ в линейной системе $|-K_X|$, такой что $\tau \circ \rho = \phi_{\mathcal{P}}$,*

(4) *если многообразие X бирационально перестраивается в многообразие Фано Y с каноническими особенностями, то либо $Y \cong X$, либо $Y \cong X_C$[5] для некоторой "прямой" C на многообразии X.*

Теорема 1.4. *Пусть $\pi : X \to S$ – трёхмерное расслоение на коники с терминальными $\mathbb{Q}$-факориальными особенностями и $Pic(X/S) = \mathbb{Z}$, такое что лог пара*

$$(S, \frac{1}{4}D_S)$$

имеет канонические особенности и выполнено равенство

$$\kappa(X, \frac{1}{4}D_S) = 2,$$

где D_S – дивизор вырождения морфизма π. Тогда многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Фано с каноническими особенностями, расслоение на поверхности дель Пеццо, расслоение на коники бирационально неэквивалентное расслоению π, расслоение на эллиптические кривые, расслоение на поверхности с размерностью Кодаиры ноль.

Мы опустим доказательства Теорем 1.1-1.4, поскольку они выводятся из перечисленных выше теорем аналогично тому как в главе II Теоремы 1.1 и 1.2 выводятся из Теорем 2.3, 2.4, 2.5, 3.1, 3.3 и 3.4.

§2. Двойное накрытие $\mathbb{P}^3$.

В этом параграфе мы применим результаты главы I к исследованию свойств лог пар на двойном накрытии $\mathbb{P}^3$. Геометрия этого многообразия очень напоминает геометрию поверхности дель Пеццо с квадратом антиканонического класса 1.

[5] Определение многообразия X_C содержится в параграфе 4.

Итак, пусть X есть гладкое трёхмерное многообразие Фано с $-K_X^3 = 2$. Тогда $Pic(X) = \mathbb{Z}$, линейная система $|-K_X|$ свободна и задаёт морфизм

$$\phi_{|-K_X|} : X \to \mathbb{P}^3,$$

который является двойным накрытием, разветвлённым в гладкой секстике S. В дальнейшем мы будем обозначать морфизм $\phi_{|-K_X|}$ буквой θ.

Рассмотрим на многообразии X лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i). \tag{2.1}$$

Если $B_X \neq \emptyset$, то существует $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Для $B_X = \emptyset$ положим формально $\lambda = +\infty$.

В какие расслоения Фано и расслоения на многообразия с размерностью Кодаиры ноль можно бирационально перестроить X? Во-первых, хорошо известно, что X бирационально не изоморфно никакому расслоению Мори кроме себя (см. [Со] и [Ис3]). Во-вторых, пучки в линейной системе $|-K_X|$ естественным образом дают бирациональные перестройки многообразия X в расслоения на поверхности типа К3.

Теперь сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.1. *Пусть $\lambda = 1$. Тогда лог пара (2.1) канонична и $\kappa(X, B_X) = 0$, причём, если она не терминальна, то все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$.*

Сразу отметим две теоремы, вытекающие из Теоремы 2.1, которые описывают лог пары с $\lambda \neq 1$.

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda > 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = -\infty$ и лог пара (2.1) терминальна.*

Доказательство. Можно считать, что $\lambda \neq +\infty$. Применение Теоремы 2.1 к лог паре $(X, \lambda B_X)$ даёт её каноничность. Из последнего следует, что лог пара (2.1) терминальна и $\kappa(X, B_X) = -\infty$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть $\lambda < 1$ и $\kappa(X, B_X) \neq 3$. Тогда $\kappa(X, B_X) = 1$, лог пара (2.1) не канонична, все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$ и $I(X, B_X) = \psi_{\mathcal{P}}$.*

Доказательство. Применение Теоремы 2.1 к лог паре $(X, \lambda B_X)$ влечёт

$$\kappa(X, B_X) \geq \kappa(X, \lambda B_X) = 0.$$

Можно считать, что лог пара (2.1) не общего типа. Тогда из Теоремы 3.1 главы I следует, что лог пара $(X, \lambda B_X)$ не терминальна. В частности, лог пара (2.1) не канонична. Осталось применить Теорему 2.1. $\square$

Мы разобьём доказательство Теоремы 2.1 на несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.4. *В Теореме 2.1 $CS(X, B_X)$ не содержит точек.*

Доказательство. Допустим, что $CS(X,B_X)$ содержит точку $O\in X$. Рассмотрим достаточно общий дивизор H_O в линейной системе $|-K_X|$, содержащий точку O. Тогда

$$2=H_O\cdot B_X^2\geq mult_O(B_X^2),$$

что противоречит Теореме 1.3 из главы I. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть в условиях Теоремы 2.1 $CS(X,B_X)$ содержит неприводимую и приведённую кривую C. Тогда $\theta(C)$ – прямая.*

Доказательство. Выполнено неравенство

$$mult_C(B_X)\geq 1.$$

Возьмём достаточно общий дивизор H в линейной системе $|-K_X|$. Тогда

$$2=H\cdot B_X^2\geq mult_C(B_X^2)H\cdot C\geq H\cdot C=-K_X\cdot C.$$

Допустим, что $\theta(C)$ не является прямой. Тогда $\theta(C)$ – коника, а $\theta|_C$ – изоморфизм.

Рассмотрим раздутие $f:W\to X$ кривой C и положим $E=f^{-1}(C)$. Покажем, что дивизор $f^*(-3K_X)-E$ численно эффективен. Пусть коника $\theta(C)$ не лежит на секстике S. Тогда

$$\theta^{-1}(\theta(C))=C\cup\tilde{C}.$$

Легко показать, что

$$Bs(|f^*(-2K_X)-E|)=f^{-1}(\tilde{C}).$$

Откуда следует, что дивизор $f^*(-2K_X)-E$ имеет неотрицательное пересечение со всеми кривыми на многообразии W кроме $f^{-1}(\tilde{C})$. Легко проверяется равенство

$$(f^*(-2K_X)-E)\cdot f^{-1}(\tilde{C})=-2$$

из которого следует численная эффективность дивизора $f^*(-3K_X)-E$. Таким образом, можно считать, что коника $\theta(C)$ принадлежит секстике S. Тогда

$$Bs(|f^*(-2K_X)-E|)\subset E.$$

Если s_∞ есть исключительное сечение линейчатой поверхности $f|_E:E\to C$, то необходимое утверждение следует из неравенства

$$(f^*(-3K_X)-E)|_E\cdot s_\infty\geq 0.$$

Из свойств раздутий мы получаем, что $E^3=0$ и

$$(f^*(-3K_X)-E)|_E\cdot s_\infty=6+\frac{s_\infty^2}{2}.$$

Значит, нам нужно показать, что $s_\infty^2\geq -12$. Пусть

$$N_{X/C}\cong\mathcal{O}_C(m)\oplus\mathcal{O}_C(n)\text{ для }m\geq n.$$

Тогда
$$m+n=deg(N_{X/C})=c_1(X)\cdot C-c_1(C)=0$$
и из точной последовательности
$$0\to N_{\theta^{-1}(S)/C}\to N_{X/C}\to N_{X/\theta^{-1}(S)}|_C\to 0$$
следует, что $n\geq deg(N_{\theta^{-1}(S)/C})=-6$. Откуда
$$s_\infty^2=n-m=2n\geq -12.$$
Таким образом, дивизор $f^*(-3K_X)-E$ численно эффективен.

Рассмотрим лог пару
$$(W,B_W)=(W,f^{-1}(B_X)).$$
Тогда
$$(f^*(3H)-E)\cdot B_W^2\geq 0.$$
Но с другой стороны
$$\begin{array}{c} (f^*(-3K_X)-E)\cdot B_W^2 = (f^*(-3K_X)-E)\cdot(f^*(-K_X)-mult_C(B_X)E)^2 \\ \| \\ 6-mult_C(B_X)(6mult_C(B_X)+4) \end{array},$$
что противоречит тому, что для $mult_C(B_X)\geq 1$
$$6-mult_C(B_X)(6mult_C(B_X)+4)<0.$$
□

Доказательство Теоремы 2.1. Предположим, что лог пара (2.1) не терминальна. Тогда из Лемм 2.4 и 2.5 следует, что $CS(X,B_X)$ содержит такую неприводимую и приведённую кривую C, что $\theta(C)$ – прямая.

Для кривой C есть три возможности:

(а) $-K_X\cdot C=2$, $B_X^2=C$ и $\theta|_C$ двулистное накрытие,
(б) $-K_X\cdot C=1$, $\theta|_C$ изоморфизм и прямая $\theta(C)$ не лежит на секстике S,
(в) $-K_X\cdot C=1$, $\theta|_C$ изоморфизм и прямая $\theta(C)$ принадлежит секстике S.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_C$, состоящий из поверхностей в линейной системе $|-K_X|$, которые содержат кривую C. Заметим, что пучок $\mathcal{H}_C$ есть прообраз при отображении θ пучка плоскостей в $\mathbb{P}^3$, содержащих прямую $\theta(C)$.

Сначала разберём случай (а). Разрешим неопределённости отображения $\phi_{\mathcal{H}_C}$ посредством коммутативной диаграммы
$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f\swarrow & & \searrow g, \\ X & \overset{\phi_{\mathcal{H}_C}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

такой что многообразие W гладко. Мы можем считать, что на многообразии W над общей точкой кривой C лежит ровно один дивизор E и f изоморфизм вне кривой C. Рассмотрим общий слой D морфизма g. D является гладкой поверхностью типа $K3$,

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^{k} a_i F_i$$

и для каждого дивизора F_i $f(F_i)$ – точка на кривой C. На поверхности D корректно определена лог пара

$$(D, B_D) = (D, f^{-1}(B_X)|_D).$$

Причём,

$$B_D \sim_{\mathbb{Q}} ((1 - mult_C(B_X))E + \sum_{i=1}^{k} c_i F_i)|_D$$

для рациональных c_i. Таким образом, $mult_C(B_X) = 1$ и $B_D = \emptyset$. Откуда следует, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$.

Разберём случай (б). Пусть

$$\theta^{-1}(\theta(C)) = C \cup \tilde{C}.$$

Возьмём достаточно общий дивизор D в линейной системе $\mathcal{H}_C$. Тогда D – гладкая поверхность типа $K3$, содержащая кривую $\tilde{C} \subset D$, и

$$B_X|_D = mult_C(B_X)C + mult_{\tilde{C}}(B_X) + R,$$

где R – эффективный дивизор на поверхности D, чей носитель не содержит кривых C и $\tilde{C}$. На поверхности D

$$C^2 = \tilde{C}^2 = -2 \text{ и } C \cdot \tilde{C} = 3.$$

Откуда

$$1 = B_X|_D \cdot \tilde{C} = 3mult_C(B_X) - 2mult_{\tilde{C}}(B_X) + R \cdot \tilde{C}.$$

Следовательно, $mult_{\tilde{C}}(B_X) \geq 1$ и $CS(X, B_X)$ содержит кривую $\tilde{C}$. Заметим, что разбирая случай (а) нам вообщем-то не была нужна неприводимость кривой C. Однако мы пользовались тем, что $\mathcal{H}_C^2 = C$. Поэтому, из того, что $CS(X, B_X)$ содержит кривую $\tilde{C}$ легко следует, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$

Теперь разберём случай (в). Он немного отличается от уже разобранных случаев (а) и (б). А именно, $\mathcal{H}_C^2 = 2C$, хотя $mult_C(\mathcal{H}_C) = 1$. Пусть $f : W \to X$ – раздутие кривой C и $E = f^{-1}(C)$. Тогда базисное множество линейной системы $f^{-1}(\mathcal{H}_C)$ состоит из гладкой рациональной кривой $\tilde{C}$, которая является сечением линейчатой поверхности $f|_E : E \to C$. Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

и достаточно общий дивизор D в линейной системе $f^{-1}(\mathcal{H}_C)$. D – гладкая поверхность типа K3 и на ней

$$B_W|_D = mult_{\tilde{C}}(B_W)\tilde{C} + R$$

для эффективного дивизора R, носитель которого не содержит кривой $\tilde{C}$. С другой стороны, на поверхности D $\tilde{C}^2 = -2$ и

$$B_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{C} + (1 - mult_C(B_X))E|_D.$$

Откуда следует, что

$$mult_{\tilde{C}}(B_W) = mult_C(B_X) = 1.$$

Осталось повторить аргументы доказательства случая (a), чтобы показать, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$.

Во всех разобранных случаях кратность $mult_C(B_X)$ равна единице. Ввиду произвольности кривой C и Леммы 2.4 мы получаем, что лог пара (2.1) канонична и $\kappa(X, B_X) = 0$. $\square$

§3. Трёхмерная квартика.

Теперь мы разберем, сформулируем и докажем утверждения аналогичные утверждениям из параграфа 2, но только для трёхмерной квартики. Зафиксируем гладкую трёхмерную квартику в $\mathbb{P}^4$. Тогда $Pic(X) = \mathbb{Z}$ и

$$-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_X.$$

Рассмотрим на квартике X лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{3.1}$$

и $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

причем, если $B_X = \emptyset$, то $\lambda = +\infty$.

Сначала отметим несколько свойств, присущих как квартике X, так и двойному накрытию $\mathbb{P}^3$, рассмотренному в параграфе 2. Во-первых, квартика бирационально не перестраивается в расслоения Мори, отличные от неё самой (см. [Co] и [Ис3]). Во-вторых, $Bir(X) = Aut(X)$ (см. [Ис3]). И, в-третьих, пучки в линейной системе $|-K_X|$ дают расслоения на поверхности типа K3 бирационально изоморфные X.

В отличие от двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ квартика бирационально изоморфна расслоениям на эллиптические кривые. А именно, проекция из любой прямой на квартике задаёт расслоение на эллиптические кривые на раздутии квартики в этой прямой.

Основные результаты данного параграфа будут выведены из следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть* $\lambda = 1$. *Тогда* $\kappa(X, B_X) = 0$ *и лог пара (3.1) канонична, причём, если она не терминальна, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *все линейные системы* $\mathcal{B}_i$ *составлены из одного пучка* $\mathcal{P}$ *в* $|-K_X|$,

(2) *для раздутия* $f : W \to X$ *некоторой прямой на квартике* X *все линейные системы* $f^{-1}(\mathcal{B}_i)$ *лежат в слоях эллиптического расслоения*

$$\psi_{|-K_W|} : W \to \mathbb{P}^2.$$

Мы докажем Теорему 3.1 за несколько шагов.

Лемма 3.2. *В Теореме 3.1* $CS(X, B_X)$ *не содержит точек.*

Доказательство. Допустим, что $CS(X, B_X)$ содержит точку O. Проведём через неё достаточно общее гиперплоское сечение H_O. Тогда

$$4 = H_O \cdot B_X^2 \geq mult_O(B_X^2).$$

Раздуем точку O – $f : W \to X$ и положим $E = f^{-1}(O)$. Из последнего неравенства и Теоремы 1.3 главы I следует, что

$$a(X, B_X, E) = 0.$$

Таким образом,

$$f^{-1}(B_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(-K_X) - 2E \sim -K_W.$$

В частности, линейная система $|-nK_W|$ не имеет неподвижных компонент для $n \gg 0$.

Обозначим собственный прообраз поверхности H_O на многообразии W буквой S. Линейная система $|-K_W|_S|$ содержит единственный эффективный дивизор D. С другой стороны, из доказанного выше следует, что линейная система $|nD|$ не имеет неподвижных компонент и $D^2 = 0$. Таким образом, она свободна и

$$dim(\phi_{|nD|}(S)) = 1.$$

Поскольку кривая $E|_S$ не лежит в слоях расслоения $\phi_{|nD|}$, то

$$\phi_{|nD|}(S) = \mathbb{P}^1.$$

Откуда легко следует, что для некоторого $k \in (1, n]$ kD – кратный слой расслоения $\phi_{|-nD|}$, которое поэтому должно быть расслоением на эллиптические кривые. Последнее противоречит тому, что кривая D имеет арифметический род 2. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть в Теореме 3.1* $CS(X, B_X)$ *содержит неприводимую приведённую кривую* C. *Тогда* $deg(C) \leq 4$.

Доказательство. Для кривой C выполнено соотношение

$$mult_C(B_X) \geq 1.$$

Рассмотрим общее гиперплоское сечение H многообразия X. Тогда

$$4 = H \cdot B_X^2 \geq mult_C(B_X^2) H \cdot C \geq deg(C).$$

□

Лемма 3.4. *В Лемме 3.3 кривая C плоская.*

Доказательство. Предположим, что кривая C не плоская. Тогда из Леммы 3.3 следует, что кривая C должна быть одной из следующих:

(а) гладкая рациональная кривая степени 3,

(б) гладкая рациональная кривая степени 4,

(в) гладкая эллиптическая кривая степени 4,

(г) рациональная кривая степени 4 с одной двойной точкой P.

В случаях (а), (б) и (в) пусть $f : W \to X$ – раздутие кривой C и $E = f^{-1}(C)$. Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

и положим

$$A = (f^*(deg(C)H) - E) \cdot B_W^2.$$

С одной стороны, $A \geq 0$, поскольку линейная система $|f^*(deg(C)H) - E|$ не имеет базисных кривых. С другой стороны

$$A = (deg(C) - deg^2(C) + 2g(C) - 2) mult_C^2(B_X) - 2deg(C) mult_C(B_X) + 4deg(C).$$

Откуда следует, что $A < 0$.

В случае (г) пусть $f = g \circ h$, где $g : V \to X$ и $h : W \to V$ – раздутия точки P и кривой $h^{-1}(C)$ соответственно. Положим $G = g^{-1}(P)$ и $E = h^{-1}(g^{-1}(C))$. Тогда из Леммы 3.2 следует, что $CS(X, B_X)$ не содержит точку P. Значит,

$$2 > mult_P(B_X) \geq mult_C(B_X) \geq 1.$$

Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

и положим

$$A = (f^*(4H) - E) \cdot B_W^2.$$

С одной стороны $A \geq 0$, поскольку линейная система $|f^*(4H) - E - 2G|$ не имеет базисных кривых. С другой стороны

$$A = -14 mult_C^2(B_X) + (4 mult_P(B_X) - 8) mult_C(B_X) + 16 - 2 mutl_P^2(B_X).$$

Откуда следует, что

$$A \leq -2 mult_P^2(B_X) + 4 mult_P(B_X) - 6 < 0.$$

□

Доказательство Теоремы 3.1. Допустим, что лог пара (3.1) не терминальна. Тогда из Леммы 3.2 следует, что $CS(X, B_X)$ содержит неприводимую и приведённую кривую C. Из Леммы 3.4 следует, что существует плоскость T, содержащая кривую C, а из Леммы 3.3 следует, что степень кривой C не превышает 4.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ на квартике X, состоящий из поверхностей, высекаемых гиперплоскостями, которые содержат плоскость T. Заметим, что отображение $\phi_{\mathcal{H}_T}$ есть ограничение проекции из плоскости T на многообразие X.

Пусть $deg(C) = 4$. Разрешим неопределённости отображения $\phi_{\mathcal{H}_T}$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi_{\mathcal{H}_T}"] & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd},$$

такой что на многообразии W над общей точкой кривой C лежит ровно один дивизор E и f есть изоморфизм вне кривой C.

Рассмотрим общий слой морфизма g – D. Тогда

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^{k} a_i F_i$$

и для каждого дивизора F_i $f(F_i)$ – точка на кривой C. Заметим, что D – гладкая поверхность типа $K3$.

Рассмотрим лог пару

$$(D, B_D) = (D, f^{-1}(B_X)|_D).$$

Для её границы выполнено соотношение

$$B_D \sim_{\mathbb{Q}} ((1 - mult_C(B_X))E + \sum_{i=1}^{k} c_i F_i)|_D,$$

где все $c_i \in \mathbb{Q}$. Из подвижности лог пары (D, B_D) следует, что $B_D = \emptyset$ и все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_T$.

Пусть теперь $deg(C) \in (1, 4)$. Возьмём достаточно общий дивизор D из линейной системы $\mathcal{H}_T$. D – гладкая поверхность типа $K3$ и

$$X \cdot T = D \cdot T = C \cup \sum_{i=1}^{r} C_i,$$

где C_i это неприводимые и приведённые кривые на поверхности D. Если мы докажем, что

$$C_i \in CS(X, B_X) \text{ для } i = 1, \ldots, r,$$

то мы повторить слово в слово аргументы предыдущего случая ($deg(C) = 4$).

Докажем, что форма пересечения кривых C_i на поверхности D отрицательно определена. На поверхности D

$$(\sum_{i=1}^{r} C_i) \cdot C_j = (D|_D - C) \cdot C_j = deg(C_j) - C \cdot C_j.$$

Но с другой стороны, на плоскости T

$$deg(C_j) - C \cdot C_j = deg(C_j) - deg(C)deg(C_j) < 0.$$

Поскольку все кривые C_j отличны от кривой C и поверхность D гладкая, то

$$(C \cdot C_j)_D = (C \cdot C_j)_T.$$

Из [Ar] следует отрицательность формы пересечения кривых C_i на поверхности D.

Рассмотрим соотношения

$$B_X|_D \sim_{\mathbb{Q}} D|_D \sim C + \sum_{i=1}^{r} C_i.$$

Дивизор

$$B_X|_D - mult_C(B_X)C - \sum_{i=1}^{r} mult_{C_i}(B_X)C_i$$

численно эффективен на поверхности D. Поскольку

$$B_X|_D - mult_C(B_X)C - \sum_{i=1}^{r} mult_{C_i}(B_X)C_i \sim_{\mathbb{Q}} (1 - mult_C(B_X))C + \sum_{i=1}^{r}(1 - mult_{C_i}(B_X))C_i,$$

то на поверхности D

$$\sum_{i=1}^{r}(1 - mult_{C_i}(B_X))C_i \cdot C_j \geq 0 \text{ для } j = 1, \ldots, r.$$

Откуда сразу следует, что все $mult_{C_i}(B_X) \geq 1$. Таким образом, все кривые C_i содержатся в $CS(X, B_X)$, и ввиду сделанного замечания мы снова получаем, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_T$.

Осталось разобрать случай, когда C прямая. Раздуем её – $f : W \to X$ и положим $E = f^{-1}(C)$. Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

и линейную систему $\mathcal{H}_C$, состоящую из гиперплоских сечений квартики X, проходящих через прямую C. Тогда

$$B_W + (mult_C(B_X) - 1)E \sim_{\mathbb{Q}} f^{-1}(\mathcal{H}_C) \sim -K_W,$$

$dim(|-K_W|)=2$, линейная система $|-K_W|$ свободна и общий слой морфизма $\phi_{|-K_W|}$ – эллиптическая кривая. Из равенства

$$B_W\cdot(f^{-1}(\mathcal{H}_C)^2=(1-mult_C(B_X))$$

следует, что все линейные системы $f^{-1}(\mathcal{B}_i)$ лежат в слоях морфизма $\phi_{|-K_W|}$.

Заметим, что из наших рассуждений следует, что для любой кривой C в $CS(X,B_X)$ выполнено равенство $mult_C(B_X)=1$. Откуда, учитывая Лемму 3.2, следует, что лог пара (3.1) канонична. $\square$

Сформулируем без доказательств аналоги Теоремы 2.2 и 2.3 для квартики X.

