Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

(Die Zahlen in Klammern geben die Seitenzahlen an,
ansonsten bezeichnet Ü.4 z.B. den 4. Übungszettel)

Einführung (1-13)

Satz von der topologischen Invarianz der Dimension (3)
Peano Kurve (4-7)
Cantor–Menge (3-4; 38, Ü.6)
Weg–Zusammenhangs–Klassen ($\pi_0(\dots)$) (8-11, Ü. 2; 8)
Natürlichkeit der Konstruktion von $\pi_0(\dots)$ (10-11)
Schlingen (in $\mathbb{R}^3 - 0$ und $\mathbb{R}^2 - 0$) (11-13; 55-73)

Topologische Räume (14-22)

metrische Räume (14-15)
Umgebungen und offene Mengen in metrischen Räumen (15)
topologische Räume (16-19)
Umgebungen und offene Mengen in topologischen Räumen (18)
Unterraumtopologie (19, Ü.4)
Quotientenraumtopologie (20-22, Ü.3; 4)
Universelle Eigenschaft der Quotientenraumtopologie (21)

Kompakte Räume (23-32)

Hausdorff–Räume (23, Ü.5)
folgen–kompakt (24, Ü.3)
quasikompakt (Überdeckungseigenschaft) (24)
Kompaktheit abgeschlossener Intervalle (24-25)
kompakte und abgeschlossene Teilmengen (26-28)
stetige Abbildungen (insb. topologische Äquivalenzen) kompakter Räume (28-30)
Quotientenraum–Kriterium (28)
normale Räume (29)
Hausdorff–Eigenschaft von Quotientenräumen (30-32, Ü.3)

Produkte (33-46)

Produkte metrischer Räume (33-34)
Produkttopologie (34; 36-37)
Basis, Subbasis (34; 36, Ü.6)
Universelle Eigenschaft der Produkttopologie (36, Ü.6)
Kompaktheit von Produkten; Satz von Tychonoff (für endliche Produkte) (40-42)
kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (42-43)
Beispiele (Torus, $\mathbb{R}^n - 0 \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$, ...) (44-46)

Disjunkte Vereinigung (47-49)

Vereinigung mit Durchschnitt (49-54)

Der Verklebeprozeß (51-54)

Schlingen und deren Homotopieklassen (55-73)
Deformation (Homotopie) von Schlingen (55-56, Ü.7; 8)
Natürlichkeit der Konstruktion von $\mathcal{S}(\dots)$ (56-57)
Schlingen in Produkten (57-58)
$\mathcal{S}(S^n), n \geq 2$, hat nur 1 Element (58-65)
Lebesgue'scher Überdeckungssatz (61-62)
Deformation von Wegen relativ zu den Endpunkten (63)
$\mathcal{S}(S^1)$ hat abzählbar unendlich viele Elemente (65-73)
Windungszahl (65; 73)
die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ und ihre lokalen Umkehrfunktionen (68-69)
Liften von Schlingen in S^1 zu Wegen in $\mathbb{R}$ bzgl. der Abbildung exp (67; 69-70)
Liften von Homotopien nach $\mathbb{R}$ (70-72)
Anwendungen der Berechnung von $\mathcal{S}(S^n)$ (58; 74)

Theorie der Fundamentalgruppe (74-79)
Schleifen und deren Deformationsklassen (74-75)
Fundamentalgruppe (75-76, Ü.9)
Natürlichkeit der Konstruktion von $\pi_1(\dots)$ (76)
Berechnung von $\pi_1(S^n, x)$ (77)
die Rolle des Basispunktes (78-79)

Theorie der Überlagerungen (80-115)
Elementarumgebung (80)
Blätterzahl (81; 111)
Wege–Liftungs–Satz (83-85)
Homotopie–Liftungs–Satz (86-87)
Allgemeiner Liftungs–Satz (88-95)
lokal weg–zusammenhängend (88)
Abbildungen von Überlagerungen (95; 111)
Konstruktion von Überlagerungen (96-105)
universelle Überlagerung (96; 98, Ü.10)
semi–lokal einfach–zusammenhängend (96)
Decktransformation (106; 114-115)
Operation von π_1 auf dem Urbild des Basispunktes unter einer Überlagerungsprojektion (106; 111-112)
Mengen mit Gruppenoperation (G–Mengen) (106-110)
Bahn, transitive G–Mengen, Isotropiegruppe (107)
Abbildungen von G–Mengen (108-110)
1 : 1 Beziehung zwischen Abbildungen von Überlagerungen und $\pi_1(X, x_0)$–Abbildungen von $p^{-1}(x_0)$ (111-112)
eindeutige Bestimmtheit einer Überlagerung durch die $\pi_1(X, x_0)$–Menge $p^{-1}(x_0)$ (112-113)
Isomorphie von Fundamentalgruppe und der Decktransformationenguppe der zugehörigen universellen Überlagerung (114)

Einführung

Eigentlich sollte ich versuchen, Ihnen zu erzählen, was das ist: *Topologie*. Es ist aber schwierig, in wenigen Worten zu skizzieren, was unter diesem Namen subsumiert in vielen Büchern steht. Ich will daher zunächst einige Aspekte nennen, die in dieser Vorlesung eine Rolle spielen werden. Als eine Art Einstieg werde ich danach einige spezielle Dinge ausführlicher diskutieren.

Sprache. Es gibt ziemlich viele Vokabeln der Topologie. Bei einigen von diesen ist es auch in anderen Gebieten der Mathematik wichtig, daß man sie beherrscht:
Topologischer Raum; stetige Abbildung; Zusammenhang; kompakt; ...

Grundlagen der Analysis. Ziemlich viele Sätze der Analysis lassen sich in der Sprache der Topologie formulieren (und verallgemeinern). Es wäre ein Irrtum, zu glauben, daß die Sätze dadurch unbedingt besser werden. Man versteht sie aber wohl ein kleines bißchen besser auf diese Art, und vor allem lassen sie sich leichter merken.

Zum Beispiel gibt es folgenden Sachverhalt, den wir später noch eingehend diskutieren werden: Wenn X ein *kompakter Raum* ist (denken Sie an eine kompakte Teilmenge eines euklidischen Raumes) und wenn

$$f : X \longrightarrow \quad (\textit{irgendwohin})$$

eine stetige Abbildung ist, dann ist auch *Bild* $(f) = f(X)$ *kompakt*. Man kann dies auffassen als eine Verallgemeinerung des *Maximumprinzips*. Denn im Spezialfall einer reellen Funktion, d.h. einer Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, hat die Kompaktheit von *Bild* $(f) \subset \mathbb{R}$ als unmittelbare Konsequenz, daß die Funktion ein Maximum besitzt.

Gestalt–Erkennung. Zunächst eine Vokabel: Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$, dann wollen wir sagen, daß X und Y *topologisch äquivalent* sind, wenn es stetige Abbildungen

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{und} \quad g : Y \longrightarrow X$$

gibt, die zueinander invers sind, d.h. es ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Beispiele. 1. Das *Quadrat* und der *Kreis* (genauer gesagt, die beiden Kurven in der Ebene, die durch diese Worte beschrieben sind) sind zueinander topologisch äquivalent. — Um das einzusehen, stellen wir uns vor, daß die beiden konzentrisch zueinander angeordnet sind und daß wir selbst in der Mitte stehen. Wenn wir nun in irgendeine Richtung schauen, so sehen wir sowohl vom Quadrat als auch vom Kreis *genau einen* Punkt. Dies liefert die behauptete ein–eindeutige Zuordnung. Es ist klar (oder?) daß diese Zuordnung auch in beiden Richtungen stetig ist.

2. Das *offene Intervall* $(-1,+1)$ und die *Gerade* $\mathbb{R}$ sind zueinander topologisch äquivalent; z.B. vermöge der beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,+1) \qquad g : (-1,+1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad\qquad y \longmapsto \tfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Diese Beispiele illustrieren, was auch allgemeiner gilt. Nämlich in der Regel ist eine Behauptung der Art “X und Y sind topologisch äquivalent” nicht besonders aufregend. Der Grund liegt im Prinzip des menschlichen Erfindungsreichtums. Wenn man nämlich mit solch einer Behauptung konfrontiert wird, dauert es meist nicht sehr lange, bis man selbst in der Lage ist, sich eine solche Äquivalenz auszudenken (vorausgesetzt natürlich, daß die Behauptung überhaupt richtig war). Selbstverständlich gibt es auch hier Ausnahmen, darunter ganz spektakuläre.

Ganz anders liegt es mit Behauptungen der Art, daß zwei vorgegebene Räume X und Y *nicht* topologisch äquivalent seien. Hier langt es nicht, irgendwelche Abbildungen zu erfinden, denn die Behauptung ist ja gerade, daß es Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften gar nicht gibt. Es geht auch nicht, daß man etwa die vorhandenen Abbildungen durchmustert um nachzuschauen, ob vielleicht topologische Äquivalenzen darunter sind — i.a gibt es einfach viel zu viele Möglichkeiten, die da zu inspizieren wären. Es bleibt einem in dieser Situation kaum eine andere Wahl: Wohl oder übel wird man sich einen *Grund* ausdenken müssen, warum eine topologische Äquivalenz gar nicht existieren *kann*. Oft ist das sehr schwierig.

Beispiele. 1. Die *2-dimensionale Sphäre* (= Kugeloberfläche) und der *2-dimensionale Torus* (= (Auto-)Reifenoberfläche) sind offensichtlich (!!) nicht topologisch äquivalent. Dies zu beweisen erfordert aber einigen Aufwand.

2. $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (*die euklidischen Räume der Dimensionen* 2 *und* 3) sind offensichtlich (!!) nicht topologisch äquivalent, allgemeiner: $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht topologisch äquivalent, wenn $m \neq n$; dies ist der sogenannte *Satz von der topologischen Invarianz der Dimension.*

Letzterer Satz wurde erstmals ca. 1910 bewiesen (oder ca. 1930 — je nachdem wie genau man es nimmt mit der Stichhaltigkeit der verwendeten Argumente). Vor 1910 jedenfalls war der Satz ein berühmtes Problem, das als sehr beunruhigend empfunden wurde.

Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde das Problem als solches überhaupt erkannt. Das steht im Zusammenhang mit einer bemerkenswerten Entdeckung des Mathematikers *Peano*; das von diesem entdeckte Phänomen wird heutzutage üblicherweise auch als die *Peano–Kurve* bezeichnet.

Satz. *Für jedes* n *existiert eine surjektive* (!) *stetige Abbildung* $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$.

Ich möchte zunächst noch einmal auf diese beiden Aspekte des Satzes von der topologischen Invarianz der Dimension eingehen. Einmal ist der Satz “offensichtlich richtig” in dem Sinne, daß er uns nach dem, was wir über die Realität wissen (oder zu wissen glauben) beinahe als eine grundlegende Tatsache unserer Erkenntnis erscheint, zumindest für $m, n \leq 3$. Zum andern ist der Satz sehr schwer zu beweisen.

Diese beiden Tatsachen stehen *nicht* im Widerspruch zueinander. Man muß sich hier folgendes klarmachen.

Zu einem mathematischen Satz gehört ein mathematischer Sachverhalt; im vorliegenden Fall ein mathematisches Modell für den Begriff *Raum.* (Das Modell besteht darin, daß postuliert wird, gewisse Aspekte des m–dimensionalen Raumes (im Sinne unserer Anschauung) seien sehr gut beschreibbar durch den “Raum” der m–Tupel reeller Zahlen).

Sich auf diese Weise ein Modell zu verschaffen, bedeutet eine Art “höheres Raten”. Nun ist es aber gar nicht ausgemacht, daß man sogleich richtig geraten hat (oder daß dies überhaupt möglich ist). Wenn man wissen will, ob das Modell adäquat ist, so muß man es studieren. Dazu gehört der Nachweis, daß das Modell die Sachen auch liefert, die es gefälligst zu liefern hat. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß wir verpflichtet sind, die Gültigkeit des Satzes von der topologischen Invarianz der Dimension *innerhalb des gewählten Modells* nachzuweisen; mit anderen Worten, den Satz zu beweisen in der Ihnen bekannten Form — und dabei hilft uns die Anschauung möglicherweise nur wenig.

Zurück nun zur Peano–Kurve. Ich führe die Konstruktion zunächst durch für die folgende Variante. Dazu bezeichne $[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ das Einheitsintervall; und $[0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.

SATZ. *Es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

BEWEIS. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Wir definieren eine Menge $C \subset [0,1]$, die sogenannte *Cantor–Menge* (sie ist benannt nach ihrem Entdecker, dem Mathematiker CANTOR) und überzeugen uns sodann von der Gültigkeit der folgenden drei Aussagen

(a) *es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $C \longrightarrow C \times C$,

(b) *es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $C \longrightarrow [0,1]$,

(c) *jede stetige Abbildung* $C \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung, die auf dem ganzen Intervall* $[0,1]$ *definiert ist.*

Sobald wir diese Dinge gezeigt haben, werden wir fertig sein. Denn mit Hilfe von (a) und (b) können wir eine surjektive stetige Abbildung erhalten

$$f : \ C \xrightarrow{(a)} C \times C \xrightarrow{(b)} [0,1] \times [0,1] \ .$$

Wegen (c) können wir die Abbildung f zu einer stetigen Abbildung auf ganz $[0,1]$ erweitern. Die resultierende stetige Abbildung $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ ist nun automatisch surjektiv. Der Grund ist höchst kurios. Nämlich die konstruierte Abbildung hat als Einschränkung auf C ja gerade die oben f genannte Abbildung, und *die* war schon surjektiv.

Nun zur Cantor–Menge! Man kann sie sich vorstellen, wenn auch vielleicht nicht besonders gut. Sie entsteht aus dem Intervall $[0,1]$ indem man aus diesem das offene mittlere Drittel wegläßt; aus den entstehenden beiden Intervallen $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$ wieder jeweils das mittlere Drittel; und so fort, ad infinitum.

Die Konstruktion läßt sich prägnant beschreiben mit Hilfe der *triadischen Entwicklung* der reellen Zahlen (d.h. dem Analogon der Dezimalbruch–Entwicklung, wo eben die 10 durch die 3 ersetzt ist). Jede Zahl aus $[0,1]$ hat eine Darstellung der Art

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ , \quad a_i \in \{0,1,2\} \ ,$$

wo, wie auch sonst, die vorkommende unendliche Summe aufzufassen ist als der Limes der entsprechenden Partialsummen,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \ .$$

Wie man es von der Dezimal–Entwicklung kennt, so ist auch die triadische Darstellung nicht in allen Fällen eindeutig. Wir schauen genauer hin. Seien also

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$$

zwei Ausdrücke, die möglicherweise dieselbe reelle Zahl darstellen, von denen wir aber annehmen wollen, daß sie *verschieden* sind. Bezeichne m die erste Stelle, wo die beiden sich unterscheiden. Es ist $m \geq 1$ und wir haben

$$a_i = b_i \ \text{ für } \ i \leq m-1 \ , \quad \text{aber} \quad a_m \neq b_m$$

und o.B.d.A. $a_m < b_m$. Die Differenz $y - x$ können wir nun schreiben als

$$\left(\frac{b_m}{3^m} - \frac{a_m}{3^m}\right) \quad - \quad \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right) \quad .$$

Wegen

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \quad \leq \quad \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \ - 0 \quad = \quad \frac{2}{3^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots\right) \quad = \quad \frac{1}{3^m}$$

ist der Subtrahend $\leq \frac{1}{3^m}$, und für das Gleichheitszeichen ist es notwendig, daß alle a_i gleich 2 und alle b_i gleich 0 sind. Abgezogen andererseits wird von $(b_m - a_m)\,\frac{1}{3^m}$, wo der Faktor $(b_m - a_m)$ entweder gleich 1 oder gleich 2 ist. Damit $y - x = 0$ gelten kann, müssen wir also haben

$$\begin{aligned} a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots \ &= \ 2 \\ b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots \ &= \ 0 \end{aligned}$$

und $b_m = a_m + 1$. Letzteres bedeutet übrigens, daß eines von a_m und b_m gleich 1 sein muß (da ja nur die Werte $0, 1, 2$ in Frage kommen).

Unsere Überlegung gestattet noch die folgende Schlußfolgerung, die wir weiter unten verwenden werden: Wenn m die erste Stelle ist, an der die Ausdrücke für x und y sich unterscheiden und wenn (in der obigen Notation) $b_m = 2$, $a_m = 0$, dann ist notwendigerweise $|y - x| \ \geq \ \dfrac{1}{3^m}$.

Die *Cantor–Menge* C sei jetzt definiert als

$$C \ := \ \left\{ x \in [0,1] \ \middle| \ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ , \ \ a_i = 0 \ \text{ oder } \ 2 \right\}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft: *C besteht aus all denjenigen reellen Zahlen aus $[0,1]$, die eine triadische Entwicklung haben, in der die Ziffer 1 nicht vorkommt.*

Es ist zum Beispiel $\frac{1}{3} \in C$, da ja $\frac{1}{3} \ = \ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$. Andererseits zeigt die vorstehende Diskussion, daß jeder Punkt der Cantor–Menge eine *eindeutige* triadische Darstellung hat, in der die Ziffer 1 *nicht* vorkommt. Wie wir gesehen haben, gilt auch dies: Wenn zwei solche Ausdrücke sich an der m–ten Stelle unterscheiden, dann ist ihre Differenz, dem Betrage nach, mindestens $\frac{1}{3^m}$.

Wir kommen jetzt zum Beweis der obigen drei Aussagen (a), (b), (c) .

zu (a) Die Abbildung $C \longrightarrow C \times C$, $x \mapsto (x', x'')$, ist ein mathematisches Modell vom Reißverschluß; sie ist gegeben durch

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \longmapsto \quad \big(\ (a_1, a_3, a_5, \dots) \ , \ (a_2, a_4, a_6, \dots) \ \big)$$

wobei $x = \sum \frac{a_i}{3^i}$ die triadische Entwicklung von x bezeichnet (ohne Einsen, also auch eindeutig bestimmt).

1. *die Abbildung ist stetig* — denn seien $x = \sum \frac{a_i}{3^i}$ und $y = \sum \frac{b_i}{3^i}$ mit $|x-y| < \frac{1}{3^{2n}}$. Dann unterscheiden sich $(a_1, \dots)$ und $(b_1, \dots)$ nicht vor dem Index $2n+1$ und somit $(a_1, a_3, \dots)$ und $(b_1, b_3, \dots)$ nicht vor dem Index $n+1$; folglich ist

$$|x' - y'| \ \leq \ \frac{2}{3^{n+1}} \ + \ \frac{2}{3^{n+2}} \ + \ \dots \ = \ \frac{1}{3^n} \ .$$

Die zweite Komponente behandelt man ähnlich.

2. *die Abbildung ist surjektiv* — denn zu $x', x'' \in C$ erhält man durch "Mischen" der dazugehörigen Folgen ein Urbild. (Tatsächlich ist die angegebene Abbildung sogar *bijektiv* und in *beiden* Richtungen stetig; wir brauchen das aber nicht.)

zu (b) Die Abbildung $C \longrightarrow [0,1]$ wird so definiert. Zunächst identifieren wir den Punkt $\sum \frac{a_i}{3^i}$ mit der dazugehörigen Folge $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ (hier benutzen wir die Eindeutigkeit der Darstellung von Punkten der Cantor-Menge). Die erhaltene Folge ist nun eine $0-2-$ Folge in dem Sinne, daß jedes der Folgenglieder entweder eine 0 oder eine 2 ist. Aus der $0-2-$ Folge machen wir eine $0-1-$ Folge auf die einfachstmögliche Weise. Wir dividieren nämlich jedes der Folgenglieder durch 2 . Wir erhalten so die $0-1-$ Folge $(a_1/2, a_2/2, a_3/2, \dots)$. Aus dieser $0-1-$ Folge schließlich verschaffen wir uns wieder eine reelle Zahl. Nämlich wir nehmen die dazugehörige *duadische* Darstellung. Kurz gesagt, die Abbildung ist gegeben durch

$$\sum \frac{a_i}{3^i} \quad \longmapsto \quad \sum \frac{a_i/2}{2^i} \ .$$

1. *die Abbildung ist stetig* — denn wenn $|x - y| < \frac{1}{3^n}$, so unterscheiden sich die dazugehörigen Folgen nicht vor dem Index $n+1$; folglich

$$|\,\mathit{Bild}(x) - \mathit{Bild}(y)\,| \quad \leq \quad \frac{1}{2^{n+1}} \; + \; \frac{1}{2^{n+2}} \; + \; \dots \quad = \; \frac{1}{2^n} \quad .$$

2. *die Abbildung ist surjektiv* — denn jede reelle Zahl besitzt eine Darstellung im duadischen System.

zu (c) Um die verlangte Erweiterung der Abbildung zu definieren, gehen wir die Komponenten des Komplements von C einzeln durch. Das Komplement von C enthält:

- $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, das offene Intervall, das aus den $x = \sum \frac{a_i}{3^i}$ besteht mit $a_1 = 1$. Die Endpunkte $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ gehören *beide* zu C (wegen $\frac{1}{3} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$). Wir erweitern f auf dieses Intervall, indem wir f dort als *lineare Funktion* definieren,

$$f\left(\frac{1}{3} + t\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) \quad := \quad f\left(\frac{1}{3}\right) + t\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right), \quad t \in [0,1] \; .$$

Die Definition ist sinnvoll, weil f auf den Randpunkten schon vorher definiert war (die Randpunkte gehören ja zu C, wie eben angemerkt wurde).

