СТЕПЕНЬ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

ИВАН ЧЕЛЬЦОВ

Аннотация. В работе изучаются свойства степени иррациональности алгебраического многообразия, которая по определению является минимальной степенью доминантного рационального отображения данного многообразия на проективное пространство. Показано, что за исключением трехмерной квартики степень иррациональности неособых трехмерных многообразий Фано не превосходит 2, а степень иррациональности общей трехмерной квартики равна 3. Также рассматривается степень иррациональности трехмерных многообразий Рида–Флетчера.

Проблема рациональности[1] алгебраических многообразий является одной из наиболее глубоких и интересных проблем алгебраической геометрии. Глобальные голоморфные дифференциальные формы являются естественными бирациональными инвариантами неособых многообразий, которые полностью решают проблему рациональности алгебраических кривых и поверхностей (см. [75]). Однако, уже в трехмерном случае имеющихся дискретных инвариантов не хватает для определения рациональности. В частности, следующий результат получен в работе [12].

Теорема 1. *Пусть V — неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 4. Тогда группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов шиперповерхности V совпадают.*

Легко видеть, что из теоремы 1 следует нерациональность любой неособой трехмерной квартики в $\mathbb{P}^4$. Действительно, в обозначениях теоремы 1, полная линейная система $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_V|$ инвариантна относительно действия группы $\mathrm{Aut}(V)$, поскольку антиканонический дивизор[2] $-K_V$ линейно эквивалентен гиперплоскому сечению квартики V. Следовательно, группа $\mathrm{Aut}(V)$ состоит из проективных автоморфизмов, откуда следует ее конечность (см. [61]). Таким образом, группа $\mathrm{Bir}(V)$ конечна, откуда следует нерациональность квартики V, поскольку группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ бесконечна[3].

Из нерациональности неособой трехмерной квартики сразу следовало отрицательное решение проблемы Люрота[4] в размерности 3. А именно, существуют нерациональные, но унирациональные[5] трехмерные многообразия[6]. Например, квартика

$$x_0^4 + x_0x_4^3 + x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 + x_3^4 + x_3^3x_4 = 0 \subset \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]\Big) \cong \mathbb{P}^4$$

унирациональна (см. [8]), неособа и нерациональна по теореме 1.

Все рассматриваемые многообразия по умолчанию считаются проективными, нормальными и определенными над полем комплексных чисел.

[1]Многообразие V принято называть рациональным, если поле его рациональных функций изоморфно $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$, что эквивалентно существованию бирационального отображения $\rho : \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$.

[2]Под дивизором мы везде будем подразумевать $\mathbb{Q}$-дивизор, то есть формальную конечную линейную комбинацию подмногообразий коразмерности 1 с рациональными коэффициентами.

[3]Технику работы [12] принято называть *методом максимальных особенностей.*

[4]Проблема Люрота в размерности n состоит в следующем: верно ли что все подполя, содержащие поле $\mathbb{C}$, поля $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ исчерпываются полями вида $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_k)$, где f_i — некоторая рациональная функция в $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$?

[5]Многообразие V называется унирациональным, если существует доминантное рациональное отображение $\rho : \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$. Последнее эквивалентно тому, что поле рациональных функций многообразия V является подполем поля $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$. Некоторые нетривиальные конструкции унирациональности многомерных алгебраических многообразий содержаться в работе [8].

[6]Унирациональная кривая или поверхность рациональна (см. [75]).

Простых способов доказательства нерациональности в нетривиальной ситуации не существует (см. [10]), например, в классе многомерных рационально связных многообразий[7] или в классе унирациональных многообразий. Отметим, что любая неособая трехмерная квартика рационально связна (см. [58]), однако, ее унирациональность известна только в нескольких конкретных случаях (см. [8], [59]), а унирациональность общей трехмерной квартики неизвестна. Более того, неизвестно даже существование рационально связного неунирационального многообразия.

На данный момент существуют четыре способа доказательства нерациональности[8] рационально связных многообразий:

- метод максимальных особенностей (см. [8], [25]);
- использование компоненты Гриффитса промежуточного якобиана трехмерного многообразия в качестве бирационального инварианта (см. [43], [33], [22]);
- использование подгруппы кручения группы трехмерных целочисленных когомологий в качестве бирационального инварианта (см. [30]);
- редукция в положительную характеристику и метод вырождения[9].

Метод максимальных особенностей был применен к доказательству нерациональности многих многомерных рационально связных многообразий. Более того, конечность группы бирациональных автоморфизмов в доказательстве нерациональности неособой трехмерной квартики несущественна! На самом деле, в работе [12] было неявно доказано отсутствие небирегулярных бирациональных отображений между неособой трехмерной квартикой и очень широким классом трехмерных многообразий[10], среди которых есть и сама трехмерная квартика. Оказалось, что неособая трехмерная квартика обладает геометрией, которая в чем-то очень напоминает геометрию неособых многообразий общего типа[11] с обильным каноническим дивизором[12].

С точки зрения теории Мори (см. [60]) вопрос рациональности трехмерных рационально связных многообразий достаточно рассмотреть для многообразий Фано[13], расслоений на поверхности дель Пеццо[14] и расслоений на коники, но необходимо рассматривать многообразия с особенностями (см. [63]). Отметим следующее:

- проблема рациональности неособых трехмерных многообразий Фано практически решена (см. [53]), но доказательство нерациональности некоторых многообразий Фано оказалось очень трудными (см. [18], [19], [20], [21], [4], [6]);

---

[7]Многообразие V называется рационально связным, если через любые две точки на нем проходит рациональная кривая (см. [58]). Унирациональное многообразие рационально связно.

[8]Каждый из имеющихся методов доказательства нерациональности рационально связанных многообразий имеет свои плюсы и минусы, однако, практически во всех случаях метод максимальных особенностей является единственным из известных способов доказателсьтва нерациональность отдельно взятого рационально связного многообразия, чья размерность не меньше четырех.

[9]Нерациональность общей гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ степени $d \geqslant \frac{2}{3}(n+2) \geqslant 4$ доказана в [55].

[10]Например, кубика в $\mathbb{P}^4$, полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^6$, произвольное расслоение на коники, расслоение на рациональные поверхности.

[11]Неособое многообразие X имеет общий тип, если $\dim(\phi_{|nK_X|}(X)) = \dim(X)$ при $n \gg 0$, откуда следует, что многообразия общего типа не являются рационально связными (см. [58]).

[12]Дивизор D на многообразии X называется обильным, если дивизор nD является очень обильным дивизором для некоторого натурального $n > 0$, то есть nD — гиперплоское сечение многообразия X. Свойство дивизора быть обильным означает геометрически, что дивизор имеет положительное пересечение со всеми кривыми на многообразии X. Из критерия обильности Клеймана следует, что дивизор D обилен тогда и только тогда когда он задает положительную функцию на замыкании конуса эффективных одномерных циклов $\overline{\mathbb{NE}}(X)$ многообразия X, так называемом конусе Мори.