Теорема 3.5. *Пусть $\lambda>1$. Тогда $\kappa(X,B_X)=-\infty$ и лог пара (3.1) терминальна.*

Теорема 3.6. *Если $\lambda<1$, то имеются три возможности:*

(1) *$\kappa(X,B_X)=1$, все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$ и $I(X,B_X)=\psi_{\mathcal{P}}$,*

(2) *$\kappa(X,B_X)=2$ и для раздутия $f:W\to X$ некоторой прямой на квартике X все линейные системы $f^{-1}(\mathcal{B}_i)$ лежат в слоях эллиптического расслоения $\psi_{|-K_W|}:W\to\mathbb{P}^2$ и $I(X,B_X)=\psi_{|-K_W|}\circ f^{-1}$,*

(3) *$\kappa(X,B_X)=3$.*

Причём, в случаях (1) и (2) лог пара (3.1) не канонична.

§4. Двойное накрытие квадрики.

В этом параграфе мы опишем свойства лог пар на двойном накрытии гладкой квадрики $\theta:X\to Q$, разветвлённом в гладкой поверхности S, высекаемой на квадрике $Q\subset\mathbb{P}^4$ квартикой. Заметим, что $Pic(X)=\mathbb{Z}$ и

$$-K_X\sim\theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_Q).$$

Отметим бирациональные перестройки многообразия X, которые "наследуются" от квартики и двойного накрытия $\mathbb{P}^3$. Многообразие X бирационально не перестраивается в расслоения Мори отличные от него самого (см. [Co] и [Ис3]). Пучки в линейной системе $|-K_X|$ дают бирационально изоморфные многообразию X расслоения на поверхности типа K3. Прямые на квадрике Q индуцируют бирациональные перестройки многообразия X в расслоения на эллиптические кривые.

Опишем чем многообразие X принципиально отличается от многообразий уже разобранных в параграфах 2 и 3. Во-первых, $Bir(X)\neq Aut(X)$ (см. [Ис3]). Во-вторых, X бирационально перестраивается в многообразия Фано с каноническими особенностями, которые неизоморфны многообразию X. Последние перестройки насколько нам известно нигде не описывались, поэтому мы остановимся на них более подробно.

Рассмотрим кривую $C\in X$, такую что $-K_X\cdot C=1$. Кривая C гладкая и рациональная. Мы будем называть такие кривые "прямыми". Заметим, что на многообразии X существует одномерное семейство "прямых" (см. [Ис3]).

Пусть $f:W\to X$ – раздутие кривой C и $E=f^{-1}(C)$. Введём кривую $C_1\subset W$. Если $\theta(C)\not\subset S$, то

$$\theta^{-1}(\theta(C))=C\cup\tilde{C}.$$

В этом случае положим $C_1 = f^{-1}(\tilde{C})$. В противном случае возьмём за C_1 исключительное сечение линейчатой поверхности E (мы увидим в дальнейшем, что $E \cong \mathbb{F}_5$).

Лемма 4.1. *Существует антифлип $\rho : W \dashrightarrow \hat{W}$ в кривой C_1. Причём особенности многообразия $\hat{W}$ состоят из одной особой точки типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$.*

Доказательство. Докажем, что если $\theta(C) \subset S$, то $E \cong \mathbb{F}_5$ (см. [Ис3]). Пусть

$$N_{X/C} \cong \mathcal{O}_C(m) \oplus \mathcal{O}_C(n) \text{ для } m \geq n.$$

Тогда

$$m + n = deg(N_{X/C}) = c_1(X) \cdot C - c_1(C) = -1$$

и из точной последовательности

$$0 \to N_{\theta^{-1}(S)/C} \to N_{X/C} \to N_{X/\theta^{-1}(S)}|_C \to 0$$

следует, что $n \geq deg(N_{\theta^{-1}(S)/C}) = -3$. Для $m - n$ имеется три возможности 1, 3 и 5.

Заметим, что линейная система $|-K_W|$ есть ничто иное, как собственный прообраз на многообразии W линейной системы гиперплоских сечений квадрики Q, проходящих через прямую $\theta(C)$. Следовательно, общая поверхность D из линейной системы $|-K_W|$ является гладкой поверхностью типа K3 и морфизм $f|_D$ стягивает четыре кривые в четыре обыкновенные двойные точки поверхности $f(D)$.

Из последнего замечания вытекает, что

$$D|_E = C_1 + \alpha L,$$

где L – слой линейчатой поверхности E и $\alpha \geq 4$. Значит, на поверхности E

$$D^2 = C_1^2 + 2\alpha.$$

Но с другой стороны несложно показать, что

$$D^2 \cdot E = (f^*(-K_X) - E)^2 \cdot E = 3.$$

Откуда сразу следует, что $\alpha = 4$ и $E \cong \mathbb{F}_5$.

Теперь мы построим отображение ρ в явном виде за несколько шагов.

(1) Раздуем кривую C_1 – $g : V \to W$ и положим $G = g^{-1}(C_1)$.

Покажем, что $G \cong \mathbb{F}_1$. Линейная система $|-K_V|$ есть собственный прообраз на многообразии V линейной системы гиперплоских сечений квадрики Q, проходящих через прямую $\theta(C)$. Откуда следует, что линайная система $|-K_V|$ свободна и задаёт морфизм с эллиптическими слоями $\phi_{|-K_V|} : V \to \mathbb{P}^2$, такой что дивизор G – его сечение. Отсюда следует, что $G \cong \mathbb{F}_1$.

(2) Сделаем флоп в исключительном сечении C_2 линейчатой поверхности G. Для его существования достаточно показать, что

$$N_{V/C_2} \cong \mathcal{O}_{C_2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{C_2}(-1).$$

Действительно, если $r : Y \to V$ есть раздутие кривой C_2 и $R = r^{-1}(C_2)$, то в сделанном предположении $R \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, и существует её стягивание $\hat{r} : Y \to \hat{V}$ дивизора R на кривую $\hat{C}_2$ в аналитической категории, отличное от r. Легко видеть, что $\hat{r} \circ r^{-1}$ будет флопом в кривой C_2.

Пусть
$$N_{V/C_2} \cong \mathcal{O}_{C_2}(m) \oplus \mathcal{O}_{C_2}(n) \text{ для } m \geq n.$$

Заметим, что

$$m + n = deg(N_{V/C_2}) = c_1(V) \cdot C_2 - c_1(C_2) = -2,$$

и из точной последовательности

$$0 \to N_{G/C_2} \to N_{V/C_2} \to N_{V/C_2}|_{C_2} \to 0$$

следует, что $n \geq deg(N_{G/C_2}) = -1$. Таким образом, $n = m = -1$.

(3) Теперь стянем поверхность $\hat{G} = \hat{r} \circ r^{-1}(G)$ в точку. Морфизм $\hat{r}|_{r^{-1}(G)}$ стягивает исключительное сечение $R \cap r^{-1}(G)$ линейчатой поверхности $r^{-1}(G) \cong \mathbb{F}_1$. Следовательно, $\hat{G} \cong \mathbb{P}^2$ и как легко показать

$$N_{\hat{V}/\hat{G}} \cong \mathcal{O}_{\hat{G}}(-2).$$

Откуда следует существование стягивания $\hat{g} : \hat{V} \to \hat{W}$ поверхности $\hat{G}$ в особую терминальную точку O типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$ в аналитической категории. Положим

$$\rho = \hat{g} \circ \hat{r} \circ r^{-1} \circ g^{-1}$$

и $\hat{C}_1 = \hat{g}(\hat{C}_2)$.

Мы построили коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "\hat{r}"] & \\ V \arrow[d, "g"'] & & \hat{V} \arrow[d, "\hat{g}"] \\ W \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & \hat{W} \end{tikzcd} .$$

Просто проверяется что отображение ρ есть антифлип многообразия W в кривой C_1, а ρ^{-1} есть флип многообразия $\hat{W}$ в кривой $\hat{C}_1$.

$\square$

Теперь покажем, что многообразие, полученное в Лемме 4.1, проективно.

Лемма 4.2. *В Лемме 4.1 многообразие $\hat{W}$ проективно и $\mathbb{Q}$-факториально.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что отображение ρ есть лог флип для лог терминальной лог пары

$$(W,(1+\epsilon)|-K_W|) \text{ для } 1\gg\epsilon>0,$$

поскольку, лог канонический дивизор

$$K_W+(1+\epsilon)|-K_W|$$

имеет отрицательное пересечение только с кривой C_1. $\square$

Лемма 4.3. *В обозначениях Леммы 4.1, $-K^3_{\hat{W}}=\frac{1}{2}$ и $Bs(|-K_{\hat{W}}|)=O$. В частности, дивизор $-K_{\hat{W}}$ численно эффективен и объёмен.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями доказательства Леммы 4.1. Флоп $\hat{r}\circ r^{-1}$ перестраивает кривую в слоях расслоения $\phi_{|-K_V|}$. Откуда следует, что линейная система $|-K_{\hat{V}}|$ свободна и морфизм $\phi|-K_{\hat{V}}|$ есть расслоение на эллиптические кривые.

Из построения отображения ρ мы получаем, что

$$Bs(|-K_{\hat{W}}|)=O$$

и

$$0=-K^3_{\hat{V}}=(\hat{g}^*(-K_{\hat{W}})-\frac{1}{2}\hat{G})^3=-K^3_{\hat{W}}-\frac{1}{8}\hat{G}^3=-K^3_{\hat{W}}-\frac{1}{2}.$$

$\square$

Из Леммы 4.3 и теоремы о свободе от базисных точек (см. [KaMaMa]) следует, что для $n\gg 0$ линейная система $|-nK_{\hat{W}}|$ свободна и задаёт бирациональный морфизм

$$\phi_{|-nK_{\hat{W}}|}:\hat{W}\to X_C,$$

где многообразие X_C нормально. По построению, многообразие X_C есть многообразие Фано с каноническими особенностями и $-K^3_{X_C}=\frac{1}{2}$.

Что можно ещё сказать про особенности многообразия X_C? В [Ис3] показано, что каждую “прямую” на многообразии X пересекает конечное число “прямых”. Откуда следует, что морфизм $\phi_{|-K_V|}$ имеет конечное число приводимых слоёв в случае $\theta(C)\not\subset S$, а в случае когда $\theta(C)\subset S$, морфизм $\phi_{|-K_V|}$ имеет одно одномерное семейство приводимых слоёв, чей образ на квадрике Q образует поверхность прямых касающихся поверхности S в точках кривой $\theta(C)$. Учитывая конструкцию отображения ρ мы получаем, что в случае $\theta(C)\not\subset S$ многообразие X_C имеет терминальные (не $\mathbb{Q}$-факториальные!) особенности, а в случае $\theta(C)\subset S$ многообразие X_C имеет канонические особенности вдоль неприводимой кривой, причём в её общей точке X_C имеет особенность типа $A_1\times\mathbb{C}$.

Таким образом мы показали, что для каждой “прямой” C на многообразии X существует его нетривиальная перестройка в многообразие Фано с каноническими особенностями X_C посредством отображения

$$\psi_C=\phi_{|-nK_{\hat{W}}|}\circ\rho.$$

Теперь рассмотрим на многообразии X лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i). \tag{4.1}$$

Для $B_X \neq \emptyset$ рассмотрим такое $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$, что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

а для $B_X = \emptyset$ положим формально $\lambda = +\infty$.

Напомним, что в предыдущей главе мы ввели понятие максимальной лог пары на поверхности дель Пеццо с группой Пикара $\mathbb{Z}$. В нашей ситуации это понятие также имеет смысл.

Теперь сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 4.4. *Пусть $\lambda = 1$ и лог пара (4.1) максимальна. Тогда $\kappa(X, B_X) = 0$ и лог пара (4.1) канонична. Причём, если она не терминальна, то имеет место одно из следующего:*

(1) *все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$,*
(2) *существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g, \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

где многообразие W гладкое, морфизм f бирационален, а отображение ψ есть композиция морфизма θ и проекции из некоторой прямой на квадрике Q и $f^{-1}(B_X)$ лежит в слоях расслоения g,

(3) *существует "прямая" C на многообразии X, такая что лог пара*

$$(X_C, B_{X_C}) = (X_C, \psi_C(B_X))$$

полутерминальна (см. Введение).

Перед тем как доказывать Теорему 4.4 сформулируем ещё две теоремы.

Теорема 4.5. *Пусть $\lambda < 1$ и лог пара (4.1) максимальна. Тогда $\kappa(X, B_X) = -\infty$ и лог пара (4.1) терминальна.*

Теорема 4.6. *Пусть $\lambda > 1$ и лог пара (4.1) максимальна. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$\kappa(X, B_X) = 1$, лог пара (4.1) не канонична, все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$ и $I(X, B_X) = \phi_{\mathcal{P}}$,*
(2) *$\kappa(X, B_X) = 2$, лог пара (4.1) не канонична и существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g, \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

такая что многообразие W гладкое, морфизм f бирационален, отображение ψ есть композиция морфизма θ и проекции из некоторой прямой на квадрике Q, $f^{-1}(B_X)$ лежит в слоях расслоения g и $I(X, B_X) = \psi$,

(3) $\kappa(X, B_X) = 3$.

Мы опустим доказательства Теорем 4.5 и 4.6, поскольку они полностью аналогичны доказательствам Теорем 2.2, 2.3, 3.5, 3.6 и Теорем 2.4 и 2.5 главы II. Разобьём доказательство Теоремы 4.4 на несколько лемм.

Лемма 4.7. *В Теореме 4.4 $CS(X, B_X)$ не содержит точек.*

Доказательство. Для доказательства заменим в Лемме 3.2 слова "гиперплоское сечение" на "элемент линейной системы $|-K_X|$". □

Лемма 4.8. *Пусть в Теореме 4.4 $CS(X, B_X)$ содержит неприводимую приведённую кривую C. Тогда $deg(\theta(C)) \leq 4$.*

Доказательство. Напомним, что

$$mult_C(B_X) \geq 1.$$

Рассмотрим общий элемент линейной системы $|-K_X|$ – H. Тогда

$$4 = H \cdot B_X^2 \geq mult_C(B_X^2) H \cdot C \geq deg(C).$$

□

Лемма 4.9. *В Лемме 4.8 кривая $\theta(C)$ плоская.*

Доказательство. Во-первых, можно считать θ_C изоморфизмом. Во-вторых, если кривая $\theta(C)$ не плоская, то она одна из следующих:

(а) гладкая рациональная кривая степени 3, не лежащая на поверхности S,
(б) гладкая рациональная кривая степени 3, лежащая на поверхности S,
(в) гладкая рациональная кривая степени 4, не лежащая на поверхности S,
(г) гладкая рациональная кривая степени 4, лежащая на поверхности S,
(д) кривая степени 4, лежащая в некоторой гиперплоскости.

Сначала покажем, что предположения случаев (а), (б), (в) и (г) приводят к противоречию. Пусть $f : W \to X$ – раздутие кривой C и $E = f^{-1}(C)$. Покажем, что дивизор $f^*(-2K_X) - E$ численно эффективен. В случаях (а) и (в)

$$\theta^{-1}(\theta(C)) = C \cup \tilde{C}.$$

Легко показать, что

$$Bs(|f^*(-2K_X) - E|) = f^{-1}(\tilde{C}).$$

Откуда следует, что дивизор $f^*(-2K_X) - E$ имеет неотрицательное пересечение со всеми кривыми на многообразии W кроме $f^{-1}(\tilde{C})$, но

$$(f^*(-2K_X) - E) \cdot f^{-1}(\tilde{C}) = 0.$$

В случаях (б) и (г)

$$Bs(|f^*(-2K_X) - E|) \subset E.$$

Пусть s_∞ – исключительное сечение линейчатой поверхности $f|_E : E \to C$. Необходимое утверждение следует из неравенства

$$(f^*(-2K_X) - E)|_E \cdot s_\infty \geq 0.$$

Из свойств раздутий мы получаем, что $E^3 = 2 - deg(\theta(C))$ и

$$(f^*(-2K_X) - E)|_E \cdot s_\infty = 2deg(\theta(C)) + \frac{s_\infty^2 + 2 - deg(\theta(c))}{2}.$$

Значит, нам нужно показать, что $s_\infty^2 \geq -2 - 3deg(\theta(C))$. Пусть

$$N_{X/C} \cong \mathcal{O}_C(m) \oplus \mathcal{O}_C(n) \text{ для } m \geq n.$$

Тогда

$$m + n = deg(N_{X/C}) = c_1(X) \cdot C - c_1(C) = deg(\theta(C)) - 2$$

и из точной последовательности

$$0 \to N_{\theta^{-1}(S)/C} \to N_{X/C} \to N_{X/\theta^{-1}(S)}|_C \to 0$$

следует, что $n \geq deg(N_{\theta^{-1}(S)/C}) = -2 - deg(\theta(C))$. Откуда

$$s_\infty^2 = n - m = 2n + 2 - deg(\theta(C)) \geq -2 - 3deg(\theta(C)).$$

Таким образом, дивизор $f^*(-2K_X) - E$ численно эффективен.

Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X)).$$

Тогда

$$A = (f^*(2H) - E) \cdot B_W^2 \geq 0.$$

С другой стороны

$$A = (f^*(-2K_X) - E) \cdot (f^*(-K_X) - mult_C(B_X))^2.$$

Откуда следует, что

$$A = 8 - mult_C(B_X)((2 + deg(\theta(C)))mult_C(B_X) + 2deg(\theta(C))) < 0,$$

поскольку $mult_C(B_X) \geq 1$.

Рассмотрим теперь случай (д). Заметим, что $B_X^2 = C$ и $mult_C(B_X) = 1$. Таким образом, поверхность H пересекается с кривой C по четырём различным точкам: x_1, x_2, x_3 и x_4. Пусть $g : V \to H$ – их раздутие и $E_i = g^{-1}(x_i)$ $(i = 1, \dots, 4)$. Тогда

$$(g^{-1}(B_X|_H))^2 \sim_{\mathbb{Q}} g^*(H|_H) - \sum_{i=1}^{4} E_i.$$

Поскольку кривая $\theta(C)$ содержится в гиперплоскости и не плоская, то точки $\theta(x_1)$, $\theta(x_2)$, $\theta(x_3)$ и $\theta(x_4)$ содержатся в одной плоскости и не лежат на одной прямой. Из последнего следует, что линейная система

$$|g^*(H|_H) - \sum_{i=1}^{4} E_i|$$

содержит единственный эффективный дивизор D. С другой стороны, линейная система $|nD|$ не имеет неподвижных компонент для $n \gg 0$ и $D^2 = 0$. Откуда следует, что она свободна и

$$\phi_{|nD|}(V) = \mathbb{P}^1.$$

Откуда следует, что для $k \in (1, n]$ расслоение $\phi_{|nD|}$ имеет кратный слой kD. Следовательно, арифметический род кривой D должен быть равен 1, но легко подсчитать, что он равен 4. $\square$

Лемма 4.10. *Пусть в Лемме 4.7 кривая $\theta(C)$ есть коника. Тогда лог пара (4.1) канонична в общей точке кривой C и все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка в $|-K_X|$.*

Доказательство. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_C$ в линейной системе $|-K_X|$, состоящий из поверхностей, содержащих кривую C. Заметим, что пучок $\mathcal{H}_C$ не имеет неподвижных компонент.

Возможны три случая:

(а) $-K_X \cdot C = 4$, $B_X^2 = C$ и $\theta|_C$ есть двулистное накрытие коники $\theta(C) \subset Q$,

(б) $-K_X \cdot C = 2$, $\theta|_C$ есть изоморфизм на конику $\theta(C) \subset Q$ и $\theta(C) \not\subset S$,

(в) $-K_X \cdot C = 2$ и $\theta|_C$ есть изоморфизм на конику $\theta(C) \subset S$.

Сначала разберём случай (а). Разрешим неопределённости отображения $\phi_{\mathcal{H}_C}$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi_{\mathcal{H}_C}"] & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

Мы можем считать, что многообразие W гладкое, над общей точкой кривой C лежит ровно один дивизор E и f – изоморфизм вне кривой C. Общий слой D морфизма g является гладкой поверхностью типа K3 и

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^{k} a_i F_i,$$

где для каждого дивизора F_i $f(F_i)$ – точка на кривой C. Рассмотрим на поверхности D лог пару

$$(D, B_D) = (D, f^{-1}(B_X)|_D).$$

Тогда

$$B_D \sim_{\mathbb{Q}} ((1 - mult_C(B_X))E + \sum_{i=1}^{k} c_i F_i)|_D$$

и для всех $c_i \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $mult_C(B_X) = 1$ и $B_D = \emptyset$. В частности, лог пара (4.1) канонична в общей точке кривой C. Из условия $B_D = \emptyset$ легко вывести, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$.

Разберём случай (б). Пусть

$$\theta^{-1}(\theta(C)) = C \cup \tilde{C}.$$

Как и в доказательствах Теорем 2.1 и 3.1 нам достаточно показать, что $CS(X, B_X)$ содержит кривую $\tilde{C}$. Для этого возьмём достаточно общий дивизор D в пучке $\mathcal{H}_C$. D будет гладкой поверхностью типа $K3$, $\tilde{C} \subset D$ и

$$B_X|_D = mult_C(B_X)C + mult_{\tilde{C}}(B_X)\tilde{C} + R,$$

где R – эффективный дивизор на поверхности D, чей носитель не содержит кривых C и $\tilde{C}$. На поверхности D

$$C^2 = \tilde{C}^2 = -2 \text{ и } C \cdot \tilde{C} = 4.$$

Откуда

$$2 = B_X|_D \cdot \tilde{C} = 4mult_C(B_X) - 2mult_{\tilde{C}}(B_X) + R \cdot \tilde{C}.$$

Следовательно, $mult_{\tilde{C}}(B_X) \geq 1$ и $CS(X, B_X)$ содержит кривую $\tilde{C}$. Откуда легко показать, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$ и лог пара (4.1) канонична в общих точках кривых C и $\tilde{C}$.

Теперь разберём случай (в). Пусть $f : W \to X$ – раздутие кривой C и $f^{-1}(C) = E$. Тогда базисное множество линейной системы $f^{-1}(\mathcal{H}_C)$ состоит из сечения линейчатой поверхности $f_E : E \to C$. Обозначим его $\tilde{C}$. Рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

и достаточно общий дивизор D в линейной системе $f^{-1}(\mathcal{H}_C)$. Тогда D является гладкой поверхностью типа $K3$ и

$$B_W|_D = mult_{\tilde{C}}(f^{-1}(B_X)\tilde{C} + R,$$

где носитель эффективного дивизора R не содержит кривой $\tilde{C}$. С другой стороны, на поверхности D

$$f^{-1}(B_X)|_D \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{C} + (1 - mult_C(B_X))E|_D$$

и $\tilde{C}^2 = -2$. Откуда следует, что

$$mult_{\tilde{C}}(B_W) = mult_C(B_X) = 1.$$

Как и в доказательстве случая (а) теперь легко получить, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $\mathcal{H}_C$ и лог пара (4.1) канонична в общей точке кривой C. $\square$

Лемма 4.11. *Пусть в Лемме 4.7 $-K_X \cdot C = 2$ и $\theta(C)$ – прямая. Обозначим $\mathcal{H}_C$ линейную систему поверхностей в $|-K_X|$, содержащих кривую C, и рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g, \\ X & \overset{\phi_{\mathcal{H}_C}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

которая разрешает особенности отображения $\phi_{\mathcal{H}_C}$. Тогда все линейные системы $f^{-1}(\mathcal{B}_i)$ лежат в слоях эллиптического расслоения g.