- $\left(0 + \frac{1}{3^2}\;,\; 0 + \frac{2}{3^2}\right)$ und $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\;,\; \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$, die beiden offenen Intervalle, die aus denjenigen Zahlen bestehen, wo die zweite Ziffer in der triadischen Entwicklung eine 1 ist, die erste Ziffer aber nicht; wie oben gehören die Randpunkte wieder zu C, so daß wir f wieder linear erweitern können. Und schließlich, allgemein (für jedes n),
- $\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^{n+1}}\;,\; \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)$, die 2^n offenen Intervalle, wo jedes der a_i entweder 0 oder 2 ist. Auch auf diesen Intervallen wird f wieder linear erweitert.

Mit der Konstruktion erhalten wir insgesamt eine Erweiterung von f auf ganz $[0,1]$; etwas mißbräuchlich wollen wir die erweiterte Abbildung ebenfalls mit f bezeichnen. Wir müssen noch nachweisen, daß die konstruierte Abbildung *stetig* ist. Dazu untersuchen wir die lokale Stetigkeit in einem Punkt x. Wir unterscheiden Fälle.

1. Fall. $x \notin C$
Der Fall bedeutet, daß x in einem der Intervalle liegt, in denen f als lineare Funktion definiert worden ist; und zwar liegt x im Innern des fraglichen Intervalls. Die Stetigkeit ist klar in diesem Fall.

2. Fall. $x \in C$
Wir benutzen folgende Bemerkung. Wenn f bei x nicht stetig ist, dann gibt es eine gegen x konvergente Folge, deren Bildfolge nicht (oder zumindest nicht gegen $f(x)$) konvergiert. Um zu zeigen, daß das hier nicht vorkommen kann, betrachten wir eine Folge (x_n) in $[0,1]$ mit $\lim x_n = x$.

Als Hilfsmittel bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Folge (x_n) eine andere Folge, deren sämtliche Folgenglieder in C liegen. Dazu wird jedes $x_n \notin C$ ersetzt durch einen der beiden Randpunkte x'_n des Intervalls, in dem x_n liegt; und zwar wird der Randpunkt x'_n so bestimmt, daß für den anderen Randpunkt x''_n gilt $|f(x'_n) - f(x)| \geq |f(x''_n) - f(x)|$. Die Abbildung f ist auf dem Intervall eine lineare Abbildung, wir haben also als Konsequenz, daß $|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x'_n) - f(x)|$ (oder?). Es wird somit genügen zu zeigen, daß die Folge $(f(x'_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert. Für eine weitere Fallunterscheidung nehmen wir zunächst nun an, daß die vorgegebene Folge noch die folgende Bedingung erfüllt:

$(*)$ In jedem der Intervalle des Komplements von C liegen nur endlich viele der x_n .

Wenn die Bedingung $(*)$ erfüllt ist, können wir sicher sein, daß mit der Folge (x_n) auch die Folge (x'_n) gegen x konvergiert. Denn wenn man aus unseren fraglichen Intervallen eine Folge bildet, *in der jedes Intervall nur endlich oft vorkommt*, so geht die zugehörige Folge der Längen gegen null; also geht auch die Folge der Differenzen $(x'_n - x_n)$ gegen null.

Nun ist aber (x'_n) eine Folge in C , sie konvergiert gegen x (wegen unserer Annahme), und die Funktion f ist auf C stetig. Es folgt, daß $\lim f(x'_n) = f(x)$.

Schließlich müssen wir noch den Fall betrachten, wo die Bedingung $(*)$ nicht erfüllt ist; das heißt, daß es ein Intervall I des Komplements von C gibt, in dem unendlich viele der Folgenglieder liegen. Es folgt sofort, daß x ein (Rand–)Punkt von I sein muß. Da die Funktion f auf I linear ist, können wir die Folgenglieder in I ignorieren. Die Teilfolge der restlichen Folgenglieder ist nun entweder endlich (in dem Fall ist nichts mehr zu beweisen) oder unendlich. In jedem Fall erfüllt sie die Bedingung $(*)$. Denn es gibt keine zwei unter den fraglichen Intervallen, die einen Randpunkt gemeinsam hätten. Wir haben uns somit auf den Spezialfall zurückgezogen. □

Was Peano–Kurven allgemein angeht, sei hier nur folgendes angemerkt:

1. Um eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ zu konstruieren geht man ganz genauso vor, nur daß man beginnt mit reellen Zahlen der Form

$$a_{-m}\, 3^m \;+\; a_{-m+1}\, 3^{m-1} \;+\; \cdots \;+\; a_0 \;+\; \frac{a_1}{3} \;+\; \frac{a_2}{3^2} \;+\; \cdots$$

2. Ist $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ stetige und surjektive Abbildung, so erhält man eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \big(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\big)$ als Komposition der Abbildungen

$$\mathbb{R}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} \mathbb{R}^1 \times \big(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\big) \ .$$

Durch Induktion erhält man hieraus für jedes n eine stetige und surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Ich habe schon betont, daß der Satz von der topologischen Invarianz der Dimension schwierig zu beweisen ist, aber in einem speziellen Fall ist er doch relativ einfach, und diesen Fall will ich hier behandeln.

Satz. *Für kein $n > 1$ ist es richtig, daß $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^n$ topologisch äquivalent sind.*

Der Beweis ist dadurch äußerst interessant, daß er eine für die Topologie typische Schlußweise illustriert. Die grundlegende Idee besteht darin, daß man einem Raum gewisse "diskrete Strukturen" zuordnen kann mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. Die zugeordnete Struktur ist "topologisch invariant"; das heißt, wenn X und Y topologisch äquivalent sind, dann sind auch die zugeordneten Strukturen äquivalent. (In unserem speziellen Fall wird die zugeordnete Struktur eine diskrete Menge sein, und *äquivalent* wird in dem Fall heißen *gleiche Anzahl von Elementen*).

2. Die zugeordnete Struktur ist "berechenbar". (In unserem Fall wird die Menge endlich sein und wir können die Anzahl ihrer Elemente einfach abzählen).

Die hier interessierende Struktur ist die *Menge der Weg–Zusammenhangs–Klassen*; die Konstruktion geht so: Sei X ein Raum. Zwei Punkte $x, y \in X$ heißen *wege–äquivalent*, wenn es einen *Weg* in X gibt, der sie verbindet; das ist, nach Definition, eine stetige Abbildung

$$w : \ [0,1] \longrightarrow X$$

mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Die *Wege–Äquivalenz* ist eine Äquivalenz–Relation; die Nachprüfung erfordert keinen Tiefsinn:

Symmetrie: Ist $w : \ [0,1] \longrightarrow X$ stetige Abbildung mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$, so ist auch $w' : [0,1] \longrightarrow X$, die Komposition der stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow [0,1] \longrightarrow X \\ t &\longmapsto 1-t \longmapsto w(1-t) \end{aligned}$$

wieder stetig, und es gilt $w'(0) = w(1) = y$ und $w'(1) = w(0) = x$.

Transitivität: Seien $v, w : \ [0,1] \longrightarrow X$ Wege mit $v(0) = x$, $v(1) = w(0) = y$, $w(1) = z$. Dann gibt es auch einen Weg von x zu z ,

$$u(t) := \begin{cases} v(2t) & \text{wenn} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ w(2t-1) & \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} .$$

Definition. $\pi_0 X$, die *Menge der Weg–Zusammenhangs–Klassen*, ist die Menge der Äquivalenzklassen von Punkten von X unter der angegebenen Äquivalenzrelation.

Beispiele. 1. $\pi_0 \mathbb{R}^n$ *hat nur ein Element* — denn zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt es den Weg $t \mapsto x + t\,(y-x)$, $t \in [0,1]$, der die beiden verbindet.

2. $\pi_0 \left(\mathbb{R}^1 - 0\right)$ *hat zwei Elemente* — zunächst gibt es *höchstens* zwei Elemente. Denn je zwei positive reelle Zahlen sind wege–äquivalent: $t \mapsto x + t\,(y-x)$ ist für positive x und y ein Weg in den positiven reellen Zahlen. Ebenso sind je zwei negative Zahlen wege–äquivalent. Andererseits gibt es aber auch *mindestens* zwei Elemente, denn ein Weg zwischen einer positiven und einer negativen Zahl trifft notwendigerweise die 0 ; dies sagt der *Zwischenwertsatz* aus der Analysis.

3. $\pi_0(\mathbb{R}^n - 0)$ *hat nur ein Element für* $n \geq 2$ — denn seien $x, y \in \mathbb{R}^n - 0$. Im Falle, wo die Strecke $x + t(y - x)$, $t \in [0,1]$, den Punkt 0 *nicht* trifft, sind x und y wege–äquivalent in $\mathbb{R}^n - 0$ vermöge dieser Strecke. Wenn andererseits 0 auf der Strecke $x + t(y - x)$ liegt, so wählen wir irgendeinen Punkt a , der nicht auf der Geraden durch x und y liegt (das geht wegen $n \geq 2$); x und y sind dann jeweils wege–äquivalent zu a in $\mathbb{R}^n - 0$ (der vorige Fall ist anwendbar) und somit auch untereinander.

Satz. *Für* $n \geq 2$ *sind* $\mathbb{R}^1$ *und* $\mathbb{R}^n$ *nicht topologisch äquivalent.*

Entgegen der Behauptung nehmen wir an, sie wären es doch. Wir nehmen also an, daß es zueinander inverse stetige Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

gibt, und wir wollen diese Annahme zum Widerspruch führen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir hier zusätzlich auch noch annehmen, daß $f(0) = 0$. Diese zusätzliche Annahme ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn sei etwa $f(0) = z$. Nun gibt es zweifellos eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(z) = 0$; z.B. die Abbildung $x \mapsto x - z$. Wir brauchen also nur die Abbildung f zu ersetzen durch die zusammengesetzte Abbildung $h \circ f$ und entsprechend die Abbildung g durch $g \circ h^{-1}$, wo h^{-1} die Umkehrabbildung von h bezeichnet. Wir nehmen also jetzt an, $f(0) = 0$.

Der Trick ist nun, die beiden folgenden *eingeschränkten* Abbildungen zu betrachten

$$f' : \mathbb{R}^1 - 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n - 0 \quad \text{und} \quad g' : \mathbb{R}^n - 0 \longrightarrow \mathbb{R}^1 - 0 \quad .$$

Da diese Abbildungen ebenfalls zueinander invers sind, liefern sie eine topologische Äquivalenz zwischen $\mathbb{R}^1 - 0$ und $\mathbb{R}^n - 0$.

Das kann aber nicht sein — denn betrachte $f'(+1)$ und $f'(-1)$: diese sind in $\mathbb{R}^n - 0$ durch einen Weg verbindbar ($\pi_0(\mathbb{R}^n - 0)$ hat nach Beispiel 3 nur ein Element) . Aus unserer ominösen topologischen Äquivalenz schließen wir, daß dann auch $+1$ und -1 in $\mathbb{R}^1 - 0$ durch einen Weg verbindbar sind. Andererseits wissen wir aber auch, daß dem nicht so ist (Beispiel 2). Wir haben einen Widerspruch erhalten. □

Bemerkung. Der Punkt bei der obigen Schlußweise ist der: Wenn die stetige Abbildung $w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - 0$ einen Weg in $\mathbb{R}^n - 0$ von $f'(+1)$ zu $f'(-1)$ gibt, so gibt die zusammengesetzte Abbildung $w' = g' \circ w$ einen Weg in $\mathbb{R}^1 - 0$ von

$$+1 \;=\; g'(f'(+1)) \quad \text{zu} \quad -1 \;=\; g'(f'(-1))$$

— was ja nicht sein kann.

Die Konstruktion $X \longmapsto \pi_0 X$ ist ein einfaches Beispiel einer sogenannten *topologischen Invariante*. Das Beispiel ist geeignet, um einige formale Aspekte herausstellen, die man sich gut merken kann, und die — mehr oder weniger — den Begriff der *topologischen Invariante* ausmachen:

a. Zu jedem Raum gehört ein "Ding" — im vorliegenden Fall ist dem Raum X die Menge $\pi_0 X$ zugeordnet.

b. Zu jeder stetigen Abbildung von Räumen gehört eine Abbildung der zugeordneten Dinge — im vorliegenden Fall ist der Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung (von Mengen) $\pi_0 f$ zugeordnet,

$$\pi_0 f : \ \pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y \ .$$

Wenn $[x]$ die Wege–Äquivalenz–Klasse von x bezeichnet, so ist diese Abbildung definiert durch

$$[x] \ \longmapsto \ [f(x)] \ ;$$

wobei wir noch nachzuprüfen müssen, daß letztere Zuordnung *wohl–definiert* ist,

$$[x] \ = \ [y] \quad \Longrightarrow \quad [f(x)] \ = \ [f(y)] \ .$$

Nun bedeutet aber " $[x] \ = \ [y]$ ", es gibt einen Weg von x zu y, d.h. eine stetige Abbildung

$$w : [0,1] \longrightarrow X \quad \text{mit} \quad w(0) = x \ , \quad w(1) = y \ .$$

Dann ist die Abbildung $w' = f \circ w$, die Komposition der stetigen Abbildungen

$$[0,1] \ \xrightarrow{w} \ X \ \xrightarrow{f} \ Y \ ,$$

ein Weg mit

$$w'(0) = f(w(0)) = f(x) \ \text{ und } \ w'(1) = f(w(1)) = f(y) \ ;$$

es ist also $[f(x)] = [f(y)]$.

c. Die Zuordnung $f \ \longmapsto \ \pi_0 f$ *respektiert Komposition von Abbildungen*: wenn

$$f : X \longrightarrow Y \ , \quad g : Y \longrightarrow Z$$

stetige Abbildungen sind, dann ist $\pi_0(g \circ f) \ = \ \pi_0 g \circ \pi_0 f$. Klar, denn

$$\begin{aligned} &\pi_0\,(g \circ f)\ [x] \ \underset{\text{Def. von } \pi_0(g \circ f)}{=} \ [\,(g \circ f)\,(x)\,] = \\ &[\,g\,(f(x))\,] \ \underset{\text{Def. von } \pi_0\, g}{=} \ \pi_0\, g\,(\,[f(x)]\,) \ \underset{\text{Def. von } \pi_0\, f}{=} \\ &\pi_0\, g\,(\,\pi_0\, f\,(\,[x]\,)\,) \ = \ \pi_0\, g \circ \pi_0\, f\,(\,[x]\,) \ . \end{aligned}$$

d. Die identische Abbildung auf X *induziert die identische Abbildung auf* $\pi_0 X$,

$$\pi_0 \ \mathrm{id}_X \ = \ \mathrm{id}_{\,\pi_0 X} \ .$$

Für den Sachverhalt, der durch die Eigenschaften *a.* – *d.* ausgedrückt ist, sagt man auch, daß die Zuordnung

$$X \ \longmapsto \ \pi_0 X \ , \quad (f : X \longrightarrow Y) \ \longmapsto \ (\pi_0 f : \ \pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y)$$

funktoriell ist, oder auch, daß sie "*ein Funktor*" ist.

Die Eigenschaften *a. – d.* implizieren *formal* eine weitere, nämlich

X *und* Y *topologisch äquivalent* $\Longrightarrow$ $\pi_0 X$ *und* $\pi_0 Y$ *sind isomorphe Mengen.*

Denn seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ stetige Abbildungen mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dann gilt:

$$\pi_0 f \circ \pi_0 g \underset{(c)}{=} \pi_0(f \circ g) \underset{(b)}{=} \pi_0 \, \mathrm{id}_Y \underset{(d)}{=} \mathrm{id}_{\pi_0 Y}$$

und ebenso auch $\pi_0 g \circ \pi_0 f = \mathrm{id}_{\pi_o X}$. Das heißt, $\pi_0 f$ und $\pi_0 g$ sind zueinander inverse Abbildungen zwischen $\pi_0 X$ und $\pi_0 Y$.

Letzteres mag man ansehen als eine formalisierte Version (und Verallgemeinerung) unserer früheren Überlegung, daß $\mathbb{R}^1 - 0$ und $\mathbb{R}^n - 0$ für $n \geq 2$ nicht topologisch äquivalent sind: Die beiden Räume *können* nicht topologisch äquivalent sein, da $\pi_0 \left(\mathbb{R}^1 - 0\right)$ und $\pi_0 \left(\mathbb{R}^n - 0\right)$ nicht isomorphe Mengen sind.

Wir wollen jetzt noch kurz eine topologische Invariante erfinden, mit der wir $\mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}^3$ unterscheiden können (sofern wir nur bereit sind, gewisse Dinge plausibler Art als Tatsachen zu akzeptieren). Mit demselben Trick wie vorher ziehen wir uns zunächst auf die Behauptung zurück, daß $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ nicht topologisch äquivalent sind.

Wir lassen uns von der Idee leiten, daß die *Löcher* in $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ von verschiedenem Typ sein sollten. Um den Unterschied dingfest zu machen, untersuchen wir, ob etwa eine *Schlinge* um das Loch herum zusammengezogen werden kann *ohne* das Loch zu treffen. Unsere Vermutung ist, daß das im zweiten Falle geht, im ersten aber nicht.

Es bezeichne S^1 die *1–dimensionale Sphäre* (= Kreislinie)

$$S^1 \;=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \|x\| = 1 \,\right\} \;.$$

Wenn X ein Raum ist, dann bezeichne

$$\begin{aligned} \left\{S^1 \,,\, X\right\} \;&=\; \textit{Menge der stetigen Abbildungen}\, S^1 \longrightarrow X \;. \\ (\;&=\; \text{“}\textit{Menge der Schlingen in } X\text{”} \;) \;. \end{aligned}$$

Dies ist eine sehr große (und sehr unübersichtliche) Menge, an der wir nicht so sehr unmittelbar interessiert sind. Vielmehr interessieren wir uns für eine bestimmte Äquivalenzrelation auf der Menge der Schlingen, und was wir letztlich betrachten werden, ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzrelation wird als *Deformations-Äquivalenz* (oder *Homotopie*) bezeichnet; die Äquivalenzklassen heißen *Deformationsklassen* (oder *Homotopieklassen*). In der vorliegenden Situation wird die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \longrightarrow X$ mit $\left[S^1 \,,\, X\right]$ bezeichnet.

Nun zur Definition der Äquivalenzrelation. Wir wollen sagen, daß zwei Abbildungen $f_0, f_1 \;:\; S^1 \longrightarrow X$ *deformations–äquivalent* sind (oder “*homotop*” — diese Worte bedeuten dasselbe), wenn es eine *stetige Familie von stetigen Abbildungen* gibt,

$$f_t : \; S^1 \longrightarrow X \;, \; t \in [0,1] \;;$$

also eine Art Interpolation zwischen f_0 und f_1 .

Es sei hier angemerkt, daß natürlich der Begriff der *stetigen Familie von stetigen Abbildungen* einer Präzisierung bedarf. Doch zunächst gebe ich einige Beispiele an. Die in diesen Beispielen behaupteten Sachverhalte sind durchweg nicht–trivial (und sogar einigermaßen aufwendig zu beweisen), sie sind am besten daher aufzufassen als *inoffizielle Mitteilungen.*

1. *Die Menge* $\big[S^1 \,,\, \mathbb{R}^3 - 0\big]$ *besteht aus nur einem Element*—oder, was auf dasselbe hinausläuft, jede Schlinge in $\mathbb{R}^3 - 0$ kann stetig deformiert werden in jede beliebige andere, z.B. in die konstante Abbildung $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 - 0 \;,\; x \mapsto e_1$ (wo e_1 einen Punkt aus $\mathbb{R}^3 - 0$ bezeichnen soll; etwa den ersten Basisvektor).

Wie schon angedeutet wurde, ist dies ein nicht–trivialer Satz. Um sich eine Vorstellung von der Komplexität der Dinge zu machen, sollte man sich folgendes klarmachen: Bezeichne S^2 die *zweidimensionale Sphäre,* $S^2 = \big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;|\; \|x\| = 1 \,\big\}$. *Es gibt eine stetige Abbildung* $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 - 0$, *deren Bild die ganze* S^2 *enthält* — eine solche Abbildung kann man relativ leicht mit Hilfe der Peano-Kurve konstruieren.

2. *Die Menge* $\big[S^1 \,,\, \mathbb{R}^2 - 0\big]$ *hat abzählbar viele Elemente.* Diese sind klassifiziert durch die *Windungszahl* der jeweiligen Schlinge um den Nullpunkt.

