ЛОГ ПАРЫ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СТЕПЕНИ N В $\mathbb{P}^N$

И.А.Чельцов

Цель этой работы состоит в исследовании бирациональной структуры гладких гиповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$ посредством изучения свойств подвижных лог пар на них.

Все рассматриваемые многообразия, если не оговорено иначе, проективны и определены над полем $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работе [KaMaMa].

Автор благодарен В.А.Исковских, А.В.Пухликову и В.В.Шокурову за интересные и плодотворные обсуждения. Настоящая работа была написана при частичной поддержке NSF гранта DMS-9800807.

§1. Введение.

Под подвижной лог парой

$$(X, M_X) = (X, \sum_{i=1}^{n} b_i \mathcal{M}_i)$$

мы будем подразумевать многообразие X в совокупности с формальной конечной линейной комбинацией линейных систем $\mathcal{M}_i$ без неподвижных компонент, такой что все $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Мы будем считать, что лог канонические дивизоры всех рассматриваемых лог пар являются $\mathbb{Q}$-Картье дивизорами.

Дискрепантность, терминальность, каноничность, отображение Иитаки $I(X, M_X)$ и размерность Кодаиры $\kappa(X, M_X)$ для подвижной лог пары (X, M_X) определяются аналогично соответствующим понятиям для обычных лог пар (см. [KaMaMa] и [Че]).

Мы будем называть неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ центром канонических особенностей подвижной лог пары (X, M_X), если существуют такие бирациональный морфизм $f : W \to X$ и f-исключительный дивизор $E \subset W$, что

$$a(X, M_X, E) \leq 0 \text{ и } f(E) = Y.$$

Множество всех центров канонических особенностей подвижной лог пары (X, M_X) будет обозначаться $CS(X, M_X)$.

В дальнейшем подвижные лог пары мы будем для краткости называть просто лог парами.

С этого момента X будет обозначать достаточно общую гладкую гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 5$. Заметим, что тогда

$$Pic(X) = -\mathbb{Z}K_X \text{ и } -K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X.$$

Рассмотрим $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$, такое что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

причем $\lambda = +\infty$ для $M_X = \emptyset$.

Основной результат данной работы состоит в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть $\lambda = 1$. Тогда лог пара (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и*

$$CS(X, M_X) = \begin{cases} \emptyset, \\ X \cap H \text{ для линейного пространства } H \text{ размерности } N-2. \end{cases}$$

Мы докажем Теорему 1.1 в параграфах 3 и 4, а в параграфе 5 мы выведем из неё следующий важный результат, который уточняет Теорему 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть $\lambda = 1$ и $CS(X, M_X) \neq \emptyset$. Тогда граница M_X поднимается с $\mathbb{P}^1$ посредством рационального отображения $\phi_{\mathcal{P}}$ для некоторого пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$, такого что*

$$CS(X, M_X) = \{Bs(\mathcal{P})\}.$$

С помощью Теорем 1.1 и 1.2 мы докажем в параграфе 6 следующие две теоремы, в которых рассматриваются лог пары с $\lambda \neq 1$.

Теорема 1.3. *Пусть $\lambda < 1$ и $\kappa(X, M_X) \neq N-1$. Тогда лог пара (X, M_X) не канонична, $\kappa(X, M_X) = 1$ и существует пучок $\mathcal{P}$ в линейной системе $|-K_X|$, такой что граница M_X поднимается с $\mathbb{P}^1$ посредством рационального отображения $\phi_{\mathcal{P}}$, которое совпадает с $I(X, M_X)$.*

Теорема 1.4. *Если $\lambda > 1$, то $\kappa(X, M_X) = -\infty$ и лог пара (X, M_X) терминальна.*

Основные применения Теорем 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4 будут даны в параграфе 2.

§2. Бирациональная геометрия гиперповерхности X.

В этом параграфе мы опишем основные применения Теорем 1.2, 1.3 и 1.4.

Пусть X является достаточно общей гладкой гиперповерхностью степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 5$.

Теорема 2.1. *X бирационально не изоморфно расслоению[1] на многообразия с размерностью Кодаиры $-\infty$.*

Доказательство. Предположим, что существует бирациональная перестройка ρ гиперповерхности X в такое расслоение $\tau : Y \to Z$, что размерность Кодаиры его общего слоя равна $-\infty$. Положим

$$\mathcal{H} = |\tau^*(H)|$$

[1] Мы будем считать, что все расслоения имеют связные слои, не бирациональны и база расслоения не является точкой.