Доказательство. Заметим, что $\theta|_C$ – двулистное накрытие прямой. Предположим, что кривая C гладкая и f – раздутие кривой C. Положим $E = f^{-1}(C)$ и рассмотрим лог пару

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X)).$$

Тогда утверждение леммы следует из равенства

$$B_W \cdot (f^{-1}(\mathcal{H}_C))^2 = 1 - mult_C(B_X).$$

Пусть теперь кривая C особа. Заметим, что разбирая случай (г) мы пользовались лишь тем, что

(1) двумерная линейная система $f^{-1}(\mathcal{H}_C)$ свободна,
(2) дивизор E не лежит в слоях расслоения g,
(3) все f-исключительные дивизоры, отличные от E, содержатся в слоях расслоения g.

Но все эти свойства выполнены для произвольного разрешения особенностей отображения $\phi_{\mathcal{H}_C}$ вне всякой зависимости от особенностей кривой C. $\square$

Лемма 4.12. *В Теореме 4.4 лог пара (4.1) канонична.*

Доказателжство. Предположим, что лог пара (4.1) не канонична. Тогда ввиду Лемм 4.7-4.11, лог пара не канонична в общей точке неприводимой и приведённой кривой C, такой что $K_X \cdot C = 1$. В частности, $\theta(C)$ – прямая. Напомним, что тогда выполнено равенство

$$mult_C(B_X) > 1.$$

Воспользуемся обозначениями доказательства Леммы 4.1.

Допустим, что прямая $\theta(C)$ не принадлежит поверхности S. Тогда на многообразии V определён бирациональный автоморфизм μ – отражение в слоях эллиптического расслоения $\phi_{|-K_V|}$ относительно сечения G (см. [Ис3]). Как показано в [Ис3], отображение μ есть изоморфизм в коразмерности один и его действие на $Pic(V)$ задаётся следующими соотношениями:

$$\mu^*(K_V) = K_V,$$

$$\mu^*(G) = G,$$

$$\mu^*(g^{-1}(E)) = -8K_V - g^{-1}(E) + 2G.$$

Откуда следует, что

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{9 - 8mult_C(B_X)} > 1.$$

Последнее неравенство противоречит максимальности лог пары (4.1).

Пусть теперь прямая $\theta(C)$ лежит на поверхности S. Тогда граница лог B_Y пары

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

имеет отрицательное пересечение со всеми прообразами на многообразии W прямых на квадрике Q, касающихся поверхности S в точках кривой $\theta(C)$. Что противоречит подвижности лог пары (W, B_W), так как такие прямые на квадрике Q заметают поверхность. $\square$

Доказательство Теоремы 4.4. Ввиду Лемм 4.7-4.12 можно считать, что лог пара (4.1) канонична и $CS(X, B_X)$ содержит неприводимую и приведённую кривую C, такую что $K_X \cdot C = 1$.

Воспользуемся обозначениями доказательства Леммы 4.1. Допустим, лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

терминальна. Покажем, что тогда лог пара

$$(X_C, B_{X_C}) = (X_C, \psi_C(B_X))$$

полутерминальна.

Напомним, как мы строили бирациональное отображение ψ_C. Сначала мы раздули $f : W \to X$ кривую C и обозначили C_1 единственную базисную кривую линейной системы $|-K_W|$. Затем мы сделали антифлип $\rho : W \dashrightarrow \hat{W}$ в кривой C_1 и, наконец, мы показали, что линейная система $|-nK_{\hat{W}}|$ свободна для $n \gg 0$, и положили

$$\psi_C = \phi_{|-nK_{\hat{W}}|} \circ \rho.$$

Возьмём $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, такое что лог пара $(W, \zeta B_W)$ терминальна. Тогда ρ – лог флип относительно лог пары $(W, \zeta B_W)$. В частности, лог пара

$$(\hat{W}, \zeta B_{\hat{W}}) = (\hat{W}, \rho \circ f^{-1}(\zeta B_X))$$

также терминальна. На многообразии $\hat{W}$ выполнено соотношение

$$K_{\hat{W}} + B_{\hat{W}} \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Таким образом, морфизм $\phi_{|-nK_{\hat{W}}|}$ крепантен для лог пары $(\hat{W}, \zeta B_{\hat{W}})$. Откуда следует, что лог пара $(X_C, \zeta B_{X_C})$ канонична. Последнее влечёт полутерминальность лог пары (X_C, B_{X_C}).

Допустим, что лог пара (W, B_W) не терминальна. Тогда в силу Лемм 4.7-4.11 $CS(W, B_W)$ содержит гладкую неприводимую кривую T, такую что $f(T)$ является “прямой” на многообразии X. Возможны четыре случая:

(а) $T = C_1$,
(б) $\theta \circ f(T) \cap \theta(C) = \emptyset$,
(в) $f(T) = C$,
(г) $\theta \circ f(T) \cap \theta(C) \neq \emptyset$.

Из доказательства Леммы 4.11 несложно следует, что в случае (а) все линейные системы $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{B}_i)$ лежат в слоях эллиптического расслоения $\phi_{|-K_V|}$.

В случаях (б) и (в) рассмотрим общий дивизор D_W в линейной системе $|-K_W|$. Он является гладкой поверхностью типа К3 и

$$B_W|_{D_W} \sim_{\mathbb{Q}} C_1 + F,$$

где F – эллиптическая кривая, такая что $F \cdot C_2 = 1$. С другой стороны,

$$B_W|_{D_W} = mult_{C_1}(B_W)C_1 + R,$$

для некоторого эффективного дивизора R, такого что его носитель не содержит кривой C_1. Более того, $mult_{C_1}(B_W) > 0$, поскольку

$$B_W|_{D_W} \cdot C_1 = -1.$$

В случае (б)

$$\emptyset \neq T \cap D_W \subset E$$

и можно считать, что дивизор R не содержит точек $T \cap D_W$. Рассматривая пересечение дивизора $B_W|_{D_W}$ с кривой из линейной системы $\mathcal{F}$, проходящей через любую из точек пересечения $T \cdot D_W$, мы получаем противоречие.

В случае (в) $T \subset E$. Из рассмотрения пересечения дивизора $B_W|_{D_W}$ со слоем линейчатой поверхности E следует $E \subset B_W$, что противоречит подвижности лог пары (W, B_W).

Осталось рассмотреть случай (г). Обозначим $\mathcal{H}_T$ пучок, состоящий из поверхностей в линейной системе $|-K_W|$, проходящих через кривую T. Заметим, что пучок $\mathcal{H}_T$ состоит из прообразов на многообразии W гиперплоских сечений квадрики Q, проходящих через прямые $\theta \circ f(C)$ и $\theta \circ f(T)$.

Пусть $h : U \to W$ – раздутие кривой T. На многообразии U базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из двух гладких неприводимых кривых, одна из которых кривая $h^{-1}(C_1)$, а вторую мы обозначим T_1. Можно показать, что общий элемент D_U пучка $|-K_U|$ является гладкой поверхностью типа К3. На поверхности D_U

$$h^{-1}(B_X)|_{D_U} \sim_{\mathbb{Q}} h^{-1}(C_1) + T_1$$

и

$$h^{-1}(C_1)^2 = T_1^2 = (h^{-1}(C_1) + T_1)^2 = -2.$$

Откуда следует, что

$$mult_{C_1}(B_W) = mult_{T_1}(B_W) = 1.$$

Как и в доказательстве Леммы 4.10 теперь легко выводится, что все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из пучка $f(\mathcal{H}_T)$. $\square$

§5. Трёхмерные расслоения на коники.

Теперь мы получим результаты аналогичные результатам параграфа 3 главы II, но только в размерности 3.

Рассмотрим трёхмерное расслоение Мори $\pi : X \to S$ с $dim(X/S) = 1$ и лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i). \tag{5.1}$$

Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(L),$$

где L – дивизор на кривой S, причём, если граница B_X лежит в слоях морфизма π, то мы формально положим $\gamma = +\infty$ и $L = f(B_X)$.

Мы хотим исследовать свойства лог пары (5.1) в зависимости от числа λ. В общем случае на этот вопрос ответить содержательно, по-видимому, нельзя. Как мы видим на примере главы II, мы должны потребовать от расслоения π быть "сильно вырожденным". Опишем это более конкретно.

Отступим от нашего соглашения рассматривать только подвижные лог пары и зафиксируем на поверхности S "классическую" лог пару

$$(S, \frac{1}{4} D_S), \tag{5.2}$$

где D_S – дивизор вырождения морфизма π.

В оставшейся части этого параграфа все лог пары, которые будут рассматриваться на поверхностях, не будут подвижными. Мы надеемся, что это не внесёт много путаницы.

Наложим на расслоение π следующие два условия:

(1) лог пара (5.2) имеет канонические особенности,
(2) $\kappa(X, \frac{1}{4} D_S) = 2$.

Заметим, что если π является стандартным расслоением на коники (см. [Ca1-2]), то лог пара (5.2) имеет канонические особенности.

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 5.1. *Пусть $\lambda = 1$. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tau, \\ S & \overset{\mu}{\dashrightarrow} & Z \end{array}$$

обладающая следующими свойствами:

(1) *отображения ρ и μ бирациональны,*
(2) *τ – расслоение Мори,*

(3) *лог пара*
$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$
канонична,

(4) *выполнено соотношение*
$$K_Y + B_Y \sim_{\mathbb{Q}} \tau^*(H),$$
где дивизор H численно эффективен и объёмен.

В частности, $\kappa(X, B_X) = 2$ и $I(X, B_X) = \pi$.

Доказательство Теоремы 5.1 в общем-то аналогично доказательству Теоремы 3.1 главы II. Однако есть два принципиальных отличия. Во-первых, в расслоении π можно бирационально перестраивать не только многообразие X, но также и поверхность S. Во-вторых, индукция в доказательстве Теоремы 3.1 главы II существенно использует то, что база расслоения на коники есть кривая.

Приведём, опуская доказательства, две теоремы, которые выводятся из Теоремы 5.1 аналогично тому как в главе II Теоремы 3.3 и 3.4 выводятся из Теоремы 3.1.

Теорема 5.2. *Пусть $\lambda > 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = -\infty$ и существует коммутативная диаграмма*
$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tau, \\ S & \overset{\mu}{\dashrightarrow} & Z \end{array}$$
такая что отображения ρ и μ бирациональны, τ – расслоение Мори, а лог пара
$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X))$$
терминальна.

Теорема 5.3. *Пусть $\lambda < 1$. Тогда $\kappa(X, B_X) = 3$.*

Мы разобъём доказательство Теоремы 5.1 на несколько лемм и в оставшейся части параграфа будем считать, что $\lambda = 1$. Из работы [Co] следует, что существует коммутативная диаграмма
$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \hat{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi}, \\ S & \overset{\sigma}{\leftarrow} & \hat{S} \end{array}$$
такая что отображение ψ и морфизм σ бирациональны, $\tilde{\pi}$ – расслоение Мори и лог пара
$$(\hat{X}, B_{\hat{X}}) = (\hat{X}, \psi(B_X))$$
канонична.

Пусть $D_{\hat{S}}$ обозначает дивизор вырождения расслоения на коники $\hat{\pi}$.

Лемма 5.4. *Выполнено равенство*
$$\kappa(K_{\hat{S}} + \frac{1}{4} D_{\hat{S}}) = 2.$$

Прежде чем доказывать Лемму 5.4 заметим, что из неё ещё не следует равенство

$$\kappa(\hat{S}, \frac{1}{4}D_{\hat{S}}) = 2,$$

поскольку мы не знаем какие особенности имеет лог пара $(\hat{S}, \frac{1}{4}D_{\hat{S}})$.

Доказательство Леммы 5.4. Несложно показать, что дивизор

$$D_{\hat{S}} - \sigma^{-1}(D_S)$$

эффективен. Из каноничности лог пары $(S, \frac{1}{4}D_S)$ следует эффективность некоторой кратности дивизора

$$K_{\hat{S}} + \frac{1}{4}\sigma^{-1}(D_S) - \sigma^*(K_S + \frac{1}{4}D_S).$$

Таким образом, для $n \gg 0$

$$h^0(n(K_{\hat{S}} + \frac{1}{4}D_{\hat{S}})) \geq h^0(n(K_{\hat{S}} + \frac{1}{4}\sigma^{-1}(D_S))) \geq h^0(n(K_S + \frac{1}{4}D_S)).$$

□

Рассмотрим соотношение

$$K_{\hat{X}} + B_{\hat{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \hat{\pi}^*(\hat{L}).$$

Что можно сказать о дивизоре $\hat{L}$ на поверхности $\hat{S}$?

Лемма 5.5. *Имеет место соотношение*

$$\hat{L} \sim_{\mathbb{Q}} K_{\hat{S}} + \frac{1}{4}D_{\hat{S}} + \frac{1}{4}\hat{\pi}_*(B^2_{\hat{X}}).$$

Доказательство. Хорошо известно (см. [Ca1-2]), что

$$-\hat{\pi}_*(K^2_{\hat{X}}) \sim_{\mathbb{Q}} K_{\hat{S}} + \frac{1}{4}D_{\hat{S}}.$$

Нужное нам соотношение следует из того, что

$$\hat{\pi}^*(\hat{L})^2 - 2K_{\hat{X}} \cdot \hat{\pi}^*(\hat{L}) \sim_{\mathbb{Q}} K^2_{\hat{X}}.$$

□

Доказательство Теоремы 5.1. Мы покажем, что искомая коммутативная диаграмма получается в результате аккуратного применения ЛПММ к лог паре $(\hat{X}, B_{\hat{X}})$.

Из Леммы 5.5 следует, что дивизор $\hat{L}$ можно рассматривать как лог канонический дивизор лог пары

$$(\hat{S}, \frac{1}{4}D_{\hat{S}} + \frac{1}{4}\hat{\pi}_*(B^2_{\hat{X}})).$$

К сожалению, неизвестно какие особенности имеет эта лог пара. Тем не менее, из работы [KeMaMc] следует, что на поверхности $\hat{S}$ существует граница $B_{\hat{S}}$, такая что

$$B_{\hat{S}} \sim_{\mathbb{Q}} \frac{1}{4}D_{\hat{S}} + \frac{1}{4}\hat{\pi}_*(B^2_{\hat{X}})$$

и лог пара $(\hat{S}, B_{\hat{S}})$ имеет лог терминальные особенности. Тогда

$$K_{\hat{X}} + B_{\hat{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \hat{\pi}^*(K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}}).$$

Если дивизор $K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}}$ численно эффективен, то из теоремы о лог избыточности следует, что он объёмен и доказывать нечего.

Предположим, что дивизор $K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}}$ не является численно эффективным. Из ЛПММ следует существование бирационального морфизма $q : \hat{S} \to \tilde{S}$, стягивающего одну неприводимую кривую C на поверхности $\hat{S}$, такую что

$$(K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}}) \cdot C < 0.$$

Положим $B_{\tilde{S}} = q(B_{\hat{S}})$. Тогда лог пара $(\tilde{S}, B_{\tilde{S}})$ лог терминальна и

$$K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}} \sim_{\mathbb{Q}} q^*(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}}) + aC$$

для $a \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Теперь применим ЛПММ к лог паре $(\hat{X}, B_{\hat{X}})$ над поверхностью $\tilde{S}$. Мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \overset{p}{\dashrightarrow} & \tilde{X} \\ \hat{\pi}\downarrow & & \downarrow\tilde{\pi}, \\ \hat{S} & \overset{q}{\to} & \tilde{S} \end{array}$$

такую что отображение p бирационально. Рассмотрим лог пару

$$(\tilde{X}, B_{\tilde{X}}) = (\tilde{X}, p \circ \psi(B_X)).$$

Пусть $G = \hat{\pi}^{-1}(C)$. Тогда возможны два случая:

(а) отображение p есть композиция лог флиппов и стягивания прямого образа поверхности G,

(б) отображение p есть композиция лог флиппов и дивизор $K_{\tilde{X}} + B_{\tilde{X}}$ численно эффективен относительно морфизма $\tilde{\pi}$.

В обоих случаях многообразие $\tilde{X}$ имеет терминальные $\mathbb{Q}$-факториальные особенности и выполнено соотношение

$$K_{\tilde{X}} + B_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{\pi}^*(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}}) + ap(G).$$

В случае (а) $\tilde{\pi}$ является расслоением Мори и

$$K_{\tilde{X}} + B_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{\pi}^*(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}}).$$

Докажем, что случай (б) невозможен. Рассмотрим очень обильный дивизор H на поверхности $\tilde{S}$, такой что дивизор

$$K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}} + H$$

обилен. Из применения теоремы о лог избыточности к лог паре

$$(\tilde{X}, B_{\tilde{X}} + |\tilde{\pi}^*(H)|)$$

мы получаем, что линейная система

$$|\tilde{\pi}^*(n(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}} + H)) + anp(G)|$$

свободна для $n \gg 0$. Легко видеть, что это противоречит неравенству $a > 0$.

Таким образом, мы показали, что расслоение на коники $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{S}$ является расслоением Мори,

$$K_{\tilde{X}} + B_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{\pi}^*(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}})$$

и

$$\kappa(K_{\tilde{S}} + B_{\tilde{S}}) = \kappa(K_{\hat{S}} + B_{\hat{S}}) = 2.$$

Повторяя описанную конструкцию не более чем $rk(Pic(\hat{S}))$ раз, мы получим утверждение теоремы. $\square$

Теперь приведём пример расслоения на коники с базой $\mathbb{P}^2$, которое удовлетворяет нашим условиям.

Пример 5.7. *Рассмотрим многообразие*

$$V = Proj(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$$

вместе с естественной проекцией $f : V \to \mathbb{P}^2$. Пусть X – общий дивизор в полной линейной системе

$$|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^2}(2) + f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(11))|.$$

Тогда индуцированный морфизм $f|_X : X \to \mathbb{P}^2$ является расслоением на коники. В работе [Be1] показано, что

(1) *многообразие X гладкое,*
(2) $Pic(X/\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$,
(3) *кривая вырождения D_S расслоения $f|_X$ имеет обыкновенные двойные точки,*
(4) $deg(D_S) = 13$.

Таким образом, многообразие X удовлетворяет всем предположениям данного параграфа.

Заметим, что все рассуждения этого параграфа могут быть применены к расслоениям на коники в любой размерности в которой верна сильная ЛПММ. Под последним мы подразумеваем существование лог флипов, лог избыточность и формулу о подъёме лог канонического класса. К сожалению, сильная ЛПММ доказана пока только в размерностях 2 и 3.

ГЛАВА IV

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЧИСЛЕННО ТРИВИАЛЬНЫМ КАНОНИЧЕСКИМ КЛАССОМ

§1. Основные результаты главы IV.

В этой главе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1 *Пусть нормальное трёхмерное многообразие X содержит обильный эффективный дивизор Картье H с каноническими особенностями и $K_H \equiv 0$. Тогда выполнено одно из следующего*

(1) *X является стягиванием исключительного сечения $Proj(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$,*
(2) *X имеет канонические особенности и H есть поверхность типа K3 или поверхность Энриквеса.*

Причём в обоих случаях $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$

Работы [Пр] и [Re] показывают, что верно и обратное: на многообразии Фано с каноническими особенностями и целым индексом Фано существует обильный эффективный дивизор Картье, являющийся поверхностью типа K3 или поверхностью Энриквеса с каноническими особенностями.

Заметим, что Теорему 1.1 можно рассматривать как теорему о продолжениях поверхностей с численно тривиальным каноническим классом.

Следствие 1.2. *В классе нормальных многообразий с точностью до обобщённых конусов продолжения минимальных поверхностей с размерностью Кодаиры нуль и каноническими особенностями есть трёхмерные многообразия Фано с каноническими особенностями и целым индексом.*

Следствие 1.3. *В классе нормальных многообразий минимальные абелевы и биэллиптические поверхности могут продолжаться только до обобщённых конусов.*

§2. Теорема о $\mathbb{Q}$-горенштейновости.

В этом параграфе мы докажем часть Теоремы 1.1. Зафиксируем нормальное трёхмерное многообразие X обладающее обильным эффективный дивизором Картье H, таким что поверхность H имеет канонические особенности и $K_H \equiv 0$.

Теорема 2.1. *Многообразие X $\mathbb{Q}$-горенштейново.*

Для доказательства Теоремы 2.1 нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 2.2. *Пусть пучок $\mathcal{G}$ на многообразии X рефлексивен. Тогда*

$$H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = H^1(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0 \text{ для } n \gg 0.$$

Доказательство. Из рефлексивности $\mathcal{G}$ следует существование точной последовательности

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0, \tag{2.1}$$

такой что пучок $\mathcal{E}$ локально свободен, а пучок $\mathcal{F}$ не имеет кручения.

Возьмём $n \gg 0$ и рассмотрим точную последовательность когомологий, ассоциированную с точной последовательностью (1.1) –

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \to H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \to \\ \to H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \to H^1(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \to H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Тогда

$$H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0,$$

потому что пучки $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ без кручения, а

$$H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0,$$

поскольку многообразие X нормально.

Из точной последовательности (2.2) следует, что

$$H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = H^1(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0 \text{ для } n \gg 0.$$

□

Лемма 2.3. *Рассмотрим общую поверхность Y в линейной системе $|nH|$ и дивизор Вейля D, такой что*

$$dim\{x \in X | D \textit{ не дивизор Картье в точке } x\} = 0.$$

Если для $n \gg 0$ $D|_Y \sim 0$, то $D \sim 0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_Y \to 0. \tag{2.3}$$

Она точна, так как в окрестности поверхности Y все эти пучки локально свободны, а вне Y последовательность тривиальна.

Рассмотрим точную последовательность когомологий, ассоциированную с (2.3):

$$\begin{gathered} H^0(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \to H^0(\mathcal{O}_X(D)) \to \\ \to H^0(\mathcal{O}_Y) \to H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из работы [Ha2] следует, что пучок $\mathcal{O}_X(D)$ рефлексивен. По Лемме 2.2

$$H^0(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0 \text{ для } n \gg 0.$$

Из обильности дивизора Y следует, что $H^0(\mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$.

Из точной последовательности (2.4) мы получаем, что $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \mathbb{C}$. Таким образом, линейная система дивизоров Вейля $|D|$ содержит эффективный дивизор, откуда $D \sim 0$. $\square$

Доказательство Теоремы 2.1. Из работы [KaMaMa] следует, что в окрестности дивизора H особенности X канонические горенштейновы. Поскольку дивизор H обилен, то негоренштейновы особенности многообразия X изолированны.

Возьмём $n \gg 0$ и рассмотрим общую поверхность Y в линейной системе $|nH|$. Ввиду общности поверхности Y она имеет канонические особенности, не содержит негоренштейновых точек многообразия X. По той же причине можно считать, что кривая

$$C = Y \cap H$$

неприводима и неособа.

Положим $D = 12(K_X + H)$. Из формулы присоединения и [Be2] мы получаем, что

$$D|_H \sim 12K_H \sim 0.$$

Следовательно,

$$D|_Y \cdot H|_Y = D|_H \cdot nH|_H = D \cdot C = 0.$$

Поскольку дивизор $H|_Y$ обилен, то по теореме Ходжа об индексе $D|_Y \equiv 0$.