Repräsentanten einiger Elemente und die zugehörige Windungszahl :

(Windungszahl:) $\quad -1 \qquad 0 \qquad +1 \qquad +2$

3. Die Zuordnung $X \longmapsto \big[S^1 \,,\, X\big]$ ist *funktoriell* in dem Sinne, wie wir es im Anschluß an die Konstruktion von $\pi_0 X$ bereits diskutiert haben. (Dies – zur Abwechslung – ist nicht so schwierig.)

Die letzte Sache liefert: Sind X und Y topologisch äquivalent, so sind die Mengen $\big[S^1 \,,\, X\big]$ und $\big[S^1 \,,\, Y\big]$ isomorph. Mit 1. und 2. bekommen wir so das annoncierte Hilfsmittel, um $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ unterscheiden zu können. $\square$

Noch eine Bemerkung zum genannten Begriff der *stetigen Familie von stetigen Abbildungen*

$$f_t : \ S^1 \longrightarrow X \ , \ t \in [0,1] \quad .$$

Statt von einer *Familie von Abbildungen* zu reden, kann man sich hier zurückziehen auf die Betrachtung einer einzigen Abbildung. Das geht auf zwei Weisen:

1. man definiert eine Abbildung $F : \ [0,1] \times S^1 \ \longrightarrow X \ , \ (t,s) \longmapsto f_t(s)$;
2. man definiert eine Abbildung $\varphi : \ [0,1] \longrightarrow \{S^1 \, , X\} \ , \ t \longmapsto f_t$.

Auf dem mengentheoretischen Niveau ist das mehr oder weniger dasselbe; das eine ist nur eine Umformulierung des andern. Wenn man nun den Begriff der *Stetigkeit* präzisieren will, so gibt es bei der ersten Beschreibung eine naheliegende Lösung: man verlangt einfach, daß die ganze Abbildung F stetig ist. Bei der zweiten Beschreibung möchte man analog vorgehen (Stetigkeit von φ) , es ist aber zunächst nicht einmal so ganz klar, was dies heißen soll.

Bei Gelegenheiten wie dieser stellt es sich als wichtig heraus, daß man über eine allgemeine Sprache verfügt, die es gestattet, Aussagen über “Räume” allgemeinen Typs und “stetigen Abbildungen” zwischen diesen zu formulieren.

Ziel der Begriffsbildung ist es, mit wenig Mühe sich einen allgemeinen Rahmen zu verschaffen, in dem es sinnvoll ist, von *stetigen Abbildungen* zu reden.

Ich will an Bekanntes anknüpfen, nämlich an die ε–δ–Definition der stetigen Abbildungen. Zur Formulierung der ε–δ–Definition braucht man einen Raum, in dem ein *Abstands–Begriff* erklärt ist; so etwas nennt man einen *metrischen Raum*.

Definition. Eine *Distanzfunktion* auf einer Menge X ist eine Abbildung in die nichtnegativen reellen Zahlen, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \longmapsto d\,(x, y)$, die den folgenden Bedingungen genügt:

— $d(x, y) = 0 \iff x = y$

— $d(x, y) = d(y, x)$

— $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Dreiecksungleichung*).

Die Menge X zusammen mit der Distanzfunktion d heißt ein *metrischer Raum*.

Beispiele. 1. Jeder normierte Vektorraum V ist ein metrischer Raum: wenn $\|\ \|$ die Norm auf V bezeichnet, so ist die Distanzfunktion gegeben durch $d(v, w) = \|v - w\|$.

2. Jede Untermenge eines metrischen Raumes ist wieder ein metrischer Raum: man nimmt die eingeschränkte Funktion als Distanzfunktion.

Sobald man eine Distanzfunktion hat, kann man Begriffe wie *Kugeln* erklären. Wie üblich gibt es davon zwei Sorten: offene Kugeln und abgeschlossene Kugeln.

Sei X metrischer Raum mit Distanzfunktion d . Sei ε eine positive reelle Zahl. Für $x \in X$ definiert man die

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{offene} \\ \text{abgeschlossene} \end{array} \right\} \qquad \varepsilon\text{–Kugel} \qquad \left\{ \begin{array}{l} U(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \} \\ B(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \} \end{array} \right\}$$

Man kann auch *Stetigkeit* erklären.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ Abbildung von metrischen Räumen. Sei x ein Punkt aus X . Wir sagen, f *ist stetig im Punkt* $x \in X$, wenn folgendes gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$; oder, was dasselbe ist,

$$f(\,U(x, \delta)\,) \subset U(\,f(x), \varepsilon\,) \ .$$

Wie üblich können wir nun sagen, daß die Abbildung f *stetig* (schlechthin) heißen soll, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.

Kann man die Definition der Stetigkeit so umformulieren, daß ε und δ nicht mehr explizit vorkommen? Wir benötigen eine neue Vokabel.

Definition. Sei x ein Punkt aus X , wo X ein metrischer Raum ist. Sei U eine Teilmenge von X . Wir wollen sagen, daß U eine *Umgebung von* x ist , wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß

$$U(x, \varepsilon) \subset U .$$

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine Abbildung von metrischen Räumen und sei* $x \in X$ *. Es ist* f *stetig in* x *genau dann, wenn zu jeder Umgebung* V *von* $f(x)$ *eine Umgebung* U *von* x *existiert mit* $f(U) \subset V$ *.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei die Umgebung V von $f(x)$ vorgegeben. Nach Definition von *Umgebung* existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U(f(x), \varepsilon) \subset V$. Wegen der Stetigkeit in x existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$. Wir setzen $U := U(x, \delta)$. Dann ist U Umgebung von x und $f(U) \subset V$.

" $\Leftarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $U(f(x), \varepsilon)$ Umgebung von $f(x)$. Wegen der Annahme existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset U(f(x), \varepsilon)$. Nach Definition von *Umgebung* nun existiert ein $\delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subset U$. Es folgt $f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$. $\square$

Können wir diese Definition weiter so umformulieren, daß Punkte nicht mehr explizit genannt werden? Anders gesagt, können wir die *globale Stetigkeit* definieren *ohne* vorher von der lokalen Stetigkeit reden zu müssen? Wir benötigen eine neue Vokabel.

Definition. Eine Teilmenge $O \subset X$ heißt *offen*, wenn sie zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung enthält.

Beispiele. 1. Eine *offene Kugel* im Sinne der oben gegebenen Definition ist eine offene Menge. Es ist klar (oder?), daß das aus der Dreiecksungleichung folgt.

2. Sei $x \in X$ und sei U Umgebung von x ; dann enthält U noch eine *offene Umgebung*, d.h. eine Umgebung, die gleichzeitig eine offene Menge ist. Denn nach Definition von *Umgebung* enthält U z.B. noch eine offene Kugel.

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *Abbildung von metrischen Räumen. Es ist* f *stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge* O' *des Zielraumes* Y *gilt, daß* $f^{-1}(O')$ *eine offene Menge in* X *ist* ("Urbilder offener Mengen sind offen").

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei O' offen in Y und sei $x \in f^{-1}(O')$. Zu zeigen: $f^{-1}(O')$ enthält eine Umgebung von x . Weil O' offen und $f(x) \in O'$, ist O' Umgebung von $f(x)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset O'$, also $U \subset f^{-1}(O')$.

" $\Leftarrow$ " Sei V Umgebung von $f(x)$. Zu zeigen: es gibt Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Die Umgebung V enthält eine offene Umgebung V' von x (s. oben). Wegen der Annahme ist $f^{-1}(V')$ offen in X , und es gilt $x \in f^{-1}(V')$. Daher ist $f^{-1}(V')$ Umgebung von x . Wir setzen $U := f^{-1}(V')$. $\square$

Wir nehmen die in dem vorstehenden Satz genannte Charakterisierung der Stetigkeit zum Anlaß für eine Definition.

DEFINITION. Ein *topologischer Raum* besteht aus

— einer Menge X (= "*unterliegende Punktmenge*") und

— einem System von Teilmengen von X, die *offene Mengen* genannt werden;

dabei soll dieses System gewissen naheliegenden Bedingungen formaler Art genügen, die wir später formulieren werden. Ein solches System wird auch als *topologische Struktur auf* X, oder kurz als *Topologie auf* X bezeichnet.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen wird als *stetig* bezeichnet, wenn sie die Bedingung erfüllt: *Urbilder offener Mengen sind offen.*

BEISPIEL. Einem metrischen Raum ist ein topologischer Raum zugeordnet: die unterliegende Menge ist dieselbe wie die des metrischen Raumes; die *offenen Mengen* sind definiert sind als diejenigen, die wir auch früher schon so bezeichnet haben (d.h., es sind diejenigen Teilmengen, die mit jedem ihrer Punkte noch eine Kugel um diesen Punkt enthalten). Etwas kürzer (und nur ein wenig mißbräuchlich) werden wir auch sagen: ein metrischer Raum *ist* auch ein topologischer Raum.

Die *Bedingungen* (= "*Axiome*"), denen das System der offenen Mengen genügen muß, kann man am besten vielleicht so sich merken: *Offene Mengen* stelle man sich vor als solche Mengen, die zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze *Umgebung* enthalten (wobei "*Umgebung*" ein bisher undefinierter Begriff ist!). Die Bedingungen lauten:

O1. Die leere Menge ist offen.

O2. Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist wieder offen.
(Denn wenn zwei Mengen "Umgebung" eines Punktes sind, so auch ihr Durchschnitt. Ebenso ist auch der Durchschnitt von *endlich vielen* offenen Mengen wieder offen (das entsprechende Axiom folgt *formal* aus O2).)

O3. Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen.
(Denn jeder Punkt der Vereinigung liegt in einer der Mengen, und diese enthält eine ganze "Umgebung", also enthält auch die Vereinigung eine "Umgebung".)

O4. Die ganze Menge X ist offen.
(Wegen O3 ist hierzu äquivalent, daß jeder Punkt in mindestens einer offenen Menge liegt — oder in unserer inoffiziellen Sprechweise, daß jeder Punkt mindestens eine "Umgebung" besitzt.)

Zurück nun zu den metrischen Räumen! Wir spezialisieren noch ein bißchen mehr.

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $\| \ \|$. Wie wir schon gesehen haben, kann man V als metrischen Raum auffassen mit der Distanzfunktion $d(x, y) = \|x-y\|$. Diese induziert eine topologische Struktur auf V durch die Vorschrift:

Eine Teilmenge O von V ist *offene Menge in* V genau dann, wenn gilt: für jedes $x \in O$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subset O$. Nun gibt es Fälle (die nicht einmal selten sind) wo derselbe Vektorraum mit mehreren Normen versehen ist.

Beispiele. (a)

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{euklidischer Norm} \\ \text{Maximum–Norm} \end{cases}$$

(b) Der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \text{Maximum–Norm} & \|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \\ L^1\text{–Norm} & \|f\|_1 = \int |f| \\ L^2\text{–Norm} & \|f\|_2 = \left(\int f^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

Im Beispiel (a) sind die Normen *äquivalent* zueinander, in Beispiel (b) nicht. Was heißt das für die topologische Struktur?

Satz. Sei V ein $\mathbb{R}$ –Vektorraum. Seien $|\ |_1$ und $|\ |_2$ zwei Normen auf V . Dann sind gleichbedeutend:

1. Die Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ sind äquivalent.
2. Die Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ induzieren auf V dieselbe topologische Struktur.

Beweis. "1. $\Rightarrow$ 2." Zu zeigen: jede offene Menge bezüglich der ersten topologischen Struktur ist auch offen bezüglich der zweiten, und umgekehrt. Sei $O \subset V$, sei O offen bezüglich der ersten Struktur. Wenn $x \in O$, so existiert (nach Definition) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{①}(x,\varepsilon) \subset O$. Wegen 1. existiert folglich auch ein $\varepsilon' > 0$ mit $U_{②}(x,\varepsilon')$ $(\subset U_{①}(x,\varepsilon)) \subset O$. Da das für alle $x \in O$ gilt, folgt (nach Definition), daß O offen bezüglich der zweiten Struktur ist. — Die Umkehrung geht analog.

"2. $\Rightarrow$ 1." Zu zeigen: jede Kugel (um den Nullpunkt) bezüglich der ersten Norm enthält eine Kugel bezüglich der zweiten Norm, und umgekehrt. Sei $U_{①}(0,\varepsilon)$ eine Kugel bezüglich der ersten Norm. Dann ist $U_{①}(0,\varepsilon)$ offen bezüglich der ersten topologischen Struktur und wegen 2. deshalb auch offen bezüglich der zweiten Struktur. Also existiert (nach Definition) ein $\varepsilon' > 0$ mit $U_{②}(0,\varepsilon') \subset U_{①}(0,\varepsilon)$. — Die Umkehrung geht analog. $\square$

Folgerung. Es gibt Fälle, wo *ein– und dieselbe Menge* mit *verschiedenen* topologischen Strukturen betrachtet wird, nämlich etwa, wie wir gerade gesehen haben, der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ mit den von verschiedenen Normen induzierten Topologien.

Dieses Phänomen, daß ein– und dieselbe Menge mit verschiedenen Topologien versehen ist, kommt aber sonst in dieser Vorlesung nur selten vor.

In dem Zusammenhang ist noch ein Ihnen aus der Analysis bekannter Sachverhalt von Interesse: Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum *endlicher Dimension*. Dann sind alle Normen auf V zueinander äquivalent. Mit dem obigen Satz folgt dann: *Wie auch immer man sich auf einem* $\mathbb{R}^n$ *eine Norm verschafft, die induzierte Topologie ist immer dieselbe.*

Zusatz zu S. 17 (zur Äquivalenz von Normen)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Seien $|\ |_1$ und $|\ |_2$ zwei Normen auf V .

Bezeichne $U_{①}(x,r)$ die offene Kugel bezüglich der ersten Norm, mit Mittelpunkt x und Radius r . Etc. (wie im Skript).

Sei C positive Konstante.

Behauptung. Es sind äquivalent:

1. Für alle v ist $|\,v\,|_2 \leq C|\,v\,|_1$.
2. Für jedes $r > 0$ ist $B_{①}(0,r) \subset B_{②}(0,Cr)$; allgemeiner: $B_{①}(x,r) \subset B_{②}(x,Cr)$.
3. Für jedes $r > 0$ ist $U_{①}(0,r) \subset U_{②}(0,Cr)$; allgemeiner: $U_{①}(x,r) \subset U_{②}(x,Cr)$.

Beweis. "1. ⇒ 2." Die Behauptung von (2) ist: $|\,x-y\,|_1 \leq r \implies |\,x-y\,|_2 \leq Cr$.

Das ist aber klar wegen

$$|\,x-y\,|_1 \leq r \iff C|\,x-y\,|_1 \leq Cr \quad \text{und} \quad |\,x-y\,|_2 \leq C|\,x-y\,|_1 \ .$$

"1. ⇒ 3." Die Behauptung ist: $|\,x-y\,|_1 < r \implies |\,x-y\,|_2 < Cr$. Das geht genauso.

"2. ⇒ 1." Wenn $v = 0$, dann ist (1) klar; sei also $v \neq 0$. Dann ist $B_{①}(0,|v|_1)$ definiert, und $v \in B_{①}(0,|v|_1)$. Folglich ist $v \in B_{①}(0,|v|_1) \subset B_{②}(0,C|v|_1)$; also $|\,v\,|_2 \leq C|\,v\,|_1$.

"3. ⇒ 1." Wie im vorigen Fall nehmen wir wieder an, daß $v \neq 0$. Der jetzige Fall ist ein wenig komplizierter als der vorige, da $v \notin U_{①}(0,|v|_1)$.

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n > 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ (z.B. die Folge $a_n = 1 + 1/n$). Dann ist

$$v \in U_{①}(0, a_n|v|_1) \qquad (\text{ weil ja } |v|_1 < a_n|v|_1\ )$$

also nach (3) auch $v \in U_{②}(0, Ca_n|v|_1)$, d.h. $|v|_2 < Ca_n|v|_1$.

Das gilt nun für alle n . Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, folgt $|v|_2 \leq C|v|_1$.

Folgerung.

Die beiden Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ heißen *äquivalent* wenn positive Konstanten C und C' existieren, so daß für alle $v \in V$ gilt

$$|\,v\,|_2 \leq C|\,v\,|_1 \ \text{ und } \ |\,v\,|_1 \leq C'|\,v\,|_2 \ .$$

Nach dem obigen läßt sich dies auch so formulieren, daß für alle r gilt

$$U_{①}(0,r) \subset U_{②}(0,Cr) \quad \text{und} \quad U_{②}(0,r) \subset U_{①}(0,C'r) \ ;$$

und allgemeiner auch:

$$U_{①}(x,r) \subset U_{②}(x,Cr) \quad \text{und} \quad U_{②}(x,r) \subset U_{①}(x,C'r)$$

(für alle $x \in V$).

Nach diesem Exkurs zu metrischen Räumen wenden wir uns wieder den topologischen Räumen allgemein zu.

Als heuristisches Prinzip hatten wir uns vorgestellt, daß der axiomatische (=“nicht von vornherein mit einem bestimmten Inhalt versehene”) Begriff der *offenen Menge* solche Mengen bezeichnet, die zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze “Umgebung” enthalten (der Begriff “Umgebung” war dabei ein undefinierter Term; er ist aber, zumindest für meinen eigenen Geschmack, doch etwas anschaulicher als der Begriff der “offenen Menge”).

Kann man aus diesem heuristischen Prinzip einen wahren Sachverhalt machen? Um das zu tun, muß natürlich gesagt werden, was denn eine “Umgebung” eigentlich sein soll. Wir benötigen eine neue Definition.

Definition. Sei X ein topologischer Raum, sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* x , wenn eine offene Menge O in X existiert, mit $x \in O \subset U$.

Selbstverständlich müssen wir uns hier fragen, ob der neue Sprachgebrauch mit dem alten kompatibel ist in den Fällen, wo es eine Überschneidung gibt. Das ist der Fall:

Bemerkung. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann stimmt der neue Umgebungsbegriff überein mit dem, den wir früher eingeführt haben. Denn sei $x \in X$;

— ist U Umgebung von x im alten Sinn, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subset U$. Nun ist $U(x,\varepsilon)$ offene Menge, also ist U auch Umgebung von x im neuen Sinn.

— ist umgekehrt U Umgebung von x im neuen Sinn, so existiert eine offene Menge O mit $x \in O \subset U$. Nach Definition der *offenen Mengen* in einem metrischen Raum existiert $\varepsilon' > 0$, $U(x,\varepsilon') \subset O$. Damit ist O und somit auch U Umgebung im alten Sinn. □

Wir können nun wieder einen Satz formulieren. Vom Inhalt her ist er nicht besonders aufregend. Man mag ihn als Beleg dafür ansehen, daß uns bei unseren bisherigen Sprachübungen keine allzu groben Schnitzer unterlaufen sind.

Satz. Sei X topologischer Raum. Sei W Teilmenge von X (genauer: W sei Teilmenge der unterliegenden Menge von X). Es sind äquivalent:

1. W ist offene Menge in X .
2. Die Menge W enthält mit jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung.

Beweis. “1. $\Rightarrow$ 2.” Wenn $x \in W$, dann ist W selbst Umgebung von x (nach Definition von *Umgebung*).

“2. $\Rightarrow$ 1.” Wegen der Annahme 2. existiert zu jedem $x \in W$ eine offene Menge O_x mit $x \in O_x \subset W$. Es ist $\bigcup_{x \in W} O_x \subset W$ (weil $O_x \subset W$ für alle x) und $W \subset \bigcup_{x \in W} O_x$ (jedes $x \in W$ liegt in einem der O_x) , also ist $W = \bigcup_{x \in W} O_x$ als Vereinigung von offenen Mengen selbst wieder offen (Axiom O3). □

Bei der Definition des *topologischen Raumes* haben wir den Begriff der *offenen Menge* als den primitiven (oder axiomatischen) Begriff genommen und wir haben den Begriff der *Umgebung* später daraus abgeleitet. Der vorige Satz macht plausibel, daß man auch umgekehrt vorgehen könnte, d.h. man könnte den Begriff der *Umgebung* als den primitiven Begriff nehmen und daraus den Begriff der *offenen Menge* dann herleiten. Technisch gesehen läuft das darauf hinaus, daß man ein geeignetes Axiomensystem für *Umgebungen* angibt. Ein solches System kann man in Büchern finden; ich möchte hier nicht weiter darauf eingehen. In der Praxis ist es meistens bequemer, mit offenen Mengen zu arbeiten; der Unterschied ist aber nicht groß.

Das Hantieren mit offenen Mengen will ich jetzt illustrieren anhand von zwei wichtigen Begriffsbildungen, nämlich der Konstruktion von *Unterräumen* einerseits und der von *Quotientenräumen* andererseits.