для "достаточно большого" очень обильного дивизора H на многообразии Z. Возьмём такое $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$, что для лог пары

$$(X, M_X) = (X, \mu\rho^{-1}(\mathcal{H}))$$

выполнено соотношение

$$K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Построенная лог пара (X, M_X) не терминальна, поскольку в противном случае для небольших $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено равенство

$$N - 1 = \kappa(X, (1+\alpha)M_X) = -\infty.$$

Необходимое утверждение следует теперь из Теоремы 1.2. $\square$

Теорема 2.2. *X бирационально не изоморфно никакому многообразию Фано с каноническими особенностями отличному от себя самого и $Bir(X) = Aut(X)$.*

Доказательство. Допустим, что существует такое бирациональное отображение $\rho : X \dashrightarrow Y$, что Y является многообразием Фано с каноническими особенностями. Покажем, что тогда ρ есть изоморфизм.

Для $n \in \mathbb{Z}_{\gg 0}$ рассмотрим лог пару

$$(Y, M_Y) = (Y, \frac{1}{n}|-nK_Y|).$$

Пусть $M_X = \rho^{-1}(M_Y)$. Тогда

$$\kappa(X, M_X) = 0.$$

Рассмотрим $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, такое что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Из Теоремы 1.2 сразу следует терминальность лог пары $(X, \lambda M_X)$.

Предположим, что $\lambda < 1$. Рассмотрим $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$, такое что лог пара $(X, \delta M_X)$ терминальна. Тогда

$$N - 1 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) = 0.$$

Таким образом, $\lambda = 1$.

Существует $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, такое что обе лог пары $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ будут каноническими моделями. В виду того, что каноническая модель единственна, мы получаем, что отображение ρ является изоморфизмом. $\square$

Теорема 2.3. *Все бирационально изоморфные X расслоения на многообразия с размерностью Кодаиры 0 бирационально эквивалентны расслоение на гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^{N-1}$, заданное пучком гиперплоских сечений X.*

Доказательство. Пусть существует бирациональная перестройка ρ гиперповерхности X в такое расслоение $\tau : Y \to Z$, что размерность Кодаиры его общего слоя равна 0. Нам нужно показать, что $\tau \circ \rho = \phi_{\mathcal{P}}$ для некоторого пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$.

Для “достаточно большого” очень обильного дивизора H на многообразии Z рассмотрим полную линейную систему

$$\mathcal{H} = |\tau^*(H)|.$$

Тогда для лог пары

$$(X, M_X) = (X, \rho^{-1}(\mathcal{H}))$$

выполнено равенство

$$\kappa(X, M_X) = dim(Z).$$

Осталось только применить результаты Теорем 1.2, 1.3 и 1.4. $\square$

§3. Доказательство Теоремы 1.1, часть I.

Воспользуемся обозначениями параграфа 1 и будем считать, что $\lambda = 1$. Основной результат этого параграфа состоит в следующей теореме.

Теорема 3.1. *$CS(X, M_X)$ не содержит точек.*

Предположим, что $CS(X, M_X)$ содержит гладкую точку O.

Мы отступим от нашего соглашения на предполагаемую подвижность рассматриваемых лог пар. Мы надеемся, что это не внесёт много путаницы, поскольку будет и так понятно подвижна лог пара или нет.

Нам понадобиться один вариант Теоремы 3.1 работы [Co].

Лемма 3.2. *Пусть подвижная лог пара (H, M_H) не лог канонична в гладкой точке O на поверхности. Тогда*

$$mult_P(M_H^2) > 4.$$

Следующий результат принято называть неравенством Исковских-Пухликова.

Лемма 3.3. *Выполнено неравенство*

$$mult_O(M_X^2) > 4.$$

Доказательство. Рассмотрим достаточно общий очень обильный дивизор H на многообразии X, содержащий точку O. Тогда

$$mult_O(M_X^2) = mult_O((M_X|_H)^2)$$

и

$$O \in LCS(X, H + M_X),$$

где LCS обозначает множество центров лог канонических особенностей (см. [Co]). Из теоремы В.В.Шокурова о связности (см. [Co]) следует, что

$$O \in LCS(H, M_X|_H).$$

Повторяя описанную конструкцию, мы можем считать, что X двумерно и лог пара (X, M_X) не лог канонична в точке O. Теперь утверждение следует из Леммы 3.2. $\square$

Доказательство Теоремы 3.1. Следствие работы [Пу2] и Леммы 3.3. $\square$

§4. Доказательство Теоремы 1.1, часть II.

В этом параграфе мы завершим доказательство Теоремы 1.1. Воспользуемся обозначениями параграфа 1 и предположим, что $\lambda = 1$.

В силу предыдущего параграфа, мы можем считать, что $CS(X, M_X)$ содержит многообразие S ненулевой размерности. Из работы [Пу1] следует, что

$$mult_S(M_X) = 1$$

и, в частности, лог пара (X, M_X) канонична.

Лемма 4.1. *Выполнено равенство* $dim(S) = N - 3$.