Заметим, что

$$D|_C \sim (D|_H)|_C \sim 0.$$

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_Y((D-H)|_Y) \to \mathcal{O}_Y(D|_Y) \to \mathcal{O}_C \to 0$$

и ассоциированную с ней последовательность когомологий

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) \to H^0(\mathcal{O}_C) \to H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)). \tag{2.5}$$

По критерию обильности Клеймана дивизор $(H-D)|_Y$ обилен на Y и теорема об обращении в нуль (см. [KaMaMa]) влечёт

$$H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)) = 0.$$

Поскольку кривая C является обильным дивизором на H, то $H^0(\mathcal{O}_C) = \mathbb{C}$.

Таким образом, из точной последовательности (2.5) следует, что

$$H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) = \mathbb{C}.$$

Откуда $D|_Y \sim 0$. По Лемме 2.3

$$D = 12(K_X + H) \sim 0.$$

В частности, X является $\mathbb{Q}$-горенштейновым. $\square$

Сформулируем два следствия из доказательства Теоремы 2.1.

Следствие 2.4. *Если H является абелевой поверхностью или поверхностью типа K3, то многообразие X горенштейново.*

Следствие 2.5. *Если H является поверхностью Энриквеса, то многообразие X 2-горенштейново.*

§3. Доказательство Теоремы 1.1 главы IV.

Воспользуемся обозначениями и соглашениями параграфа 2.

Лемма 3.1. *Предположим, что особенности X канонические. Тогда H являтся либо поверхностью типа K3, либо поверхностью Энриквеса.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_X(-H) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0$$

и ассоциированную с ней последовательность когомологий

$$H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1(\mathcal{O}_H) \to H^2(\mathcal{O}_X(-H)). \tag{3.1}$$

Из теоремы об обращении в нуль, рациональности особенностей X (см. [KaMaMa]) и двойственности Серра следует, что

$$H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X(-H)) = 0.$$

Из точной последовательности (3.1) следует, что $H^1(\mathcal{O}_H) = 0$ и H является поверхностью типа K3 или поверхностью Энриквеса. □

Ввиду Леммы 3.1 можно считать, что особенности многообразия X не канонические. Рассмотрим каноническую модификацию $f : W \to X$ многообразия X. Из работы [Ko1] и свойств канонической модификации следует, что

$$K_W \sim_{\mathbb{Q}} -f^*(H) - B,$$

где B – эффективный f-исключительный дивизор. Более того, дивизор B ненулевой, так как по предположению особенности X не канонические.

Дивизор $-B$ не может быть численно эффективным, следовательно, $\mathbf{NE}(W)$ содержит одномерную грань R, такую что

$$(K_W + f^*(H)) \cdot R = -B \cdot R < 0.$$

Поскольку дивизор $f^*(H)$ численно эффективен, то

$$K_W \cdot R = -f^*(H) \cdot R - B \cdot R < 0.$$

В частности, R является экстремальным лучом. Пусть $g : W \to Z$ – стягивание этого экстремального луча.

Для доказательства Теоремы 1.1 нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 3.2. *Z не может быть точкой.*

Доказательство. Если Z – точка, то W является многообразием Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Из построения следует, что $Pic(W) \neq \mathbb{Z}$. □

Лемма 3.3. *Для любой кривой $C \in R$ выполнено неравенство $K_W \cdot C < -1$.*

Доказательство. Во-первых, $-B \cdot C < 0$ по выбору R. Во-вторых, $-f^*(H) \cdot C < 0$, поскольку в противном случае $f(C)$ – точка и из f-обильности дивизора K_W следует, что $K_W \cdot C > 0$. И, в-третьих, $-f^*(H) \cdot C \in \mathbb{Z}$, так как $f^*(H)$ дивизор Картье. □

Лемма 3.4. *Морфизм g не может быть малым стягиванием и стягиванием дивизора на кривую.*

Доказательство. Предположим, что морфизм g есть малое стягивание или стягивание дивизора на кривую. Тогда существует точка $x \in Z$ такая, что

$$dim(g^{-1}(x)) = 1.$$

Применяя аргументы работы [Mo] к терминальной модификации многообразия W мы получаем, что

$$K_W \cdot g^{-1}(x) \geq -1.$$

Последнее неравенство противоречит Лемме 3.3. $\square$

Лемма 3.5. *Морфизм g не может быть стягиванием дивизора в точку.*

Доказательство. Пусть морфизм g является стягиванием дивизора E в точку. Тогда из построения морфизма f следует, что дивизор E не лежит в его слоях.

Возьмём достаточно общий дивизор Y в линейной системе $|f^*(nH)|$ для $n \gg 0$. Тогда кривая $C = Y \cap D$ содержится в R, что противоречит $B \cdot C = 0$. $\square$

Лемма 3.6. *Выполнено неравенство $dim(Z) \neq 1$.*

Доказательство. Пусть $dim(Z) = 1$. Рассмотрим f-исключительную поверхность F на многообразии W. Для любой кривой l, лежащей в слое морфизма $g|_F$, выполнено неравенство

$$K_W \cdot l < 0,$$

так как $l \in R$, что противоречит f-обильности дивизора K_W. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1. Из лемм 3.2-3.6 следует, что Z – поверхность. Положим $\hat{H} = f^{-1}(H)$. Заметим, что $\hat{H} \cong H$.

Рассмотрим общий слой морфизма g – C. Тогда

$$-K_W \cdot C = \hat{H} \cdot C + B \cdot C = 2, \hat{H} \cdot C \geq 1 \text{ и } B \cdot C > 0.$$

Откуда следует, что

$$\hat{H} \cdot C = B \cdot C = 1.$$

Значит, у морфизма g нет кратных и приводимых слоев, а морфизм $g|_{\hat{H}}$ бирационален.

Поверхность $\hat{H}$ не содержит слоев морфизма g, так как

$$B \cdot C = 1 \text{ и } \hat{H} \cap B = \emptyset.$$

Учитывая, что Z нормально, получаем, что $g|_{\hat{H}}$ – изоморфизм.

Из экстремальности g следует, что $R^0 g_*(\mathcal{O}_W) = \mathcal{O}_Z$. По теореме об обращении в нуль $R^1 g_*(\mathcal{O}_W) = 0$. Применяя g_* к точной последовательности пучков

$$0 \to \mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_W(\hat{H}) \to \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) \to 0,$$

мы получим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_Z \to R^0 g_*(\mathcal{O}_W(\hat{H})) \to R^0 g_*(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}})) \to 0. \tag{3.2}$$

Из того, что $g|_{\hat{H}}$ является изоморфизмом следует, что пучок $R^0 g_*(\mathcal{O}_W(\hat{H}))$ локально свободен и имеет ранг 2.

Из коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
0 \to & \mathcal{O}_W & \to & \mathcal{O}_W(\hat{H}) & \to & \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) & \to 0 \\
 & \| & & \uparrow \alpha & & \uparrow & \\
 & g^* g_* \mathcal{O}_W & \to & g^* g_* \mathcal{O}_W(\hat{H}) & \to & g^* g_* \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) & \to 0
\end{array}$$

следует, что отображение

$$\alpha : g^* g_* \mathcal{O}_W(\hat{H}) \to \mathcal{O}_W(\hat{H})$$

сюрьективно и задает морфизм

$$\mathcal{A} : W \to Proj(g_* \mathcal{O}_W(\hat{H}))$$

над поверхностью Z. Но дивизор $\hat{H}$ g-обилен и является сечением морфизма g. Следовательно, морфизм $\mathcal{A}$ конечен и бирационален. Из нормальности многообразия $Proj(g_* \mathcal{O}_W(\hat{H}))$ вытекает, что $\mathcal{A}$ является изоморфизмом.

Точная последовательность (3.2) расщепляется потому, что

$$Ext^1(R^0 g_*(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}})), \mathcal{O}_Z) = Ext^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}), \mathcal{O}_{\hat{H}}) = H^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(-\hat{H}|_{\hat{H}})),$$

но

$$H^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(-\hat{H}|_{\hat{H}})) = 0,$$

по теореме об обращении в нуль. Следовательно,

$$R^0 g_* \mathcal{O}_W(\hat{H}) \cong \mathcal{O}_Z \oplus R^0 g_*(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H})).$$

Поскольку

$$Z \cong \hat{H} \cong H,$$

то мы окончательно получаем

$$W \cong Proj(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H)),$$

и X является стягиванием его исключительного сечения. $\square$

ГЛАВА V

О РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

§1. Основные результаты главы V.

В этой главе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть X – трёхмерное многообразие Фано с негоренштейновыми каноническими особенностями, такое что*

$$-K_X \equiv H,$$

где H – дивизор Картье. Тогда многообразие X рационально для $H^3 \geq 10$.

Из Теоремы 1.1 следует положительное решение Гипотезы Фано (см. Введение).

Теорема 1.2. *Пусть гиперплоское сечение H трёхмерного многообразия X является поверхностью Энриквеса с каноническими особенностями. Тогда для многообразия X есть две возможности:*

(1) *X – конус над поверхностью H,*
(2) *X рационально.*

Доказательство. Очевидно, что многообразие X неприводимо и приведено. Из работы [КаМаМа] следует, что в окрестнсти поверхности H особенности X каноничны и горенштейновы.

Пусть $f : W \to X$ – нормализация многообразия X. Из главы IV следует, что W негоренштейнево,

$$-2K_W \sim f^*(2H)$$

и либо W является обобщённым конусом над поверхностью $f^{-1}(H)$, либо особенности X каноничны.

В первом случае мы получаем, что X – конус над поверхностью H, поскольку f^{-1} изоморфизм в окрестноти H. Во втором случае из работы [СоДо] следует, что выполнено неравенство $H^3 \geq 10$ и X рационально по Теореме 1.1. □

Как уже упомяналось в Введении сам Дж. Фано в работе [Fa3] просто "классифицировал" все трёхмерные многообразия, содержащие гладкую поверхность Энриквеса в качестве гиперплоского сечения. И из его "классификации" следовало, что все такие многообразия рациональны. К сожалению его доказательство, богатое интересными идеями и конструкциями, содержит огромное число неточностей и ошибок.

§2. Начало доказательства Теоремы 1.1 главы V.

Зафиксируем трёхмерное многообразие X с негоренштейновыми каноническими особенностями и обильным дивизором Картье H, таким что

$$-K_X \equiv H.$$

Заметим, что из главы II следует, что

$$-2K_X \sim 2H.$$

В Теореме 1.1 требуется выполнение неравенства $H^3 \geq 10$. Тем не менее, в этом параграфе мы будем считать, что $H^3 \geq 4$, поскольку часть полученных результатов мы используем потом не только для доказательства Теоремы 1.1.

Разберём несколько лемм, описывающих геометрию многообразия X.

В работе [Пр] доказана следующая лемма.

Лемма 2.1. *Выполнено равенство*

$$dim(|H|) = \frac{1}{2}H^3 + 1,$$

и либо $Bs(|H|) = \emptyset$, либо $Bs(|H|)$ состоит из двух простых точек p_1 и p_2.

Хорошо известно, что если $Bs(|H|) \neq \emptyset$, то отображение $\phi_{|H|}$ имеет степень 2. В этом случае многообразие X принято называть гиперэллиптическим.

Лемма 2.2. *Если $Bs(|H|) = \emptyset$, то выполнено одно из следующих условий:*

(1) *морфизм $\phi_{|H|}$ бирационален,*
(2) *морфизм $\phi_{|H|}$ имеет степень 2 и H^3 равен 6 или 8,*
(3) *$H^3 = 4$ и $\phi_{|H|} : X \to \mathbb{P}^3$ – четырёхлистное накрытие.*

Более того, в последнем случае многообразие X представимо в виде фактора пересечения трёх квадрик в $\mathbb{P}^6$ по инволюции.

Доказательство. Все утверждения несложно следуют из применения методов работы [Ис2] к результатам работы [СоДо]. $\Box$

Рассмотрим негоренштейневую точку O многообразия X и линейную систему $\mathcal{H}_O$, состоящую из поверхностей в $|H|$, содержащих точку O.

Лемма 2.3. *Линейная система $\mathcal{H}_O$ не составлена из пучка и не имеет неподвижных компонент.*

Доказательство. Поскольку $H^3 \geq 4$, то из Леммы 2.1 следует, что

$$dim(\phi_{|H|}(X)) = 3.$$

Следовательно, линейная система $\mathcal{H}_O$ не составлена из пучка.

Предположим, что линейная система $\mathcal{H}_O$ содержит неподвижную компоненту E. Тогда отображение $\phi_{|H|}$ стягивает поверхность E, и все поверхности $\phi_{|H|}(|H|)$ содержат точку $\phi_{|H|}(E)$. Последнее противоречит свободе линейной системы $\phi_{|H|}(|H|)$. $\Box$

Из Леммы 2.3 следует, что на многообразии X можно определить лог пару

$$(X, B_X) = (X, \mathcal{H}_O). \tag{2.1}$$

Лемма 2.4. *Лог пара (2.1) не канонична.*

Доказательство. Из каноничности лог пары (2.1) следовало бы, что общая поверхность в линейной системе $\mathcal{H}_O$ также имеет канонические особенности. Однако легко видеть, что в окрестности точки O она должна иметь негоренштейновые особенности. $\square$

Рассмотрим бирациональный морфизм $f : W \to X$, такой что лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

является терминальной модификацией лог пары (2.1). Тогда

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} -\sum_{i=1}^{k} a_i F_i,$$

где $k \neq 0$, все $a_i > 0$ и дивизоры F_i стягиваются морфизмом f.

После применения ЛПММ к лог паре (W, B_W) мы получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & Y \\ & & \downarrow \tau, \\ & & Z \end{array}$$

где отображение ρ бирационально, морфизм τ является расслоением Мори, лог пара

$$(Y, B_Y) = (Y, \rho(B_X).$$

терминальна, а дивизор $-(K_Y + B_Y)$ τ-обилен.

Следующая лемма хорошо известна (см. например [Ал]).

Лемма 2.5. *Если граница B_Y не содержится в слоях морфизма τ, то многообразие X рационально.*

Разберём случай, когда Z кривая.

Лемма 2.6. *Если $dim(Z) = 1$, то многообразие X рационально.*

Доказательство. Следует из Лемм 2.3 и 2.5. $\square$

Теперь разберём случай, когда Z точка.

Лемма 2.7. *Если $dim(Z) = 0$ и $H^3 \geq 10$, то многообразие X рационально.*

Доказательство. Из терминальности лог пары (Y, B_Y) и работы [Ал] следует, что линейная система $\rho(\mathcal{H}_O)$ имеет лишь изолированные базисные точки, которые неособы как на многообразии Y, так и на общей поверхности в $\rho(\mathcal{H}_O)$. В частности, все дивизоры из линейной системы $\rho(\mathcal{H}_O)$ являются дивизорами Картье.

Рассмотрим общую поверхность D в линейной системе $\rho(\mathcal{H}_O)$. Тогда по теореме Бертини D – гладкая поверхность дель Пеццо и из работы [CaFl] следует, что полученная лог пара (Y, B_Y) должна быть одной из следующих:

(а) $(X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3), \mathcal{H}_{X_6} \subset |X_6 \cap \{T_3 = 0\}|)$,
(б) $(X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3), \mathcal{H}_{X_6} \subset |X_6 \cap \{T_0 = 0\}|)$,
(в) $(X_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2), \mathcal{H}_{X_4} \subset |X_4 \cap \{T_0 = 0\}|)$,

(г) $(X_3 \subset \mathbb{P}^4, \mathcal{H}_{X_3} \subset |X_3 \cap \{T_0 = 0\}|)$.

Заметим, что линейные системы в лог парах (а)-(г) не обязательно полные. Но даже если бы они были полными, то их размерность была бы равна 4, 2, 3 и 4 в случаях (а), (б), (в) и (г) соответственно. Что противоречит неравенству

$$dim(\mathcal{H}_O) = \frac{1}{2}H^3 \geq 5.$$

□

Лемма 2.8. *Допустим, что отображение $\phi_{|H|}$ бирационально и $H^3 \geq 10$. Тогда многообразие X рационально.*

Доказательство. Предположим, что многообразие X нерационально. Тогда из Лемм 2.5-2.7 следует, что τ это расслоение на коники и граница B_Y содержится в его слоях. В частности,

$$dim(\phi_{\mathcal{H}_O}(X)) = 2.$$

Последнее равенство означает, что многообразие $\phi_{|H|}(X)$ является конусом с вершиной $\phi_{|H|}(O)$. В этом случае, общая поверхность линейной системы $\rho(|H|)$ есть сечение морфизма τ и поверхность Z бирационально изоморфна поверхности типа Энриквеса. Последнее противоречит тому, что поверхность Z рациональна (см. например [Ал]). □

Таким образом, нам осталось доказать Теорему 1.1 в предположении, что многообразие X гиперэллиптично.

Заметим, что из Леммы 2.8 следует Гипотеза Фано.

§3. Окончание доказательства Теоремы 1.1 главы V.

Воспользуемся всеми обозначениями и соглашениями параграфа 2, но только на этот раз будем предполагать, что $H^3 \geq 10$ и многообразие X нерационально. Покажем за несколько шагов, что такие многообразия просто не существуют.

Из Леммы 2.8 следует, что

(1) τ есть расслоение на коники,
(2) граница B_Y содержится в слоях расслоения τ,
(3) многообразие X гиперэллиптично,
(4) многообразие $\hat{X} = \phi_{|H|}(X)$ является конусом с вершиной $\hat{O} = \phi_{|H|}(O)$.

Из Леммы 2.1 следует, что

$$Bs(|H|) = \{p_1, p_2\},$$

где точки p_1 и p_2 гладкие на многообразии X. Заметим, что точка O отлична от них, поскольку она особа по выбору. Раздуем обе точки p_1 и p_2 – $g : V \to X$ и положим

$$G_1 = g^{-1}(p_1) \text{ и } G_2 = g^{-1}(p_2).$$

Из Леммы 2.1 следует, что линейная система

$$\mathcal{H}_V = g^{-1}(|H|)$$

свободна. Рассмотрим на многообразии V семейство кривых $\{C\}$, состоящее из собственных прообразов образующих конуса $\hat{X}$. Чтобы не возникло путаницы мы будем отождествлять семейство кривых с его общим элементом.

Лемма 3.1. *Выполнены равенства*

$$G_1 \cdot \{C\} = G_2 \cdot \{C\} = 0 \text{ и } g^*(H) \cdot \{C\} = 2.$$

Доказательство. По построению семейства кривых $\{C\}$

$$g^*(H) \cdot \{C\} = 2.$$

Рассмотрим разрешение неопределённостей отображения ρ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\alpha}{\leftarrow} & U \\ g\downarrow & & \downarrow\beta, \\ X & \stackrel{\rho}{\rightarrow} & Y \end{array}$$

такой что многообразие U гладкое. Поскольку многообразие X имеет только канонические особенности, то выполнено неравенство

$$-K_U \cdot \alpha^{-1}(\{C\}) \leq g^*(H) \cdot \{C\}.$$

Ввиду того, что семейство $\rho(\{C\})$ лежит в слоях расслоения τ

$$-K_U \cdot \alpha^{-1}(\{C\}) \leq 2.$$

Следовательно, все неравенства на самом деле являются равенствами, откуда и следует утверждение леммы. □

Из доказательства Леммы 3.1 следует, что общая кривая семейства $\{C\}$ неприводима и рациональна. Более того, её прямой образ на Y есть слой расслоения τ.

Рассмотрим объединение центров на многообразии V всех $(\rho \circ g)^{-1}$-исключительных дивизоров, которые не лежат в слоях расслоения τ. Обозначим его A.

Лемма 3.2. *A состоит из конечного числа не терминальных точек,*

$$\phi_{\mathcal{H}_V}(A) = \hat{O} \text{ и } A \subset Bs(g^{-1}(\mathcal{H}_O)).$$

Доказательство. Последние два утверждения очевидны, поэтому докажем только первое.

Допустим, что на многообразии Y существует дивизор F, не лежащий в слоях расслоения τ, такой что он стягивается отображением $(\rho \circ g)^{-1}$. Если

$$(\rho \circ g)^{-1}(F) \notin CS(X, \emptyset),$$

то одно из неравенств в доказательстве Леммы 3.1 будет строгим, что невозможно.

Предположим, что A содержит кривую T. Тогда

$$T \cap (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset,$$

и, следовательно, многообразие V гладко в общей точке кривой T. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1. Отметим следствия из работы [СоДо].

(1) Многообразие $\hat{X}$ является конусом над поверхностью $\mathbb{F}_i$ и $i \leq 2$.

(2) Обозначим s_∞ и e исключительное сечение и образующую поверхности $\mathbb{F}_i$. Тогда существует бирациональный морфизм

$$\delta : Proj(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_i} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{F}_i}(h)) \to \hat{X},$$

стягивающий сечение M естественной проекции

$$\gamma : Proj(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_i} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{F}_i}(h)) \to \mathbb{F}_i,$$

где $h \sim s_\infty + (i+k)e$ и $k = \frac{1}{4}(H^3 - 2i - 2)$.

(3) Положим

$$\hat{G}_1 = \phi_{\mathcal{H}_V}(G_1), \text{ и } \hat{G}_2 = \phi_{\mathcal{H}_V}(G_2).$$

Тогда дивизор ветвления двулистного накрытия $\phi_{\mathcal{H}_V}$ состоит из дивизоров $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ и $\delta(D)$, где

$$D \sim rM + \gamma^*(4s_\infty + (4+2i)e).$$

Уменьшая r, можно считать, что дивизор D не содержит поверхность M в качестве неприводимой компоненты. Из Леммы 3.1 следует, что обе поверхности $\delta^{-1}(\hat{G}_1)$ и $\delta^{-1}(\hat{G}_2)$ содержатся в слоях расслоения γ.

Заметим, что $r \geq 1$, так как в противном случае общая кривая семейства $\{C\}$ приводима. Более того, $r \geq 2$, поскольку из равенства $r = 1$ следовало бы, что расслоение τ обладает сечением и многообразие X рационально.

Рассмотрим общий дивизор s_0 в линейной системе $|s_\infty + ie|$. Легко показать, что $\gamma^{-1}(s_0) \cong \mathbb{F}_{i+k}$. Пусть s'_∞ и e' обозначают исключительное сечение и образующую линейчатой поверхности $\gamma^{-1}(s_0)$ соответственно. Тогда

$$D|_{\gamma^{-1}(s_0)} \sim rs'_\infty + (4+2i)e'$$

и дивизор $D|_{\gamma^{-1}(s_0)}$ не содержит кривую s'_∞. Из последнего следует, что

$$4 + 2i \geq r(i+k) \text{ и } r = 2.$$

Таким образом, возможны четыре случая:

(а) $i = 0$, $k = 2$, $H^3 = 10$,

(б) $i = 1$, $k = 2$, $H^3 = 12$,

(в) $i = 2,\ k = 2,\ H^3 = 14,$
(г) $i = 2,\ k = 1,\ H^3 = 10.$

Чтобы показать невозможность случаев (а)-(г) нам нужно усилить предыдущие рассуждения.