Im ersten Fall geht es um folgende Frage: Gegeben seien ein topologischer Raum X und eine *Untermenge* Y in X (das könnte man etwas genauer (pedantischer?) auch so formulieren, daß Y gegeben sei als Teilmenge der *unterliegenden Menge* von X). Man möchte in dieser Situation Y nun wieder als topologischen Raum auffassen können. Das geht auch in ziemlich naheliegender Weise. (Man denke an den entsprechenden Sachverhalt bei metrischen Räumen.)

Im zweiten Fall geht es um eine ganz analoge Frage, nur daß man jetzt nicht eine *Untermenge* von X betrachtet, sondern eine *Quotientenmenge* von X ; oder, was dasselbe ist, die Menge von Äquivalenzklassen bezüglich einer Äquivalenzrelation auf X (bzw. genauer wieder, der unterliegenden Menge von X). Eine ganz wichtige Bemerkung an dieser Stelle ist die, daß es zwar bei der Frage, *nicht aber bei ihrer Antwort*, eine vernünftige Entsprechung bei den metrischen Räumen gibt. Das ist einer der Gründe, warum es notwendig ist, topologische Räume überhaupt zu betrachten.

Bemerkung. Für das folgende beachte man, daß zu einer *Untermenge* Y von X immer eine ganz bestimmte Abbildung $Y \longrightarrow X$ gehört. Diese Abbildung ist injektiv und wird als die *kanonische Inklusion* bezeichnet.

Analog dazu gehört zu einer *Quotientenmenge* Z von X immer eine ganz bestimmte Abbildung $X \longrightarrow Z$. Diese Abbildung ist surjektiv und wird als die *kanonische Projektion* bezeichnet.

Definition und Satz. Sei (X , *System der offenen Mengen in* X) ein topologischer Raum. Sei Y Untermenge von X . Folgende Vorschrift definiert eine topologische Struktur auf Y , die sogenannte *Unterraumtopologie*:

> Eine Teilmenge O' in Y heiße *offene Menge in* Y genau dann, wenn es eine offene Menge O in X gibt mit $O \cap Y = O'$.

Der Raum Y wird auch als ein *Unterraum von* X bezeichnet. Die Inklusion $Y \longrightarrow X$ ist stetige Abbildung.

Definition und Satz. Sei (X , *System der offenen Mengen in* X) ein topologischer Raum. Sei Z eine Quotientenmenge von X und bezeichne $q : X \longrightarrow Z$ die kanonische Projektion. Folgende Vorschrift definiert eine topologische Struktur auf Z , die sogenannte *Quotiententopologie*:

> Eine Teilmenge O' in Z heiße *offene Menge in* Z genau dann, wenn $q^{-1}(O')$ offene Menge in X ist.

Der Raum Z wird auch als ein *Quotientenraum* von X bezeichnet. Die Abbildung $X \longrightarrow Z$ (die kanonische Projektion) ist stetig.

Es ist jetzt nachzuweisen, daß die oben definierten Systeme wirklich topologische Strukturen auf der Untermenge Y bzw. auf der Quotientenmenge Z liefern; das heißt, es ist nachzuweisen (in jedem der beiden Fälle), daß die Axiome O1 – O4 gelten. Ich will das hier nur für den Fall der Quotiententopologie vorführen:

Axiom O1: *Die leere Menge ist offen*,
aber $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist offen in X , also folgt (Def. der Quotiententopologie) daß auch $\emptyset$ offen in Z .

Axiom O2: *Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist offen*,
aber O, O' offen in $Z \iff q^{-1}(O)$ und $q^{-1}(O')$ offen in $X \implies$ $q^{-1}(O) \cap q^{-1}(O') = q^{-1}(O \cap O')$ offen in $X \iff O \cap O'$ offen in Z .

Axiom O3: *Die Vereinigung von offenen Mengen ist offen*,
aber O_i , $i \in I$, offene Menge in $Z \iff q^{-1}(O_i)$ offen in $X \implies$ $\bigcup_{i\in I} q^{-1}(O_i) = q^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right)$ offen in $X \iff \bigcup_{i\in I} O_i$ offen in Z .

Axiom O4: *Die unterliegende Menge selbst ist offen*,
aber $q^{-1}(Z) = X$ offen in $X \implies Z$ offen in Z .

Es ist auch nachzuweisen, daß die Abbildung $X \longrightarrow Z$ stetig ist. Das ist aber klar (oder?). $\square$

Die Konstruktion von Quotientenräumen gestattet es uns, eine sehr wichtige Idee auch mathematisch zu erfassen; nämlich diejenige, neue Räume aus alten zu bekommen mit Hilfe einer "Verklebe"–Konstruktion.

So können wir etwa eine *Strecke* hernehmen und uns vornehmen, davon die Endpunkte *zusammenzufügen*. Ein Versuch, dies zu "mathematisieren" ist der folgende, den wir jetzt näher anschauen wollen.

Wir nehmen das Einheitsintervall $[0, 1]$ und betrachten hierauf eine geeignete Äquivalenzrelation: die Punkte 0 und 1 sind zusammen in einer Äquivalenzklasse, dagegen enthält jede andere Äquivalenzklasse nur jeweils einen einzigen Punkt. Der zugehörige *Quotientenraum* (im Sinne der oben gegebenen Definition) wird bezeichnet als *das Intervall mit identifizierten Endpunkten*, $[0, 1] \,/\, 0{\sim}1$.

In der Erwartung, daß unsere "Mathematisierung" nicht ganz abwegig war, vermuten wir, daß der Raum $[0, 1] \,/\, 0{\sim}1$ topologisch äquivalent ist zum *Kreis*

$$S^1 \;=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\| = 1 \,\right\} \;\approx\; \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \,\right\} \;.$$

Davon wollen wir uns jetzt überzeugen. Wir betrachten die Abbildung $f: [0,1] \longrightarrow S^1$,

$$t \longmapsto f(t) = e^{2\pi i t} \ .$$

Die Abbildung f nun definiert eine Abbildung auf der Quotientenmenge,

$$g: \ [0,1] \, / \, 0{\sim}1 \ \longrightarrow \ S^1 \ ,$$

(wir haben hier benutzt, daß $f(0) = f(1)$ ist), und es ist klar (oder?), daß letztere Abbildung *bijektiv* ist. Um uns davon zu überzeugen, daß die beiden Räume topologisch äquivalent sind, müssen wir also nur noch zeigen:

(i) die Abbildung g ist stetig, (ii) die Umkehrabbildung g^{-1} ist stetig.

Der Teil (i) ist eine Konsequenz aus der Definition der Quotiententopologie (und, natürlich, der Stetigkeit von f). Man nimmt ihn am besten in allgemeiner Form zur Kenntnis.

Satz. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung. Sei Z Quotientenraum von X (mit der Quotiententopologie!). Bezeichne $q : X \longrightarrow Z$ die Projektion. Es gelte, daß die Abbildung f über den Quotientenraum Z faktorisiert* (als Abbildung von Mengen); *das heißt, daß eine Abbildung $g : Z \longrightarrow Y$ existiert, so daß*

$$f = g \circ q \ .$$

Dann ist g stetige Abbildung.

Bemerkung. Es ist klar (oder?), daß die Abbildung g eindeutig bestimmt ist.

Beweis des Satzes. Sei $O \subset Y$ offen. Zu zeigen, $g^{-1}(O)$ ist offen in Z . Nach Definition der Quotiententopologie heißt das, daß $q^{-1}\big(g^{-1}(O)\big)$ offen in X ist. Aber $q^{-1}\big(g^{-1}(O)\big) = f^{-1}(O)$, und $f^{-1}(O)$ ist offen wegen der Stetigkeit von f . □

Zurück zu unserer speziellen Abbildung

$$g: \ [0,1] \, / \, 0{\sim}1 \ \longrightarrow \ S^1 \ .$$

Um die Stetigkeit der Umkehrabbildung g^{-1} nachzuweisen, müssen wir zeigen: g bildet offene Mengen auf offene Mengen ab (für den hier behaupteten Sachverhalt sagt man auch, daß g eine *offene Abbildung* ist). Sei also $O \subset [0,1]\,/\,0{\sim}1$ offene Menge, und sei $x \in O$. Zu zeigen, $g(O)$ enthält noch eine Umgebung von $g(x)$ in S^1 .

Bezeichne $q: \ [0,1] \longrightarrow [0,1]\,/\,0{\sim}1$ die Projektion. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. *Fall.* $x \neq q(0)$ (*und deshalb auch* $x \neq q(1)$).

Dann enthält $q^{-1}(O)$ ein Intervall $(x{-}\varepsilon,\ x{+}\varepsilon)$. Folglich enthält $g(O) = f\left(q^{-1}(O)\right)$ den Kreisbogen

$$\left\{ e^{2\pi i t} \mid t \in (x{-}\varepsilon,\ x{+}\varepsilon) \right\} \ .$$

Dieser Kreisbogen ist eine Umgebung von $g(x)$ in S^1 (*Unterraumtopologie von* S^1 *in* $\mathbb{C}$), denn der Kreisbogen enthält sicherlich den Durchschnitt von S^1 mit einer hinreichend kleinen (Kreis–)Umgebung von $g(x)$ in $\mathbb{C}$.

2. *Fall.* $x = q(0) = q(1)$.

Dann ist $q^{-1}(O)$ offene Teilmenge von $[0,1]$, die 0 *und* 1 enthält; folglich existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1] \subset q^{-1}(O)$, und $g(O) = f\left(q^{-1}(O)\right)$ enthält *wieder* einen Kreisbogen, nämlich $\left\{e^{2\pi i t} \mid t \in (-\varepsilon,\ +\varepsilon)\right\}$. □

BEMERKUNG. Man könnte versucht sein zu glauben, daß der Schritt (ii) in dem vorangegangenen Beweis überflüssig war; das heißt, daß eine stetige bijektive Abbildung automatisch schon eine topologische Äquivalenz sein müßte (daß in dieser Situation die Umkehrabbildung automatisch schon stetig sein müßte). Das ist aber nicht der Fall, wie Gegenbeispiele zeigen: *Die Abbildung*

$$[0,1) \longrightarrow S^1 \ , \quad t \longmapsto e^{2\pi i t} \ ,$$

ist ein Beispiel für eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist. □

Das gerade beschriebene Gegenbeispiel hat aber auch einen erfreulichen Aspekt. Es gibt nämlich einen *Grund* dafür, warum hier tatsächlich zur Vorsicht zu raten ist (einer der Räume in dem Beispiel ist nicht "kompakt").

Wie wir in Kürze sehen werden, war die Vermutung "eine stetige, bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist schon eine topologische Äquivalenz" (die Umkehrabbildung ist wieder stetig) doch nicht gar so abwegig: dadurch daß man gewisse Bedingungen an die topologischen Räume X und Y stellt, kann man die Aussage retten.

Die Notwendigkeit solcher Bedingungen wird durch das obige Gegenbeispiel belegt. Es handelt sich insbesondere also auch um eine nicht–triviale Aussage; ein Beweis ist unbedingt erforderlich.

Zur Formulierung der Bedingungen benötigen wir zwei Begriffe, die auch sonst von großer Wichtigkeit sind. Es handelt sich um die Begriffe *kompakt* und *Hausdorff–Raum*, die wir jetzt diskutieren wollen.

Doch zunächst notieren wir der Vollständigkeit halber noch eine Vokabel. Man sagt, daß eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X *abgeschlossen* ist, wenn die *komplementäre* Menge

$$CA := \{x \in X \mid x \notin A\}$$

eine offene Menge in X ist.

Es gilt also: Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen; und das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen.

Es gilt auch (warum?), daß man Stetigkeit durch abgeschlossene Mengen charakterisieren kann: Eine Abbildung von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie die Bedingung erfüllt: *Urbilder von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.*

Ein topologischer Raum X wird als *Hausdorff–Raum* bezeichnet, wenn er die folgende Bedingung erfüllt: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es offene Mengen O_x und O_y mit

$$x \in O_x \ , \ y \in O_y \quad \text{und} \quad O_x \cap O_y = \emptyset \ ;$$

man sagt auch: *Punkte lassen sich durch offene Mengen trennen.*

Auf den ersten Blick mag die Eigenschaft (oder vielmehr die Tatsache, daß man sie als *spezielle* Eigenschaft ausdrücklich fordert) ein wenig kurios erscheinen. Metrische Räume haben die Eigenschaft selbstverständlich (davon werden wir uns sogleich überzeugen). Man mag sich wundern, daß hier ein *Raum*–Begriff überhaupt Gegenstand der Betrachtung ist, wo diese Bedingung nicht automatisch eingebaut ist. Das hat aber ganz pragmatische Gründe. So ist es bei der Quotientenraum–Konstruktion keineswegs so, daß das Resultat automatisch immer ein Hausdorff–Raum wäre. Wenn man nun etwa darauf bestanden hätte, daß "Raum" automatisch schon "Hausdorff–Raum" bedeuten solle, so hätte das die fatale Konsequenz, daß die Quotientenraum–Konstruktion nicht einmal allgemein definiert wäre! Man hätte dann z.B. auch erhebliche Schwierigkeiten, die wichtige Tatsache zu diskutieren, daß in einigen besonders interessanten Situationen die Quotientenraum–Konstruktion tatsächlich immer auf Hausdorff–Räume führt.

Metrische Räume haben die Hausdorff–Eigenschaft, wie schon angedeutet wurde. Denn sei M metrischer Raum, seien $x, y \in M$ und $\varepsilon = d(x, y)$. Wenn $x \neq y$, dann ist $\varepsilon > 0$. Wir definieren $O_x = U\big(x, \frac{\varepsilon}{2}\big)$, $O_y = U\big(y, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Dann sind O_x und O_y offene Mengen (nämlich offene Kugeln) und punktfremd.

Auch Unterräume von Hausdorff–Räumen sind wieder Hausdorff–Räume. Denn sei X Hausdorff–Raum und $Y \subset X$ Unterraum. Seien $x, y \in Y$. Nach Voraussetzung über X existieren offene Mengen O und O' in X , die x und y trennen. Dann sind $O \cap Y$ und $O' \cap Y$ offene Mengen in Y , die x und y trennen.

Bei topologischen Räumen schlechthin bedeutet die Hausdorff–Eigenschaft andererseits eine arge Einschränkung der Allgemeinheit. Auch dies kann man illustrieren an dem beliebten Spielmaterial der Räume mit endlich vielen Punkten: Ist X topologischer Raum mit nur endlich vielen Punkten und gleichzeitig ein Hausdorff–Raum, dann ist X ein *diskreter* Raum (d.h., *jede* Teilmenge von X ist eine offene Menge). Hierzu genügt es, zu wissen, daß für jedes $x \in X$ die Teilmenge $\{x\}$ offen ist (denn jede andere Teilmenge ist Vereinigung von solchen Mengen, und eine Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen). Wegen der Voraussetzung "Hausdorff" nun gibt es zu jedem $y \in X$ eine offene Menge $O_{x,y}$ mit $x \in O_{x,y}$, $y \notin O_{x,y}$. Dann ist

$$\{x\} \ = \ \bigcap_{y,\, y \neq x} O_{x,y}$$

ein Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen, und daher selbst offen.

Ich komme jetzt zum Begriff der *Kompaktheit*. Sie kennen diesen Begriff aus der Analysis: Er garantiert, daß jede Folge mindestens einen Häufungspunkt hat. Die meisten von Ihnen werden wohl noch wissen, daß es mehrere Möglichkeiten gibt, zu definieren, wann eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kompakt sein soll; und daß alle diese Möglichkeiten auf denselben Begriff führen.

Gegenwärtig hantieren wir aber mit "Räumen" sehr allgemeiner Art, und da ist es nicht überraschend, daß diese verschiedenen Begriffe nicht mehr ganz äquivalent sind. Deshalb brauchen wir hier verschiedene Namen.

Man sagt, ein Raum X ist *folgen–kompakt*, wenn er die Bolzano–Weierstraß Eigenschaft hat; d.h., wenn gilt, daß jede Folge in X mindestens einen Häufungspunkt in X hat. (In manchen Texten wird hier auch die (stärkere) Eigenschaft verlangt, daß jede Folge in X tatsächlich eine konvergente Teilfolge haben soll.)

Der "bessere" Begriff, zu dem ich jetzt komme, postuliert die sogenannte *Überdeckungs–Eigenschaft*. Auch dazu ist die Terminologie in der Literatur nicht ganz einheitlich. Das kommt daher, daß man sich festlegen muß, ob *kompakt* die Hausdorff–Eigenschaft beinhalten soll oder nicht (d.h., ob "kompakter Raum" gleichbedeutend sein soll mit "kompakter Hausdorff–Raum"). Wir wollen das so machen, und wir brauchen deshalb für die Überdeckungseigenschaft selbst einen gesonderten Namen.

Wir benötigen noch einige Vokabeln. Sei X ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung von* X soll einfach eine indizierte Menge von offenen Mengen bezeichnen, die insgesamt den Raum überdecken,

$$\{O_i\}_{i\in I}\ ,\ O_i \textit{ offen in } X\ ,\quad \bigcup_{i\in I} O_i \,=\, X\ .$$

Eine *Teil–Überdeckung* der offenen Überdeckung $\{O_i\}_{i\in I}$ bedeutet ein Teilsystem dieser offenen Mengen, das immer noch ganz X überdeckt; d.h. also, eine Teilmenge $J \subset I$ mit

$$\bigcup_{i\in J} O_i \,=\, X\ .$$

Eine (Teil–)Überdeckung heißt *endlich*, wenn die Indexmenge J eine endliche Menge ist.

Definition. Sei X topologischer Raum. X heißt *quasi–kompakt*, wenn gilt: Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

Definition. Sei X topologischer Raum. X heißt *kompakt*, wenn gilt: X ist quasi–kompakt und ein Hausdorff–Raum.

Folgender Sachverhalt ist sicher schon aus der Analysis bekannt. Er soll trotzdem hier noch einmal behandelt werden. Er ist sehr wichtig.

Satz. *Der Raum* $[0,1]$ *ist kompakt.*

Beweis. Die Hausdorff–Eigenschaft ist klar, denn $[0,1]$ ist metrischer Raum. Es bleibt zu zeigen, daß $[0,1]$ quasi–kompakt ist. Sei also $\{O_i\}_{i\in I}$ eine vorgegebene offene Überdeckung von $[0,1]$. Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dazu betrachten wir Teilintervalle der Art $[0,a] \subset [0,1]$. Wir werden sagen, daß der Punkt a *gut* ist, wenn das Teilintervall $[0,a]$ überdeckt werden kann durch endlich viele der offenen Mengen O_i . Es bezeichne G die Menge der guten a . In dieser Sprache ist dann unsere Behauptung gerade die, daß $1 \in G$. Um die Behauptung einzusehen, werden wir die Menge G ein wenig studieren.

Es gilt $0 \in G$ (denn $[0,0]$ liegt in einem der O_i) , und wenn $b < a$ und $a \in G$, dann ist auch $b \in G$ (denn wenn $[0,a]$ schon in endlich vielen der $\{O_i\}_{i\in I}$ enthalten ist, dann auch der Teil $[0,b]$ davon). Daher ist G ein Intervall, also entweder $G = [0,g)$ oder $G = [0,g]$. Unsere Behauptung ist, daß $G = [0,1]$ ist. Wir werden zeigen, daß die anderen Fälle nicht möglich sind. Diese (zwei) anderen Fälle sind:

1. *Fall.* $G = [0,g)$ (insbesondere $g \notin G$) . Weil $[0,1] = \bigcup_{i\in I} O_i$, existiert ein i_0 mit $g \in O_{i_0}$. Dies ist eine offene Menge, enthält deshalb eine Umgebung von g und insbesondere auch ein Intervall $[g',g]$, $g' < g$. Wegen $g' < g$ ist $g' \in G$. Nach Definition von G existiert also eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit

$$[0,g'] \subset \bigcup_{i\in J} O_i \ .$$

Es folgt $[0,g] = [0,g'] \cup [g',g] \subset \bigcup_{i\in J} O_i \cup O_{i_0}$. Aber $J \cup \{i_0\}$ ist auch endliche Menge. Somit erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß $g \notin G$.