Доказательство. Пусть $f : W \to X$ – раздутие общей точки[2] многообразия S. Тогда

$$a(X, M_X, E) = N - 2 - dim(S) - mult_S(M_X) = N - 3 - dim(S).$$

Если утверждение леммы не выполнено, то существует многообразие $T \subset E$, такое что морфизм $f|_T : T \to S$ сюръективен и

$$T \in CS(W, f^{-1}(M_X) - a(X, M_X, E)E)$$

и, в частности,

$$mult_S(M_X) \geq mult_T(f^{-1}(M_X)) > 1.$$

□

Таким образом, мы можем считать, что $dim(S) = N - 3$.

Лемма 4.2. $deg(S) \leq N$.

Доказательство. $N = (-K_X)^{N-3} \cdot M_X^2 \geq mult_S(M_X^2)deg(S)$. □

Можно считать, что $deg(S) \neq 1$. Следующая лемма составляет основную техническую трудность данного параграфа.

Лемма 4.4. *S содержится в линейном пространстве размерности $N - 2$.*

Доказательство. Рассматривая пересечения с достаточно общими гиперплоскими сечениями, можно считать, что X есть гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^4$, содержащая кривую S. Нам нужно показать, что кривая S содержится в плоскости.

Предположим обратное и получим противоречие, воспользовавшись приёмом работы [Пу1].

Рассмотрим достаточно общий конус R_S над кривой S. Тогда

$$R_S \cap X = S \cup \tilde{S}$$

и

$$deg(\tilde{S}) = (N - 1)deg(S).$$

Пусть

$$Z = Supp(\cup_{i=1}^{n} Bs(\mathcal{M}_i)).$$

[2]Мы можем считать многообразие W квазипроективным.

Тогда $S \subset Z$, но из общности конуса R_S следует, что $\tilde{S} \not\subset Z$. Более того, кривые S и $\tilde{S}$ пересекаются в $(N-1)deg(S)$ различных точках (см. [Пу1]).

С другой стороны,

$$(N-1)deg(S) = deg(\tilde{S}) = deg(M_X|_{\tilde{S}}) \geq (N-1)deg(S)mult_S(M_X) = (N-1)deg(S).$$

Следовательно, кривая $\tilde{S}$ пересекается с границей M_X только в точках $S \cap \tilde{S}$.

Заметим, что общая секущая кривой S пересекает X ровно в N точках, поскольку в противном случае она содержится в X и должна быть компонентой Z.

Рассмотрим дивизор

$$D = \sum_{i=1}^{n} b_i M_i,$$

где M_i это достаточно общий дивизор из линейной системы $\mathcal{M}_i$. По предположению

$$mult_S(D) = 1.$$

Возьмём две достаточно общие точки P_S и P_D на кривой S и дивизоре D соответственно. Рассмотрим прямую L, проходящую через точки P_S и P_D, и достаточно общую точку P на ней. Пусть $R_{S,P}$ – конус над кривой S с вершиной в точке P и

$$R_{S,P} \cap X = S \cup \tilde{S}_P.$$

Мы показали ранее кривая $\tilde{S}_P$ либо содержится в дивизоре D, либо пересекается с ним только в точках $S \cap \tilde{S}_P$.

По построению

$$P_D \in \tilde{S}_P \cap D \text{ и } P_D \notin S.$$

Следовательно,

$$\tilde{S}_P \subset D$$

и, в частности,

$$L \cap X \subset D.$$

Поскольку последнее условие замкнутое, то мы можем считать, что точка P_D принадлежит кривой S, но не совпадает с точкой P_S. Откуда следует, что общая секущая кривой S пересекает Z в N различных точках.

С другой стороны, каждое подмножество A пересечения Z с общим гиперплоским сечением, которое состоит из трёх коллинеарных точек, должно содержтся в плоской компоненте этого Z. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1. В виду Теоремы 3.1 и Лемм 4.1 и 4.3 мы можем считать, что объединение всех центров $CS(X, M_X)$ есть многообразие S размерности $N-3$, содержащееся в линейном пространстве T размерности $N-2$. В силу Леммы 4.2 и общности гиперповерхности X мы можем считать, что $deg(S) \in (1, N)$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ на гиперповерхности X, состоящий из многообразий, высекаемых гиперплоскостями, которые содержат линейное пространство T. Тогда

$$X \cap T = S \cup \sum_{i=1}^{r} S_i,$$

где S_i это неприводимые и приведённые многообразия на гиперповерхности X. Нам достаточно показать, что все S_i содержаться в $CS(X, M_X)$.