[13]Многообразия с обильным антиканоническим дивизором суть многообразия Фано, неособые трехмерные многообразия Фано были классифицированы В.А. Исковских, Ш. Мори и Ш. Мукаем, которые нашли 105 деформационных семейств неособых трехмерных многообразий Фано (см. [53]).

[14]Двумерные многообразия Фано принято называть поверхностями дель Пеццо.

- доказательство нерациональности широкого класса расслоений на коники получено в работе [17] с помощью метода максимальных особенностей, и с помощью метода промежуточного якобиана в работах [33], [22], [26];
- за редким исключением (см. [43], [31], [57]) проблема рациональности трехмерных многообразий, расслоеных на поверхности дель Пеццо малых степеней[15], оставалась вне досигаемости ни одного из существующих методов доказательства нерациональности (см. [9]) до появления работы [16], где была решена проблема рациональности для широкого класса трехмерных многообразий, расслоеных на поверхности дель Пеццо степени не больше 3, в очень общих и естественных предположениях (см. также [2], [49], [3], [45], [5], [35], [41]).

Геометрический смысл теоремы 1 имеет ту же природу, что и теорема Нетера об образующих двумерной группы Кремоны[16]. С теоремой Нётера связано много интересных задач, одна из которых — бирациональная классификация эллиптических пучков на проективной плоскости, что эквивалентно задаче нахождения всех возможных бирациональных перестроек $\mathbb{P}^2$ в эллиптические расслоения. Первоначально этот вопрос был рассмотрен в работе [34]. Позднее идеи работы [33] были строго обоснованы в работе [7], где было доказано, что любой эллиптический пучок на проективной плоскости может быть бирационально перестроен в эллиптический пучок специального вида, так называемый пучок Альфана (см. [50]).

Задачу нахождения всех возможных бирациональных перестроек в расслоения на эллиптические кривые можно рассмотреть для широкого класса многообразий, а не только для $\mathbb{P}^2$. Например, для неособой гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени 4, что является естественным логическим продолжением утверждения теоремы 1, поскольку из доказательства теоремы 1 следует, что неособая трехмерная квартика является бирационально сверхжесткой (см. [25]) и, в частности, не может быть бирационально перестроена ни в какое расслоение на рациональные кривые или рациональные поверхности. В работе [38] был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть X — неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 4, такая что существует рациональное отображение $\xi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ нормализация общего слоя которого является эллиптической кривой. Тогда найдется прямая $L \subset \mathbb{P}^4$, содержащаяся в X, такая что $\xi = \sigma \circ \psi$, где $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — проекция из L и $\sigma \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.*

Отметим, что на неособой трехмерной квартике в $\mathbb{P}^4$ существует однопараметрическое семейство прямых (см. [44]). Таким образом, утверждение теоремы 2 полностью решает задачу нахождения всех возможных бирациональных перестроек в расслоения на эллиптические кривые для неособой трехмерной квартике в $\mathbb{P}^4$.

Поверхности кодаировой размерности[17] нуль и, в частности, абелевы поверхности и поверхности типа $K3$ являются естественными двумерными аналогами эллиптических кривых. Поэтому вполне естественно также рассмотреть вопрос классификации всех возможных бирациональных перестроек неособой трехмерной квартики в

[15]Квадрат антиканонического дивизора поверхности дель Пеццо принято называть степенью поверхности дель Пеццо. Степень неособой поверхности дель Пеццо есть натуральное число, которое принимает все значения от 1 до 9. Трехмерные рационально связные многообразия, расслоенные на неособые поверхности дель Пеццо степени 5 и выше, обязательно рациональны. Проблема рациональности неособых трехмерных многообразий, расслоеных на поверхности дель Пеццо степени 4, практически полностью решена с помощью метода промежуточного якобиана в работах [1] и [28].

[16]Группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ порождается подгруппой $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ и инволюцией Кремоны τ, заданной уравнением $\tau(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ суть проективные координаты.

[17]Размерностью Кодаиры $\kappa(X)$ неособого многообразия X называется максимальная размерность образа $\phi_{|nK_X|}(X)$ при $n \gg 0$, если хотя бы одна из полных линейных систем $|nK_X|$ не пуста, а в противном случае $\kappa(X) = -\infty$. Размерностью Кодаиры особого многообразия по умолчанию считается кодаирова размерность его десингуляризации.

расслоения на поверхности кодаировой размерности нуль, что эквивалентно задаче бирациональной классификации пучков поверхностей кодаировой размерности нуль на неособой трехмерной квартике. Из доказательства теоремы 2 в работе [38] видно, что последняя задача несколько сложнее задачи нахождения всех возможных бирациональных перестроек неособой трехмерной квартики в эллиптические расслоения.

В работе [38] утверждалось, что каждый пучок на неособой трехмерной квартике, общая поверхность которого является неприводимой поверхностью кодаировой размерности нуль, является пучком гиперплоских сечений неособой трехмерной квартики. Последнее утверждение неверно — в работе [11] был построен следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим неособую трехмерную квартику $X \subset \mathbb{P}^4$ и точку P на квартике X, такие что квартика X задана уравнением

$$w^3 q_1\big(x,y,z,t\big) + w^2 q_2\big(x,y,z,t\big) + w q_1\big(x,y,z,t\big) q_2\big(x,y,z,t\big) + q_4\big(x,y,z,t\big) = 0,$$

а точка P задана уравнениями $x = y = z = t = 0$, где $(x : y : z : t : w)$ — проективные координаты на $\mathbb{P}^4$, а q_i — общий однородный многочлен степени i. Пусть $\mathcal{P}$ — пучок, высекаемый на квартике X пучком

$$\lambda q_1^2\big(x,y,z,t\big) + \mu\Big(w q_1\big(x,y,z,t\big) + q_2\big(x,y,z,t\big)\Big) = 0,$$

где $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$. Тогда общая поверхность из пучка $\mathcal{P}$ бирационально эквивалентна поверхности типа $K3$, но пучок $\mathcal{P}$ не является пучком гиперплоских сечений.

Квартика в примере 3 имеет достаточно специальный вид. Естественно высказать следующее предположение.

Гипотеза 4. *Пусть X — общая трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$, а $\mathcal{P}$ — пучок пучок на квартике X, такой что общая поверхность из пучка $\mathcal{P}$ бирационально эквивалентна неособой поверхности кодаировой размерности нуль. Тогда поверхности из пучка $\mathcal{P}$ высекаются на квартике X гиперплоскостями в $\mathbb{P}^4$.*

Можно показать (см. [23]), что имеет место следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть X — неособая трехмерая квартика, а $\pi : V \to X$ — раздутие квартики X в некоторой точке $P \in X$. Предположим дополнительно, что полная линейная система $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент для некоторого натурального числа m, такого что m является минимальным натуральным числом для которого линейная система $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент. Тогда линейная система $|-mK_V|$ является пучком, общая поверхность которого бирационально эквивалентна поверхности типа $K3$, квартика X содержит прямую, проходящую через точку P, и таких прямых конечное число.*

Как показывает пример 3 конструкция пучков поверхностей кодаировой размерности нуль, приведенная в предложении 5, действительно реализуется в некоторых случаях. Более того, в работе [23] показано, что пучками из предложения 5 и пучками гиперплоских сечений исчерпываются все пучки поверхностей кодаировой размерности нуль на неособой трехмерной квартике. В частности, неособая трехмерная квартика бирационально не эквивалентна расслоению на абелевы поверхности[18].