2. *Fall.* $G = [0,g]$ und $g < 1$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $K \subset I$ mit

$$[0,g] \subset \bigcup_{i\in K} O_i = O \ .$$

Weil O offen ist, enthält O mit g auch noch eine Umgebung von g , insbesondere deshalb auch ein Intervall $[g,g'']$, $g < g'' \le 1$. Es folgt

$$[0,g''] = [0,g] \cup [g,g''] \subset O = \bigcup_{i\in K} O_i \ .$$

Also ist $g'' \in G$. Das widerspricht aber der Voraussetzung des 2. Falles (daß g nämlich maximal sein soll unter den *guten* Punkten). □

Satz. *Jedes abgeschlossene Intervall* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ist kompakt.*

Beweis. Man kann den obigen Beweis übernehmen. Man kann aber auch so schließen:

1. Für alle a,b mit $a < b$ ist $[a,b]$ topologisch äquivalent zu $[0,1]$.

2. Wenn X kompakt ist und Y topologisch äquivalent zu X , dann ist Y ebenfalls kompakt. □

Satz. *Sei* X *topologischer Raum und* $Y \subset X$ *ein Unterraum* (mit der Unterraumtopologie). *Sei* X *quasi–kompakt. Wenn* Y abgeschlossen *in* X *ist, dann ist auch* Y *quasi–kompakt.*

Beweis. Sei $\{O_i'\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Nach Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem O_i' eine offene Menge O_i in X mit $O_i \cap Y = O_i'$. Das Komplement CY ist offen in X (Y ist abgeschlossen in X , und abgeschlossene Mengen sind ja *nach Definition* solche, deren Komplement offen ist). Also ist

$$\{CY\} \cup \{O_i\}_{i\in I}$$

eine offene Überdeckung von $CY \cup Y = X$. Da X quasi–kompakt ist, gibt es von *jeder* offenen Überdeckung, *speziell also auch von dieser*, eine endliche Teilüberdeckung. Das nun heißt nichts anderes als daß eine endliche Untermenge $J \subset I$ existiert mit $CY \cup \bigcup_{i\in J} O_i = X$. Weil $CY \cap Y = \emptyset$, folgt, daß schon $\{O_i \cap Y\}_{i\in J}$ eine Überdeckung von Y sein muß. $\{O_i'\}_{i\in J}$ ist also endliche Teilüberdeckung der vorgegebenen offenen Überdeckung $\{O_i'\}_{i\in I}$. □

Korollar. *Sei* X *kompakter topologischer Raum und* $Y \subset X$ *abgeschlossener Unterraum. Dann ist* Y *kompakt.*

Beweis. Unsere Sprache ist so, daß “*kompakt*” = “*quasi–kompakt*” + “*Haussdorff*”. Nach dem Satz ist Y quasi–kompakt. Und wir haben früher schon notiert, daß ein Unterraum von einem Hausdorff–Raum auch wieder die Hausdorff–Eigenschaft hat. □

Satz. *Sei* X *ein Hausdorff–Raum und* $Y \subset X$ *Unterraum.* Y *sei* (*quasi*–)*kompakt. Dann ist* Y *abgeschlossener Unterraum von* X *.*

Bemerkung. Dieser Satz ist gewissermaßen die Umkehrung des vorherigen Satzes. Zusammen liefern diese beiden Sätze folgende Aussage: Sei X ein kompakter Raum. Sei $Y \subset X$. Dann sind äquivalent:

- Y ist abgeschlossene Teilmenge in X .
- Der Unterraum Y (Unterraumtopologie!) ist kompakt.

Wie wir in Kürze sehen werden, kann man diesen Sachverhalt auffassen als eine abstrakte Version (und Verallgemeinerung) des Satzes von Heine–Borel, daß eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *In der Situation des obigen Satzes* ($Y \subset X$ (quasi–)kompakt, X Hausdorff) *gilt: Zu jedem Punkt* $x \in X - Y$ *existieren offene Teilmengen* $O_{x,Y}$ *und* $O'_{x,Y}$ *von* X *mit* $x \in O_{x,Y}$, $Y \subset O'_{x,Y}$, $O_{x,Y} \cap O'_{x,Y} = \emptyset$.

Beweis. Sei $x \in X - Y$ vorgegeben. Zu jedem Punkt $y \in Y$ finden wir offene Mengen $O_{x,y}$ und $O'_{x,y}$ in X mit $x \in O_{x,y}$, $y \in O'_{x,y}$, $O_{x,y} \cap O'_{x,y} = \emptyset$ (dies benutzt die Hausdorff–Eigenschaft von X). $\left\{O'_{x,y} \cap Y\right\}_{y\in Y}$ ist nun eine offene Überdeckung von Y , wir können deshalb die vorausgesetzte Quasi–Kompaktheit von Y anwenden um zu schließen, daß eine endliche Teilüberdeckung $\left\{O'_{x,y} \cap Y\right\}_{y \in J}$ existiert; mit anderen Worten, wir können schließen, daß eine *endliche* Indexmenge $J \subset Y$ existiert, so daß $Y \subset \bigcup_{y \in J} O'_{x,y}$. Wir setzen

$$O_{x,Y} = \bigcap_{y \in J} O_{x,y} \quad , \quad O'_{x,Y} = \bigcup_{y \in J} O'_{x,y} \quad .$$

Die Endlichkeit von J ergibt dann, daß $O_{x,Y}$ als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen wieder offen ist. Schließlich ist $O'_{x,Y} \cap O_{x,Y} = \emptyset$, denn

$$O'_{x,Y} \cap O_{x,Y} \;=\; \Big(\bigcup_{y \in J} O'_{x,y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{z \in J} O_{x,z}\Big) \;=\; \bigcup_{y \in J} \Big(O'_{x,y} \cap \bigcap_{z \in J} O_{x,z} \Big)$$

und jede der Mengen $O'_{x,y} \cap \bigcap_{z \in J} O_{x,z}$ ist $= \emptyset$, da schon $O'_{x,y} \cap O_{x,y} = \emptyset$ ist. □

Beweis des Satzes. Zu zeigen ist, daß das Komplement CY eine offene Menge ist. Nach dem Hilfssatz ist aber

$$CY = \bigcup_{x \in CY} O_{x,Y} \ ,$$

was als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist. □

Der folgende Satz ist ein schönes Beispiel für einen nicht–trivialen (und wichtigen) Satz mit einem recht trivialen Beweis (dies illustriert, wie nützlich eine angemessene Sprache sein kann!). Der Satz kann aufgefaßt werden als abstrakte Version des *Maximum–Prinzips*, daß nämlich jede stetige reelle Funktion auf $[0,1]$ ihr Maximum wirklich annimmt.

Satz. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetige surjektive Abbildung. Sei X quasi–kompakt. Dann ist auch Y quasi–kompakt.*

Beweis. Wir testen dies an einer vorgegebenen offenen Überdeckung $\{O_i\}_{i \in I}$ von Y . Wegen der Stetigkeit von f nun ist $f^{-1}(O_i)$ offen in X ; das bedeutet, daß das System $\left\{f^{-1}(O_i)\right\}_{i \in I}$ auch eine offene Überdeckung von X ist. Da X quasi–kompakt ist, existiert von dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung; das heißt, es gibt eine endliche Indexmenge $J \subset I$, so daß

$$X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i) \ .$$

Weil f surjektiv ist, folgt

$$Y = f(X) = \bigcup_{i \in J} O_i \ ;$$

die Überdeckung von Y hat also ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung, wie behauptet. □

Durch Zusammenbauen der vorherigen Sätze erhalten wir eine wichtige Aussage, die vielseitig verwendbar ist. Insbesondere die nachfolgenden Korollare dieses Satzes werden oft gebraucht.

Satz. *Sei* $f: X \longrightarrow Y$ *eine stetige Abbildung. Es gelte*

— X *ist quasi–kompakt*

— Y *ist Hausdorff*

Dann ist f *eine abgeschlossene* Abbildung, d.h., f hat die folgende Eigenschaft: *Ist* A *abgeschlossene Menge in* X *, dann ist* $f(A)$ *abgeschlossene Menge in* Y *.*

Beweis. $A \subset X$ abgeschlossen $\underset{(X \text{ quasi–kompakt})}{\Longrightarrow}$ A quasi–kompakt

$\Longrightarrow$ $f(A)$ quasi–kompakt $\underset{(Y \text{ Hausdorff})}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ abgeschlossen. □

Korollar 1. *Sei* $f: X \longrightarrow Y$ *stetige bijektive Abbildung. Sei* X *quasi–kompakt und* Y *Hausdorff. Dann ist* f *topologische Äquivalenz.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist. Aber

$$f^{-1} \text{ stetig } \iff \text{ für offenes } O \text{ in } X \text{ ist } \left(f^{-1}\right)^{-1}(O) \text{ offen in } Y\,.$$

Per Übergang zum Komplement ist das gleichbedeutend damit, daß

$$\text{für abgeschlossenes } A \text{ in } X \text{ ist } \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A) \text{ abgeschlossen in } Y\,;$$

d.h., daß f *abgeschlossene Abbildung* ist. Das sagt aber gerade der Satz. □

Beispiel. Das Korollar sagt, daß die stetige Abbildung $g: \ [0,1]\,/\,0{\sim}1 \ \longrightarrow \ S^1$ eine topologische Äquivalenz ist. □

Korollar 2. (*Quotientenraum–Kriterium*). *Sei* $f: X \longrightarrow Y$ *stetige surjektive Abbildung. Sei* X *quasi–kompakt und* Y *Hausdorff. Dann ist* Y *Quotientenraum von* X (das heißt, Y trägt die Quotientenraumtopologie).

Beweis. Es ist zu zeigen, eine Teilmenge $O \subset Y$ ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(O)$ offen in X ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft (per Übergang zum Komplement), eine Teilmenge $A \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist. Die Implikation

$$A \text{ abgeschlossen in } Y \implies f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } X$$

ist einfach die Stetigkeit von f . Die Implikation

$$f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } X \implies A = f\left(f^{-1}(A)\right) \text{ abgeschlossen in } Y$$

ist durch den Satz gegeben. □

Beispiel. Angewandt auf die Abbildung $f: \ [0,1] \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto f(t) = e^{2\pi i t}$, sagt das Korollar, daß S^1 als Quotientenraum von $[0,1]$ aufgefaßt werden kann. □

Neben der Hausdorff–Eigenschaft, die ein kompakter Raum ja (nach Definition) hat, besitzt er noch eine weitere sogenannte *Trennungseigenschaft*, die manchmal nützlich ist; diese soll jetzt diskutiert werden.

DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *normal*, wenn er nicht nur die Hausdorff–Eigenschaft hat, sondern zusätzlich auch noch folgende Eigenschaft: Seien $Y, Z \subset X$ abgeschlossen, $Y \cap Z = \emptyset$. Dann existieren offene Mengen $O, O' \subset X$ mit

$$Z \subset O \ , \ Y \subset O' \ , \ O \cap O' = \emptyset \ ;$$

man sagt hierfür auch, *punktfremde abgeschlossene Mengen lassen sich durch offene Mengen trennen.*

SATZ. *Jeder kompakte Raum ist normal.*

BEWEIS. Der Beweis beruht auf ganz genau demselben Trick, wie der des Hilfssatzes auf S. 26, nur daß dieser Trick jetzt *zweimal* angewendet werden muß. Die erste Anwendung besteht einfach darin, daß der Hilfssatz zunächst zitiert wird: Nach diesem Hilfssatz existieren nämlich für jedes $z \in Z$ offene Mengen $O_{z,Y}$, $O'_{z,Y}$ mit

$$z \in O_{z,Y} \ , \ Y \subset O'_{z,Y} \ , \ O_{z,Y} \cap O'_{z,Y} = \emptyset \ .$$

$\{Z \cap O_{z,Y}\}_{z \in Z}$ nun ist offene Überdeckung von Z . Wegen der Kompaktheit von Z gibt es also eine endliche Teilüberdeckung $\{Z \cap O_{z,Y}\}_{z \in K}$ hiervon; mit anderen Worten, es gibt eine endliche Indexmenge $K \subset Z$ so daß $Z \subset \bigcup_{z \in K} O_{z,Y}$. Wir setzen

$$O_{Z,Y} = \bigcup_{z \in K} O_{z,Y} \quad , \quad O'_{Z,Y} = \bigcap_{z \in K} O'_{z,Y} \ .$$

Als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist $O'_{Z,Y}$ wieder offen. Schließlich ist $O_{Z,Y} \cap O'_{Z,Y} = \emptyset$, denn

$$O_{Z,Y} \cap O'_{Z,Y} \ = \ \Big(\bigcup_{z \in K} O_{z,Y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y}\Big) \ = \ \bigcup_{z \in K} \Big(O_{z,Y} \cap \bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y} \Big) \ ,$$

und jede der Mengen $O_{z,Y} \cap \bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y}$ ist $= \emptyset$, da schon $O_{z,Y} \cap O'_{z,Y} = \emptyset$. □

Als Anwendung des vorhergehenden Satzes wollen wir nun auch ein Kriterium dafür herleiten, daß ein Quotientenraum eines Hausdorff–Raumes wieder ein Hausdorff–Raum ist. Das Kriterium ist formuliert für Quotientenräume von *kompakten* Räumen. Das ist einerseits der wichtigste (Spezial–)Fall, andererseits kann man aber auch das Kriterium bisweilen in anderen Situationen anwenden, indem man in geschickter Weise Unterräume heranzieht.

Satz. *Der Raum* X *sei kompakt* (quasi–kompakt und Hausdorff). Z *sei Quotientenraum von* X *, mit Projektion* $q : X \longrightarrow Z$ *. Dann sind äquivalent:*

- Z *ist Hausdorff–Raum*
- q *ist abgeschlossene Abbildung.*

Beweis. Die eine Richtung haben wir schon früher als Satz kennengelernt (S. 28). Wir zeigen hier die Umkehrung. Wir nehmen also jetzt an, daß q abgeschlossene Abbildung ist. Wir werden uns davon überzeugen, daß dann Z die Hausdorff–Eigenschaft hat.

Zunächst notieren wir, daß für jeden Punkt $z \in Z$ die einpunktige Menge $\{z\}$ *abgeschlossen* ist. Der Grund ist der: Für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen (denn wegen der Hausdorff–Eigenschaft von X ist das Komplement Vereinigung von offenen Mengen). $\{z\}$ nun ist das Bild einer solchen Menge, daher wieder abgeschlossen wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit der Abbildung q .

Wir müssen die Abgeschlossenheit der Abbildung q noch in einer andern Weise ausnutzen, die ein wenig raffinierter ist. Dazu führen wir eine Begriffsbildung ein. Wir sagen nämlich, daß eine Untermenge W von X *saturiert* ist, wenn sie die Bedingung erfüllt

$$W \;=\; q^{-1}(\,q(W)\,)$$

oder was dasselbe ist in Worten: wenn ein Punkt aus X denselben Bildpunkt hat wie ein Punkt aus W , dann ist er schon in W enthalten. Mit dieser Begriffsbildung können wir nun eine Behauptung formulieren.

Behauptung. *Sei* A *abgeschlossene Menge in* X *, die saturiert ist. Sei* U *offene Menge in* X *, die* A *enthält. Dann existiert in* U *eine offene Menge* V *, die auch noch* A *enthält und die saturiert ist.*

Beweis. Das Komplement CU ist abgeschlossen (weil U als offen vorausgesetzt war). Also ist auch das Bild $q(CU)$ abgeschlossen (weil die Abbildung q als abgeschlossen vorausgesetzt war). Also ist auch dessen Urbild $q^{-1}(\,q(CU)\,)$ abgeschlossen (weil q stetig ist). Dieses Urbild nun ist saturiert (Urbilder haben immer diese Eigenschaft) und es ist punktfremd zu der Menge A (das Bild $q(CU)$ ist punktfremd zu $q(A)$, weil $CU \cap A = \emptyset$ und weil A saturiert ist; also ist $q^{-1}(\,q(CU)\,)$ punktfremd zu $q^{-1}(\,q(A)\,) = A$). Das Komplement $V = C(\,q^{-1}(\,q(CU)\,)\,)$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Wir können nun den Beweis des Satzes zu Ende führen. Was wir zeigen müssen, ist dies: Wenn $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$, dann existieren offene Mengen O_1, O_2 in Z mit $z_1 \in O_1$, $z_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Sei $Y_1 = q^{-1}(z_1)$ und $Y_2 = q^{-1}(z_2)$. Wie eingangs notiert, sind Y_1 und Y_2 Urbilder abgeschlossener Mengen, daher selbst abgeschlossen. Wir nutzen jetzt die Normalität von X aus (*ein kompakter Raum ist normal*). Es gibt also punktfremde offene Mengen O'_1 und O'_2 , die Y_1 und Y_2 trennen. Diese offenen Mengen sind möglicherweise nicht saturiert, wir können sie aber durch kleinere saturierte ersetzen (das sagt die obige Behauptung). Wir brauchen jetzt nur noch anzumerken, daß das Bild einer *saturierten* offenen Menge in X immer eine offene Menge in Z ist. Die beiden Bildmengen sind die gewünschten offenen Mengen O_1 und O_2 . $\square$

Anschließend möchte ich noch einen Fall der Quotientenraum–Konstruktion diskutieren, der besonders wichtig ist. Sei X ein Raum und $Y \subset X$ eine nicht–leere Teilmenge. Es bezeichne X/Y den folgenden (Quotienten–)Raum: Die Punkte von X/Y sind

— die Menge Y
— die einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in X - Y$.

Die Abbildung $q : X \longrightarrow X/Y$ ist definiert als diejenige Abbildung, die jedem Punkt aus X seine Äquivalenzklasse zuordnet. Wenn $A \subset X$, so ist also

$$q^{-1}(q(A)) = \begin{cases} A\,, & \text{wenn } A \cap Y = \emptyset \\ A \cup Y\,, & \text{wenn } A \cap Y \neq \emptyset\,. \end{cases}$$

Satz. Sei X kompakt und $Y \subset X$. Es sind äquivalent:

- Y ist abgeschlossen in X
- X/Y ist Hausdorff–Raum.

Beweis. Wenn Y abgeschlossen ist, so ist für abgeschlossenes $A \subset X$ die Menge

$$q^{-1}(q(A)) = \begin{cases} A & \text{bzw.} \\ A \cup Y \end{cases}$$

auch abgeschlossen. Nach Definition der Quotiententopologie ist q also *abgeschlossene* Abbildung. Der vorige Satz sagt, daß, folglich, der Quotientenraum die Hausdorff–Eigenschaft hat.

Wenn andererseits der Quotientenraum Hausdorff–Raum ist, so ist (wie wir bei früherer Gelegenheit auch schon notiert haben) jede einpunktige Menge darin abgeschlossen. Speziell gilt das für den Punkt “ Y ”. Die Menge Y ist das Urbild dieses Punktes, sie ist somit abgeschlossen. □

Den Raum X/Y kann man seltsamerweise auch in dem Fall definieren, wo der Unterraum Y die leere Menge ist (böse Zungen könnten das so kommentieren, daß Topologen sich nicht scheuen, selbst leere Mengen noch zu kollabieren!). Wie oben sind auch in diesem Fall die Punkte von X/Y gegeben durch die Menge Y einerseits und die einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in X - Y$, andererseits.

$X/\emptyset$ ist aber nicht Quotientenraum von X . Es hat nämlich einen zusätzlichen Punkt, eben “ $\emptyset$ ”; als Raum ist $X/\emptyset$ die disjunkte Vereinigung $X/\emptyset = X \,\dot\cup\, \{\emptyset\}$.

Die soeben benutzte Begriffsbildung bedeutet, allgemein gesprochen, dies. Wenn X_1 und X_2 topologische Räume sind, dann bezeichnet $X_1 \dot\cup X_2$ die *disjunkte Vereinigung* der beiden Räume. Die unterliegende Menge davon ist, nach Definition, die disjunkte Vereinigung derjenigen von X_1 und X_2 ; die topologische Struktur ist so definiert: Eine Menge $A \subset X_1 \dot\cup X_2$ ist offen in $X_1 \dot\cup X_2$ genau dann, wenn ihre Schnitte mit X_1 und X_2 jeweils offen sind.

Wir betrachten noch ein Beispiel einer etwas seltsamen Verklebe–Konstruktion. Wir verkleben nämlich zwei Kopien des abgeschlossenen Intervalls $[0,1]$ entlang dem halboffenen Intervall $[0,1)$; d.h., wir bilden den Quotientenraum von $[0,1] \,\dot\cup\, [0,1]$ bezüglich der Äquivalenzrelation, die erzeugt ist von der Vorschrift:

$$(x;1) \sim (x';2) \quad \Longleftrightarrow \quad x = x' \ , \ x < 1$$

(dabei soll $(x;1)$ den x entsprechenden Punkt aus der ersten Kopie von $[0,1]$ bezeichnen; und $(x';2)$ den x' entsprechenden Punkt aus der zweiten Kopie). Der entstandene Raum kann aufgefaßt werden als das Intervall $[0,1]$ mit einem zusätzlichen Punkt. Er ist aber *nicht* die disjunkte Vereinigung; er ist nicht einmal ein Hausdorff–Raum. Das sieht man z.B. durch Anwendung des obigen Satzes auf die Quotientenraum–Konstruktion. So hat die abgeschlossene Teilmenge $[0,1] \,\dot\cup\, \emptyset$ von $[0,1] \,\dot\cup\, [0,1]$ ein Bild, das nicht abgeschlossen ist; denn dessen Urbild ist die nicht–abgeschlossene Menge

$$q^{-1}\big(\, q\big(\, [0,1] \,\dot\cup\, \emptyset\big)\big) \ = \ [0,1] \,\dot\cup\, [0,1) \ .$$

In dem Beispiel hat die Quotientenraum–Konstruktion die Eigenschaft, daß die Urbilder von Punkten zweipunktige oder einpunktige Mengen sind (also kompakt und deshalb abgeschlossen). Das Beispiel illustriert deshalb auch, daß es z.B. *nicht* hinreichend für die Hausdorff–Eigenschaft eines Quotientenraumes Z von X ist, wenn man etwa fordert, daß die Quotientenabbildung $q : X \longrightarrow Z$ die Bedingung erfüllt: "*Urbilder von Punkten sind abgeschlossen*".