Из работы [СоДо] следует, что морфизм $\phi_{\mathcal{H}_V}$ стягивает две неприводимых поверхности B_1 и B_2 на две прямые $b_1 \subset \hat{G}_1$ и $b_2 \subset \hat{G}_2$ соответственно. Причём общий слой каждого из морфизмов $\phi_{\mathcal{H}_V}|_{B_1}$ и $\phi_{\mathcal{H}_V}|_{B_1}$ есть эллиптическая кривая. Можно показать, что

$$K_X \sim -H + g(B_1) - g(B_2).$$

Откуда следует, что

$$O \in g(B_1) \cup g(B_1).$$

Заметим, что можно считать точку O единственной негоренштейневой точкой многообразия X, так как в противном случае мы можем применить все предыдущии аргументы к негоренштейневой точке отличной от O и получить рациональность многообразия X.

Покажем, что

$$\hat{O} = b_1 \cap b_2.$$

Легко видеть, что

$$\hat{O} \in b_1 \cup b_2.$$

Предположим без ограничения общности, что прямая b_1 содержит точку $\hat{O}$, а b_2 нет. Тогда поверхности $g(B_1)$ и $g(B_2)$ являются 2-Картье и Картье дивизорами соответственно. Положим

$$T = \phi_{\mathcal{H}_V}^{-1}(\delta(\gamma^{-1}(e)).$$

Тогда

$$g(T) \sim 2g(B_2)$$

и поверхности T и $g(T)$ являются дивизорами Картье. Более того

$$g(T) \cap g(B_2) = \emptyset,$$

потому что поверхность $g(T)$ может пересекаться с поверхностью $g(B_2)$ только в точке p_2. Аналогично

$$T \cap G_1 = \emptyset \text{ и } \phi_{\mathcal{H}_V}^{-1}(\hat{O}) \not\subset T.$$

Значит, линейная система $|T|$ свободна. Из последнего легко следует, что A содержит кривую, что невозможно по Лемме 3.2.

Таким образом,

$$\hat{O} = b_1 \cap b_2$$

и из работы [СоДо] следует, что дивизор $\delta(D)$ особ в общих точках прямых b_1 и b_2. Зададим на поверхности $\mathbb{F}_i$ “пробную” кривую s следующим образом:

(1) в случае (а) пусть $s \sim s_\infty + e$ и

$$(\gamma(\delta^{-1}(b_1)) \cup \gamma(\delta^{-1}(b_1))) \subset s,$$

(2) в случае (б) пусть $s \sim s_0$ и

$$(\gamma(\delta^{-1}(b_1)) \cup \gamma(\delta^{-1}(b_1))) \cap s \neq \emptyset,$$

(3) в случаях (в) и (г) пусть $s \sim s_0$ и

$$(\gamma(\delta^{-1}(b_1)) \cup \gamma(\delta^{-1}(b_1))) \subset s,$$

Используя предыдущие аргументы об ограничении $D|_{\gamma^{-1}(s)}$ мы сразу получаем ряд неравенств, из которых следует противоречие. $\square$

§4. Одно добавление.

В предыдущем параграфе мы достигли основной цели этой главы – доказали Теорему 1.1. В процессе доказательства мы получили ряд лемм, которые используем для получения одного утверждения.

Воспользуемся обозначениями параграфа 2.

Теорема 4.1. *Предположим, что $CS(X, \emptyset)$ не содержит негоренштейновых точек. Тогда многообразие X бирационально перестраивается в одно из следующих:*

(1) $\mathbb{P}^3$,
(2) *гиперповерхность степени* 6 *в* $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$,
(3) *гиперповерхность степени* 6 *в* $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$,
(4) *гиперповерхность степени* 4 *в* $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$,
(5) *кубика в* $\mathbb{P}^4$,
(6) *фактор пересечения трёх квадрик в* $\mathbb{P}^6$ *по инволюции.*

Для доказательства Теоремы 4.1 нам понадобится одна простая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть S – неприводимая поверхность, а $\{D\}$ – семейство кривых на ней, такое что два общих представителя семейства $\{D\}$ имеют непустое пересечение и не имеют общих компонент. Тогда общая кривая в $\{D\}$ связна.*

Доказательство. Мы можем считать, что поверхность S нормальна. Рассмотрим её разрешение особенностей – $\gamma : \tilde{S} \to S$. Для кривых поверхности S корректно определено их численное поднятие γ^* на поверхность $\tilde{S}$.

Возьмём достаточно общую кривую в семействе $\{D\}$ – D_S. Тогда из функториальных свойств γ^* следует, что дивизор $\gamma^*(D_S)$ численно эффективен и объёмен. Следовательно, его носитель связен. Откуда мы сразу получаем, что и носитель кривой D_S также связен. $\square$

Доказательство Теоремы 4.1. Допустим, что Теорема 4.1 неверна. Тогда из Леммы 2.8 следует, что мы находимся в ситуации параграфа 3, за исключением того, что $H^3 \geq 4$. Тем не менее, в нашей ситуации все обозначения параграфа 3 имеют смысл и Лемма 3.2 верна. Откуда следует, что A не содержит негоренштейновых точек.

Рассмотрим каноническое накрытие $\sigma : \tilde{X} \to X$. Тогда общий элемент семейства

$$\{\tilde{C}\} = \sigma^{-1}(g(\{C\}))$$

состоит из несвязного объединения двух рациональных кривых. Общая поверхность D в линейной системе $\sigma^{-1}(\mathcal{H}_O)$ неприводима. Применяя Лемму 4.2 к поверхности D и подсемейству семейства $\{\tilde{C}\}$, состоящему из кривых лежащих на поверхности D, мы получим противоречие. $\square$

§5. Применения Теорем 1.1 и 4.1 главы V.

В этом параграфе мы применим Теоремы 1.1 и 4.1 к некоторым специальным многообразиям, которые удовлетворяют условиям параграфа 2.

Воспользуемся обозначениями параграфа 2 и предположим, что многообразие X имеет терминальные фактор-особенности. Из работы [San] следует, что X может быть получено как фактор гладкого многообразия Фано $\tilde{X}$ по инволюции, имеющей ровно восемь неподвижных точек.

Заметим, что $\tilde{X}$ – каноническое накрытие многообразия X.

Следствие 5.1. *Пусть $\tilde{X}$ является одним из следующих многообразий:*

(1) *пересечение трёх дивизоров типа $(1,1)$ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$,*
(2) *$\mathbb{P}^1 \times S_4$, где S_4 – гладкая поверхность дель Пеццо с $K_{S_j}^2 = 4$.*
(3) *дивизор типа $(1,1,1,1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,*
(4) *раздутие конуса над гладкой квадрикой в несвязном объединении вершины и эллиптической кривой,*
(5) *пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$,*
(6) *$\mathbb{P}^1 \times S_6$, где S_6 – гладкая поверхность дель Пеццо с $K_{S_j}^2 = 6$.*
(7) *$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,*

Тогда X рационально.

Доказательство. Достаточно применить Теорему 1.1 к многообразию X. $\square$

Следствие 5.2. *Предположим, что $\tilde{X}$ изоморфно либо $\mathbb{P}^1 \times S_2$, либо раздутию пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ в эллиптической кривой, высекаемой двумя гиперплоскими сечениями. Тогда многообразие X рационально.*

Доказательство. Несложно показать, что X является раздутием многообразия, чьё каноническое накрытие удовлетворяет предположениям Следствия 5.1. $\square$

Следствие 5.3. *Пусть $\tilde{X}$ есть двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ разветвлённое в секстике. Тогда либо многообразие X рационально, либо оно бирационально перестраивается в гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$.*

Доказательство. Ввиду Теоремы 4.1 и её доказательства достаточно показать, что лог пара (X, B_X) бирационально не перестраивается в лог пару

$$(X_3 \subset \mathbb{P}^4, \mathcal{H}_{X_3} \subset |X_3 \cap \{T_0 = 0\}|).$$

Из работы [Ba], следует, что линейная система $|H|$ свободна и морфизм $\phi_{|H|}$ является двулистным накрытием пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$. Откуда легко следует требуемое. $\square$

§6. Многообразие Энриквеса

В этом параграфе мы опишем бирациональную перестройку трёхмерного многообразия Энриквеса в двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвлённое в особой квартике. Полученная нами перестройка никогда не рассматривалась в литературе.

Зададим трёхмерное многообразие X как нормализацию многообразия $\hat{X}$, которое задано достаточно общим уравнением

$$x_1x_2x_3x_4(a_0x_0^2+x_0\sum_{i=1}^4 b_ix_i+\sum_{i,j=1}^4 c_{ij}x_ix_j)=x_1^2x_2^2x_3^2+x_0^2x_2^2x_3^2+x_0^2x_1^2x_3^2+x_0^2x_1^2x_2^2$$

в $\mathbb{P}^4$. Заметим, что если в приведённом уравнении положить $x_0=0$, то мы получим классическое представление поверхности Энриквеса в виде секстики дважды проходящей через рёбра тетраэдра.

В работе [Ba] показано, что многообразие X имеет ровно восемь особых точек типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$, а его каноническое накрытие есть двойное накрытие $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, разветвлённое в дивизоре типа $(1,1,1)$.

Несложно показать, что

$$-K_X\sim_{\mathbb{Q}}H,$$

где H есть поднятие на X дивизора $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_{\hat{X}}$. В частности, многообразие X и дивизор H удовлетворяют предположениям параграфа 2 и

$$-K_X^3=H^3=6.$$

Многообразие $\hat{X}$ имеет шесть двойных плоскостей, заданных уравнениями

$$x_i=x_j=0 \text{ для } 1\leq i<j\leq 4,$$

четыре тройных прямых, заданных уравнениями

$$x_i=x_j=x_k \text{ для } 1\leq i<j<k\leq 4.$$

Все тройные прямые многообразия $\hat{X}$ пересекаются в одной особой обыкновенной “четверной” точке и на каждой из них лежит ещё две “четверные” точки – образы негоренштейновых точек многообразия X.

Проекция из каждой нетройной прямой на многообразии $\hat{X}$, содержащей образы двух негоренштейновых точек X, задаёт на $\hat{X}$ структуру расслоения на коники Последнее означает, что разрешение особенностей этого отображения будет расслоением на коники. Более того, несложно показать, что это единственные проекции многообразия $\hat{X}$, задающие структуру расслоения на коники на нём.

В работах [Эн] и [BoVe] независимо было показано, что многообразие X бирационально перестраиваются в стандартное расслоение на коники с гладкой кривой вырождения рода 5, чей примиан изоморфен промежуточному якобиану X и не является якобианом кривой. В частности, многообразие X нерационально.

Воспользуемся обозначениями параграфа 2 и утверждением Теоремы 4.1. Мы получим, что лог пара (X,B_X) бирационально перестраивается в одну из следующих:

(а) $(X_6\subset\mathbb{P}(1,1,2,2,3),\mathcal{H}_{X_6}\subset|X_6\cap\{T_3=0\}|)$,

(б) $(X_3\subset\mathbb{P}^4,\mathcal{H}_{X_3}\subset|X_3\cap\{T_0=0\}|)$,

(в) $(X_4\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,2),|X_4\cap\{T_0=0\}|)$.

Предположим, что лог пара (X, B_X) бирационально изоморфна лог паре (а). Морфизм $\phi_{|X_6 \cap \{T_3=0\}|}$ является двулистным накрытием особой квадрики Q и лог пара $(X_6, \mathcal{H}_{X_6})$ терминальна. Следовательно,

$$\rho^{-1} \circ \phi_{\mathcal{H}_O} = \theta \circ \phi_{|X_6 \cap \{T_3=0\}|},$$

где θ – проекция квадрики Q из её гладкой точки, которая к тому же гладкая на дивизоре ветвления морфизма $\phi_{|X_6 \cap \{T_3=0\}|}$. Из последнего утверждения следует, что нормализация общей кривой в семействе $\{H_O^2\}$ имеет род 2. С другой стороны, легко подсчитать, что она должна быть эллиптической кривой.

Пусть теперь лог пара (X, B_X) бирационально перестраивается в лог пару (б). Тогда кубика X_3 гладкая, ввиду нерациональности многообразия X. Хорошо известно, что её промежуточный якобиан является примианом стандартного расслоения на коники с гладкой кривой вырождения рода 6. Более того, $J(X_3)$ неприводим как абелево многообразие с главной поляризацией и, следовательно, совпадает со своей компонентой Гриффитса. Последнее противоречит тому, что

$$dim(J(X)) < dim(J(X_3)).$$

Таким образом, лог пара (X, B_X) бирационально изоморфна лог паре (в). Подсчёт размерностей показывает, что

$$\rho(\mathcal{H}_O) = |X_4 \cap \{T_0 = 0\}| = |-\frac{1}{2}K_{X_4}|.$$

Морфизм

$$\phi_{|X_4 \cap \{T_0=0\}|} : X_4 \to \mathbb{P}^3$$

конечен, имеет степень 2 и разветвлён в квартике S с изолированными особыми точками.

Используя замечание о проекциях многообразия $\hat{X}$ несложно показать, что особые точки поверхности S двойные и состоят из образов негоренштейновых особых точек многообразия X, чей образ на многообразии $\hat{X}$ не лежит на одной тройной прямой вместе с точкой $\phi_{|H|}(O)$. В частности, поверхность S имеет ровно шесть двойных особых точек.

Заметим, что поверхность S содержит три прямые l_1, l_2 и l_3, которые являются образами двойных плоскостей многообразия $\hat{X}$, проходящих через точку $\phi_{|H|}(O)$. Каждая прямая l_j содержит две особые точки поверхности S, а

$$\cap_{j=1}^{3} l_j$$

не пусто и состоит из гладкой точки, которая является образом тройной прямой содержащей точку $\phi_{|H|}(O)$.

ГЛАВА VI

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ТРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ЦЕЛОГО ИНДЕКСА

§1. Основные результаты главы VI.

В этой главе мы эффективно ограничим куб антиканонического класса трёхмерного многообразия Фано с каноническими особенностями и целым индексом Фано. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть X – трёхмерное многообразие Фано с каноническими особенностями и*

$$-K_X \equiv H,$$

для обильного дивизора Картье H. Тогда $H^3 \leq 184/I$, где I – индекс горенштейновости многообразия X.

Заметим, что из главы IV следует, что в обозначениях Теоремы 1.1

$$-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$$

и индекс горенштейновости I равен либо 1 либо 2. Следовательно, рассматривая каноническое накрытие X (см. главу V), можно доказывать Теорему 1.1 в предположении, что многообразие X горенштейново. Из главы IV следует, что тогда $-K_X \sim H$.

Заметим, что оценка в Теореме 1.1, по-видимому, далека от совершенства. В случае, когда X гладко, $H^3 \leq 64$ (см. [Ис2]), причём равенство достигается для $\mathbb{P}^3$. В случае, когда X имеет терминальные горенштейновые особенности, X можно продеформировать в гладкое (см. [Na]) и, таким образом, $H^3 \leq 64$. В случае, когда X имеет терминальные особенности, из рассмотрения канонического накрытия X следует, что $H^3 \leq \frac{64}{I}$.

Существуют примеры трёхмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями и $H^3 = 72$, например, конус над антиканонически вложенной поверхностью дель Пеццо степени 9 (см. [Ис2]).

В случае, когда X имеет негоренштейновые терминальные фактор-особенности, из классификации следует, что $H^3 \leq 24$, причём равенство достигается для фактора $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ по инволюции, имеющей конечное число неподвижных точек (см. [San]).

В работах [Fa2] и [Fa3] Дж. Фано исследовал нормальные трёхмерные многообразия с гиперплоскими сечениями – поверхностями типа $K3$ и Энриквеса соответственно. В главе IV мы показали, что с точностью до обобщённых конусов эти многообразия удовлетворяют условиям Теоремы 1.1. Интересно отметить, что Дж. Фано гипотетически утверждал, что $H^3 \leq 72$ в горенштейновом случае и $H^3 \leq 24$ в негоренштейновом.

§2. Многообразия Фано с непустым базисным множеством.

Зафиксируем трёхмерное многообразие Фано X, такое что X имеет канонические горенштейновы особенности. Положим $H = -K_X$. Допустим, что $Bs(|H|) \neq \emptyset$. Этот параграф посвящён доказательству следующей теоремы.

Теорема 2.1. *$H^3 \leq 46$.*

Для доказательства Теоремы 2.1 нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Будем считать далее, что $H^3 > 2$. Из работы [Sh] следует, что $Bs(|H|)$ состоит из гладкой рациональной кривой $Z \in X$, которая не пересекает множество особых точек многообразия X. Пусть $f : W \to X$ – раздутие кривой Z. Легко видеть, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi_{|H|}"] & & S \end{tikzcd},$$

где морфизм g является расслоением на эллиптические кривые.

Положим $F = f^{-1}(Z)$. Тогда F – сечение g и $g|_F : F \to S$ – либо изоморфизм, либо стягивание исключительного сечения линейчатой поверхности $F \cong \mathbb{F}_n$.

Пусть E и G – поверхности, заметаемые слоями морфизма g, проходящими через слой и исключительное сечение линейчатой поверхности F соответственно. Оставим без доказательстваа следующую простую лемму.

Лемма 2.2. *Выполнено соотношение*

$$K_W \sim -G - \frac{m+n}{2}E,$$

где $m = \frac{H^3+2}{2}$, причём если S особо, то $m = n$.

Лемма 2.3. *$Bs(|E|)$ не содержит кривых.*

Доказательство. Если поверхность S неособа, то очевидно $Bs(|E|) = \emptyset$.

Предположим, что поверхность S особа и $Bs(|E|) \neq \emptyset$. Тогда

$$Bs(|E|) \cdot F = Bs(|E|) \cdot f^{-1}(|H|) = 0$$

и из обильности дивизора H следует необходимое утверждение. $\square$

Из Леммы 2.3 следует, что $Bs(|E|) \neq \emptyset$ только если E не является $\mathbb{Q}$-Картье дивизором.

Лемма 2.4. *Пусть $q : U \to W$ – малый морфизм, такой что $E' = q^{-1}(E)$ – q-обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор (см. [Ka1]). Тогда линейная система $|E'|$ свободна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$Bs(|E'|)) = E'_1 \cap E'_2$$

для достаточно общих дивизоров E'_1 и E'_2 из линейной системы $|E'|$ и $Bs|E'|$ лежит в слоях морфизма

$$g \circ q|_{E'_1} : E'_1 \to \mathbb{P}^1.$$

Форма пересечения кривых в слоях морфизма $g \circ q|_{E'_1}$ полуотрицательно определена. Откуда следует неравенство

$$E'^3 \leq 0.$$

Но $E'_1 \cap E'_2$ лежит в слоях морфизма q и, по q-обильности дивизора E',

$$E'^3 > 0.$$

□

Из доказательства Леммы 2.4 следует, что можно в оставшейся части этого параграфа считать, что линейная система $|E|$ свободна, заменяя где нужно многообразие W на его “малое раздутие”.

Лемма 2.5. *Выполнено неравенство*

$$\frac{m+n}{2} \leq 12.$$

Доказательство. Мы вновь отступим от соглашений главы I и рассмотрим “классическую” лог пару

$$(K_W, \gamma(F+G+\frac{m+n}{4}E_1+\frac{m+n}{4}E_2)), \tag{2.1}$$

где $\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$, E_1 и E_2 – два достаточно общих дивизора из линейной системы $|E|$.

Для $\gamma < 1$ хорошо известно, что множество лог канонических особенностей[6] лог пары (2.1) связно. Действительно, рассмотрим её лог разрешение $r : V \to W$. Выполнено соотношение

$$K_V + r^*(f^*((1-\gamma)H)) \sim_{\mathbb{Q}} r^*(K_W + f^*(H)) - \sum_{i=1}^{k} b_i B_i + \sum_{j=1}^{l} d_j D_j,$$

где B_i и D_j – неприводимые дивизоры на многообразиии V, b_i и d_j – положительные рациональные числа, а дивизоры D_j r-исключительны. Нужно показать связность множества

$$A = -\lceil - \sum_{i=1}^{k} a_i E_i \rceil.$$

Заметим, что

$$f^*(H) = F + G + \frac{m+n}{2}E.$$

В окрестности поверхности F можно считать r изоморфизмом. Тогда

$$A = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } \gamma < \dfrac{4}{m+n}, \\ \{E_1, E_2\}, \text{ если } \gamma \geq \dfrac{4}{m+n}. \end{cases}$$

[6]Определение множества лог канонических особенностей содержится в работе [Ka2].

По теореме об обращении в нуль (см. [KaMaMa])

$$H^1(r^*(K_W+f^*(H))+\lceil -\sum_{i=1}^{k} b_iB_i\rceil+\lceil \sum_{j=1}^{l} d_jD_j\rceil)=0.$$

Последнее влечёт сюрьективность

$$H^0(r^*(F)+\lceil \sum_{j=1}^{l} d_jD_j\rceil)\to H^0((r^*(F)+\lceil \sum_{j=1}^{l} d_jD_j\rceil)|_A)\to 0,$$

но в силу r-исключительности дивизоров D_j и неподвижности дивизора F

$$H^0(r^*(F)+\lceil \sum_{j=1}^{l} d_jD_j\rceil)=\mathbb{C}.$$

Теперь покажем, что для

$$\gamma=\frac{1}{6+\epsilon} \text{ и } 1\gg\epsilon>0$$

множество лог канонических особенностей лог пары (2.1) несвязно.

Во-первых, в нём содержатся дивизоры E_1 и E_2. Во-вторых, в окрестности поверхности F утверждение тривиально. Следовательно, достаточно показать, что множество лог канонических особенностей лог пары

$$(K_W,\frac{1}{6+\epsilon}G) \tag{2.2}$$

не имеет элементов коразмерности 2, не лежащих в слоях морфизма g.

Легко видеть, что в коразмерности 2 особенности пары (2.2), не лежащие в слоях морфизма g, это в точности особенности лог пары

$$(K_{E_1},\frac{1}{6+\epsilon}G\cap E_1). \tag{2.3}$$

Заметим, что кривая $G\cap E_1$ – некратный неприводимый слой эллиптического расслоения $g|_{E_1}$ и поверхность E_1 имеет канонические особенности, поскольку мы можем считать линейную систему $|E|$ свободной. Как легко подсчитать непосредственно, лог пара (2.3) будет лог терминальной если

$$\gamma<1,\frac{5}{6},\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$$

и полный прообраз $G\cap E_1$ на минимальном разрешении поверхности E_1 есть вырожденный слой эллиптической поверхности типа

$$\text{стабильный слой}\,,II,III,IV,I^*_{b\geq 0},IV^*,III^*,II^*$$

соответственно. $\square$

Доказательство Теоремы 2.1. Из Лемм 2.2 и 2.5 следует, что

$$H^3 = 2m - 2 \leq 2(24 - n) - 2 \leq 46.$$

$\square$

Заметим, что если X имеет терминальные особенности, то из доказательства Леммы 2.5 следует, что $H^3 \leq 6$, поскольку можно в лог паре 2.1 положить

$$\gamma = \frac{5}{6+\epsilon} \text{ и } 1 \gg \epsilon > 0.$$

Следствие 2.6. *Если $H^3 \geq 48$, то возможны следующие варианты:*

(1) *H очень обилен,*
(2) *линейная система $|H|$ задаёт двулистное накрытие многообразия минимальной степени.*

Мы опустим доказательство Следствия 2.6, поскольку оно без труда получается из Теоремы 2.1 и результатов работ [Ис2] и [Sh].

§3. Гиперэллиптические и тригональные многообразия Фано.