[18]Существуют рационально связные трехмерные многообразия, расслоеные на абелевы поверхности. Приведем пример, принадлежащий Я. Коллару. Пусть E — эллиптическая кривая, допускающая нетривиальное действие группы $\mathbb{Z}_3$, которое имеет неподвижную точку, а V — фактор многоообразия $E \times E \times \mathbb{P}^1$ по соответствующему диагональному действию группы $\mathbb{Z}_3$, где действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{P}^1$ считается не тривиальным. Тогда V обладает структурой расслоения, чей общий слой есть $E \times E$. С другой стороны, многообразие V рационально связно, поскольку V также обладает структурой расслоения на коники над рациональной поверхностью, являющейся фактором поверхности $E \times E$ по диагональному действию группы $\mathbb{Z}_3$.

Естественно попытаться охарактеризовать точки на неособой трехмерной квартике для которых реализуется конструкция предложения 5. Можно допустить, что выполнено следующее предположение.

Гипотеза 6. *Пусть X — неособая трехмерая квартика, а $\pi : V \to X$ — раздутие точки $P \in X$. Выберем проективные координаты $(x : y : z : t : w)$ на $\mathbb{P}^4$ такие что, точка P задана уравнениями $x = y = z = t = 0$. Тогда X задается уравнением*

$$w^3 q_1\big(x, y, z, t\big) + w^2 q_2\big(x, y, z, t\big) + w q_3\big(x, y, z, t\big) + q_4\big(x, y, z, t\big) = 0,$$

где q_i — однородный многочлен степени i. Предположим, что полная линейная система $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент для некоторого натурального числа m, такого что m является минимальным натуральным числом, которое обладает таким свойством. Тогда $m = 2$, многочлены q_1 и q_2 взаимно просты, последовательность q_1, q_2, q_3 не регулярна, а линейная система $|-mK_V|$ является собственным прообразом пучка $\lambda q_1^2 + \mu(wq_1 + q_2) = 0$, где $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Утверждение гипотезы 6 имеет ярко выраженный коммутативно-алгебраический характер, поэтому можно предположить, что требуемое утверждение уже известно, но быть может сформулировано в другом виде. К сожалению, соответствующий поиск в таких базах данных научной литературы как MathSciNet и Zentralblatt ничего не дал, однако автор узнал о существование работы [74], в которой исследуется вопрос существования и характеризации точек на неособой поверхности в $\mathbb{P}^3$ степени 4, проекция из которых задает доминантное рациональное отображение на $\mathbb{P}^2$, имеющее степень 3 над общей точкой $\mathbb{P}^2$, такое что соответствующее расширение полей рациональных функций есть расширение Галуа. В частности, из работы [74] следует, что минимальная степень доминантного рационального отображения на $\mathbb{P}^2$ достаточно общей двумерной квартики в $\mathbb{P}^3$ равна 3. Последнее свойство можно сформулировать в терминах, использующих следующее понятие.

Определение 7. Степенью иррациональности $\mathrm{d}(V)$ многообразия V называется наименьшая степень расширения полей $\mathbb{C}(x_1, \cdots, x_n) \subset K(V)$, где $K(V)$ — поле рациональных функций многообразия V, и $n = \dim(V)$.

Таким образом, из результатов работы [74] следует, что степень иррациональности общей двумерной квартики равна 3. Понятие степени иррациональности[19] было введено в работе [62], где был также доказан следующий результат.

Теорема 8. *Пусть $\pi : V \dashrightarrow C$ — доминантное отображение, такое что C является кривой. Тогда выполнено неравенство* $\mathrm{d}(V) \geqslant \mathrm{d}(C)$.

Более того, следующий результат был получен в работе [72].

Теорема 9. *Пусть $\pi : V \dashrightarrow W$ — доминантное отображение, где V и W — поверхности отрицательной кодаировой размерности. Тогда* $\mathrm{d}(V) \geqslant \mathrm{d}(W)$.

Хорошо известно, что теорема 9 уже не верна для поверхностей неотрицательной размерности кодаиры и для многомерных многообразий (см. [72], [12], [43]).

Замечание 10. Многообразие является рациональным в том и только в том случае, когда его степень иррациональности равна 1.

Степень иррациональности линейчатых поверхностей имеет одномерную природу, как следует из следующего результата (см. [70]).

Теорема 11. *Пусть C — кривая. Тогда* $\mathrm{d}(C \times \mathbb{P}^1) = \mathrm{d}(C)$.

[19] Степень иррациональности многообразия V есть наименьшая степень доминантного отображения $V \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, где $n = \dim(V)$. Степень иррациональности кривой есть гональность кривой.

К сожалению, про степень иррациональности нелинейчатых поверхностей практически ничего неизвестно, кроме следующего результата (см. [67], [71], [73], [74]).

Теорема 12. *Пусть S — минимальная неособая поверхность, имеющая неотрицательную размерность Кодаиры. Тогда выполнены следующие утверждения:*

- $\mathrm{d}(S)=2$, *если* $2K_S\sim 0$*;*
- $4\geqslant \mathrm{d}(S)\geqslant 3$, *если* $2K_S\not\sim 0$*;*
- $\mathrm{d}(S)=2$, *если S — поверхность типа $K3$ и* $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(S)=20$*;*
- $\mathrm{d}(S)=3$, *если S — квартика в $\mathbb{P}^3$ и* $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(S)=1$*;*
- $\mathrm{d}(S)\geqslant 3$, *если S — абелева поверхность.*

Из работы [67] следует, что абелевы поверхности, чья степень иррациональности равна 3, существуют, но нет примеров поверхностей кодаировой размерности нуль, чья степень иррациональности больше чем 3. Имеет место следующая гипотеза[20].

Гипотеза 13. *Пусть S — поверхность типа $K3$. Тогда* $\mathrm{d}(S)\leqslant 3$.

Пусть V — рационально связное трехмерное многообразие. Что можно сказать про его степень иррациональности? Во-первых, в виду существования программы минимальных моделей (см. [60]), можно считать, что многообразие V имеет терминальные[21] и $\mathbb{Q}$-факториальные[22] особенности, и существует небирациональный сюрьективный морфизм $\pi: V\to Z$, имеющий связные слои, такой что Z рационально, а дивизор $-K_V$ является π-обильным[23]. Во-вторых, имеет место следующий результат.