Produkte

Wenn X_1 und X_2 *Mengen* sind, dann ist die *Produktmenge* $X_1 \times X_2$ definiert als die Menge der Paare

$$X_1 \times X_2 \;=\; \{\,(x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1\,,\; x_2 \in X_2\,\}\;.$$

Wenn X_1 und X_2 topologische Räume sind, dann kann $X_1 \times X_2$ auf naheliegende Weise wieder als topologischer Raum aufgefaßt werden; die Details dazu werden wir in Kürze zur Kenntnis nehmen.

Man braucht Produkte unter anderem, um *Funktionen von mehreren Variablen* zu betrachten.

Mit Hilfe von Produkten kann man auch neue Räume aus alten konstruieren. Ein Aspekt dabei ist, daß diese "neuen" Räume oft ohnehin schon da sind; sie als Produkte zu erkennen, kann interessante zusätzliche Information sein.

Beispiel. Der *Kreisring* K sei gegeben durch

$$K \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\Big\}\;.$$

Die Punkte von K kann man alternativ beschreiben durch ihre *Polarkoordinaten*. Die Angabe der Polarkoordinaten kann aufgefaßt werden als Abbildung

$$K \;\longrightarrow\; [1,2] \times S^1\;,\quad (x,y) \longmapsto (r,\rho)\;,\quad \text{wo } r = \sqrt{x^2+y^2}\;,\; \rho = \big(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\big)\;;$$

diese Abbildung ist bijektiv (die Abbildung ist sogar eine topologische Äquivalenz — was z.B. folgt, sobald wir wissen, daß die Abbildung stetig ist, K kompakt und der Zielraum Hausdorff-Raum). $\square$

Um die Produkt–Topologie zu definieren, lassen wir uns leiten von dem speziellen Fall metrischer Räume. Sind X_1 und X_2 metrische Räume mit Abstandsfunktionen $d_1(-,-)$ und $d_2(-,-)$, so kann $X_1 \times X_2$ aufgefaßt werden als metrischer Raum mit der Abstandsfunktion

$$d(\,(x_1,x_2)\,,\,(y_1,y_2)\,) \;=\; \max\,(\,d_1(x_1,y_1)\,,\,d_2(x_2,y_2)\,)\;.$$

Die *Kugeln* bezüglich dieser Metrik auf $X \times Y$ sind eigentlich eher *Kästchen*; sie sind vom Typ

$$U_1(x_1,\varepsilon) \times U_2(x_2,\varepsilon)\;.$$

Man kann nun offene Mengen auf folgende Weise charakterisieren. Sei $O \subset X_1 \times X_2$. Dann sind äquivalent

— O ist offene Teilmenge des metrischen Raumes $X_1 \times X_2$
— für jedes $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_1(x_1,\varepsilon) \times U_2(x_2,\varepsilon) \subset O$.

Dies können wir auch formulieren, ohne die Metrik explizit zu nennen. Unter Ausnutzung dessen, daß jede Umgebung noch eine offene Umgebung enthält, erhalten wir:

Seien X_1, X_2 metrische Räume. Eine Teilmenge $O \subset X_1 \times X_2$ ist genau dann offen, wenn für jedes $(x_1, x_2) \in O$ offene Mengen $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ existieren, so daß

$$x_1 \in A \ , \ x_2 \in B \ , \quad A \times B \subset O \ .$$

Wir nehmen das zum Anlaß für die nachfolgende Definition.

Definition. Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die *Produkt–Topologie* auf $X_1 \times X_2$ ist gegeben durch die folgende Vorschrift. Eine Menge $O \subset X_1 \times X_2$ ist *offene Menge* in $X_1 \times X_2$ genau dann, wenn gilt: für jedes $(x_1, x_2) \in O$ existieren offene Mengen $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ mit

$$x_1 \in A \ , \ x_2 \in B \ , \quad A \times B \subset O \ .$$

Die Definition sagt, mit anderen Worten, daß die offenen Mengen von $X_1 \times X_2$ genau diejenigen sind, die sich als Vereinigung von Kästchen–Mengen $A \times B$ darstellen lassen (wo A und B offene Mengen in X_1 bzw. X_2 sind).

In dem Zusammenhang ist es angebracht, eine Vokabel zu nennen. Sei Y ein topologischer Raum, sei $\mathcal{B}$ ein System von offenen Mengen in Y . Man sagt, $\mathcal{B}$ ist eine *Basis der Topologie* von Y , wenn sich jede offene Menge in Y darstellen läßt als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$. In dieser Sprache läuft die Definition der Produkttopologie darauf hinaus, daß die genannten Kästchen–Mengen eine Basis der Topologie in dem Produkt–Raum bilden.

Die Definition der Produkttopologie beinhaltet noch eine stillschweigende Behauptung, wie wir uns jetzt klarmachen; das ist die folgende

Behauptung. *Das oben definierte System von offenen Mengen ist tatsächlich eine topologische Struktur auf* $X_1 \times X_2$; das heißt, *es erfüllt die Axiome* O1 – O4.

(Beweis. Übungsaufgabe.)

Wir können jedem Punkt (x_1, x_2) aus $X_1 \times X_2$ seine *erste Koordinate*, d.h., den Punkt $x_1 \in X_1$ zuordnen. Das gibt eine Abbildung, die *erste Projektion*, $pr_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$. *Diese Abbildung ist stetig.* Denn sei $A \subset X_1$ offen. Dann ist $pr_1^{-1}(A) = A \times X_2$, und das ist offen in $X_1 \times X_2$ nach Definition der Produkttopologie. Entsprechend haben wir die *zweite Projektion* $pr_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2$; diese ist ebenfalls stetig.

Satz. *Seien* X_1, X_2 *und* Z *topologische Räume,* $X_1 \times X_2$ *sei mit der Produkttopologie versehen. Sei* $f : Z \longrightarrow X_1 \times X_2$ *eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

— f *ist stetig*

— *die Abbildungen* $f_1 = pr_1 \circ f : Z \longrightarrow X_1$, $f_2 = pr_2 \circ f : Z \longrightarrow X_2$ *sind stetig.*

Beweis. Wenn f stetig ist, so ist $f_1 = pr_1 \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig; f_2 ebenso.

Für die Gegenrichtung nehmen wir nun an, daß f_1 und f_2 stetig sind. Sei O offene Teilmenge von $X_1 \times X_2$, wir wollen zeigen, daß $f^{-1}(O)$ offen in Z ist. Nach Definition der offenen Mengen in $X_1 \times X_2$ ist O Vereinigung von Mengen des Typs $A \times B$. Es folgt, daß $f^{-1}(O)$ Vereinigung von Mengen des Typs $f^{-1}(A \times B)$ ist. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $f^{-1}(A \times B)$ offen ist, wenn A offen in X_1 , B offen in X_2 . Nun ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \times B) &= \{ z \in Z \mid f(z) \in A \times B \} \\ &= \{ z \in Z \mid f_1(z) \in A \, , \; f_2(z) \in B \} \\ &= {f_1}^{-1}(A) \cap {f_2}^{-1}(B) \; . \end{aligned}$$

Das ist der Durchschnitt von zwei Mengen, die beide offen sind wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_1 und f_2 ; der Durchschnitt ist also auch offen. $\square$

Beispiel. Die oben betrachtete Abbildung

$$K \longrightarrow [1,2] \times S^1 \quad , \quad (x,y) \longmapsto (\, r \, , \, \rho \,)$$

ist stetig; denn die beiden Abbildungen

$$K \longrightarrow [1,2] \; , \quad (x,y) \longmapsto r \quad , \qquad K \longrightarrow S^1 \; , \quad (x,y) \longmapsto \rho$$

sind stetig. $\square$

Man kann Produkte allgemeiner betrachten. Die Anzahl der Faktoren braucht nicht einmal endlich zu sein.

Dazu sei $i \longmapsto X_i$, $i \in I$, eine indizierte Menge von Mengen. Die *Produktmenge* $\prod_{i \in I} X_i$ ist definiert als die Menge der "*Tupel*",

$$\prod_{i \in I} X_i \;=\; \{\{x_i\}_{i \in I} \mid x_i \in X_i\} \; .$$

Ist zum Beispiel I die Menge $\{ 1, \ldots, n \}$, dann ist das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ die Menge

$$\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \} \;=\; X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \; .$$

Ist $I = \{ 1, 2, \ldots \}$, die Menge der natürlichen Zahlen, so ist das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ die Menge der Folgen

$$(x_1, \, x_2, \, \ldots) \; , \; x_i \in X_i \; .$$

Es sei nun $i \longmapsto X_i$, $i \in I$, eine indizierte Menge von topologischen Räumen. Wir möchten das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls als topologischen Raum auffassen, und zwar in der Weise, daß folgendes gilt:

- *Jede der Projektionen* $pr_j : \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \longrightarrow X_j$, $\{x_i\}_{i \in I} \longmapsto x_j$ *ist stetig.*
- *Die topologische Struktur von* $\prod_{i \in I} X_i$ *soll durch die topologischen Strukturen der Faktoren* X_i *vollständig bestimmt sein.*

Die erste dieser Aussagen impliziert: *Ist* A_j *offene Menge in* X_j *, dann ist* $pr_j{}^{-1}(A_j)$ *offene Menge in* $\prod_{i \in I} X_i$; d.h., die Menge derjenigen Tupel, deren j–te Komponente in A_j liegt,

$$pr_j{}^{-1}(A_j) \;=\; A_j \times \prod_{i \in I,\, i \neq j} X_i \;,$$

ist offen.

Die zweite der Aussagen sagt, daß es nicht mehr offene Mengen geben soll als diejenigen, deren Existenz durch das gerade Gesagte zusammen mit den Axiomen O1 – O4 erzwungen ist.

Was das bedeutet, können wir ein klein wenig besser formulieren, wenn wir geeignete Vokabeln benutzen, nämlich die Begriffe *Basis* und *Subbasis*. Die erste der beiden folgenden Definitionen kennen wir schon:

Definition. Sei X topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in X heißt *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge in X sich darstellen läßt als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Definition. Sei X topologischer Raum. Ein Sytem $\mathcal{S}$ von offenen Mengen in X heißt *Subbasis der Topologie*, wenn gilt: Die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. die Mengen der Art $\bigcap_{k \in K} A_k$, $A_k \in \mathcal{S}$, K *endlich*, bilden eine Basis der Topologie.

Es folgt aus diesen beiden Definitionen, daß sich jede offene Menge in X darstellen läßt als Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$; d.h., sie läßt sich darstellen in der Form

$$(*) \qquad \bigcup_{\ell \in L} \Big(\bigcap_{k \in K_\ell} A_{k,\ell} \Big) \qquad (\textit{ wobei } A_{k,\ell} \in \mathcal{S} \;,\; K_\ell \textit{ endlich für alle } \ell \;) \,.$$

Umgekehrt kann man folgendes sagen: Sei X' eine Menge, sei $\mathcal{S}$ ein System von Teilmengen von X' , das die Bedingung erfüllt

$$\emptyset \in \mathcal{S} \;, \quad X' \in \mathcal{S} \;.$$

Man definiert ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X' wie folgt: Eine Teilmenge A von X' soll zu $\mathcal{A}$ gehören, wenn sie sich in der Art $(*)$ darstellen läßt; also als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$.

Das System $\mathcal{A}$ seinerseits ist dann abgeschlossen gegenüber der Bildung von Vereinigungen und endlichen Durchschnitten. M.a.W.

BEHAUPTUNG. *Das System* $\mathcal{A}$ *erfüllt die Axiome* O1 – O4 (das System $\mathcal{A}$ ist also eine topologische Struktur auf X').

(BEWEIS. Übungsaufgabe.)

Für die so konstruierte topologische Struktur ist das ursprüngliche System $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie. Die beschriebene Konstruktion leistet das, was oben als wünschenswert vorgestellt wurde; nämlich eine Topologie anzugeben, die als offene Mengen enthält

- die Mengen aus $\mathcal{S}$
- und was durch diese und die Axiome O1 – O4 erzwungen ist.

Wir können die allgemeine Beschreibung der Produkttopologie nun so präzisieren:

DEFINITION. *Eine Subbasis der Topologie von* $\prod_{i\in I} X_i$ *ist gegeben durch die Mengen vom Typ*

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i \;, \qquad A_j \subset X_j \;\; \textit{offen.}$$

Es ist andererseits natürlich auch möglich, eine Basis der Topologie direkt anzugeben; das ist nur wenig komplizierter. Wir betrachten Fälle.

(a) $I = \{1, 2\}$. Seien $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ offen. Dann ist

$$A_1 \times A_2 \;=\; A_1 \times X_2 \,\cap\, X_1 \times A_2 \;.$$

Die Mengen dieses Typs sind bereits abgeschlossen gegenüber der Bildung von endlichen Durchschnitten. Sie bilden daher eine Basis (nicht nur eine Subbasis) der Topologie auf $X_1 \times X_2$. Das ist natürlich genau die Topologie auf $X_1 \times X_2$, die wir schon kennengelernt haben.

(b) *Allgemeiner*: Sei $I = \{1, 2 \ldots, n\}$ und $A_i \subset X_i$ offen; dann ist

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \;=\; & A_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \,\cap\, X_1 \times A_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \,\cap \\ & \cdots \,\cap\, X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times A_n \end{aligned}$$

offen in $\prod_{i\in I} X_i$. Wie in (a) bilden die Mengen dieses Typs schon eine Basis der Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(c) *Ganz allgemein*: Sei I beliebig. Die Mengen vom Typ

$$\prod_{k\in K} A_k \times \prod_{i\in I,\, i\notin K} X_i \ , \qquad A_k \subset X_k \ \textit{offen}\,, \quad K \subset I \ \textit{endlich}\,,$$

bilden eine Basis der Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$. — Wenn andererseits aber $J \subset I$ eine *nicht–endliche* Menge ist und A_i offene Menge in X_i , $\emptyset \neq A_i \neq X_i$, dann ist die Menge

$$\prod_{i\in J} A_i \times \prod_{i\in I,\, i\notin J} X_i$$

nicht offene Menge im Produktraum (denn sie enthält keine(!) nicht–leere Basismenge der Topologie). Insbesondere folgt auch, daß ein nicht–endliches Produkt diskreter Räume (mit jeweils mehr als nur einem Punkt) nicht wieder diskret sein kann. Wir betrachten einen speziellen Fall als Beispiel.

Beispiel. Sei X topologischer Raum und I Indexmenge. Es bezeichne

$$X^I = \prod_{i\in I} X_i \ , \qquad \textit{wobei} \ \ X_i = X \ \ \textit{für alle} \ \ i \ .$$

Sei jetzt

$$X = \{0,1\} \quad (= \textit{diskreter Raum mit } 2 \textit{ Punkten})$$

und

$$I = \mathbb{N} = \{1,2,\dots\} \quad (= \textit{Menge der natürlichen Zahlen}) \ .$$

Der sog. *Raum der* $0{-}1{-}$*Folgen* ist nun, nach Definition, der Produktraum

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Dieser Raum ist, wie schon bemerkt, nicht diskret. Kann man mehr darüber sagen? Ja, der Raum ist topologisch äquivalent zur Cantor–Menge! (s. Übungszettel Nr. 6). $\square$

Wir kehren zur Beschreibung der Produkttopologie mit Hilfe von Subbasen zurück. Dazu wollen wir einen einfachen Sachverhalt zur Kenntnis nehmen. Um eine Subbasis der Topologie des Produktraums zu erhalten, braucht man nämlich nicht, wie oben, *alle* der offenen Mengen $A_j \subset X_j$, es langt vielmehr, wenn das A_j seinerseits nur eine spezifizierte Subbasis der Topologie von X_j durchläuft, wie wir nun als Satz formulieren wollen. Natürlich wird die erhaltene Subbasis i.a. eine andere sein als vorher.

Satz. *Sei* $\{X_i\}_{i\in I}$ *eine Familie von topologischen Räumen. Sei* $\mathcal{S}_i$ *eine Subbasis von* X_i *. Dann ist eine Subbasis der Topologie von* $\prod_{i\in I} X_i$ *gegeben durch die Mengen vom Typ*

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i \quad , \qquad A_j \in \mathcal{S}_j \ .$$

Beweis. Für die Zwecke dieses Beweises bezeichne eine *Auffüllung* eines Mengensystems den folgenden Prozeß: man darf *beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten* zu dem System hinzufügen. In dieser Sprache können wir die weiter oben formulierte Behauptung auch so aussprechen, daß aus einer Subbasis durch Auffüllung eine topologische Struktur wird. Eine topologische Struktur andererseits läßt sich nicht weiter auffüllen: die beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten sind alle schon da.

Das können wir auch so formulieren: Wenn man schon einmal aufgefüllt hat, dann bewirkt eine weitere Auffüllung keinen Unterschied mehr; oder: Es macht keinen Unterschied, ob man einmal auffüllt oder gleich zweimal hintereinander.

Wenn man aber zweimal hintereinander auffüllen darf, so ist es offensichtlich, daß man aus dem in dem Satz angegebenen Mengensystem alles verlangte erhält: Da $\mathcal{S}_j$ Subbasis von X_j ist, liefern die Mengen des Satzes bei einer ersten Auffüllung schon alle die Mengen vom Typ

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i$$

wo A_j *offene Teilmenge von* X_j ist (der Index j wird hier als festgehalten betrachtet). Bei einer zweiten Auffüllung (j wird nicht mehr als fest betrachtet) liefern letztere schließlich *alle* offenen Mengen des Produktraumes, da sie ja, nach Definition der Produkttopologie, eine Subbasis bilden. □

Als Anwendung nehmen wir zur Kenntnis, daß ein Produkt von mehr als zwei Räumen auch als *iteriertes Produkt* aufgefaßt werden kann.

Bemerkung. *Seien* $X_1, \ldots, X_n$ *topologische Räume. Es gibt eine topologische Äquivalenz*

$$X_1 \times \ldots \times X_n \quad \longrightarrow \quad (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \ \times \ X_n \ .$$

Beweis. Die Abbildung ordnet dem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ das Paar zu, das besteht aus dem $(n-1)-$ Tupel $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und dem Punkt x_n . Die Abbildung ist bijektiv. Die Bijektion respektiert die topologische Struktur. Denn die Mengen vom Typ

$$A_j \times \prod_{i\in\{1,\ldots,n\},\, i\neq j} X_i$$

bilden, nach dem gerade beschriebenen Satz, auch für den Zielraum eine Subbasis der Topologie. □

Über Produkte allgemein gibt es den berühmten Satz von Tychonoff, der besagt, daß das Produkt einer Familie von kompakten Räumen auch wieder ein kompakter Raum ist. Wir werden den Satz in dieser Allgemeinheit nicht benötigen. Wir beschränken uns deshalb auf den Spezialfall *endlicher* Produkte, da dieser Spezialfall erheblich einfacher zu behandeln ist. Per Induktion kann man den Spezialfall endlich vieler Faktoren zurückführen auf den noch spezielleren Fall von nur zwei Faktoren.

SATZ. *Seien* X, Y *kompakte Räume. Der Produktraum* $X \times Y$ *ist kompakt.*

KOROLLAR. *Seien* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kompakte Räume. Dann ist* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *ebenfalls kompakt.*

BEWEIS. Per Induktion über n können wir annehmen, daß $X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ kompakt ist. Nach dem Satz ist

$$(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$$

dann auch kompakt. $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ist zu diesem Produktraum topologisch äquivalent (s. oben), also ebenfalls kompakt. $\square$

BEWEIS DES SATZES. Wir prüfen zunächst die Hausdorff–Eigenschaft nach: Sind X, Y Hausdorff–Räume, dann auch der Produktraum $X \times Y$. Das ist aber klar, denn seien (x, y), (x', y') zwei Punkte aus $X \times Y$. Wenn $(x, y) \neq (x', y')$, dann ist entweder $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. Sei etwa $x \neq x'$. Da X Hausdorff–Raum ist, gibt es offene Mengen A_x, $A_{x'}$ in X mit

$$x \in A_x \ , \ x' \in A_{x'} \ , \ A_x \cap A_{x'} = \emptyset \ .$$

$A_x \times Y$ und $A_{x'} \times Y$ sind dann offene Mengen in $X \times Y$ von der geforderten Art.

Nun zur Überdeckungseigenschaft: Seien X und Y als quasi–kompakt vorausgesetzt. Sei $\{O_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \times Y$. Wir wollen zeigen, es gibt eine *endliche Teilmenge* $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} O_i = X \times Y$.