Пусть, как и в предыдущем параграфе, X – трёхмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями и $H = -K_X$. В этом параграфе мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть линейная система $|H|$ свободна и степень морфизма $\phi_{|H|}$ равна 2. Тогда $H^3 \leq 16$.*

Теорема 3.2. *Пусть дивизор $-K_X$ очень обилен и общий элемент семейства кривых $\{H^2\}$ есть неприводимая гладкая тригональная кривая. Тогда $H^3 \leq 54$.*

Многообразия, удовлетворяющие условиям Теоремы 3.1, принято называть гиперэллиптичными, а многообразия, удовлетворяющие условиям Теоремы 3.2, принято называть тригональными.

Для доказательства Теорем 3.1 и 3.2 нам понадобится одна лемма, чьё доказательство принадлежит М.Риду (см. [Ис2]).

Лемма 3.3. *Пусть*

$$V \cong Proj(\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)) \text{ и } Y_j \cong Proj(\oplus_{i=j}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)),$$

где $d_1 \geq \ldots \geq d_m$, $d_1 > d_m$ и $m \geq j > 1$. Отождествим Y_j с подмногообразием в V при вложении определяемым естественной проекцией $\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i) \to \oplus_{i=j}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$. Пусть $s \in H^0(\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(a) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)))$, где $f : V \to \mathbb{P}^1$ естественная проекция, a и b целые числа. Тогда s имеет на Y_j нуль порядка не меньше q в том и только том случае, если выполняется следующее неравенство:

$$ad_j + b + (d_1 - d_j)(q - 1) < 0.$$

Доказательство Теоремы 3.1. В силу Следствия 2.6 $\phi_{|H|}(X)$ есть многообразие минимальной степени. Хорошо известно, что тогда

$$\phi_{|H|}(X) \cong \phi_{|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}|}(V),$$

где

$$V \cong Proj(\oplus_{i=1}^{3}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i))$$

и $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$.

Легко видеть, что необходимое нам неравенство выполнено если $d_1 = d_2 = d_3$. Следовательно, можно считать, что $d_1 > d_3$.

Если многообразие $\phi_{|H|}(X)$ особо в коразмерности 2, то из работы [SD] следует, что $H^3 \leq 8$. Следовательно, можно считать, что $d_2 \neq 0$.

Заметим, что если $\phi_{|H|}(X)$ особо, то $d_3 = 0$ и, в обозначениях Леммы 3.3, морфизм $\phi_{|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(1)|}$ стягивает кривую Y_3.

Пусть D есть собственный прообраз на многообразии V дивизора ветвления двулистного накрытия $\phi_{|H|}$. В обозначениях Леммы 3.3,

$$D \sim \mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(4) - f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2(d_1 + d_2 + d_3 - 2))).$$

Рассматривая нормализацию расслоенного произведения $X \times_{\phi_{|H|}(X)} V$, легко увидеть, что поверхность D содержит Y_3 с кратностью не больше, чем 2. Учитывая приведённость D, видим, что D содержит Y_2 с кратностью не больше, чем 1. Из Леммы 3.3 следует, что

$$d_2 - d_1 - 2d_3 + 4 \geq 0,$$

$$4 - 2d_2 \geq 0.$$

Откуда $H^3 = 2(d_1 + d_2 + d_3) \leq 16$. □

Доказательство Теоремы 3.2. Отождествим X с его антиканоническим образом. Как и в случае гладкого X (см. [Ис2]) можно показать, что пересечение квадрик в $\mathbb{P}^{\frac{H^3}{2}+2}$, содержащих X, есть

$$W \cong \phi_{|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}|}(V),$$

где

$$V \cong Proj(\oplus_{i=1}^{4}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i))$$

и $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 0$.

Если $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$, то $H^3 \leq 18$. Следовательно, можно считать, что $d_1 > d_4$.

Пусть

$$Z = Sing(W) \cong \mathbb{P}^k \text{ для } k \leq 2.$$

Если $k \neq 0$, то многообразие W есть конус с вершиной Z. Более того, из работы [Ис2] следует, что

$$Z \cap X \subset Sing(X).$$

Заметим, что если $k = 2$, то $Z \cap X$ – кривая, $d_2 = d_3 = d_4 = 0$ и, в обозначениях Леммы 3.3, морфизм $\phi_{|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(1)|}$ стягивает поверхность Y_2 на Z и в общей точке кривой Z является раздутием.

Пусть
$$\bar{X} = \phi^{-1}_{|\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(1)|}(X).$$
Учитывая формулу суб-присоединения (см. [KaMaMa]) и гладкость многообразия V, получаем что $\bar{X}$ имеет канонические особенности и, в обозначениях Леммы 3.3,
$$\bar{X} \sim \mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(3) + f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2 - d_1 - d_2 - d_3 - d_4)).$$

Многообразие Y_2 не принадлежит $\bar{X}$ в силу неприводимости последнего. Многообразие $\bar{X}$ содержит поверхность Y_3 с кратностью не больше, чем 1, а кривую Y_4 с кратностью не больше, чем 2. Из Леммы 3.3 следует, что
$$2d_2 - d_1 - d_3 - d_4 + 2 \geq 0,$$
$$d_3 - d_2 + 2 \geq 0,$$
$$2 - d_2 - d_3 + d_1 \geq 0.$$
Откуда $H^3 = 2 + 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \leq 54$. □

§4. Многообразия Фано, заметаемые "прямыми".

Воспользуемся обозначениями параграфа 3. В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть через общую точку $v \in X$ проходит неприводимая кривая C_v, такая что $H \cdot C_v = 1$. Тогда $H^3 \leq 46$.*

Для доказательства Теоремы 4.1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть на многообразии X существует точка x, такая что общую точку $v \in X$ соединяет с точкой x неприводимая кривая C_v, такая что $H \cdot C_v \leq d$. Тогда $H^3 \leq d^3$.*

Доказательство. Из теоремы Римана-Роха следует, что
$$h^0(\mathcal{O}_X(mH)) = \frac{m^3 H^3}{3!} + O(m^2) \text{ для } m \gg 0.$$
Следовательно, если $H^3 > d^3$, то для $m \gg 0$ существует дивизор $D \in H^0(\mathcal{O}_X(mH))$, имеющий в точке x кратность не меньше $(md + 1)$. Таким образом, поверхность D содержит все кривые C_v, что невозможно. □

Доказательство Теоремы 4.1. Если $Bs(|H|) \neq \emptyset$, то по Теореме 2.1 $H^3 \leq 46$. Поэтому, будем считать, что линейная система $|H|$ свободна и существует семейство $\{C\}$, состоящее из неприводимых приведённых кривых C, таких что $H \cdot C = 1$ и через общую точку многообразия X проходит кривая из $\{C\}$.

Из Следствия 2.5 следует, что каждая кривая C рациональна. Рассмотрим RC-расслоение[7] $\phi : X \dashrightarrow W$, ассоциированное с $\{C\}$.

[7] Определение и основные свойства RC-расслоения содержится в работах [KoMiMo1] и [KoMiMo2].

Если $dim(W) = 0$, из работы [KoMiMo2] следует, что две общие точки X могут быть соединены цепочкой не более чем 3 кривых из $\{C\}$, которые можно склеить и получить новое семейство $\{C'\}$, такое что две общие точки X могут быть соединены одной кривой из семейства $\{C'\}$. Применение Леммы 4.2 к семейству $\{C'\}$ даёт неравенство $H^3 \leq 26$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & W \end{tikzcd},$$

разрешающую неопределённости отображения ϕ, такую что многообразие $\tilde{X}$ гладкое.

Если $dim(W) = 1$, то пусть S – общий слой морфизма $\tilde{\phi}$, а C – общая кривая из семейства $\{C\}$. Семейство кривых $\{\pi^{-1}(C)\}$ определяет на поверхности S семейство кривых $\{C_S\}$. Общая кривая C_S из $\{C_S\}$ неприводимая, гладкая, рациональная, $-K_S C_S \leq 1$ и $C_S^2 > 0$, что противоречит формуле присоединения.

Осталось рассмотреть случай $dim(W) = 2$. Пусть C есть общая кривая из семейства $\{C\}$. Тогда $\pi^{-1}(C)$ – общий слой морфизма $\tilde{\phi}$ и

$$-K_{\tilde{X}}\pi^{-1}(C) \leq 1,$$

что противоречит равенству

$$-K_{\tilde{X}}\pi^{-1}(C) = 2,$$

поскольку общий слой $\tilde{\phi}$ есть $\mathbb{P}^1$. $\square$

§5. Двойная проекция из общей точки.

В этом параграфе мы докажем Теорему 1.1 используя результаты параграфов 2-4 и следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть в Теореме 1.1 $I = 1$, $H^3 \geq 56$ и $f : W \to X$ есть раздутие достаточно общей точки $v \in X$ с исключительным дивизором E. Тогда дивизор $f^*(H) - 2E$ численно эффективен и объёмен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что дивизор $f^*(H) - 2E$ численно эффективен. Из Следствия 2.6 и Теоремы 3.1 следует, что дивизор H очень обилен. Отождествим многообразие X с его антиканоническим образом.

Если $(f^*(H) - 2E) \cdot C < 0$ для некоторой кривой $C \subset W$, то

$$v \in f(C) \subset T_v(X) \cap X,$$

где $T_v(X)$ обозначает касательное пространство к многообразию X в точке v. Из Теоремы 3.2, теоремы Нётера-Энриквеса-Петри (см. [Шо1]) и работы [Ис2] следует, что многообразие X высекается квадриками. Откуда легко показать, что C – прямая на многообразии X, проходящая через точку v, но по Теореме 4.1 это невозможно. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1. Как уже упоминалось в параграфе 1, достаточно доказать Теорему 1.1 при условии $I = 1$. Пусть $f : W \to X$ – раздутие общей точки $v \in X$. Если $H^3 \geq 56$, то по Лемме 5.1 дивизор

$$K_W \sim f^*(H) - 2E$$

численно эффективен и объёмен. По теореме о свободе от базисных точек (см. [KaMaMa]) для $n \gg 0$ линейная система $|n(f^*(H) - 2E)|$ свободна и задаёт бирациональный морфизм

$$\phi_{|n(f^*(H)-2E)|} : W \to X',$$

такой что многообразие X' имеет канонические особенности,

$$f^*(H) - 2E = \phi^*_{|n(f^*(H)-2E)|}(H'),\ -K_{X'} \sim H' \text{ и } {H'}^3 = H^3 - 8,$$

где H' – обильный дивизор Картье.

Если утверждение Теоремы 1.1 неверно, то можно повторить данную перестройку 17 раз. Таким образом, можно считать, что f есть раздутие 17 точек X в общем положении.

Общий дивизор D в линейной системе $|-K_W|$ приведён, неприводим, имеет лишь канонические особенности и является поверхностью типа K3 (см. [Re]). Поскольку дивизор $-K_W$ f-обилен, то морфизм f определяет на поверхности D стягивание 17 кривых, которые попарно не пересекаются, что невозможно по [Ни]. $\square$

ГЛАВА VII

ПОВЕРХНОСТИ ДЕЛЬ ПЕЦЦО С НЕРАЦИОНАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

§1. Основные результаты главы VII.

В этой главе мы построим эффективный алгоритм для нахождения всех нормальных поверхностей X с $Div(X)\otimes\mathbb{Q}/\equiv\,=\mathbb{Q}$, численно обильным каноническим классом и нерациональными особенностями. Мы докажем, что каждая такая поверхность единственным образом представляется в виде стягивания исключительного сечения на возможно особой относительно минимальной линейчатой поверхности с нерациональной базой.

Работы Сакая естественным образом переносят вопросы классификации поверхностей в категорию нормальных поверхностей. На таких поверхностях можно формально определить численный обратный образ дивизора Вейля, который обладает хорошими функториальными свойствами и позволяет построить пересечения дивизоров Вейля над полем $\mathbb{Q}$ (см. [Sak]). Численные поверхности дель Пеццо и относительно минимальные линейчатые поверхности играют в классификации поверхностей по Сакаю ту же роль, что и гладкие поверхности с размерностью Кодаиры $-\infty$ в классификации гладких алгебраических поверхностей.

§2. Линейчатые поверхности.

Сформулируем одно следствие из классического учебника [Ha1].

Теорема 2.1. *Пусть $\tilde{X}$ это гладкая поверхность, $\tilde{\pi}:\tilde{X}\to C$ это сюрьективный морфизм на гладкую кривую C, такой что каждый слой морфизма $\tilde{\pi}$ изоморфен $\mathbb{P}^1$. Известно, что тогда*

1. *$\tilde{X}\cong Proj(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга 2, такой что $H^0(\mathcal{E})\neq 0$ и $H^0(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})=0\ \forall\mathcal{F}\in Pic(\tilde{X})$ с $deg(\mathcal{F})<0$,*
2. *$e=-deg(\mathcal{E})$ является инвариантом поверхности $\tilde{X}$,*
3. *существует сечение C_0 линейчатой поверхности $\tilde{\pi}:\tilde{X}\to C$, такое что $C_0^2=-e$,*
4. *$Pic(\tilde{X})\cong\mathbb{Z}C_0\oplus\tilde{\pi}^*Pic(C)$,*
5. *$K_{\tilde{X}}\sim -2C_0+\tilde{\pi}^*(K_C+\wedge^2\mathcal{E})$, в частности, $K_{\tilde{X}}\equiv -2C_0+(2g(C)-2-e)F$, где F это слой морфизма $\tilde{\pi}$,*
6. *если $e>2g(C)-2$, то пучок $\mathcal{E}$ разложим,*
7. *$C_\lambda^2\geq -e$ для любого сечения C_λ линейчатой поверхности $\tilde{\pi}:\tilde{X}\to C$.*

Мы будем называть поверхность $\hat{X}$ линейчатой, если существует сюрьективный морфизм $\hat{\pi}$ поверхности $\hat{X}$ на кривую C, такой что общий слой морфизма $\hat{\pi}$ изоморфен $\mathbb{P}^1$. Заметим, что кривая C обязательно гладкая.

Как и в гладком случае, мы назовём линейчатую поверхность $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ относительно минимальной если каждый слой морфизма $\tilde{\pi}$ неприводим, но возможно неприведён.

Лемма 2.2. *Для каждой линейчатой поверхности $\hat{\pi} : \hat{X} \to C$ существует бирациональный морфизм $\rho : \hat{X}/C \to \tilde{X}/C$, такой что линейчатая поверхность $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ относительно минимальна.*

Доказательство. Пусть F – приводимый слой морфизма $\hat{\pi}$. Тогда из работы [Be2] следует, что

(1) $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i)^2 \leq 0$,
(2) $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i)^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i = \lambda F$,

где F_i это компоненты слоя F и $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{Q}$. Значит, для любого собственного подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [1, n]$ форма пересечения дивизоров F_{i_j} отрицательно определена, следовательно, дивизоры F_{i_j} могут быть стянуты (см. [Sak]). Отсюда мы сразу получаем необходимый результат. $\square$

Лемма 2.3. *Относительно минимальной линейчатой поверхности $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ с сечением C_0 можно канонически сопоставить гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность $\tilde{\pi}^s : \tilde{X}^s \to C$ такую, что коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & \tilde{X}^s \arrow[dl, "\tilde{\pi}^s"] \\ & C & \end{tikzcd},$$

где морфизм ϕ бирационален.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \tilde{X} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & \tilde{X}^s, \arrow[dl, "\tilde{\pi}^s"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

где $\hat{X}$ – минимальное разрешение особенностей поверхности $\tilde{X}$, а $\tilde{X}^s$ – гладкая относительно минимальная над C модель $\hat{X}$. Нужно показать, что можно канонически выбрать морфизм q.

В слоях морфизма p нет -1-кривых, но поверхность $\tilde{\pi} \circ p : \hat{X} \to C$ не относительно минимальная, следовательно, в каждом приводимом слое морфизма $\tilde{\pi} \circ p$ лежит ровно одна -1-кривая, являющаяся собственным прообразом соответствующего слоя морфизма $\tilde{\pi}$. Выберем q так, чтобы $q = q_1 \circ \ldots \circ q_K$ для некоторого $K \in \mathbb{N}_{\geq 0}$[8], где

[8] Если $K = 0$, то $\hat{X} \cong \tilde{X} \cong \tilde{X}^s$.

(1) морфизм $q_i : \hat{X}^i \to \hat{X}^{i-1}$ ($\hat{X}^K = \hat{X}$ и $\hat{X}^0 = \tilde{X}^s$) есть композиция раздутий в слое морфизма $\tilde{\pi} \circ q_1 \ldots \circ q_{i-1}$ над точкой $x_i \in C$ для $i \in [1, K]$ и попарно различных x_i,

(2) $q_i^*(q_i \ldots \circ q_K(p^{-1}(C_0))) \neq q_i^{-1}(q_i \ldots \circ q_K(p^{-1}(C_0)))$ для $i \in [1, K]$.

Легко видеть, что этим морфизм q определён однозначно. $\square$

Из доказательства Леммы 2.3 следует лёгкий алгоритм построения всех относительно минимальных линейчатых поверхностей. Достаточно взять гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность, и с некоторыми слоями сделать следующую перестройку: раздуть точку на слое, раздуть точку пересечения раздутой кривой и собственного прообраза слоя (двух -1-кривых), последовательно делать раздутия точки на текущей -1-кривой, а затем стянуть все кривые в слое за исключением единственной -1-кривой.

Заметим, что неоднозначность обратного перехода от особой поверхности к гладкой состоит в том, что при первом раздутии точки в слое неособой линейчатой поверхности появляются две -1-кривые.

Теорема 2.4. *Пусть $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ – относительно минимальная линейчатая поверхность. Тогда*

(1) *$\tilde{X}$ проективна,*

(2) *особенности поверхности $\tilde{X}$ рациональны,*

(3) $R^1\tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$,

(4) *все слои расслоения $\tilde{\pi}$ с приведённой структурой гладкие и изоморфны $\mathbb{P}^1$,*

(5) $Div(\tilde{X}) \otimes \mathbb{Q}/\equiv\, = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$.

Доказательство. Проективность поверхности $\tilde{X}$ доказана в работе [Br]. Последнее утверждение следует из работы [Sak]. Для доказательства оставшихся утверждений рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
\tilde{X} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & \tilde{X}^s, \arrow[dl, "\tilde{\pi}^s"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

где морфизм p – минимальное разрешение особенностей поверхности $\tilde{X}$, а q – бирациональный морфизм на относительно минимальную гладкую линейчатую поверхность.

Известно, что

$$R^1\tilde{\pi}^s_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}^s}) = 0, R^0\tilde{\pi}^s_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}^s}) = \mathcal{O}_C, R^1 q_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0 \text{ и } R^0 q_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = \mathcal{O}_{\tilde{X}^s}.$$

Из спектральной последовательности Лере следует, что

$$R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0, R^0(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = \mathcal{O}_C.$$

Пусть $F = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i$, где F_i – неприводимые компоненты слоя морфизма $\tilde{\pi} \circ p$ и все $a_i \in \mathbb{N}$. Тогда равенство $R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0$ влечёт $H^1(\mathcal{O}_F) = 0$. Действительно, пусть $\mathcal{I}_F$ пучок идеалов схемы F, тогда из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{I}_F \to \mathcal{O}_{\hat{X}} \to \mathcal{O}_F \to 0$$

следует точная последовательность

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & H^1(\mathcal{O}_F) & & \\ \| & & \| & & \\ R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) & \to & R^1(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{O}_F) & \to & R^2(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{I}_F) \end{array},$$

но $R^2(\tilde{\pi} \circ p)_*(\mathcal{I}_F) = 0$ из соображений размерности. Отсюда следует рациональность особенностей $\tilde{X}$ (см. [Ar]), рациональность и гладкость каждого слоя расслоения $\tilde{\pi}$ с приведённой структурой и рациональность особенностей любой поверхности, полученной из $\hat{X}$ стягиванием компонент слоёв морфизма $\tilde{\pi} \circ p$.

Мы показали, что

$$R^1 p_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0 \text{ и } R^0 p_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}.$$

Спектральная последовательность Лере влечёт

$$R^1 \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0 \text{ и } R^0 \tilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \mathcal{O}_C.$$

□

Заметим, что из доказательства Теоремы 2.4 следует, что особенности линейчатой поверхности рациональны.

§3. Численные поверхности дель Пеццо.

Напомним, что дивизор Вейля D на поверхности X называется численно обильным, если для каждой кривой C на поверхности X выполнены неравенства $D \cdot C > 0$ и $D^2 > 0$.

Зафиксируем поверхность X, такую что дивизор $-K_X$ численно обилен. Поверхность X принято называть численной поверхностью дель Пеццо. В работах [Sak] и [Br] доказано следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Поверхность X проективна и*

$$H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X) = 0.$$

Лемма 3.2. *Пусть $f : \hat{X} \to X$ – разрешение особенностей поверхности X. Тогда*

$$\kappa(\hat{X}) = -\infty, H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = H^0(R^1 f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) \text{ и } H^2(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что линейная система $|K_{\hat{X}}|$ содержит эффективный дивизор D. Тогда дивизор $-K_X = f_*(-D)$ численно обилен, что противоречит проективности поверхности X (Лемма 3.1). Таким образом, $\kappa(\hat{X}) = -\infty$.

Учитывая Лемму 3.1, нормальность X и спектральную последовательность Лере, получаем точную последовательность

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & H^1(\mathcal{O}_X)=0 & & & & H^2(\mathcal{O}_X)=0 & & & \\
 & \| & & & & \| & & & \\
0\to & H^1(R^0f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) & \to H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) & \to & H^0(R^1f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) & \to H^2(R^0f_*(\mathcal{O}_{\hat{X}})) & \to H^2(\mathcal{O}_{\hat{X}}) & \to 0 &
\end{array},
$$

откуда следуют оставшиеся утверждения. $\square$

Следствие 3.3. *Численная поверхность дель Пеццо рациональна тогда и только тогда, когда её особенности рациональны.*

§4. Численные поверхности дель Пеццо с нерациональными особенностями.

В этом параграфе мы разберём основные свойства поверхностей из параграфа 3, но с дополнительным условием – нерациональностью особенностей. Воспользуемся обозначениями параграфа 3 и предположим, что особенности поверхности X нерациональны.

Теорема 4.1. *Пусть $f : \hat{X} \to X$ – минимальное разрешение особенностей поверхности X. Тогда существует морфизм $\hat{\pi} : \hat{X} \to C$ на кривую C, определяющий на поверхности $\hat{X}$ структуру линейчатой поверхности, такой что*

$$g(C) = H^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) \neq 0,$$

и морфизм f стягивает одну гладкую кривую E, которая является сечением морфизма $\hat{\pi}$.

Доказательство. Ввиду Леммы 3.2 и Следствия 3.3 достаточно доказать последнее утверждение.