Предложение 14. *Выполнено неравенство* $\mathrm{d}(V)\leqslant 2$ *в случае, когда* $\dim(Z)>0$.

Доказательство. В случае, когда $\dim(Z)=2$, морфизм π является расслоением на коники, откуда $\mathrm{d}(V)\leqslant 2$. В случае, когда $\dim(Z)=1$, многообразие V бирационально эквивалентно эллиптическому расслоению с сечением (см. [39]), откуда $\mathrm{d}(V)\leqslant 2$. □

Таким образом, в случае $\dim(Z)>0$, проблема возможных значений степени иррациональности многообразия V эквивалентна проблеме рациональности трехмерных многообразий, расслоеных на коники или поверхности дель Пеццо[24].

Предложение 15. *Пусть V — неособое многообразие Фано. Тогда* $\mathrm{d}(V)\leqslant 3$, *причем, равенство* $\mathrm{d}(V)=3$ *возможно только если V — трехмерная квартика.*

Доказательство. Можно считать, что V не может быть бирационально перестроено в расслоение на коники и эллиптическое расслоение с сечением. Тогда из классификации неособых трехмерных многообразий Фано (см. [53]) сразу следует, что

[20]Утверждение гипотезы 13 выполнено для поверхностей типа $K3$, являющихся квазигладкими гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах (см. [69], [51]). Пусть V — неособая минимальная поверхность типа $K3$. Тогда равенство $\mathrm{d}(V)=2$ эквивалентно существованию инволюции $\tau\in\mathrm{Aut}(V)$, которая оставляет неподвижной кривую (см. [15]). Значит, выполнено неравенство $\mathrm{d}(V)\geqslant 3$, когда $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(V)=1$, а поверхность V не является двойным накрытием $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в секстике (см. следствие 10.1.3 в [15]). В частности, из работы [14] следует, что выполнено неравенство $\mathrm{d}(V)\geqslant 3$, когда поверхность V является либо очень общим полным пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$, либо очень общим полным пересечением трех квадрик $\mathbb{P}^5$.

[21]Терминальные особенности суть правильный многомерный аналог неособых точек. В размерности 3 терминальные особенности хорошо изучены (см. [63]). Неособые точки терминальны, а изолированные обыкновенные двойные точки терминальны начиная с размерности 3.

[22]Многообразие имеет $\mathbb{Q}$-факториальные особенности, если некоторая ненулевая кратность каждого дивизора Вейля на нем является дивизором Картье. Неособое многообразие $\mathbb{Q}$-факториально.

[23]Условие π-обильности антиканонического дивизора $-K_V$ просто означает, что существует такой обильный дивизор D на многообразии Z, что дивизор $-K_V+\pi^*(D)$ также является обильным.

[24]Проблема рациональности расслоений на коники и поверхности дель Пеццо достаточно хорошо, хотя и не полностью изучена (см. [17], [26], [31], [1], [52], [9], [16], [57], [49], [3], [5], [35], [41], [28]).

многообразие V является либо двулистным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике, либо трехмерной квартикой. Хорошо известно, что в каждом из возможных случаем многообразие V нерационально (см. [12], [8]). Значит, в первом случае выполнено равенство $\mathrm{d}(V) = 2$, но в последнем случае выполнено неравенство $\mathrm{d}(V) \leqslant 3$. $\square$

Итак показано, что степень иррациональности любой неособой трехмерной квартики априори может быть равна либо 2 либо 3.

Предложение 16. *Пусть V — общая трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$. Тогда* $\mathrm{d}(V) = 3$.

Доказательство. Предположим, что выполнено равенство $\mathrm{d}(V) = 2$. Тогда существует расширение полей $K(V) \supset \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$ степени 2, которое индуцирует бирациональную инволюцию $\tau \in \mathrm{Bir}(V)$. Инволюция τ обязательно бирегулярна по теореме 1, но группа $\mathrm{Aut}(V)$ состоит из проективных автоморфизмов V, поскольку выполнена рациональная эквивалентность $-K_V \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_V$. Теперь из общности трехмерной квартики V сразу следует, что группа $\mathrm{Aut}(V)$ тривиальна (см. [61]). $\square$

Естественно предположить следующее.

Гипотеза 17. *Пусть V — неособая трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$. Тогда* $\mathrm{d}(V) = 3$.

Удивительно, но утверждение гипотезы 17 оказалось непосредственно связано с вопросом рациональности особых трехмерных многообразий, расслоеных на поверхности дель Пеццо степени 2. Более того, как мы сейчас увидим, единственный способ доказать утверждение гипотезы 17 — применить технику работы [16] к очень конкретно заданному трехмерному многообразию, которое однако имеет особенности.

Пусть V — неособая трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$. Предположим, что выполнено равенство $\mathrm{d}(V) = 2$. Тогда существует бирегулярная инволюция τ квартики V, такая что фактор-многообразие V/τ рационально. В этом случае, неподвижное множество инволюции τ состоит либо из неособой двумерной квартики, либо из несвязного объединения плоской одномерной квартики и четырех различных точек. В первом случае, многообразие V/τ является двойным накрытием $\mathbb{P}^3$, разветвленным в неособой квартике, нерациональность которого известна (см. [18], [19], [20], [21], [68]), что противоречит равенство $\mathrm{d}(V) = 2$. Таким образом, инволюция τ оставляет неподвижными на квартике V несвязное объединение плоской кривой степени 4 и четырех различных точек, при этом, можно считать, что квартика V задана уравнением

$$h_4\big(x,y,z\big)+t^2a_2\big(x,y,z\big)+twb_2\big(x,y,z\big)+w^2c_2\big(x,y,z\big)+g_4\big(t,w\big) = 0 \subset \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}[x,y,z,t,w]\Big)$$

и $\tau(x:y:z:t:w) = (x:y:z:-t:-w)$, где h_i, a_i, b_i, c_i, g_i — однородные многочлены степени i. В этом случае, инволюция τ оставляет неподвижной кривую C, заданную уравнениями $t = w = 0$, и точки O_1, O_2, O_3, O_4, заданные уравнениями $x = y = z = 0$.

Пусть $Y = V/\tau$, а $\psi : V \to Y$ — соответствующее двойное накрытие. Тогда многообразие Y является многообразием Фано с каноническими[25]. и $\mathbb{Q}$-факториальными особенностями. Выполнены равенство $-K_Y^3 = 2$ и $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(Y) = 1$, причем, имеем

$$\mathrm{Sing}\big(X\big) = \psi\big(C\big) \cup \psi\big(O_1\big) \cup \psi\big(O_2\big) \cup \psi\big(O_3\big) \cup \psi\big(O_4\big),$$

в каждой точке кривой $\psi(C)$ многообразие Y локально изоморфно $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{C}$, а в каждой точке $\psi(O_i)$ многообразие Y имеет фактор-особенность типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$.