Es ist, nach Definition der Produkttopologie, jede offene Menge in dem Produktraum darstellbar als Vereinigung von offenen Mengen spezieller Art (*Kästchen–Mengen*). Speziell gilt das für die Mengen O_i. Wir dürfen also annehmen (und wir werden das sogleich auch tun), daß jede der Mengen O_i auf irgendeine Weise in dieser Form tatsächlich dargestellt ist,

$$O_i = \bigcup_{k \in K_i} A_k^i \times B_k^i \ , \qquad A_k^i \text{ offen in } X \ , \ B_k^i \text{ offen in } Y \ .$$

Wir definieren nun eine neue Indexmenge (die *disjunkte Vereinigung* der K_i)

$$K = \dot{\bigcup_{i \in I}} K_i = \{ (i, k) \mid k \in K_i \} \ .$$

Dann ist

$$\bigcup_{(i,k)\,\in\,K} A^i_k \times B^i_k \;=\; \bigcup_{i\in I}\Big(\bigcup_{k\in K_i} A^i_k \times B^i_k\Big) \;=\; \bigcup_{i\in I} O_i \;=\; X\times Y\ .$$

Deshalb ist $\{A^i_k \times B^i_k\}_{(i,k)\,\in\,K}$ ebenfalls eine offene Überdeckung von $X\times Y$. *Es wird nun genügen, zu zeigen, daß diese* (!) *Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.* Denn jede der Mengen davon ist enthalten in einer der Mengen O_i , und wenn man die Mengen einer Überdeckung vergrößert, so erhält man wieder eine Überdeckung. Man braucht also zum Schluß nur die fraglichen endlich vielen Kästchen durch die passenden O_i zu ersetzen, um die gewünschte endliche Teilüberdeckung von $\{O_i\}_{i\in I}$ zu erhalten.

Wir ändern jetzt die Notation und fangen noch einmal von vorne an. Sei also I eine Indexmenge und sei $\{A_i \times B_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, mit den Eigenschaften

$$A_i \subset X \ \ \textit{offen}\,, \quad B_i \subset Y \ \ \textit{offen}\,, \quad \bigcup\nolimits_{i\in I} A_i \times B_i \;=\; X\times Y\ .$$

Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Hilfssatz. *Sei* $x\in X$. *Es existiert eine endliche Teilmenge* $I_x \subset I$ *mit*

$$\bigcup_{i\in I_x} A_i \times B_i \;\supset\; \{x\}\times Y\ .$$

Beweis. Zunächst merken wir an, daß der Unterraum $\{x\}\times Y$ von $X\times Y$ topologisch äquivalent ist zu Y . Denn wegen der Definition von Produkttopologie einerseits und Unterraumtopologie andererseits läßt sich jede offene Mengen in $\{x\}\times Y$ darstellen in der Form

$$(\{x\}\times Y) \;\cap\; \big(\bigcup\nolimits_{\ell\in L} (A_\ell \times B_\ell)\big) \quad=\quad \bigcup\nolimits_{\ell\in L} (\{x\}\times Y)\cap(A_\ell\times B_\ell)$$

(wo A_ℓ und B_ℓ offene Mengen aus X bzw. Y bezeichnen). Es gilt auch

$$(\{x\}\times Y)\cap(A_\ell\times B_\ell) \quad=\quad \begin{cases} \{x\}\times B_\ell & \text{falls } x\in A_\ell \\ \emptyset & \text{falls } x\notin A_\ell\ . \end{cases}$$

Die Bijektion $\{x\}\times Y \to Y$, $(x,y)\mapsto y$, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab; sie ist daher eine topologische Äquivalenz.

Nun war Y als quasi–kompakt vorausgesetzt. Es folgt, daß $\{x\}\times Y$ quasi–kompakt ist. Die offene Überdeckung

$$\{\ (A_i\times B_i)\cap(\{x\}\cap Y)\ \}_{i\in I}$$

hat also eine endliche Teilüberdeckung, d.h., es gibt die behauptete endliche Teilmenge $I_x\subset I$ mit $\bigcup_{i\in I_x} A_i\times B_i \;\supset\; \{x\}\times Y$. Der Hilfssatz ist damit bewiesen. □

Sei weiterhin $x \in X$ ein fester Punkt. Sei I_x die durch den Hilfssatz gegebene Untermenge der Indexmenge. Wir können annehmen, daß $x \in A_i$ für alle $i \in I_x$ (denn die $A_i \times B_i$ mit $x \notin A_i$ tragen zur Überdeckung von $\{x\} \times Y$ ja gar nichts bei; wir könnten sie notfalls einfach weglassen). Es ist dann

$$x \in A_x := \bigcap_{i \in I_x} A_i ,$$

und A_x ist als *endlicher* Durchschnitt von offenen Mengen wieder offen in X .

Andererseits ist $Y \subset \bigcup_{i \in I_x} B_i$. Denn aus $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} A_i \times B_i$ folgt ja

$$\{x\} \times Y \subset \{x\} \times \bigcup_{i \in I_x} B_i .$$

Da weiterhin A_x in jedem der A_i , $i \in I_x$, enthalten ist, folgt somit, daß der gesamte "Streifen" $A_x \times Y$ von endlich vielen der Mengen $A_i \times B_i$ schon überdeckt wird: es ist

$$A_x \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} A_i \times B_i .$$

Wir brauchen nun nur noch die Quasi–Kompaktheit von X auszunutzen: Die offene Überdeckung $\{A_x\}_{x \in X}$ von X hat eine endliche Teilüberdeckung $\{A_x\}_{x \in K}$. Damit ist nun

$$\{A_i \times B_i\}_{i \in I_x\, ,\, x \in K}$$

endliche Überdeckung von $X \times Y$. Es ist dies eine Teilüberdeckung der vorgegebenen Überdeckung $\{A_i \times B_i\}_{i \in I}$ bis allenfalls auf die Tatsache, daß möglicherweise einige Mengen davon nun mehrfach gezählt worden sind (bedingt durch die andere Indizierung). Solche Mehrfachnennungen können wir gegebenenfalls einfach weglassen, wir erhalten dann eine Teilüberdeckung. Der Satz ist bewiesen. $\square$

Als Anwendung des Satzes (oder des Korollars) wollen wir die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ behandeln (Satz von Heine–Borel).

Bezeichne ein *Quader* das Produkt von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen,

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] .$$

BEHAUPTUNG. *Dieser Raum ist topologisch äquivalent zu dem entsprechenden Unterraum des* $\mathbb{R}^n$,

$$\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \,\} .$$

Zusatz zu S. 40-42

(eine etwas andere Formulierung des Beweises von:)

Satz. *Sind* X, Y *quasi-kompakt, dann auch ihr Produkt* $X \times Y$.

Beweis. Sei $\{O_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \times Y$. Wir wollen zeigen, es gibt eine *endliche Teilmenge* $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} O_i = X \times Y$.

Wir verschaffen uns eine neue Überdeckung $\{O_z\}_{z \in X \times Y}$ dadurch, daß wir zu jedem Punkt $z \in X \times Y$ eine der Mengen O_i auswählen, die z wirklich enthält (so eine Menge gibt es!) und diese Menge dann mit O_z bezeichnen. Es wird nun genügen zu zeigen, daß *diese* Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Denn es könnte letztlich allenfalls passieren, daß unter den schließlich erhaltenen endlich vielen O_z irgendwelche der O_i vielleicht mehrfach vorkommen; solche Mehrfachnennungen können wir gegebenenfalls natürlich einfach weglassen.

Zu jedem Punkt $z \in X \times Y$ verschaffen wir uns nun offene Mengen $A_z \subset X$ und $B_z \subset Y$, so daß

$$A_z \times B_z \subset O_z \quad \text{und} \quad z \in A_z \times B_z$$

(das geht, da ja die Kästchen-Mengen eine Basis der Produkttopologie bilden). Es wird nun genügen zu zeigen, daß die Überdeckung $\{A_z \times B_z\}_{z \in X \times Y}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Denn wenn $\bigcup_{z \in J} A_z \times B_z$ schon ganz $X \times Y$ ist, dann natürlich auch $\bigcup_{z \in J} O_z$, da ja $A_z \times B_z \subset O_z$ für alle z .

Beweis. Die offensichtliche Abbildung (nämlich das $i-$te Intervall wird mit seinem Bild im $i-$ten Faktor von $\mathbb{R}^n$ identifiziert) ist bijektiv. Wir überlegen uns, daß die Abbildung eine topologische Äquivalenz ist.

1. *Beweis.* Der Quader als Produktraum, bzw. der Quader als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ haben dieselbe topologische Struktur. Denn in beiden Fällen ist eine Basis der Topologie gegeben durch *Kästchen–Mengen*, wo der $i-$te Faktor des Kästchens ein relativ–offenes Intervall im $i-$ten Faktor des Quaders ist.

2. *Beweis.* Die Abbildung vom Quader in den $\mathbb{R}^n$ ist stetig nach dem Kriterium dafür, wann eine Abbildung in einen Produktraum stetig ist; denn jede der Komponenten–Abbildungen ist stetig: die $i-$te Komponentenabbildung ist die Komposition der Projektion des Quaders auf seinen $i-$ten Intervall–Faktor mit der Inklusion dieses Faktors in die $i-$te Koordinate von $\mathbb{R}^n$. Die resultierende stetige bijektive Abbildung vom Quader auf seinen Bildraum in $\mathbb{R}^n$ ist eine topologische Äquivalenz nach dem fundamentalen Kriterium, das wir hergeleitet haben; denn der Zielraum ist Hausdorff–Raum (als Unterraum des $\mathbb{R}^n$), und der Quellenraum ist kompakt (als endliches Produkt von kompakten Räumen, nämlich von Intervallen). □

Von jetzt an werden wir gelegentlich einen Quader auch stillschweigend identifizieren mit dem entsprechenden Unterraum eines $\mathbb{R}^n$.

Satz. (Satz von Heine–Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann existiert ein Quader in $\mathbb{R}^n$, der X enthält. Wenn X in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, dann ist X auch abgeschlossen in diesem Quader. Wir haben erhalten, daß X *abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes* (des Quaders) ist. Wie wir wissen, impliziert dies, daß X selbst kompakt ist.

Sei umgekehrt X als kompakt vorausgesetzt. Da $\mathbb{R}^n$ Hausdorff–Raum ist, folgt, wie wir wissen, daß X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. Um weiter die Beschränktheit von X einzusehen, argumentieren wir explizit mit einer Überdeckung. Nämlich wir überdecken $\mathbb{R}^n$ durch *Einheitsquader* (Würfel der Kantenlänge 1 , deren Eckpunkte ganz–zahlige Koordinaten haben). Wäre dies eine offene Überdeckung, so könnten wir die induzierte Überdeckung von X betrachten; aus der (Quasi–)Kompaktheit von X würde dann folgen, daß X schon in (der Vereinigung von) endlich vielen der Einheitsquader enthalten sein muß, also beschränkt ist. Nun bilden die Einheitsquader natürlich keine *offene* Überdeckung, da ja ein Quader nicht offene (sondern abgeschlossene) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir müssen das Argument also modifizieren. Eine ganz kleine Modifikation ist ausreichend: wir ersetzen jeden der Quader durch eine ein wenig größere *offene* Menge, die ihn enthält (z.B. einen offenen Quader der Kantenlänge 2). Aus der Kompaktheit von X folgt tatsächlich nun, daß X in der Vereinigung von endlich vielen der modifizierten Quader enthalten ist; also beschränkt ist. □

Beispiele von Produkten.

BEISPIEL (a) $S^1 \times S^1$. Die Abbildung $f:\ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, induziert eine topologische Äquivalenz

$$g:\ [0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi \xrightarrow{\approx} \mathit{Bild}(f) = S^1 = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\,\}$$

(das folgt z.B. aus dem Satz: "*$X \to Y$ surjektiv, X kompakt, Y Hausdorff*" impliziert "*Y trägt die Quotiententopologie*"). Es folgt hieraus, per Produktbildung, daß $S^1 \times S^1$ topologisch äquivalent ist zu

$$(\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \times (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,)\ .$$

Andererseits gibt es auch eine surjektive Abbildung (Produkt der Projektionen)

$$[0,2\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \times (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,)\ .$$

Anwendung desselben Satzes wie oben liefert nun: $(\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \times (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,)$ (und damit auch $S^1 \times S^1$) ist topologisch äquivalent zu dem Quotientenraum

$$(\,[0,2\pi]\times[0,2\pi]\,)\ /\ (s,0){\sim}(s,2\pi)\ ,\ (0,t){\sim}(2\pi,t)\ ;$$

mit anderen Worten: $S^1 \times S^1$ ist topologisch äquivalent zu dem Raum, den man aus dem Quadrat erhält durch "Verkleben" von je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Für eine weitere Beschreibung von $S^1 \times S^1$ definieren wir eine Abbildung

$$h:\ [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3\ , \quad (s,t) \longmapsto (\,(\cos s)(2+\cos t)\,,\ (\sin s)(2+\cos t)\,,\ \sin t\,)$$

diese Abbildung hat die Eigenschaft:

$$h(s,t) = h(s',t') \iff \begin{cases} (s,t) = (s',t') \quad \text{oder} \\ s=0\ ,\ s'=2\pi \ \ \text{(oder umgekehrt)}\,,\ t \ \text{beliebig} \quad \text{oder} \\ t=0\ ,\ t'=2\pi \ \ \text{(oder umgekehrt)}\,,\ s \ \text{beliebig}\ . \end{cases}$$

Mit Hilfe des oben zitierten Satzes erhalten wir: *der Raum*

$$(\,[0,2\pi]\times[0,2\pi]\,)\ /\ (s,0){\sim}(s,2\pi)\ ,\ (0,t){\sim}(2\pi,t)\ ;$$

ist topologisch äquivalent zu dem Raum $\mathit{Bild}(h)$. Anschaulich gesprochen, erhält man diesen Raum $\mathit{Bild}(h)$, indem man den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(2,0,0)$ um die z –Achse rotiert ("$S^1 \times S^1$ ist ein *Torus*").

Beispiel (b) “*Abgeschlossener Kreisring*”. Sei $0 < a < b$. Die Abbildung

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid a \le \sqrt{x^2+y^2} \le b \right\} \quad \longrightarrow \quad S^1 \times [a,b]$$

$$(x,y) \quad \longmapsto \quad \left(\left(\tfrac{x}{r} , \tfrac{y}{r} \right) , \ r = \sqrt{x^2+y^2} \right)$$

ist eine topologische Äquivalenz (denn sie ist eine stetige bijektive Abbildung mit kompaktem Definitionsbereich und Hausdorff–Raum als Wertebereich).

Beispiel (c) “*Offener Kreisring*”. Sei wieder $0 < a < b$. Die Abbildung

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid a < \sqrt{x^2+y^2} < b \right\} \quad \longrightarrow \quad S^1 \times (a,b)$$

definiert wie oben ist auch eine topologische Äquivalenz; denn sie ist bijektiv und sie ist die Einschränkung einer topologischen Äquivalenz (nämlich der vorigen).

Beispiel (d) “*Punktierte Ebene*”. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 - 0 \quad \longrightarrow \quad S^1 \times (0,\infty) \quad , \quad (x,y) \longmapsto \left(\left(\tfrac{x}{r} , \tfrac{y}{r} \right) , \ r \right)$$

ist ebenfalls eine topologische Äquivalenz. Denn einmal ist die Abbildung bijektiv, zum andern ist die Stetigkeit der Abbildung bzw. ihrer Umkehrabbildung eine lokale Eigenschaft; sie folgt daher aus der Stetigkeit im vorigen Beispiel. Im Detail:

Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Wähle a, b so daß $0 < a < r < b$. Dann ist $S^1 \times (a,b)$ offene Umgebung von $\mathit{Bild}\,(x,y)$. Nach dem vorigen Beispiel ist die Umkehrabbildung stetig in dieser Umgebung von $\mathit{Bild}\,(x,y)$, deshalb insbesondere auch stetig im Punkt $\mathit{Bild}\,(x,y)$. Ähnlich erhält man die Stetigkeit der Abbildung selbst.

Beispiel (e) $S^1 \times \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ topologisch äquivalent ist zu $(0,\infty)$, folgt auch

$$S^1 \times \mathbb{R} \quad \approx \quad S^1 \times (0,\infty) \quad \approx \quad \mathbb{R}^2 - 0 \ .$$

Allgemeine Versionen dieser topologischen Äquivalenzen.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ die euklidische Norm. Die *n–dimensionale Sphäre* S^n ist definiert durch

$$S^n \quad = \quad \left\{ \ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ \mid \ \|x\| = 1 \ \right\}$$

(b′) Sei $0 < a$. Die Abbildung

$$\{ \, x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ a \le \|x\| \le b \, \} \ \longrightarrow \ S^{n-1} \times [a,b] \ , \quad x \longmapsto \left(\tfrac{x}{\|x\|} , \|x\| \right)$$

ist stetig und bijektiv. Sie hat kompakten Definitionsbereich und Hausdorffschen Zielbereich, sie ist also eine topologische Äquivalenz.

(c′) Sei $0 < a$. Die Abbildung

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a < \|x\| < b \,\} \quad \longrightarrow \quad S^{n-1} \times (a, b)$$

ist definiert wie die vorige. Sie ist bijektiv und ist als Einschränkung einer topologischen Äquivalenz ebenfalls wieder eine topologische Äquivalenz.

(d′) Sei $0 \leq a < b \leq \infty$. Die Abbildung

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a < \|x\| < b \,\} \quad \longrightarrow \quad S^{n-1} \times (a, b)$$

ist bijektiv, und sie stimmt “lokal” mit der vorigen Abbildung überein; damit ist auch sie eine topologische Äquivalenz.

(e′) Mit $\mathbb{R} \approx (0, \infty)$ folgt schließlich noch:

$$S^{n-1} \times \mathbb{R} \quad \approx \quad S^{n-1} \times (0, \infty) \quad \approx \quad \mathbb{R}^n - 0$$

Die *disjunkte Vereinigung* topologischer Räume wurde früher schon angesprochen. Wir nehmen sie hier in allgemeiner Form zur Kenntnis.

Wenn $i \longmapsto X_i \ , \ i \in I$, eine indizierte Familie von Mengen ist, dann bezeichnet die *disjunkte Vereinigung* die Menge der Paare

$$\amalg_{i\in I} X_i \ = \ \{ (i,x) \mid i \in I \ , \ x \in X_i \} \ .$$

Für jedes $j \in I$ enthält diese Menge eine Kopie der Menge X_j ; nämlich die Untermenge

$$\{ (j,x) \mid x \in X_j \} \ ,$$

die ja zu X_j kanonisch (= *in ganz bestimmter, ausgezeichneter Weise*) isomorph ist.

Definition. Wenn die X_i topologische Räume sind, dann sei die disjunkte Vereinigung auf die folgende Weise mit einer topologischen Struktur versehen: eine Teilmenge $A \subset \amalg_{i\in I} X_i$ ist *offen* dann und nur dann, wenn für jedes $j \in I$ die Menge

$$A \ \cap \ X_j$$

offen in X_j ist (dabei haben wir X_j identifiziert mit $\{ (j,x) \,|\, x \in X_j \}$) .

Aus der Definition folgt auch: Für jedes j ist die Untermenge $\{ (j,x) \mid x \in X_j \}$ von $\amalg_{i\in I} X_i$ eine *offene Untermenge*, und sie ist (als Unterraum) kanonisch isomorph zu X_j ; die Abbildung $x \mapsto (j,x)$ definiert eine topologische Äquivalenz von X_j zu diesem Unterraum,

$$X_j \ \longrightarrow \ \{ (j,x) \mid x \in X_j \} \ .$$

Solange das nicht zu Mißverständnissen führt, können (und wollen wir gelegentlich auch) so tun, als sei X_j dasselbe wie der angesprochene Unterraum.

Ein nicht sonderlich interessantes Beispiel für die Konstruktion ist das, wo jeder der Räume X_i nur aus einem einzigen Punkt besteht. In diesem Falle ist $\amalg_{i\in I} X_i$ dasselbe (oder, wenn man es ganz genau nehmen will, "*dasselbe bis auf kanonische Isomorphie*") wie die Menge I mit der diskreten Topologie.

Einer der interessantesten Fälle für die Konstruktion ist der auch früher schon angesprochene Fall, wo die Indexmenge gerade zwei Elemente hat, etwa $I = \{1,2\}$. Wir wollen für diesen Fall eine andere Notation einführen; nämlich statt $\amalg_{i\in\{1,2\}} X_i$ werden wir auch schreiben $X_1 \dot\cup X_2$ (oder sogar einfach nur $X_1 \cup X_2$; was allerdings zu Mißverständnissen führen kann, wenn man nicht aufpaßt).

Satz. *X sei topologischer Raum. Es sind äquivalent*:
- *X ist nicht zusammenhängend*
- *X ist topologisch äquivalent zu einer* (nicht–trivialen) *disjunkten Vereinigung.*

Beweis. Wir schauen nach, was die Definitionen bedeuten. Die Aussage “X *ist nicht zusammenhängend*” heißt, daß es nicht–leere offene Mengen $A_1, A_2 \subset X$ gibt, mit $A_1 \cup A_2 = X$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es folgt, daß die Abbildung

$$A_1 \dot{\cup} A_2 \longrightarrow A_1 \cup A_2 = X \ , \quad (i,x) \longmapsto x \ ,$$

bijektiv ist, stetig, und auch offen (weil ja A_1 und A_2 offen in X sind). Die Abbildung ist also eine topologische Äquivalenz.