Морфизм f должен стягивать хотя бы одну кривую, не лежащую в слоях морфизма $\hat{\pi}$, так как иначе по замечанию после доказательства Теоремы 1.4 особенности X были бы рациональные. Пусть E_j $(j \in [1,k])$ – неприводимые приведённые кривые, не лежащие в слоях морфизма $\hat{\pi}$, которые стягиваются морфизмом f. Тогда

$$K_{\hat{X}} \equiv f^*(K_X) - \sum_{i=1}^{n} a_i F_i - \sum_{j=1}^{k} b_j E_j,$$

где F_i – f-исключительные кривые, лежащие в слоях морфизма $\hat{\pi}$, а a_i и b_j – положительные рациональные числа. По формуле присоединения для кривой E_r

$$(K_{\hat{X}} + E_r) \cdot E_r \geq 2g(\tilde{E}_r) - 2,$$

где $\tilde{E}_r$ – нормализация кривой E_r. По формуле Гурвица

$$2g(\tilde{E}_r) - 2 \geq 2g(C) - 2 \geq 0,$$

и, следовательно,

$$(1 - b_r)E_r^2 \geq (-\sum_{i=1}^{n} a_i F_i - \sum_{j=1 \neq r}^{k} b_j E_j - (b_r - 1)E_r) \cdot E_r \geq 0.$$

Таким образом, все $b_j \geq 1$.

Если L – слой морфизма $\hat{\pi}$, то

$$-2 = K_{\hat{X}} \cdot L = (f^*(K_X) - \sum_{i=1}^{n} a_i F_i - \sum_{j=1}^{k} b_j E_j) \cdot L < (-\sum_{j=1}^{k} b_j E_j) \cdot L,$$

следовательно, $k = 1$, $b = b_1 < 2$ и поверхность

$$E = E_1 \cong \tilde{E}_1$$

является сечением линейчатой поверхности $\hat{\pi} : \hat{X} \to C$. $\square$

Теорема 4.2. *В обозначениях Теоремы 4.1 пусть нам дана такая коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\rho} & \tilde{X}^s \\ & & \\ \hat{\pi} \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & & \\ & C & \end{array},$$

что линейчатая поверхность $\tilde{\pi}^s : \tilde{X}^s \to C$ гладкая и относительно минимальная над кривой C. Тогда $\tilde{X}^s \cong Proj(\mathcal{E})$, $e > 2g(C) - 2$, $\rho(E)^2 = -e$, где $\mathcal{E}$ – разложимый локально свободный пучок ранга 2, а e – инвариант поверхности $Proj(\mathcal{E})$.

Доказательство. Пусть C_0 – сечение линейчатой поверхности $\tilde{\pi}^s : \tilde{X}^s \to C$, такое что $C_0^2 = -e$. Тогда

$$\rho(E) \equiv C_0 + dF,$$

где F – слой морфизма $\tilde{\pi}^s$ и $d \in \mathbb{N}$ (см. Теорему 2.1). В обозначениях Теоремы 4.1

$$\rho(\sum_{i=1}^{n} a_i F_i) \equiv aF$$

и

$$K_{\tilde{X}^s} + \rho(\sum_{i=1}^{n} a_i F_i + bE) \equiv (b - 2)C_0 + (2g(C) - 2 - e + a + db)F,$$

где $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Если $C_0 \neq \rho(E)$, то $\rho(E) \cdot C_0 = d - e \geq 0$ и

$$\begin{array}{ccc} (K_{\hat{X}} + \sum_{i=1}^n a_i F_i + bE) \cdot \rho^*(C_0) & = & f^*(K_X) \cdot \rho^*(C_0) < 0 \\ \| & & \\ (K_{\tilde{X}^s} + \rho(\sum_{i=1}^n a_i F_i + bE)) \cdot C_0 & = & bd - be + 2g(C) - 2 + e + a \end{array}.$$

Но если $e \geq 0$, то

$$bd - be + 2g(C) - 2 + e + a > b(d-e) \geq 0.$$

Если $e < 0$, то

$$bd - be + 2g(C) - 2 + e + a > e(1-b) \geq 0.$$

Значит, $C_0 = \rho(E)$.

Заметим, что

$$\rho^{-1}(C_0) \neq \rho^*(C_0) \Rightarrow f^*(K_X) \cdot \rho^*(C_0) < 0,$$

поскольку в этом случае $\rho^*(C_0)$ содержит -1-кривую, которая не может быть стянута морфизмом f.

Рассмотрим ещё раз равенства

$$\begin{array}{ccc} (K_{\hat{X}} + \sum_{i=1}^n a_i F_i + bE) \cdot \rho^*(C_0) & = & f^*(K_X) \cdot \rho^*(C_0) \\ \| & & \\ (K_{\tilde{X}^s} + \rho(\sum_{i=1}^n a_i F_i + bE)) \cdot C_0 & = & be + 2g(C) - 2 + e + a \end{array}.$$

Тогда

$$C_0^2 = -e \geq 0 \Rightarrow \rho^{-1}(C_0) \neq \rho^*(C_0)$$

и

$$0 > f^*(K_X) \cdot \rho^*(C_0) = (1-b)e + 2g(C) - 2 + a \geq 0.$$

Следовательно, $e > 0$ и

$$0 \leq f^*(K_X) \cdot \rho^*(C_0) = (1-b)e + 2g(C) - 2 + a > -e + 2g(C) - 2.$$

Откуда по Теореме 2.1 получаем, что пучок $\mathcal{E}$ разложим. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$. Тогда X является стягиванием сечения относительно минимальной линейчатой поверхности $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$, такой что и $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = g(C) > 0$. Более того, поверхность $\tilde{X}$ определяется поверхностью X единственным образом.*

Доказательство. Из Теоремы 4.1 следует существование диаграммы

$$\begin{array}{ll} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\pi}} C \\ f \downarrow & \\ X & \end{array},$$

такой что морфизм f есть минимальное разрешение особенностей поверхности X, морфизм $\hat{\pi}$ задаёт структуру линейчатой поверхности на $\hat{X}$, $g(C) > 0$, f стягивает одно сечение и компоненты приводимых слоёв расслоение $\hat{\pi}$.

Рассмотрим приводимые слои морфизма $\hat{\pi}$ –

$$F^{\lambda} = \sum_{i=1}^{j_{\lambda}} a_i F_i^{\lambda}, \text{ где } (\lambda \in [1, N] \text{ и } a_i \in \mathbb{N})$$

Тогда

$$rk(Div(\hat{X}) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 2 + \sum_{\lambda=1}^{N} (j_{\lambda} - 1).$$

С другой стороны,

$$rk(Div(\hat{X}) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1 + \text{число кривых, стягиваемых морфизмом } f.$$

Следовательно, морфизм f не стягивает только одну компоненту каждого приводимого слоя, и существует следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X} & \xrightarrow{p} & \tilde{X} & \xrightarrow{g} & X \\ \hat{\pi} \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} & & \\ & C & & & \end{array},$$

где $f = g \circ p$, $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ – относительно минимальная линейчатая поверхность, и морфизм g стягивает её сечение.

Так как $h^1(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = g(C)$ и по Теореме 2.4 особенности $\tilde{X}$ рациональны, то из спектральной последовательности Лере следует, что $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = g(C) > 0$.

Единственность поверхности $\tilde{X}$ следует из её построения. $\square$

Из Теорем 4.1-3.3 и Леммы 2.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.4. *В условиях Теоремы 4.3 поверхности X можно канонически сопоставить такую гладкую относительно минимальную линейчатую поверхность $\tilde{\pi}^s : \tilde{X}^s \to C$, что*

$$\tilde{X}^s \cong Proj(\mathcal{E})$$

для разложимого локально свободного пучка ранга 2 $\mathcal{E}$ с $e > 2g(C) - 2$, где e – инвариант линейчатой поверхности $Proj(\mathcal{E})$.

§5. Одна конструкция.

Пусть нам дана пара

$$(\hat{\pi} : \hat{X} \to C, C_0), \tag{5.1}$$

где $\hat{\pi} : \hat{X} \to C$ – гладкая линейчатая поверхность, а C_0 – её сечение. Мы будем говорить, что пара

$$(\hat{\pi}' : \hat{X}' \to C, C_0')$$

получена элементарным преобразованием ϕ над точкой $x \in C$ из пары (5.1) если существует бирациональный морфизм

$$\phi : \hat{X}'/S \to \hat{X}/S,$$

такой что поверхность $\hat{X}'$ гладкая, ϕ есть композиция раздутий в слое морфизма $\hat{\pi}$ над точкой $x \in C$, слой морфизма $\hat{\pi}$ над точкой $x \in C$ неприводим и содержит ровно одну -1-кривую $C_0' = \phi^{-1}(C_0)$ и $\phi^*(C_0) \neq C_0'$.

Мы скажем, что последовательность пар целых чисел

$$(\alpha_i^1, \alpha_i^2)$$

для $i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, обладают свойством (*), если $(\alpha_3^1, \alpha_3^2) = (1, 1)$, а для $i \geq 4$

$$\begin{cases} (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2), \text{ либо} \\ (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2, \alpha_{i-1}^2), \text{ либо} \\ (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (0, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2). \end{cases}$$

Пусть пара

$$(\hat{\pi}' : \hat{X}' \to C, C_0')$$

получена элементарным преобразованием ϕ над точкой $x \in C$ из пары (5.1). Введём следующие обозначения:

(1) $\hat{X}_0 = \hat{X}$, $\hat{\pi}_0 = \hat{\pi}$ и F_1 – слой морфизма $\hat{\pi}_0$ над точкой x,
(2) $\chi_{1,0} : \hat{X}_1 \to \hat{X}_0$ – раздутие точки $F_1 \cap C_0$, $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_0 \circ \chi_{1,0}$ и F_2 – исключительная кривая морфизма $\chi_{1,0}$,
(3) $\chi_{2,1} : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$ – раздутие точки $F_1 \cap F_2$, $\chi_{2,0} = \chi_{1,0} \circ \chi_{2,1}$, $\hat{\pi}_2 = \hat{\pi}_1 \circ \chi_{2,1}$ и F_3 – исключительная кривая морфизма $\chi_{2,1}$,
(4) $\chi_{i+1,i} : \hat{X}_{i+1} \to \hat{X}_i$ – раздутие точки на F_{i+1}, $\chi_{i+1,j} = \chi_{j+1,j} \circ \ldots \circ \chi_{i+1,i}$ если $j \leq i$, $\hat{\pi}_{i+1} = \hat{\pi}_i \circ \chi_{i+1,i}$ и F_{i+2} – исключительная кривая морфизма $\chi_{i+1,i}$,
(5) F^r – возможно неприведённый слой морфизма $\hat{\pi}_r$ над точкой x,
(6) $\hat{X}_N = \hat{X}'$, $\hat{\pi}_N = \hat{\pi}'$ и F_{N+1} – единственная -1-кривая в F^N,
(7) $C_0' = \chi_{N,0}^{-1}(C_0)$ и $\bar{F}_i = \chi_{N,i-1}^{-1}(F_i)$ для $i \in [1, N-1]$.

Сопоставим поверхности $\hat{X}'$ последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_i^2(\hat{X}')) \text{ для } i \in [3, N+1],$$

где $N+1$ – число неприводимых компонент в слое морфизма $\hat{\pi}'$ над точкой $x \in C$.

Рассмотрим поверхность $\hat{X}_{i+1}$ ($i \in [1, N-1]$). На ней выполнено соотношение

$$F^{i+1} \equiv a_{i+2} F_{i+2} + \sum_{j=1}^{i+1} a_j \chi_{i+1,j-1}^{-1}(F_j),$$

где F_{i+2} – единственная -1-кривая в F^{i+1}. Заметим, что F_{i+2} пересекает не больше двух неприводимых компонент F^{i+1}.

Пусть F_{i+2} пересекает $\chi_{i+1,k-1}^{-1}(F_k)$ и $\chi_{i+1,l-1}^{-1}(F_l)$, причём $\chi_{i+1,l-1}^{-1}(F_l)$ лежит в связной компоненте $F^{i+1}\backslash F_{i+2}$, которая пересекается с $\chi_{i+1,0}^{-1}(C_0)$, где $l \neq k$ и $k, l \in [1, i+1]$. Положим

$$(\bar{\alpha}_{i+2}^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_{i+2}^2(\hat{X}')) = (a_k, a_l).$$

Пусть F_{i+2} пересекает только $\chi_{i+1,k-1}^{-1}(F_k)$ среди компонент F^{i+1} ($k \in [1, i+1]$), тогда $k = i+1$. В этом случае положим

$$(\bar{\alpha}_{i+2}^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_{i+2}^2(\hat{X}')) = (0, a_{i+1}).$$

Из приведённой конструкции несложно вывести следующие две леммы, которые мы оставим без доказательства.

Лемма 5.1. *Последовательность пар целых чисел*

$$(\bar{\alpha}_i^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_i^2(\hat{X}')) \text{ для } i \in [3, N+1]$$

удовлетворяет условию (*).

Лемма 5.2. *Пусть последовательноть пар целых чисел* (α_i^1, α_i^2) *удовлетворяет условию (*) для* $i \in [3, N+1]$. *Тогда существует единственная пара*

$$(\hat{\pi}' : \hat{X}' \to C, C_0'),$$

полученная элементарным преобразованием ϕ *над точкой* $x \in C$ *из пары (5.1), такая что для всех* i

$$(\bar{\alpha}_i^1(\hat{X}'), \bar{\alpha}_i^2(\hat{X}')) = (\alpha_i^1, \alpha_i^2).$$

Мы скажем, что последовательность пар целых чисел (β_i^1, β_i^2) для $i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ двойственна к последовательности пар целых чисел (α_i^1, α_i^2), удовлетворяющей условию (*), если $(\beta_3^1, \beta_3^2) = (0, -1)$, а для $i \geq 4$

$$(\beta_i^1, \beta_i^2) = \begin{cases} (\beta_{i-1}^1, \beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1) \text{ если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2), \\ (\beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1, \beta_{i-1}^2) \text{ если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (\alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2, \alpha_{i-1}^2), \\ (0, \beta_{i-1}^1 + \beta_{i-1}^2 + 1) \text{ если } (\alpha_i^1, \alpha_i^2) = (0, \alpha_{i-1}^1 + \alpha_{i-1}^2). \end{cases}$$

§6. Классификация.

Пусть даны

(1) гладкая относительно минимальная линейчатая поверхность $\pi^0 : X^0 \to C$ с сечением C_0, такие что

$$-C_0^2 = e = deg(\mathcal{L}) > 2g(C) - 2$$

и для некоторого $L \in Pic(C)$

$$X^0 \cong Proj(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(L)),$$

(2) набор попарно различных точек $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C$, возможно пустой ($K = 0$),
(3) гладкие линейчатые поверхности $\pi^d : X^d \to C$ с сечениями $C_d \subset X^d$ для $d \in [1, K]$ такие, что каждая пара

$$(\pi^d : X^d \to C, C_d)$$

получена элементарным преобразованием ϕ_d над точкой $x_d \in C$ из пары

$$(\pi^{d-1} : X^{d-1} \to C, C_{d-1}).$$

Если $K \geq 1$, то конструкция из предыдущего параграфа ставит в соответствие каждой поверхности X^d последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^d), \bar{\alpha}_i^2(X^d)) \text{ для } i \in [3, N(d)+1]$$

и двойственную к ней последовательность пар целых чисел

$$(\bar{\beta}_i^1(X^d), \bar{\beta}_i^2(X^d)) \text{ для } i \in [3, N(d)+1],$$

где $N(d)+1$ это число неприводимых компонент слоя морфизма π^d над точкой x_d.

Поверхности X_K сопоставляется K последовательностей пар целых чисел

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) = (\bar{\alpha}_i^1(X^d), \bar{\alpha}_i^2(X^d))$$

и K последовательностей пар целых чисел

$$(\bar{\beta}_i^1(X^K, d), \bar{\beta}_i^2(X^K, d)) = (\bar{\beta}_i^1(X^d), \bar{\beta}_i^2(X^d))$$

для $d \in [1, K]$ и $i =\in [3, N(d)+1]$, где $N(d)+1$ это число неприводимых компонент слоя морфизма π^K над точкой x_d.

Две следующие леммы являются переформулировками Лемм 5.1 и 5.2.

Лемма 6.1. *Последовательность пар целых чисел*

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) \textit{ для } d \in [1, K] \textit{ и } i \in [3, N(d)+1]$$

удовлетворяет условию (*) при фиксированном d.

Лемма 6.2. *Для K последовательностей пар целых чисел*

$$(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)), \textit{ где } d \in [1, K], i \in [3, R(d)+1] \textit{ и } R(d) \in \mathbb{N}_{\geq 2}),$$

удовлетворяющих условию (*), существует единственная гладкая линейчатая поверхность $\pi^K : X^K \to C$ с сечением C_K, такая что

(1) *пара $(\pi^K : X^K \to C, C_K)$ получена из пары $(\pi^0 : X^0 \to C, C_0)$ с помощью последовательности элементарных преобразований над точками $\{x_1, \dots, x_K\}$,*
(2) *слой морфизма π^K над точкой x_d имеет $R(d)+1$ неприводимых компонент,*
(3) *для $d \in [1, K]$ и $i \in [3, R(d)+1]$ выполнены равенства*

$$(\bar{\alpha}_i^1(X^K, d), \bar{\alpha}_i^2(X^K, d)) = (\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)).$$

Обозначим слой морфизма π^K над точкой x_d – $F(d)$ для $d \in [1, K]$, а его неприводимые компоненты – $F_j(d)$ для $j \in [1, N(d)]$. На поверхности X^K выполнены соотношения

$$F(d) = \sum_{j=1}^{N(d)+1} a_j(d) F_j(d)$$

и

$$K_{X^K} \equiv -2C_K + \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} b_j(d) F_j(d) + (2g(C) - 2 - e)F,$$

где F – общий слой морфизма π^K.

Следующая лемма объясняет геометрический смысл последовательностей, удовлетворяющих условию (*), и двойственных к ней.

Лемма 6.3. *Для $d \in [1, K]$ и $i \in [3, N(d)+1]$ выполнены равенства*

$$\bar{\alpha}_i^1(X^K, d) + \bar{\alpha}_i^2(X^K, d) = a_i(d) \text{ и } \bar{\beta}_i^1(X^K, d) + \bar{\beta}_i^2(X^K, d) + 1 = b_i(d).$$

Доказательство. Все равенства несложно следуют из элементарных свойств раздутий и определения последовательностей $\bar{\alpha}_i^1(X^K, d)$ и $\bar{\beta}_i^1(X^K, d)$. □

Следующая лемма является ключевой в этом параграфе.

Лемма 6.4. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} < 2 - 2g(C) + e.$$

Тогда

(1) *существуют положительные рациональные числа $\lambda_j(d)$ и γ такие, что выполнено соотношение*

$$K_{X^K} \equiv -2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) F_j(d) - \gamma F,$$

(2) *для $i \in [3, N(d)]$*

$$\frac{b_i(d)}{a_i(d)} \leq \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)},$$

(3) *форма пересечения кривых $C_K, \bar{F}_r(k)$ ($k \in [1, K]$ и $r \in [1, N(k)]$) отрицательно определена.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть

$$2 - 2g(C) + e = \sum_{d=0}^{K} \epsilon_d,$$

где $\epsilon_d \in \mathbb{Q}_{>0}$ и $\epsilon_d > \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)}$ для всех $d \in [1, K]$. Тогда выполнено соотношение

$$K_{X^K} \equiv -2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) F_j(d) - \gamma F,$$

$$\gamma = \epsilon_0 > 0 \text{ и } \lambda_{N(d)+1}(d) = a_{N(d)+1}(d)\epsilon_d - b_{N(d)+1}(d) > 0 \text{ для } d \in [1, K].$$

Докажем, что $\lambda_j(d) > 0$ для $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$. Если это не так, то для некоторого $k \in [1, K]$ существует подмножество $\mathcal{J} \subset [1, N(k)]$, такое что множество

$$\cup_{j \subset \mathcal{J}} F_j(k)$$

связно и $\lambda_j(k) \leq 0$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Для $j \in \mathcal{J}$ среди $F_j(k)$ нет -1-кривых, и форма пересечения кривых $F_j(k)$ отрицательно определена (см. [Be2]). Для всех $j \in \mathcal{J}$ по формуле присоединения

$$K_{X_K} \cdot F_j(k) + F_j(k)^2 \geq -2.$$

Следовательно, для всех $j \in \mathcal{J}$ $K_{X^K} \cdot F_j(k) \geq 0$ и

$$0 \geq K_{X^K} \cdot (\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k)) = (-2C_K - \sum_{j=1}^{N(k)+1} \lambda_j(k) F_j(k)) \cdot (\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k))$$

$$\|$$

$$-(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k))^2 - 2C_K \cdot (\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k)) - (\sum_{j=1, j \notin \mathcal{J}}^{N(k)+1} \lambda_j(k) F_j(k)) \cdot (\sum_{j \subset \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k)).$$

Но

$$-(\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k))^2 \geq 0,$$

причём равенство выполнено, если для всех $j \in \mathcal{J}$ $\lambda_j(k) = 0$. Очевидно, что

$$-2C_K \cdot (\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k)) \geq 0$$

и

$$-(\sum_{j=1, j \notin \mathcal{J}}^{N(k)+1} \lambda_j(k) F_j(k)) \cdot (\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(k) F_j(k)) \geq 0.$$

Следовательно, для всех $j \in \mathcal{J}$ $\lambda_j(k) = 0$ и

$$0 \leq (\sum_{j \in \mathcal{J}} F_j(k)) \cdot K_{X^K} = (\sum_{j \in \mathcal{J}} F_j(k)) \cdot (-2C_K - \sum_{j=1}^{N(k)+1} \lambda_j(k) F_j(k)) < 0.$$

Значит, $\lambda_j(d) > 0$ для всех $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$.

Таким образом, мы доказали, что если

$$2 - 2g(C) + e = \sum_{d=0}^{K} \epsilon_d$$

для

$$\epsilon_d \in \mathbb{Q} \cap (\frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)}, +\infty) \text{ и } d \in [1, K],$$

то выполнено соотношение

$$K_{X^K} \equiv -2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) F_j(d) - \gamma F,$$

где $\gamma = \epsilon_0$ и $\lambda_j(d) = a_j(d)\epsilon_d - b_j(d) > 0$ для $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$. Если теперь устремить $\epsilon_d \to \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)}$, то мы получим второе утверждение леммы.

Для завершения доказательства заметим, что для $k \in [1, K]$ и $r \in [1, N(k)]$ среди кривых $C_K, \bar{F}_r(k)$ нет -1-кривых, форма пересечения кривых $\bar{F}_r(k)$ отрицательно определена (см. [Be2]) и

$$C_K^2 \leq C_0^2 = -e < 2 - 2g(C) < 0.$$

По формуле присоединения

$$K_{X_K} \cdot C_K + C_K^2 \geq 0 \text{ и } K_{X_K} \cdot \bar{F}_r(k) + \bar{F}_r(k)^2 \geq -2.$$

Следовательно,

$$K_{X^K} \cdot C_K > 0 \text{ и } K_{X^K} \cdot \bar{F}_r(k) \geq 0 \text{ для } k \in [1, K] \text{ и } r \in [1, N(k)].$$

Значит, для $k \in [1, K]$ и $r \in [1, N(k)]$

$$\bar{F}_r(k) \cdot (-2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) F_j(d) - \gamma F) \geq 0$$

и

$$C_K \cdot (-2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)+1} \lambda_j(d) F_j(d) - \gamma F) > 0.$$

Отсюда для $k \in [1, K]$ и $r \in [1, N(k)]$

$$\bar{F}_r(k) \cdot (-2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) F_j(d)) \geq 0,$$

$$C_K \cdot (-2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) F_j(d)) > 0$$

и если $\bar{F}_r(k) \cap \bar{F}_{N(k)+1}(k) \neq \emptyset$, то

$$\bar{F}_r(k) \cdot (-2C_K - \sum_{d=1}^{K} \sum_{j=1}^{N(d)} \lambda_j(d) F_j(d)) > 0.$$

Из работы [Ar] следует, что форма пересечения кривых $C_K, \bar{F}_r(k)$ для $k \in [1, K]$ и $r \in [1, N(k)]$ отрицательно определена (см. [Ar]). $\square$

Лемма 6.5. *Неравенство*

$$\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} < 2 - 2g(C) + e,$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует морфизм $f : X_K \to X$, стягивающий кривые C_K и $F_j(d)$ для $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$, такой что поверхность X является численной поверхностью дель Пеццо с $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} < 2 - 2g(C) + e,$$

тогда по Лемме 6.4 на поверхности X_K форма пересечения кривых C_K и $\bar{F}_r(k)$ для $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$ отрицательно определена и из работы [Sak] следует, что существует морфизм $f : X_K \to X$, стягивающий эти кривые. Тогда

$$rk(Div(X_K) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 2 + \sum_{d=1}^{K} N(d).$$

Следовательно, $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$. Легко видеть, что на поверхности X выполнено соотношение

$$f_*(K_{X_K}) = K_X \equiv (\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e) f_*(F).$$

Из условий $rk(Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = 1$ и

$$\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e < 0$$

следует, что X – численная поверхность дель Пеццо.