[25]Канонические особенности естественным образом возникают на канонических моделях неособых многообразий общего типа. Например, пусть U — неособое многообразие размерности n с численно эффективным каноническим и объемным каноническим дивизором K_U, то есть выполнено неравенство $K_U \cdot C \geqslant 0$ для любой кривой C на многообразии U и $K_U^n > 0$. Тогда каноническая модель $\mathrm{Proj}(\oplus_{n\geqslant 0} H^0(\mathcal{O}_U(nK_U)))$ имеет канонические особенности (см. [60]). Известно, что канонические особенности всегда рациональны, а горенштейневые рациональные особенности являются каноническими (см. [47]). Канонические особенности в размерности 2 суть дювалевские (см. [29]).

Пусть $\rho : \hat{Y} \to Y$ — раздутие точек $\psi(O_1)$, $\psi(O_2)$, $\psi(O_3)$, $\psi(O_4)$, и E_i — исключительный дивизор морфизма ρ, доминирующий точку $\psi(O_i)$. Тогда полная линейная система $|-K_{\hat{Y}}|$ свободна и $-K_{\hat{Y}}^3 = 0$. Существует эллиптическое расслоение

$$\eta : \hat{Y} \to \mathbb{P}^2,$$

такое что поверхность E_i является его сечением. В частности, отражение общего слоя расслоение η в сечении E_i задает бирациональную инволюцию $\tau_i \in \mathrm{Bir}(Y)$, которая не является бирегулярной если многочлены a_2, b_2, c_2 достаточно общие, однако, легко видеть, что инволюция τ_i бирегулярна в случае, когда $a_2 = b_2 = c_2 = 0$.

Пусть $\nu : \bar{Y} \to Y$ — раздутие кривой $\psi(C)$. Тогда существует морфизм

$$\xi : \bar{Y} \to \mathbb{P}^1,$$

такой что общий слой морфизма ξ является неособой поверхностью дель Пеццо степени 2. В частности, группа $\mathrm{Bir}(Y)$ содержит огромную подгруппу порожденную инволюциями Бертини общего слой расслоения ξ (см. [13], [9], [16]), поскольку множество сечений морфизма ξ огромно[26]. При этом, инволюция τ_i не сохраняет общий слой расслоения ξ в случае, когда многочлены a_2, b_2, c_2 являются достаточно общими.

Гипотеза 18. *Пусть $\rho : Y \dashrightarrow U$ бирациональное отображение, где U — многообразие с терминальными и $\mathbb{Q}$-факториальными особенности, такое что существует морфизм со связными слоями $\pi : U \to Z$, такой что $-K_U$ является π-обильным, а также* $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(U) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(Z) + 1$. *Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[dl, dashed, "\rho"'] & Y & \\
U \arrow[dr, "\pi"'] & & & \bar{Y}, \arrow[ul, "\eta"'] \arrow[dl, "\xi"] \\
 & Z \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

где σ — бирациональный автоморифзм, а ω — бирегулярный автоморфизм.

Геометрический смысл гипотезы 18 состоит в том, что многообразие Y по видимому *почти бирационально жестко* (см. [25]). Можно предположить, что бирациональные автоморфизмы многообразия Y *откручиваются* инволюциями Бертини общего слой расслоения ξ и построенными инволюциями τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.

Гипотеза 19. *Группа* $\mathrm{Bir}(Y)$ *порождена бирегулярными автоморфизмами, инвлюциями вида $\eta \circ \tau \circ \eta^{-1}$ и инволюциями τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, где τ — бирациональная инволюция многообразия $\bar{Y}$, индуцированная инволюцией Бертини общего слоя расслоения ξ.*

Из утверждений гипотез 18 и 19 следует, что расслоение $\xi : \bar{Y} \to \mathbb{P}^1$ бирационально жестко в смысле работ [16] и [45] если выполнены равенства $a_2 = b_2 = c_2 = 0$.

Замечание 20. В работе [49] показана бирациональная жесткость неособого трехмерного многообразия, расслоеного на поверхности дель Пеццо степени 2, свойства которого во многом напоминают свойства многообразия $\bar{Y}$. С другой стороны, геометрия многообразия Y во многом напоминает геометрию многообразия Фано–Энриквеса[27] степени 4, которое может быть получено как фактор двойного накрытия квадрики

[26] См. теорему 4.2 работы [13], теорему 6.10 главы IV книги [56], работу [48].

[27] Многообразия Фано–Энриквеса являются трехмерными многооразиями Фано, чей канонический дивизор не является дивизором Картье, но численно эквивалентен дивизору Картье. Многообразия Фано–Энриквеса с терминальными циклическими фактор-особенностями классифицированы в работе [32], большинство из них рациональны (см. [37], [24]), но есть и нерациональные (см. [64]).

с ветвлением в неособой поверхности степени 8 по инволюции, оставляющей неподвижными ровно 8 точек. Нерациональнота последнего многообразия неизвестна.

Теперь мы рассмотрим несколько простых свойств степени иррациональности так называемых многообразий Рида–Флетчера. Пусть X — квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,a_1,a_2,a_3,a_4)$ степени d, такая что выполнена эквивалентность

$$-K_X \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4)}(1),$$

выполнены неравенства $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$, а гиперповерхность X имеет терминальные особенности. Тогда $d = \sum_{i=1}^{4} a_i$, а для пятерки (d,a_1,a_2,a_3,a_4) имеется 95 возможностей (см. приложение A), которые были получены в работе [51] путем компьютерных вычислений[28]. Полнота полученного в работе [51] списка доказана в [54].

Пусть $\gimel$ — порядковый номер гиперповерхности X в обозначениях приложения A.

Замечание 21. В случае $\gimel = 1$ многообразие X является неособой трехмерной квартикой, в случае $\gimel = 3$ многообразие X является двулистным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой поверхности степени 6, во всех оставшихся случаях многообразие X особо.

Предположим, что гиперповерхность X является общей. Тогда X рационально связна (см. [27]), но следующий результат был получен в работе [46].

Теорема 22. *Многообразие X бирационально жестко*[29] *и нерационально.*

Утверждение теоремы 22 обобщает утверждение теоремы 1. Также можно обобщить утверждение теоремы 2 и рассмотреть классификацию бирациональных перестроек гиперповерхности X в эллиптические расслоения. Такая классификация была получена в [38], [65], [42], [40]. В частности, был доказан следующий результат.

Теорема 23. *Гиперповерхность X может быть бирационально перестроена в расслоение на эллиптические кривые если и только если $\gimel \notin \{3,75,84,87,93\}$.*

Из предложения 16 следует что $\mathrm{d}(X) = 3$ в случае $\gimel = 1$.

Предложение 24. *Пусть* $\gimel \notin \{1,19,28,39,49,59,66,84\}$. *Тогда* $\mathrm{d}(X) = 2$.