Как и в доказательстве Леммы 4.3, рассматривая пересечения с достаточно общими гиперплоскими сечениями, можно считать, что

$$dim(X) = 3, deg(X) = N, dim(T) = 2 \text{ и } dim(S) = dim(S_i) = 1 \text{ для } i = 1, \ldots, r.$$

В этих предположениях, нам достаточно показать, что для всех S_i

$$mult_{S_i}(M_X) \geq 1.$$

Рассмотрим гладкую поверхность D из пучка $\mathcal{H}_T$. Докажем, что на ней форма пересечения кривых S_i отрицательно определена. Во-первых, на поверхности D

$$(\sum_{i=1}^{r} S_i) \cdot S_j = (D|_D - S) \cdot S_j = deg(S_j) - S \cdot S_j.$$

Во-вторых, на плоскости T

$$deg(S_j) - S \cdot S_j = deg(S_j) - deg(S)deg(S_j) < 0.$$

В-третьих,

$$(S \cdot S_j)_D = (S \cdot S_j)_T,$$

поскольку все кривые S_j отличны от кривой S и поверхность D гладкая. Из работы [Ar] следует отрицательность формы пересечения кривых S_i на поверхности D.

Дивизор

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^{r} mult_{S_i}(M_X) S_i$$

численно эффективен на поверхности D. С другой стороны

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^{r} mult_{S_i}(M_X) S_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{r} (1 - mult_{S_i}(M_X)) S_i$$

и на поверхности D

$$\sum_{i=1}^{r} (1 - mult_{S_i}(M_X)) S_i \cdot S_j \geq 0 \text{ для } j = 1, \ldots, r.$$

Из отрицательностi формы пересечения кривых S_i на поверхности D следует, что все

$$mult_{S_i}(M_X) \geq 1.$$

□

§5. Лог пары с размерностью Кодаиры 0.

В этом параграфе мы покажем, как Теорема 1.2 выводится из Теоремы 1.1.

Доказательство Теоремы 1.2. Пусть многообразие S есть обьединение всех элементов $CS(X, M_X)$. Из Теоремы 1.1 следует, что размерность S равна $N-3$ и S содержится в линейном пространстве T размерности $N-2$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ на гиперповерхности X, состоящий из гиперплоских сечений X, которые содержат многообразие S. Разрешим неопределённости рационального отображения $\phi_{\mathcal{H}_T}$ посредством морфизма $f: W \to X$, такого что многообразие W гладкое, над общей точкой каждой неприводимой компоненты многообразия S лежит ровно один дивизор и f – изоморфизм вне S. Положим

$$g = \phi_{\mathcal{H}_T} \circ f \text{ и } E = f^{-1}(S).$$

Рассмотрим общий слой D морфизма g. Тогда

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^{k} a_i F_i,$$

где все $a_i \in \mathbb{N}$ и для всех дивизоров F_i

$$dim(f(F_i)) \leq N-4.$$

Выполнено соотношение

$$f^{-1}(M_X)|_D \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{k} c_i F_i|_D,$$

где все $c_i \in \mathbb{Q}$. Откуда следует, что $f^{-1}(M_X)$ лежит в слоях морфизма g. $\square$

§6. Лог пары с ненулевой размерностью Кодаиры.

В этом параграфе мы выведем Теоремы 1.3 и 1.4 из Теорем 1.1 и 1.2.

Доказательство Теоремы 1.3. Будем считать, что $\kappa(X, M_X) \neq N-1$. Из Теоремы 1.1 вытекает, что лог пара $(X, \lambda M_X)$ канонична и $\kappa(X, \lambda M_X) = 0$. Следовательно

$$\kappa(X, M_X) \geq \kappa(X, \lambda M_X) \geq 0.$$

Предположим, что лог пара $(X, \lambda M_X)$ терминальна. Возьмём $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$, такое что лог пара $(X, \delta M_X)$ также терминальна. Тогда

$$N-1 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) < N-1.$$

Следовательно, $CS(X, \lambda M_X) \neq \emptyset$ и необходимый результат несложно следует из Теорем 1.1 и 1.2. $\square$

Доказательство Теоремы 1.4. По Теореме 1.1 лог пара $(X, \lambda M_X)$ канонична. Следовательно, лог пара (X, M_X) терминальна и $\kappa(X, M_X) = -\infty$. $\square$

Литература

[Co] Corti A., *Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry*, препринт (1998).

[KaMaMa] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K., *Introduction to the minimal model problem*, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 283–360.

[Пу1] Пухликов А.В., *Замечание о теореме В.А.Исковских и Ю.И.Манина о трёхмерной квартике*, Труды Мат. Института им. В.А.Стеклова **208** (1995), Наука, 278–289.

[Пу2] Пухликов А.В., *Birational automorphisms of Fano hypersurfaces*, Invent. Math. **134** (1998), 401–426.

[Че] Чельцов И.А., *Лог модели бирационально жёстких многообразий*, препринт (1998).

E-mail: cheltsov@yahoo.com