Теперь предположим, что существует морфизм $f : X_K \to X$, такой что X – численная поверхность дель Пеццо, $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$, f стягивает кривые C_K и $F_j(d)$ для $d \in [1, K]$ и $j \in [1, N(d)]$. Легко видеть, что на поверхности X выполнено соотношение

$$f_*(K_{X_K}) = K_X \equiv (\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e)f_*(F).$$

Из численной обильности дивизора $-K_X$ и условия $rk(Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv) = \mathbb{Q}$ следует, что

$$\sum_{d=1}^{K} \frac{b_{N(d)+1}(d)}{a_{N(d)+1}(d)} - 2 - 2g(C) + e < 0.$$

□

Из Теоремы 3.4 и Лемм 6.1-6.5 вытекает следующая классификационная теорема.

Теорема 6.6. *Существует взаимно однозначное соответствие между численными поверхностями дель Пеццо X, имеющими нерациональные особенности и $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$, и следующей совокупностью*

(1) *линейчатая поверхность $Proj(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(L))$ с инвариантом e, где $L \in Pic(C)$, $g(C) \geq 1$ и $e = -deg(L) > 2g(C) - 2$,*
(2) *набор попарно различных точек $\{x_1, \ldots, x_K\} \subset C$, возможно пустой ($K = 0$),*
(3) *K последовательностей пар целых чисел*

$$(\alpha_i^1(d), \alpha_i^2(d)) \text{ для } d \in [1, K], i \in [3, R(d) + 1] \text{ и } R(d) \in \mathbb{N}_{\geq 2}).$$

Заметим, что Теорема 6.6 даёт не только классификацию всех численных поверхностей дель Пеццо с нерациональными особенностями и $Div(X) \otimes \mathbb{Q}/\equiv = \mathbb{Q}$, но и эффективный алгоритм их построения.

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ III

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СТЕПЕНИ M В $\mathbb{P}^M$

В этом добавлении мы докажем обобщения Теорем 1.2, 3.1, 3.5 и 3.6 главы II для многообразий размерности больше 3.

Пусть X – гладкая гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}^M$. Ввиду результатов главы II, мы будем считать, что $M \geq 5$. Как и в случае квартики $Pic(X) = \mathbb{Z}$ и

$$-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)|_X.$$

Рассмотрим на гиперповерхности X лог пару

$$(X, B_X) = (X, \sum_{i=1}^{N} b_i \mathcal{B}_i) \tag{1}$$

и $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda B_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

причем если $B_X = \emptyset$, то $\lambda = +\infty$.

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что гиперповерхность X “достаточно общая”. Тогда для лог пары (X, B_X) возможны следующие варианты:*

(1) $\lambda > 1$, $\kappa(X, B_X) = -\infty$ *и лог пара (1) терминальна,*
(2) $\lambda = 1$, $\kappa(X, B_X) = 0$ *и лог пара (1) канонична, причём если она не терминальна, то все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$,*
(3) $\lambda < 1$, $\kappa(X, B_X) = 1$, *лог пара (1) не канонична, все линейные системы $\mathcal{B}_i$ составлены из одного пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$ и $I(X, B_X) = \phi_{\mathcal{P}}$,*
(4) $\lambda < 1$ *и* $\kappa(X, B_X) = M - 1$.

Заметим, что “достаточную общность” в Теореме 1 можно понимать в смысле работы [Пу2].

Прежде чем доказывать Теорему 1, мы сформулируем один результат, который выводится из Теоремы 1 аналогично тому, как в главе III Теорема 1.2 выводится из Теорем 3.1, 3.5 и 3.6.

Теорема 2. *В условиях Теоремы 1 выполнены следующие утверждения:*

(1) *гиперповерхность X бирационально не перестраивается в расслоения*[9] *на многообразия с размерностью Кодаиры $-\infty$,*
(2) *гиперповерхность X бирационально не перестраивается в расслоения с размерностью Кодаиры ноль, чей общий слой имеет размерность меньше $M-2$.*
(3) *если гиперповерхность X бирационально перестраивается посредством отображения ρ в расслоение $\tau : Y \to Z$, чей общий слой имеет размерность $M-2$ и размерность Кодаиры ноль, то существует пучок в линейной системе $|-K_X|$, такой что $\tau \circ \rho = \phi_{\mathcal{P}}$,*
(4) *$Bir(X) = Aut(X)$ и гиперповерхность X бирационально не изоморфна никакому многообразию Фано с каноническими особенностями отличному от себя самого.*

Как и в параграфе 3 можно считать, что $\lambda = 1$ и $CS(X, B_X) \neq \emptyset$.

Заметим, что в доказательстве Теоремы 1.3 главы I мы не использовали трёхмерность рассматриваемого многообразия. Следовательно, если $CS(X, B_X)$ содержит точку O на гиперповерхности X, то выполнено строгое неравенство

$$mult_O(B_X^2) > 4,$$

поскольку $dim(X) > 3$. Последнее противоречит работе [Пу3].

Значит, можно считать, что $CS(X, B_X)$ содержит многообразие S с $dim(S) \neq 0$. Тогда из работы [Пу1] следует, что

$$mult_S(B_X) \leq 1$$

и, в частности, лог пара (1) канонична.

Лемма 3. *Если $dim(S) < M-3$, то*

$$mult_S(B_X) > 1.$$

Доказательство. Пусть $f : W \to X$ – раздутие общей точки многообразия S. Из Леммы 3 и условия $dim(S) < M-3$ следует, что

$$a(X, B_X, E) > 0.$$

Откуда следует, что существует многообразие $T \subset W$, такое что морфизм $f|_T : T \to S$ сюръективен и лог пара

$$(W, B_W) = (W, f^{-1}(B_X))$$

не терминальна в общей точке многообразия T. Из сюръективности морфизма $f|_T : T \to S$ следует, что

$$mult_S(B_X) > 1.$$

[9] Мы подразумеваем здесь, что общий слой расслоения имеет размерность меньше $M-1$.

□

Таким образом, мы можем считать, что $dim(S) = M-3$. Применяя доказательство Леммы 3.3 главы III, мы получаем неравенство

$$deg(S) \leq M.$$

Ввиду общности гиперповерхности X, S не может быть линейным подпространством (см. [Пу3]). Заметим, что в этом причина принципиального отличия Теоремы 1 от Теоремы 1.2 главы III, поскольку любая гладкая трёхмерная квартика содержит одномерное семейство прямых.

Лемма 4. *Существует $(M-2)$-мерное линейное пространство в $\mathbb{P}^M$, содержащее многообразие S.*

Доказательство. К сожалению доказательство аналогичной трёхмерной леммы (Лемма 3.4 главы III) не проходит в нашей ситуации.

Рассматривая пересечение с $M-4$ общими гиперплоскими сечениями, можно считать, что

$$deg(X) = M, dim(X) = 3, dim(S) = 1 \text{ и } mult_S(B_X) = 1.$$

В этих предположениях, нам достаточно показать, что кривая S плоская.

Мы воспользуемся приёмом работы [Пу1]. Пусть R_S – достаточно общий конус над кривой S. Тогда

$$R_S \cdot X = S \cup \tilde{S} \text{ и } deg(\tilde{S}) = (M-1)deg(S).$$

Из общности конуса R_S следует, что

$$\tilde{S} \not\subset \cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i)$$

и, как показано в работе [Пу1], кривые S и $\tilde{S}$ пересекаются трансверсально ровно в $(M-1)deg(S)$ различных точках.

С другой стороны,

$$(M-1)deg(S) = deg(\tilde{S}) = deg(B_X|_{\tilde{S}}) \geq (M-1)deg(S)mult_S(B_X) \geq (M-1)deg(S).$$

Следовательно, пересечение кривой $\tilde{S}$ и границы B_X состоит только из точек $S \cap \tilde{S}$.

Заметим, для доказательства последнего неравенства нам не понадобилась "подвижность" границы B_X. В частности, не существует гиперплоскостей, касающихся гиперповерхности X вдоль кривой S. Откуда следует, что общая секущая кривой S пересекает гиперповерхность X ровно в M точках, поскольку в противном случае она содержится в X и должна совпадать с кривой S.

Рассмотрим дивизор

$$\hat{B}_X = \sum_{i=1}^{N} b_i \hat{B}_i,$$

где $\hat{B}_i$ – достаточно общие дивизоры линейных систем $\mathcal{B}_i$ соответственно. По предположению $S \subset \hat{B}_X$. Возьмём две достаточно общие точки P_S и $P_{\hat{B}_X}$ на кривой S и дивизоре $\hat{B}$ соответственно. Заметим, что ввиду общности точки $P_{\hat{B}_X}$, она не принадлежит кривой S. Обозначим прямую $P_S P_{\hat{B}_X}$ – L и рассмотрим на ней достаточно общую точку P. Пусть $R_{S,P}$ – конус над кривой S с вершиной в точке P и

$$R_{S,P} \cdot X = S \cup \tilde{S}_P.$$

Мы показали ранее, что кривая $\tilde{S}_P$ может пересекаться с границей B_X только в точках $S \cap \tilde{S}_P$. Но по построению

$$P_{\hat{B}_X} \in \tilde{S}_P \cap \hat{B}_X \text{ и } P_{\hat{B}_X} \notin S,$$

что ничему не противоречит, а только показывает, что

$$\tilde{S}_P \subset \hat{B}_X$$

и, в частности,

$$L \cap X \subset \hat{B}_X.$$

Поскольку последнее условие замкнутое, то мы можем считать, что точка $P_{\hat{B}_X}$ принадлежит кривой S, но не совпадает с точкой P_S. Следовательно, общая секущая кривой S пересекает

$$\cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i)$$

в M различных точках. С другой стороны, точки пересечения

$$\cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i)$$

с общей гиперплоскостью находятся в общем положении. Поскольку

$$S \subset \cup_{i=1}^{N} Bs(\mathcal{B}_i),$$

то мы получаем, что кривая S плоская. $\square$

Ввиду Леммы 4 мы можем повторить все аргументы доказательства Теоремы 3.1 главы III и получить утверждение Теоремы 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь мы опишем возможные применения полученных результатов и перспективу дальнейших исследований, продолжающих исследования изложенные в диссертации.

Методы и конструкции, разработанные в главах I-III могут быть применены к широкому классу бирационально жёстких многообразий.

Отметим связь Прямой и Обратной Задачи со следующим классическим вопросом.

Вопрос 1. *Существует ли гладкая деформация нерационального многообразия в рациональное?*

Ответ на Вопрос 1 отрицательный для кривых и поверхностей. Ожидается, что в размерности 3 ответ также отрицательный, а в высших размерностях положительный.

Хотя следующий вопрос явно не связан с Вопросом 1, тем не менее во многом они очень похожи.

Вопрос 2. *Как ведёт себя при гладких деформациях множество центров канонических особенностей лог пар в одном гомологическом классе?*

Можно показать, что существует гладкая деформация X_b $(b \in B)$ гладкой четырёхмерной квинтики X_{b_0}, такая что

$$CS(X_b, B_{X_b}) = \emptyset$$

для всех лог пар в гомологическом классе $-K_{X_b}$, но

$$CS(X_b, B_{X_{b_0}}) \neq \emptyset$$

для некоторй лог пары $(X_b, B_{X_{b_0}})$ с $B_{X_{b_0}} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{X_{b_0}}$.

На всех многообразиях, разобранных в главе III, подобное поведение множества центров канонических особенностей невозможно. Последнее легко следует, из результатов главы III.

Используя Обратную Задачу можно попробовать исследовать Вопрос 1 так же как мы доказывали Теорему 1.1 в главе V. То есть, найти "специальную" лог пару на "специальном" слое гладкого семейства и применить к ней ЛПММ. Минус последнего метода состоит в недоказанности ЛПММ в размерностях больше 3.

Метод, разработанный в главе VI (метод "двойной проекции" из общей точки), может быть применён к эффективной ограниченности многообразий Фано больших размерностей. Плюс этого метода состоит в том, что ни ПММ ни ЛПММ нам нужна не была. Из всей ПММ мы пользовались только теоремой В.В. Шокурова о свободе от базисных точек, которая доказана во всех размерностях. Минус же состоит в том, что там где у нас появлялись поверхности типа K3 теперь появятся многообразия Калаби-Яо, а их геометрия почти не изучена.

Скажем о возможных обобщениях результатов главы VII. Мы убеждены, что подобным способом могут быть классифицированы все поверхности дель Пеццо с рациональными, но не лог каноническими особенностями. Огромное число примеров подтверждает это. Более того, можно показать, что это верно даже без предположений на особенности поверхности дель Пеццо, если потребовать, чтобы квадрат канонического дивизора был больше или равен 9.

Заметим, что из конструкций главы VII легко строятся примеры не $\mathbb{Q}$-горенштейновых численных поверхностей дель Пеццо, деформирующихся в горенштейновые, а Теорема 2.4 главы VII имеет применение при исследовании действий групп на поверхностях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[Ал] Алексеев В., *General elephants of* $\mathbb{Q}$*-Fano 3-folds*, Comp. Math. **91** (1994), 91–116.

[АлНи] Алексеев В., Никулин В.В., *Классификация поверхностей дель Пеццо с лог терминальными особенностями индекса 2, инволюции на поверхностях K3 и группы отражений в пространствах Лобачевского*, Докл. АН СССР, Сер. Мат. **2 2** (1988).

[Гр1] Гриненко М.М., *Бирациональные автоморфизмы трёхмерной двойной квадрики с простейшей особенностью*, Мат. Сборник **189 1** (1998), 101–118.

[Гр2] Гриненко М.М., *Бирациональные автоморфизмы трёхмерного двойного конуса*, Мат. Сборник **189 7** (1998), 37–52.

[До] Долгачёв И.В., *Рациональные поверхности с пучком эллиптических кривых*, Изв. Ак. Наук СССР, Сер. Мат. **30** (1966), 1073–110.

[Ис1] Исковских В.А., *Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых*, Мат. Сборник **74** (1967), 608–638.

[Ис2] Исковских В.А., *Антиканонические модели трёхмерных алгебраических многообразий*, Современные Проблемы Математики **12** (1978), ВИНИТИ, 59–157.

[Ис3] Исковских В.А., *Бирациональные автоморфизмы трёхмерных алгебраических многообразий*, Современные Проблемы Математики **12** (1978), ВИНИТИ, 159–236.

[Ис4] Исковских В.А., *On the rationality problem for conic bundles*, Duke Math. Journal **54** (1987), 271–294.

[Ис5] Исковских В.А., *К проблеме рациональности расслоений на коники*, Мат. Сборник **182 1** (1991), 114–121.

[Ис6] Исковских В.А., *Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори*, Успехи Мат. Наук **51 4** (1996), 3–72.

[ИсМа] Исковских В.А., Манин Ю.И., *Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота*, Мат. Сборник **86** (1971), 140–166.

[Ма1] Манин Ю.И., *Rational surfaces over perfect fields*, Publ. Math. IHES **30** (1966), 55–114.

[Ма2] Манин Ю.И., *Рациональные поверхности над совершенными полями II*, Мат. Сборник **72** (1967), 161–192.

[Ни] Никулин В.В., *О Куммеровых поверхностях*, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат. **39** (1975), 278–293.

[Пр] Прохоров Ю.Г., *Заметки о трёхмерных многообразиях с гиперплоскими сечениями – поверхностями Энриквеса*, Мат. Сборник **186 9** (1995), 113–124.

[Пу1] Пухликов А.В., *Замечание о теореме В.А. Исковских и Ю.И. Манина о трёхмерной квартике*, Труды Мат. Института им. В.А. Стеклова **208** (1995), Наука, 278–289.

[Пу2] Пухликов А.В., *Essentials of the method of maximal singularities*, препринт (1996).

[Пу3] Пухликов А.В., *Birational automorphisms of Fano hypersurfaces*, препринт (1997).

[Пу4] Пухликов А.В., *Бирациональные автоморфизмы трёхмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо*, Изв. РАН, Сер. матем. **62 1** (1998), 123–164.

[Са1] Саркисов В.Г., *Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники*, Изв. Ак. Наук СССР, Сер. Мат. **44** (1980), 918–945.

[Са2] Саркисов В.Г., *О структуре расслоений на коники*, Изв. Ак. Наук СССР, Сер. Мат. **46** (1982), 371–408.

[Тю] Тюрин А.Н., *Средний якобиан трёхмерных многообразий*, Современные Проблемы Математики **12** (1978), ВИНИТИ, 5–57.

[Че1] Чельцов И.А., *Особенности трёхмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором - гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль*, Мат. Заметки **59** (1996), 618–626.

[Че2] Чельцов И.А., *Трёхмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом*, Успехи Мат. Наук **51** (1996), 177–178.

[Че3] Чельцов И.А., *Поверхности Дель Пеццо с нерациональными особенностями*, Мат. Заметки **62** (1997), 451–467.

[Че4] Чельцов И.А., *On the rationality of non-Gorenstein* $\mathbb{Q}$*-Fano 3-folds with an integer Fano index*, Cont. Math. **207** (1997), 79–88.

[Че5] Чельцов И.А., *Ограниченность трёхмерных многообразий Фано целого индекса*, Мат. Заметки (1998).

[Че6] Чельцов И.А., *Лог модели бирационально жёстких многообразий*, препринт (1998).

[Че7] Чельцов И.А., *Лог пары на гиперповерхностях степени* N *в* $\mathbb{P}^N$, препринт (1998).

[Шо1] Шокуров В.В., *Теорема Нётера-Энриквеса о канонических кривых*, Мат. Сборник **86** (1971), 367–408.

[Шо2] Шокуров В.В., *3-fold log models*, Journal Math. Sciences **81** (1996), 2667–2699.

[Эн] Эндрюшка С.Ю., *Нерациональность общего многообразия Энриквеса*, Мат. Сборник **51** **1** (1985), 267–273.

[Ar] Artin M., *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. Journal Math. **88** (1966), 129–136.

[Ba] Bayle L., *Classification des variétś complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane generale est une surface d'Enriques*, Journal Reine Angew. Math. **449** (1994), 9–63.

[Be1] Beauville A., *Variétiés de Prym et Jacobiennes intermédiaires*, Ann. Scient. Ecol. Norm. Super. **10** (1977), 309–399.

[Be2] Beauville A., Surfaces Algebriques Complexes **54** (1978), Asterique.

[BiBrDr] Bindschadler D., Brenton L., Drucker D., *Rational mapings of del Pezzo surfaces and singular compactifications of two-dimensional affine variwties*, Tohoku Math. Journal **36** (1984), 519–609.

[BoVe] Botta L.P., Verra A., *The non rationality of the generic Enriques' threefold*, Comp. Math. **48** **2** (1983), 167–184.

[Br] Brenton L., *Some algebraicity criteria for singular surfaces*, Invent. Math. **41** (1977), 129–147.

[CaFl] Campana F., Flenner H., *Projective threefolds containing a smooth rational surface with ample normal bundle*, J. Reine Angew. Math. **440** (1993), 77–98.

[CoMu] Conte A., Murre J.P., *Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, Ann. Souola Norm. Sup. de Pisa **12** (1985), 43–80.

[Co] Corti A., *Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov*, Journal Algebraic Geometry **4** (1995), 223–254.

[СоДо] Cossec F.R., Долгачёв И.В., Enriques surface I **76** (1989), Birkhäuser.

[Du] Du Val P, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **30** (1934), 453–491.

[Fa1] Fano G., *Osservazioni sopra alcune varieta non razionali aventi tutti i generi nulli*, Atti Acc. Torino **50** (1915), 1067–1072.

[Fa2] Fano G., *Sulle varieta algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, Mem. Acc. It. **8** (1937), 813–818.

[Fa3] Fano G., *Sulle varrieta algebriche a tre dimensionile le cui sezioni iperpiane sono superfici di genere zero e bigenere uno*, Mem. Soc. It. d. Scienze (detta dei XL) **24** (1938), 44–66.

[Ha1] Hartshorne, R., Algebraic Geometry (1977), Springer Verlag.

[Ha2] Hartshorne R., *Stable reflexive sheaves*, Math. Annalen **254** (1980), 121–176.

[Ka1] Kawamata Y., *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces*, Ann. of Math. **127** (1988), 93–163.

[Ka2] Kawamata Y., *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds*, препринт (1996).

[KaMaMa] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K., *Introduction to the minimal model problem*, Advanced Studies in Pure Mathematics **10** (1987), Kinokuniya Company Ltd., 383–360.

[KeMaMc] Keel S., Matsuki K., McKernan J., *Log abundance theorem for threefolds*, Duke Math. Journal **75** (1994), 99–119.

[KeMc] Keel S., McKernan J., *Rational curves on quasi-projective varieties*, препринт (1995).

[Ko1] Kollár J. et al, Flips and abundance for algebraic threefolds **211** (1992), Astérique.

[Ko2] Kollár J., Rational curves on algebraic varieties (1996), Springer-Verlag.

[KoMiMo1] Kollár J., Miyaoka Y., Mori S., *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, Journal Differential Geometry **36** (1992), 765–779.

[KoMiMo2] Kollár J., Miyaoka Y., Mori S., *Rationally connected varieties*, Journal Algebraic Geometry **1** (1992), 429–448.

[Mo] Mori S., *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*, Journal of AMS **1** (1988), 117–253.

[Na] Namikawa Y., *Smoothing Fano 3-folds*, препринт.

[No] Noether M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Annalen **3** (1871), 161–227.

[Re] Reid M., *Projective morphism according to Kawamata*, препринт (1983).

[Ro] Roth L., Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality (1955), Springer-Verlag.

[SD] Saint-Donat B., *Projective models of $K-3$ surfaces*, Amer. Journal Math. **96** (1974), 602–639.

[Sak] Sakai, F., *Weil divisors on normal surfaces*, Duke Math. Journal **51** (1984), 877–887.

[San] Sano T., *On classifications of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Fano index 1*, Journal Math. Soc. Japan **47** (1995), 369–380.

[Sh] Shin K.-H., *3-dimensional Fano varieties with canonical singularities*, Tokyo Journal Math. **12** (1989), 375–385.