Доказательство. Неравенство $\mathrm{d}(X) \geqslant 2$ следует из теоремы 22. С другой стороны, естественная проекция $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1,a_1,a_2,a_3)$ имеет степень 2 общей точке многообразия X в случае, когда $d < 3a_4$. Таким образом, можно считать, что $\gimel \in \{4,9,17,27\}$, но в этом случае проекция $\mathbb{P}(1,a_1,a_2,a_3,a_4) \dashrightarrow \mathbb{P}(1,a_1,a_2)$ индуцирует бирациональную перестройку X в эллиптическое расслоение с сечением, откуда $\mathrm{d}(X) = 2$. ☐

Предложение 25. *Пусть* $\gimel \in \{1,19,28,39,49,59,66,84\}$. *Тогда* $\mathrm{d}(X) = 3$.

Доказательство. Неравенство $\mathrm{d}(X) \geqslant 2$ следует из теоремы 22. Предположим, что выполнено равенство $\mathrm{d}(X) = 2$. Тогда существует нетривиальная бирациональная инволюция τ многообразия X, которая является бирегулярной согласно работе [46].

---

[28]Пусть S — общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$. Тогда S является квазигладкой гиперповерхностью в $\mathbb{P}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ степени d, которая имеет дювалевские особенности, и выполнено соотношение $K_S \sim 0$. Поверхность S — поверхность типа $K3$. Оказывается, верен и обратный результат — каждая квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективным пространстве, являющаяся поверхностью типа $K3$ с дювалевскими особенностями, может быть получена с помощью описанной конструкции. Такие поверхности были классифицированы М. Ридом, но он не опубликовал этот результат, а независимая классификация была получена позднее в работе [69].

[29]Бирациональная жесткость (см. [25]) многообразия X означает, что X не бирационально следующим многообразиям: расслоениям на коники; расслоениям на поверхности дель Пеццо; многообразиям Фано с терминальными и $\mathbb{Q}$-факториальными особенностями, которые не бирегулярны многообразию X, чья группа Пикара имеет ранг 1.

Инволюция τ индуцирована бирегулярной инволюцией $\hat{\tau}$ взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$, которая оставляет гиперповерхность X инвариантной. Теперь подсчитывая размерность пространства $\hat{\tau}$-инвариантных квазиоднородных многочленов степени d, мы получаем противоречие. □

Особые многообразия Фано большой коразмерности *ближе* к рациональным, чем гиперповерхности. Таким образом, можно предположить, что верно следующее.

Гипотеза 26. *Степень иррациональности трехмерного многообразия Фано с терминальными особенностями не превышает* 3.

Утверждение гипотезы 26 верно для трехмерных многообразий Фано, классифицированных в работах [36], [32], [66], согласно работам [36], [37], [24].

Приложение A. Многообразия Рида–Флетчера.

Пусть X — квазигладкая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$, такая что выполнены равенство $d = \sum_{i=1}^{4} a_i$ и неравенства $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$, а особенности взвешенной гиперповерхности X являются терминальными.

ℶ	d	a_1	a_2	a_3	a_4	$-K_X^3$	$\mathrm{Sing}(X)$
1	4	1	1	1	1	4	$\varnothing$
2	5	1	1	1	2	5/2	$\frac{1}{2}(1,-1,1)$
3	6	1	1	1	3	2	$\varnothing$
4	6	1	1	2	2	3/2	$3 \times \frac{1}{2}(1,-1,1)$
5	7	1	1	2	3	7/6	$\frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{3}(1,-1,1)$
6	8	1	1	2	4	1	$2 \times \frac{1}{2}(1,-1,1)$
7	8	1	2	2	3	2/3	$4 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{3}(1,-1,1)$
8	9	1	1	3	4	3/4	$\frac{1}{4}(1,-1,1)$
9	9	1	2	3	3	1/2	$\frac{1}{2}(1,-1,1), 3 \times \frac{1}{3}(1,-1,1)$
10	10	1	1	3	5	2/3	$\frac{1}{3}(1,-1,1)$
11	10	1	2	2	5	1/2	$5 \times \frac{1}{2}(1,-1,1)$
12	10	1	2	3	4	5/12	$2 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{3}(1,-1,1), \frac{1}{4}(1,-1,1)$
13	11	1	2	3	5	11/30	$\frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{3}(1,-1,1), \frac{1}{5}(1,-1,2)$
14	12	1	1	4	6	1/2	$\frac{1}{2}(1,-1,1)$
15	12	1	2	3	6	1/3	$2 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), 2 \times \frac{1}{3}(1,-1,1)$
16	12	1	2	4	5	3/10	$3 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{5}(1,-1,1)$
17	12	1	3	4	4	1/4	$3 \times \frac{1}{4}(1,-1,1)$
18	12	2	2	3	5	1/5	$6 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{5}(1,-1,2)$
19	12	2	3	3	4	1/6	$3 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), 4 \times \frac{1}{3}(1,-1,1)$
20	13	1	3	4	5	13/60	$\frac{1}{3}(1,-1,1), \frac{1}{4}(1,-1,1), \frac{1}{5}(1,-1,1)$
21	14	1	2	4	7	1/4	$3 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{4}(1,-1,1)$
22	14	2	2	3	7	1/6	$7 \times \frac{1}{2}(1,-1,1), \frac{1}{3}(1,-1,1)$

ℶ	d	a_1	a_2	a_3	a_4	$-K_X^3$	$\mathrm{Sing}(X)$
23	14	2	3	4	5	7/60	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2)$
24	15	1	2	5	7	3/14	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
25	15	1	3	4	7	5/28	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
26	15	1	3	5	6	1/6	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
27	15	2	3	5	5	1/10	$\frac{1}{2}(1,-1,1),3\times\frac{1}{5}(1,-1,2)$
28	15	3	3	4	5	1/12	$5\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1)$
29	16	1	2	5	8	1/5	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2)$
30	16	1	3	4	8	1/6	$\frac{1}{3}(1,-1,1),2\times\frac{1}{4}(1,-1,1)$
31	16	1	4	5	6	2/15	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
32	16	2	3	4	7	2/21	$4\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
33	17	2	3	5	7	$\frac{17}{210}$	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
34	18	1	2	6	9	1/6	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1)$
35	18	1	3	5	9	2/15	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1)$
36	18	1	4	6	7	3/28	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,1)$
37	18	2	3	4	9	1/12	$4\times\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1)$
38	18	2	3	5	8	3/40	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{8}(1,-1,3)$
39	18	3	4	5	6	1/20	$3\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1)$
40	19	3	4	5	7	$\frac{19}{420}$	$\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
41	20	1	4	5	10	1/10	$\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{5}(1,-1,1)$
42	20	2	3	5	10	1/15	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),2\times\frac{1}{5}(1,-1,2)$
43	20	2	4	5	9	1/18	$5\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,2)$
44	20	2	5	6	7	1/21	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
45	20	3	4	5	8	1/24	$\frac{1}{3}(1,-1,1),2\times\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,3)$
46	21	1	3	7	10	1/10	$\frac{1}{10}(1,-1,3)$
47	21	1	5	7	8	3/40	$\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{8}(1,-1,1)$
48	21	2	3	7	9	1/18	$\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,4)$
49	21	3	5	6	7	1/30	$3\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
50	22	1	3	7	11	2/21	$\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
51	22	1	4	6	11	1/12	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
52	22	2	4	5	11	1/20	$5\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1)$
53	24	1	3	8	12	1/12	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1)$
54	24	1	6	8	9	1/18	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,1)$
55	24	2	3	7	12	1/21	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
56	24	2	3	8	11	1/22	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,4)$
57	24	3	4	5	12	1/30	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),2\times\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2)$
58	24	3	4	7	10	1/35	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2),\frac{1}{10}(1,-1,3)$
59	24	3	6	7	8	1/42	$4\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,1)$

