Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété[ne0]

Note[0] de M. René Thom, présentée par M. Élie Cartan.

Soit f une fonction numérique, deux fois différentiable sur une variété compacte à n dimensions V_n à structure deux fois différentiable. Supposons que f ne présente sur V_n qu'un nombre *fini* de points critiques *non dégénérés*.

Soit P un point critique de type p. Dans une carte locale autour de P [1], f s'écrit

$$f(x) = f(P) - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2\,.$$

Associons à chaque point critique P_i une carte dans laquelle $f(x) - f(P_i)$ se présente sous cette forme réduite. On complète alors ce système de cartes en un recouvrement fini de V_n en y ajoutant un nombre fini d'ouverts U_k ne contenant aucun des points critiques. On peut alors, à l'aide d'une partition différentiable de l'unité, définir sur V_n une forme ds^2 partout positive et une fois différentiable, qui, au voisinage de chaque point critique, se réduise au ds^2 euclidien dans la carte associée. La variété V_n est ainsi dotée d'une métrique, et l'on peut définir en tout point x de V_n différent de P_i, le vecteur

$$X(x) = \mathrm{grad} f \neq 0\,.$$

Le champ de vecteurs X définit un *groupe G d'homéomorphismes à un paramètre*. Les points critiques P_i, pour lesquels $X = 0$, sont les points *fixes* des transformations de G.

---

[0]Séance du 14 mars 1949.

[1]M. Morse, *Functional Topology and abstract variational Theory* (*Memorial*, p. 44, Lemma 10).

Soit Γ une trajectoire du groupe G. La fonction f est monotone sur Γ, et les valeurs limites prises par f lorsqu'on s'éloigne dans l'un ou l'autre sens sur Γ sont des valeurs critiques. Les points limites de Γ sont alors des points critiques, de sorte que *toute trajectoire Γ joint un point critique P_i à un autre point critique P_j* ($f(P_i) < f(P_j)$).

L'ensemble des trajectoires Γ aboutissant au point critique O constitue, au voisinage de O, une p-cellule ; ainsi qu'on le voit en coupant par la variété de niveau $f = -\varepsilon^2$, on obtient pour $-\varepsilon^2 < f \leq 0$, une p-cellule B_p définie par

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 < \varepsilon^2\,, \quad x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\,,$$

dont le bord est une sphère de dimension $p - 1$

$$(S_{p-1})\; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 = \varepsilon\,, \quad x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\,.$$

Désignons par t le paramètre du groupe G. Si l'on fait subir à $S_{(p-1)}$ toutes les transformations du semi-groupe $t < 0$ (qui diminuent f), il est clair que $S_{(p-1)}$ va engendrer un lieu homéomorphe à $S_{(p-1)} \times R^-$. Il en résulte que le lieu de toutes les (Γ) qui aboutissent en O est une p-cellule ouverte Z_p. Ainsi :

Théorème. *À toute fonction f ne présentant sur V_n qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés, on peut associer une décomposition de V_n en cellules, chaque point critique de type p étant le centre d'une p-cellule ouverte.*

Il suffit d'associer à tout point x de V_n le point d'aboutissement de la (Γ) passant par x.

La décomposition ainsi obtenue n'est pas, en général, une subdivision cellulaire de V_n qui soit le support d'un complexe. Elle en possède cependant certaines propriétés.

Si l'on désigne par K^p l'ensemble des q-cellules pour $q \leq p$, et par β_p le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti, on voit sans difficulté que tout p-cycle dans V_n peut être déformé sur K^p, donc que $\beta_p(K^p) \geq \beta_p(V_n)$ et $\beta_p(K^{p+1}) = \beta_p(V_n)$.

D'autre part, si l'on enlève de $K^{(p)}$ i_p p-simplexes, un dans chacune des cellules Z^p, on constate que le polyèdre restant peut être rétracté sur $K^{(p-1)}$. Un raisonnement assez simple permet alors de montrer que le nombre i_p des p-cellules est $\geq \beta_p(V_n)$, ce qui démontre l'inégalité classique de M. Morse.

Remarque. – Au cas où la partition en cellules associée à f est une subdivision cellulaire de type classique, la partition associée à $(-f)$ est la *subdivision duale* de la subdivision donnée.

Applications. – 1^0 Le nombre de points critiques de type 1 d'une fonction sur une variété est supérieur ou égal au nombre minimum de générateurs du groupe fondamental.

2^0 Le nombre de points critiques de type 2 est supérieur ou égal au nombre minimum de relations liant le groupe fondamental[2].

3^0 Si sur une variété, une fonction f présente, pour f croissant, des points critiques de type suivant : $[0, k, \ldots, l_j, \ldots, n]$ où tous les l_j sont $> k+1$, on peut affirmer que $\pi_r(V) = 0$ pour $r < k$ et $\pi_k(V) = Z$ (groupe additif des entiers).

En effet, dans ce cas, $K^{(k+1)}$ est une sphère S^k.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 228, pp. 973-975, séance du 21 mars 1949.)

Notes de l'éditeur

[ne0] 1949, 1. Article édité *in C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 228, pp. 973-975, (14/21 mars 1949).

[2]Elsholtz, *Variation de la structure topologique des surfaces de niveau* (*Recueil Mathématique de Moscou*, 1948, 15-3).