ℶ	d	a_1	a_2	a_3	a_4	$-K_X^3$	$\mathrm{Sing}(X)$
60	24	4	5	6	9	1/45	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,2)$
61	25	4	5	7	9	$\frac{5}{252}$	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3),\frac{1}{9}(1,-1,2)$
62	26	1	5	7	13	2/35	$\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{7}(1,-1,1)$
63	26	2	3	8	13	1/24	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,3)$
64	26	2	5	6	13	1/30	$4\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
65	27	2	5	9	11	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,5)$
66	27	5	6	7	9	1/70	$\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
67	28	1	4	9	14	1/18	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,2)$
68	28	3	4	7	14	1/42	$\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{7}(1,-1,2)$
69	28	4	6	7	11	1/66	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,3)$
70	30	1	4	10	15	1/20	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1)$
71	30	1	6	8	15	1/24	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,1)$
72	30	2	3	10	15	1/30	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2)$
73	30	2	6	7	15	1/42	$5\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,1)$
74	30	3	4	10	13	1/52	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{13}(1,-1,4)$
75	30	4	5	6	15	1/60	$\frac{1}{4}(1,-1,1),2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),2\times\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1)$
76	30	5	6	8	11	1/88	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,3),\frac{1}{11}(1,-1,2)$
77	32	2	5	9	16	1/45	$2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{9}(1,-1,4)$
78	32	4	5	7	16	1/70	$2\times\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
79	33	3	5	11	14	1/70	$\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{14}(1,-1,5)$
80	34	3	4	10	17	1/60	$\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{10}(1,-1,3)$
81	34	4	6	7	17	1/84	$\frac{1}{4}(1,-1,1),2\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
82	36	1	5	12	18	1/30	$\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{6}(1,-1,1)$
83	36	3	4	11	18	1/66	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,3)$
84	36	7	8	9	12	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{7}(1,-1,3),\frac{1}{8}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1)$
85	38	3	5	11	19	$\frac{2}{165}$	$\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,4)$
86	38	5	6	8	19	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{6}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,3)$
87	40	5	7	8	20	$\frac{1}{140}$	$2\times\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{7}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1)$
88	42	1	6	14	21	1/42	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,1)$
89	42	2	5	14	21	1/70	$3\times\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,3)$
90	42	3	4	14	21	1/84	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{7}(1,-1,2)$
91	44	4	5	13	22	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{13}(1,-1,3)$
92	48	3	5	16	24	$\frac{1}{120}$	$2\times\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,1),\frac{1}{8}(1,-1,3)$
93	50	7	8	10	25	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{7}(1,-1,2),\frac{1}{8}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2)$
94	54	4	5	18	27	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{4}(1,-1,1),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{9}(1,-1,2)$
95	66	5	6	22	33	$\frac{1}{330}$	$\frac{1}{5}(1,-1,2),\frac{1}{2}(1,-1,1),\frac{1}{3}(1,-1,1),\frac{1}{11}(1,-1,2)$

Список литературы

[1] В. А. Алексеев, *Об условиях рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени* 4
Математические Заметки **41** №5 (1987), 724–730

[2] М. М. Гриненко, *Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса*
Математический Сборник **189** №7 (1998), 37–52

[3] М. М. Гриненко, *Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Деццо степени* 1 *и* 2
Математический Сборник **191** №5 (2000), 17–38

[4] М. М. Гриненко, *О двойном конусе над поверхностью Веронезе*
Известия РАН, Серия математическая **67** №5 (2003), 5–22

[5] М. М. Гриненко, *Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Деццо степени* 1 *и* 2*. II*
Математический Сборник **194** №5 (2003), 31–60

[6] М. М. Гриненко, *Структуры Мори трехмерного многообразия Фано индекса* 2 *и степени* 1
Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **246** (2004), 103–128

[7] И. В. Долгачев, *О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых*
Известия АН СССР, Серия математическая **30** (1966), 1073–1100

[8] В. А. Исковских, *Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий*
Современные Проблемы Математики **12** (1979), 159–236

[9] В. А. Исковских, *О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо*
Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **208** (1995), 128–138

[10] В. А. Исковских, *О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий*
Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **218** (1997), 190–232

[11] В. А. Исковских, *Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори*
Успехи Математических Наук **56** №2 (2001), 3–86

[12] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, *Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота*
Математический Сборник **86** №1 (1971), 140–166

[13] Ю. И. Манин, *Рациональные поверхности над совершенными полями*
Publications Mathematiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques **30** (1966), 55–113

[14] Б. Г. Мойшезон, *Алгебраические классу гомологий на алгебраических многообразиях*
Известия АН СССР, Серия математическая **31** (1967), 225–268

[15] В. В. Никулин, *О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным* 2*-отражениями. Алгебро-геометрические приложения*
Современные Проблемы Математики **18** ВИНИТИ (1981), 3–114

[16] А. В. Пухликов, *Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо*
Известия РАН, Серия математическая **62** №1 (1998), 123–164

[17] В. Г. Саркисов, *Бирациональные автоморфизмы расслоений коник*
Известия АН СССР, Серия математическая **44** №4 (1980), 918–945

[18] А. С. Тихомиров, *Геометрия поверхности Фано двойного пространства* $\mathbb{P}^3$ *с ветвлением в квартике*
Известия АН СССР, Серия математическая **44** № 2 (1980), 415–442

[19] А. С. Тихомиров, *Средний якобиан двойного пространства* $\mathbb{P}^3$ *разветвленного в квартике*
Известия АН СССР, Серия математическая **44** № 6 (1980), 1329–1377

[20] А. С. Тихомиров, *Особенности тэта-дивизора среднего якобиана двойного пространства* $\mathbb{P}^3$ *индекса два*
Известия АН СССР, Серия математическая **46** (1982), 1062–1081

[21] А. С. Тихомиров, *Отображение Абеля–Якоби секстик рода три на двойное накрытие* $\mathbb{P}^3$ *индкса два*
Доклады АН СССР **286** № 4 (1986), 821–824

[22] А. Н. Тюрин, *Промежуточный якобиан трехмерных многообразий*
Современные Проблемы Математики **12** (1979), 5–57

[23] И. А. Чельцов, *Антиканонические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре*
Математический Сборник **194** № 4 (2003), 147–172

[24] И. А. Чельцов, *Рациональность трехмерного многообразия Фано–Энриквеса рода пять*
Известия РАН, Серия математическая **68** № 3 (2004), 100–113

[25] И. А. Чельцов, *Бирационально жесткие многообразия Фано*
Успехи Математических Наук **60** № 5 (2005), 71–160

[26] В. В. Шокуров, *Многообразия Прима: теория и приложения*
Известия АН СССР, Серия математическая **23** №4 (1983), 785–855

[27] В. В. Шокуров, *О рациональной связности*
Матеметические Заметки **68** №5 (2000), 771–782

[28] К. А. Шрамов, *К вопросу рациональности неособых трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени* 4
Математический Сборник, принято в печать

[29] M. Artin, *On isolated rational singularities of surfaces*
American Journal of Mathematics **88** (1966), 129–136

[30] M. Artin, D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*
Proceedings of London Mathematical Society **25** (1972), 75–95

[31] F. Bardelli, *Polarized mixed Hodge structures: on irrationality of threefolds via degeneration*
Annali di Matematica Pura ed Applicata **137** (1984), 287–369

[32] L. Bayle, *Classification des variétś complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane generale est une surface d'Enriques*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik **449** (1994), 9–63

[33] A. Beauville, *Varietes de Prym et jacobiennes intermediaires*
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), 309–391

[34] E. Bertini, *Ricerche sulle transformazioni univoche involutori del piano*
Annali di Matematica Pura ed Applicata **8** (1877), 224–286

[35] G. Brown, A. Corti, F. Zucconi, *Birational geometry of* 3*-fold Mori fibre spaces*
Proceedings of the Fano Conference, 29 September — 5 October 2002, Torino, Italy (2004), 235–275

[36] F. Campana, H. Flenner, *Projective threefolds containing a smooth rational surface with ample normal bundle*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik **440** (1993), 77–98

[37] I. Cheltsov, *On the rationality of non-Gorenstein* $\mathbb{Q}$*-Fano* 3*-folds with an integer Fano index*
Contemporary Mathematics **207** (1997), 43–50

[38] I. Cheltsov, *Log pairs on birationally rigid varieties*
Journal of Mathematical Sciences **102** (2000), 3843–3875

[39] I. Cheltsov, *Birationally rigid del Pezzo fibrations*
Manuscripta Mathematica **116** (2005), 385–396

[40] I. Cheltsov, *Elliptic structures on weighted three-dimensional Fano hypersurfaces*
arXiv:math.AG/0509324 (2005)

[41] I. Cheltsov, *Nonrational del Pezzo fibrations*
arXiv:math.AG/0407343 (2004)

[42] I. Cheltsov, J. Park, *Weighted Fano threefold hypersurfaces*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, принято в печать

[43] H. Clemens, P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*
Annals of Mathematics **95** (1972), 73–100

[44] A. Collino, *Lines on quartic threefolds*
Journal of the London Mathematical Society **19** (1979), 257–267

[45] A. Corti, *Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry* L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 259–312

[46] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, *Fano* 3*-fold hypersurfaces* L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 175–258

[47] R. Elkik, *Rationalite des singularites canoniques* Inventiones Mathematicae **64** (1981), 1–6

[48] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Familes of rationally connected varieties* Journal of American Mathematical Society **16** (2003), 57–67

[49] M. Grinenko, *On the birational rigidity of some pencils of del Pezzo surfaces* Journal of Mathematical Sciences **102** (2000), 3933–3937

[50] G. Halphen, *Sur les courbes planes du sixieme degre a neuf points doubles* Bulletin de la Société Mathématique de France **10** (1882), 162–172.

[51] A. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections* L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 101–173

[52] V. Iskovskikh, *On the rationality problem for conic bundles* Duke Mathematical Journal **54** (1987), 271–294

[53] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties* Encyclopaedia of Mathematical Sciences **47** (1999) Springer, Berlin

[54] J. Johnson, J. Kollár, *Fano hypersurfaces in weighted projective* 4*-spaces* Experimental Mathematics **10** (2001), 151–158

[55] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces* Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), 241–249

[56] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties* Springer-Verlag, Berlin (1996)

[57] J. Kollár, *Non-rational covers of* $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 51–71

[58] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rationally connected varieties* Journal Algebraic Geometry **1** (1992) 429–448

[59] M. Marchisio, *Unirational quartic hypersurfaces* Bollettino della Unione Matematica Italiana **8** (2000), 301–313

[60] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program* Springer-Verlag, New York, 2002

[61] H. Matsumura, P. Monsky, *On the automorphisms of hypersurfaces* Journal of Mathematics of Kyoto University **3** (1964), 347–361

[62] T. Moh, W. Heinzer, *On the Lüroth semigroups and Weierstrass canonical divisors* Journal of Algebra **77** (1982), 62–73

[63] S. Mori, *On* 3*-dimensional terminal singularities* Nagoya Mathematical Journal **98** (1985), 43–66

[64] L. Picco Botta, A. Verra, *The non rationality of the generic Enriques threefold* Compositio Mathematica **48** (1983), 167–184

[65] D. Ryder, *Elliptic and* $K3$ *fibrations birational to Fano 3-fold weighted hypersurfaces* University of Warwick, Thesis (2002)

[66] T. Sano, *Classification of non-Gorenstein* $\mathbb{Q}$*-Fano* d*-folds of Fano index greater than* $d-2$ Nagoya Mathematical Journal **142** (1996), 133–143

[67] H. Tokunaga, H. Yoshihara, *Degree of irrationality of abelian surfaces* Journal of Algebra **174** (1995), 1111–1121

[68] C. Voisin, *Sur la jacobienne intermediaire du double solide d'indice deux* Duke Mathematical Journal **57** (1988), 629–646

[69] T. Yonemura, *Hypersurface simple* $K3$ *singularities* Tohoku Mathematical Journal **42** (1990), 351–380

[70] H. Yoshihara, *Degree of irrationality of an algebraic surface* Journal of Algebra **167** (1994), 634–640

[71] H. Yoshihara, *Degree of irrationality of a product of two elliptic curves* Proceedings of the American Mathematical Society **124** (1996), 1371–1375

[72] H. Yoshihara, *A note on the inequality of degrees of irrationalities of algebraic surfaces* Journal of Algebra **207** (1998), 272–275

[73] H. Yoshihara, *Degree of irrationality of hyperelliptic surfaces* Algebra Colloquium **3** (2000), 319–328

[74] H. Yoshihara, *Galois points on quartic surfaces* Journal of the Mathematical Society of Japan **53** (2000), 731–743

[75] O. Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = P_2 = 0$ *of an algebraic surface* Illinois Journal of Mathematics **2** (1958), 303–315

МИРАН им. В. А. Стеклова
ул. Губкина д. 8, Москва 117966
Россия

cheltsov@yahoo.com