Sei umgekehrt $X = \amalg_{i \in I} X_i$ und sei $j \in I$. Dann sind X_j und $\amalg_{i \in I,\, i \neq j} X_i$ offen in X , und disjunkt. □

Bemerkung. Wenn X ein topologischer Raum ist, und $x \in X$ ein Punkt darin, so kann man einen Raum X_x definieren, die sogenannte *Zusammenhangskomponente* von x in X . Nach Definition ist dies der größte zusammenhängende Unterraum von X , der x enthält (es ist übrigens gar nicht selbstverständlich, daß ein solcher Unterraum überhaupt existiert, der Beweis für die Existenz ist auch nicht trivial). Man muß sich nun hüten vor der Annahme, daß etwa jeder topologische Raum so etwas wäre, wie die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten; Gegenbeispiel: der *Raum* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen* (mit Unterraumtopologie als Unterraum von $\mathbb{R}$) ist *total unzusammenhängend* in dem Sinn, daß je zwei Punkte in *verschiedenen* Zusammenhangskomponenten liegen (denn zwischen je zwei rationalen Zahlen x_1 und x_2 liegt ja immer noch eine irrationale Zahl x_3) . Die *Zusammenhangskomponenten* sind also schlicht einpunktige Mengen in dem Fall. Andererseits ist die Unterraumtopologie auf den rationalen Zahlen selbstverständlich *nicht* die diskrete Topologie; anders ausgedrückt: es gibt sicherlich auch Funktionen auf $\mathbb{Q}$, die nicht stetig sind !

Ein noch einfacheres Beispiel dieses Typs ist die Menge $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, versehen mit der Unterraumtopologie als Unterraum des Intervalls. □

Wir wollen untersuchen, wann eine disjunkte Vereinigung kompakterRäume wieder kompakt ist. Sei also $\{X_i\}_{i \in I}$, eine Familie kompakter Räume. Aus der Definition der Topologie von $\amalg_{i \in I} X_i$ und aus der Hausdorff–Eigenschaft der X_i erhält man sofort, daß $\amalg_{i \in I} X_i$ auch ein Hausdorff–Raum ist.

Nun zur Überdeckungs–Eigenschaft: Wenn I nicht endlich ist, und wenn $X_i \neq \emptyset$ für alle i , dann ist $\amalg_{i \in I} X_i$ sicherlich nicht quasi–kompakt. Denn z.B. $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir haben aber:

Satz. *Sei* $\{X_i\}_{i \in I}$ *eine Familie von Räumen. Die Indexmenge* I *sei endlich, und für jedes* $i \in I$ *sei* X_i *ein kompakter Raum. Dann ist die disjunkte Vereinigung* $\amalg_{i \in I} X_i$ *ebenfalls kompakt.*

Beweis. Sei $\{A_k\}_{k \in K}$ eine vorgegebene offene Überdeckung von $\amalg_{i \in I} X_i$. Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Da X_i offen in $\amalg_{i\in I} X_i$ (Definition der disjunkten Vereinigung), ist

$$\{X_i \cap A_k\}_{i\in I,\, k\in K}$$

ebenfalls offene Überdeckung. Wegen der Kompaktheit von X_i existiert eine endliche Teilmenge $K_i \subset K$ mit

$$X_i \quad \subset \quad \bigcup_{k\in K_j} X_i \cap A_k \ .$$

Es folgt, daß $\{X_i \cap A_k\}_{i\in I,\, k\in K_i}$ endliche Überdeckung von $\amalg_{i\in I} X_i$ ist. Durch Ersetzen der $\{X_i \cap A_k\}$ durch die entsprechenden $\{A_k\}$ erhält man hieraus die gesuchte endliche Teilüberdeckung von $\{A_k\}_{k\in K}$. □

Interessanter als der doch sehr spezielle Fall einer *Vereinigung ohne Durchschnitt* ist der allgemeinere Fall einer *Vereinigung mit Durchschnitt*,

$$X \ = \ X_1 \cup X_2 \ , \quad X_1 \cap X_2 \ = \ X_0 \ ,$$

wo eben, möglicherweise, $X_0 \neq \emptyset$.

Beispiel. Die 2–Sphäre ist die Vereinigung ihrer *nördlichen* und *südlichen Halbkugeln*; der Durchschnitt der beiden ist die gemeinsame Randkurve, der *Äquator*. Bis auf topologische Äquivalenz kann man das auch so formulieren, daß die 2-Sphäre die Vereinigung von zwei Kreisscheiben ist, deren Durchschnitt wiederum eine 1-Sphäre ist. □

Beispiele wie dieses suggerieren die folgende Frage.

Frage. *Ist die topologische Struktur von X vollständig bestimmt durch*
- X_1, X_2 *und*
- *die Weise, wie* $X_0 = X_1 \cap X_2$ *in* X_1 *und* X_2 *enthalten ist?*

Anders gefragt: *Wie sinnvoll ist es, in einer solchen Situation zu sagen,* “ X *entsteht aus* X_1 *und* X_2 *durch Verkleben entlang* X_0 ” ?

Zunächst müssen wir diskutieren, was hier mit *Verklebung* gemeint sein soll. Dazu seien X_1, X_0, X_2 irgendwelche topologischen Räume und

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

irgendwelche stetigen Abbildungen. Wir definieren einen neuen Raum (einen Quotientenraum der disjunkten Vereinigung),

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 \ := \ X_1 \dot\cup X_2 \,/_{f_1(x)\sim f_2(x)\,;\, x\in X_0} \ .$$

Wir möchten diese Konstruktion interpretieren können als “Verkleben von X_1 und X_2 entlang X_0 ”. Das sollte die Konsequenz haben, daß der Raum $X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Räume X_1, X_0, X_2 als Unterräume enthält. Wir betrachten Bedingungen, die das sicherstellen.

Zusatz zu S. 50

Zur Verklebe–Konstruktion

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 \ := \ X_1 \dot{\cup} X_2 \,/_{f_1(x) \sim f_2(x)\,;\, x \in X_0}$$

ist dort angemerkt:

- die Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow X_2$ sei injektiv.

Die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung, $f_1(x) \sim f_2(x)$ *für* $x \in X_0$, sagt dann vielleicht noch alles mögliche, aber sicher sind keine zwei verschiedenen Punkte aus X_1 jetzt äquivalent, also ist die Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv.

Hier ist eine etwas detailliertere Begründung dafür.

Die von " $f_1(x) \sim f_2(x)$ für $x \in X_0$ " erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung läßt sich für die Punkte aus X_1 so beschreiben:

$x,\, y \in X_1$ *sind äquivalent genau dann, wenn es eine Kette von Punkten gibt,*

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots\ ,\ x_{4k+1} = y$$

mit

$$x_1 = f_1(x_2)\,,\ f_2(x_2) \ = \ x_3 \ = \ f_2(x_4)\,,\ f_1(x_4) \ = \ x_5 \ \ \ldots\ .$$

In der vorliegenden Situation (f_2 *injektiv*) schließen wir, daß in einer solchen Kette notwendigerweise die beiden Punkte

$$x_2\,,\ x_4 \ \in \ X_0$$

zueinander gleich sind, da sie ja dasselbe Bild $x_3 \in X_2$ haben. Also muß auch

$$x_1 \ = \ x_5$$

sein. — Usw.

Für die Identifikation von X_1 mit einem Unterraum gibt es einen Kandidaten, nämlich die zusammengesetzte Abbildung

$$X_1 \longrightarrow X_1 \dot\cup X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$$

(d.h., die Inklusion von X_1 in die disjunkte Vereinigung, gefolgt von der Quotientenraumprojektion). Dies ist offenbar auch die einzig vernünftige Möglichkeit, X_1 mit $X_1 \cup_{X_0} X_2$ in Beziehung zu bringen.

Wir wollen Bedingungen über die "Verklebe–Abbildungen" f_1 und f_2 formulieren, die garantieren, daß diese Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ und die analoge Abbildung $X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Eigenschaften haben, die sie haben sollen.

- die Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow X_2$ sei injektiv.

Die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung, $f_1(x) \sim f_2(x)$ *für* $x \in X_0$, sagt dann vielleicht noch alles mögliche, aber sicher sind keine zwei verschiedenen Punkte aus X_1 jetzt äquivalent, also ist die Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv.

- die Abbildung $f_1 : X_0 \longrightarrow X_1$ sei injektiv.

Wie gerade eben impliziert dies, daß $X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv ist.

- Die bijektive Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}(f_2)$ (Unterraum von X_2) sei eine topologische Äquivalenz.

Behauptung. *Die bijektive Abbildung*

$$X_1 \longrightarrow \mathit{Bild}(X_1) \quad (\text{Unterraum von } X_1 \cup_{X_0} X_2)$$

ist dann auch eine topologische Äquivalenz.

Beweis. Zu zeigen ist, daß die Abbildung offen ist: wenn A offene Teilmenge von X_1 ist, dann gibt es eine offene Teilmenge B in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ mit

$$B \cap \mathit{Bild}(X_1) = \mathit{Bild}(A) .$$

Nun ist $f_1^{-1}(A)$ offen in X_0 (Stetigkeit von f_1) , deshalb ist $f_2\left(f_1^{-1}(A)\right)$ offen in $\mathit{Bild}(f_2)$ (wegen der über f_2 gemachten Voraussetzung); das heißt also, es gibt eine offene Teilmenge $B' \subset X_2$ mit $B' \cap \mathit{Bild}(f_2) = f_2\left(f_1^{-1}(A)\right)$. Damit erhalten wir

$$B \cap \mathit{Bild}(X_1) = \mathit{Bild}(A) ,$$

wobei $B := B' \cup A$ (aufgefaßt als Vereinigung von Mengen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$) . Daß die Menge B nun offen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist, wie gewünscht, folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie, denn das Urbild von B in $X_1 \dot\cup X_2$ ist die Menge $A \dot\cup B'$, und diese ist offen in $X_1 \dot\cup X_2$, da B' offen in X_2 ist, und A offen in X_1 . □

- Die bijektive Abbildung $f_1 : X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}(f_1)$ sei eine topologische Äquivalenz.

Ähnlich wie gerade eben impliziert dies, daß auch die Abbildung

$$X_2 \longrightarrow \mathit{Bild}(X_2) \quad (\text{Unterraum von } X_1 \cup_{X_0} X_2)$$

eine topologische Äquivalenz ist.

Über den Raum X_0 notieren wir noch folgendes. Die beiden zusammengesetzten Abbildungen in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \cup_{X_0} X_2 \end{array}$$

sind identisch und induzieren eine bijektive Abbildung $X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}(X_0)$; auch diese Abbildung ist eine topologische Äquivalenz (denn weil X_0 Unterraum von X_1 und X_1 Unterraum von $X_1 \cup_{X_0} X_2$, folgt, daß auch X_0 Unterraum von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist). Schließlich ist noch

$$\mathit{Bild}(X_0) \;=\; \mathit{Bild}(X_1) \cap \mathit{Bild}(X_2)$$

(als Unterräume von $X_1 \cup_{X_0} X_2$). Unter den angegebenen Bedingungen führt unsere Konstruktion mithin tatsächlich auf das, was wir von dem Verklebeprozeß erwarten.

Wir kommen zu unserer Frage von vorhin zurück, die wir jetzt etwas anders formulieren wollen. Sei X topologischer Raum. Seien X_1 und X_2 Unterräume von X , so daß $X_1 \cup X_2 = X$. Wir setzen $X_0 = X_1 \cap X_2$. Die beiden Inklusions–Abbildungen $j_1 : X_1 \longrightarrow X$ und $j_2 : X_2 \longrightarrow X$ induzieren dann eine surjektive stetige Abbildung

$$g : X_1 \dot{\cup} X_2 \;\longrightarrow\; X \;.$$

Wir bilden den “zusammengeklebten” Raum $X_1 \cup_{X_0} X_2$, wobei die Abbildungen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

durch die Inklusionen gegeben seien. Für $x \in X_0$ gilt dann $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$, die Abbildung g faktorisiert deshalb über eine stetige Abbildung

$$f : X_1 \cup_{X_0} X_2 \longrightarrow X \,,$$

und diese Abbildung ist *bijektiv*. Unsere obige Frage läßt sich jetzt so präzisieren:

FRAGE: *Wann ist die Abbildung f eine topologische Äquivalenz ?*

Das ist sicherlich nicht der Fall ohne zusätzliche Bedingungen, wie man an folgendem Sachverhalt sehen kann. Sei X zusammenhängender Raum, sei X_1 Unterraum von X , $\emptyset \neq X_1 \neq X$, sei X_2 das Komplement von X_1 in X . Wenn wieder X_0 den Durchschnitt von X_1 und X_2 bezeichnet, so ist im gegenwärtigen Fall $X_0 = \emptyset$, also $X_1 \cup_{X_0} X_2 \;\approx\; X_1 \dot{\cup} X_2$. Die Abbildung $X_1 \cup_{X_0} X_2 \longrightarrow X$ kann also in diesem Fall keine topologische Äquivalenz sein, da X als zusammenhängend vorausgesetzt war und deshalb nicht disjunkte Vereinigung in nicht–trivialer Weise sein kann.

SATZ. *Hinreichend dafür, daß f topologische Äquivalenz ist, ist, daß X_1 und X_2 beide abgeschlossen in X sind. — Ebenfalls hinreichend ist, daß sie beide offen sind.*

Beweis. Eine stetige bijektive Abbildung ist genau dann eine topologische Äquivalenz, wenn sie zusätzlich noch die Eigenschaft hat, eine *offene Abbildung* zu sein (oder, was in diesem Fall dasselbe bedeutet, eine *abgeschlossene Abbildung*). Wir behandeln den einen der beiden Fälle. Das Argument im andern Fall ist wörtlich dasselbe — abgesehen davon, natürlich, daß in dem Argument das Wort "abgeschlossen" zu ersetzen ist durch das Wort "offen".

Wir setzen also jetzt voraus, daß X_1 und X_2 abgeschlossene Unterräume in X sind. Wir werden zeigen, daß dann f eine *abgeschlossene Abbildung* ist; d.h., daß folgendes gilt:

Sei $A \subset X$, $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* $X_1 \cup_{X_0} X_2$. *Dann ist* A *abgeschlossen in* X .

Dazu sei $A_1 = A \cap X_1$ und $A_2 = A \cap X_2$, also $A = A_1 \cup A_2$. Daß $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist, heißt (nach Definition der Quotiententopologie), daß $q^{-1}(\,f^{-1}(A)\,)$ abgeschlossen in $X_1 \,\dot\cup\, X_2$ ist, wobei $q : X_1 \,\dot\cup\, X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Quotientenraumprojektion bezeichnet. Nun ist

$$q^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \;=\; A_1 \,\dot\cup\, A_2 \;.$$

Wir schließen, daß $A_1 \,\dot\cup\, A_2$ abgeschlossen in $X_1 \,\dot\cup\, X_2$ ist. Nach Definition der Topologie der disjunkten Vereinigung heißt dies, daß erstens A_1 abgeschlossen in X_1 ist und zweitens auch A_2 abgeschlossen in X_2 . Nach Voraussetzung nun waren X_1 und X_2 abgeschlossene Unterräume von X . Es folgt, daß auch A_1 und A_2 in X abgeschlossen sind (denn ein abgeschlossener Unterraum in einem abgeschlossenen Unterraum ist auch in dem Gesamtraum abgeschlossen). Also ist auch die Vereinigungsmenge $A = A_1 \cup A_2$ abgeschlossen in X . Der Beweis ist fertig. $\square$

Bemerkung. Die Notation $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist sehr bequem und sie ist auch ganz üblich. Man sollte aber nicht vergessen, daß sie auch ein wenig ungenau ist, da die Verklebeabbildungen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

ja ausdrücklich nicht spezifiziert werden.

So kann man etwa sehr viele Räume angeben, die sich in der Form $D^n \cup_{D^n} D^n$ darstellen lassen, wo D^n den $n-$*dimensionalen Ball* bezeichnet, $D^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1 \,\}$.

Zum Beispiel $D^1 \cup_{D^1} D^1$ kann bedeuten:

• eine Strecke (die zu verklebenden $1-$Bälle werden in ihrer ganzen Länge identifiziert)

• eine "Ypsilon"–artige Figur (von den zu verklebenden Intervallen werden nur die unteren Hälften identifiziert).

Oder $D^2 \cup_{D^2} D^2$ kann bedeuten:

• eine Scheibe (die zu verklebenden $2-$Bälle werden insgesamt identifiziert)

• eine "Jojo"–artige Figur (die beiden zu verklebenden Scheiben werden nur entlang einer kleineren konzentrischen Scheibe identifiziert).

Für ein weiteres Beispiel erinnern wir uns daran, daß die S^2 in der Form $D^2 \cup_{S^1} D^2$ dargestellt werden kann; dabei werden die beiden Verklebe–Abbildungen

$$D^2 \xleftarrow{f_1} S^1 \xrightarrow{f_2} D^2$$

benutzt, die jeweils die S^1 mit der Randkurve der einen oder der anderen Scheibe identifizieren. Wir nehmen jetzt dieselben Räume, aber andere Verklebe–Abbildungen; nämlich f_1 sei wie zuvor, aber f_2 möge die S^1 mit einem konzentrischen Kreis in D^2 identifizieren. Der durch diese Verklebung entstehende Raum ist nicht wieder die 2− Sphäre; er ist vielmehr so etwas wie die Oberfläche des Saturn mit aufgesetztem Ring. □

Wir wollen noch kurz diskutieren, was geschieht, wenn man beim Verklebe–Prozeß die beteiligten Räume durch topologisch äquivalente Räume ersetzt. Wir erwarten, daß dann auch das Resultat des Verklebeprozesses wieder dasselbe sein wird — jedenfalls bis auf topologische Äquivalenz. Sei also

$$X_1 \xleftarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

ein Diagramm derart, wie wir es beim Verkleben benutzt haben. Wir wollen $X_1,\ X_0,\ X_2$ durch topologisch äquivalente Räume $X_1',\ X_0',\ X_2'$ ersetzen; wir möchten schließen, daß $X_1 \cup_{X_0} X_2$ topologisch äquivalent ist zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$. Dabei müssen wir aufpassen, was die Verklebeabbildungen

$$X_1' \xleftarrow{f_1'} X_0' \xrightarrow{f_2'} X_2'$$

angeht: die obigen Beispiele zeigen, daß sonst wohl nur wenig Chance dafür bestünde, daß $X_1 \cup_{X_0} X_2$ topologisch äquivalent zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$ sein wird.

Am besten wird es wohl sein, wenn wir uns die f_1' auf geeignete Weise aus den anderen Daten verschaffen.

Seien also zusätzlich zu den Verklebeabbildungen f_1 und f_2 noch topologische Äquivalenzen $h_i : X_i \longrightarrow X_i'$ fixiert. Wir können diese Daten zusammenfassen in einem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "h_1"] & X_0 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_0"] & X_2 \arrow[d, "h_2"] \\
X_1' & X_0' & X_2'
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm wiederum können wir ergänzen zu einem *kommutativen* Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "h_1"] & X_0 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_0"] & X_2 \arrow[d, "h_2"] \\
X_1' & X_0' \arrow[l, "f_1'"'] \arrow[r, "f_2'"] & X_2'
\end{tikzcd}$$

indem wir einfach definieren

$$f_1' \;:=\; h_1 \circ f_1 \circ h_0^{-1} \;,\quad f_2' \;:=\; h_2 \circ f_2 \circ f_0^{-1}$$

(wobei wir benutzen, das h_0 topologische Äquivalenz ist; daß also die stetige Umkehrabbildung h_0^{-1} existiert). Die Kommutativität des Diagramms besagt hier natürlich nichts anderes als die Gleichheit der Abbildungen:

$$h_1 \circ f_1 = f_1' \circ h_0 : X_0 \longrightarrow X_1' \;,\quad h_2 \circ f_2 = f_2' \circ h_0 : X_0 \longrightarrow X_2' \;.$$

Wir können eine ganz bestimmte "kanonische" Abbildung definieren

$$h : X_1 \cup_{X_0} X_2 \longrightarrow X_1' \cup_{X_0'} X_2' \;,$$

nämlich

$$h(x) \;=\; \begin{cases} h_1(x) & \text{wenn} \quad x \in X_1 \\ h_0(x) & \text{wenn} \quad x \in X_0 \\ h_2(x) & \text{wenn} \quad x \in X_2 \end{cases} \;.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (wegen der Kommutativität des obigen Diagramms). Sie ist stetig, weil die zusammengesetzte Abbildung

$$X_1 \,\dot\cup\, X_2 \;\longrightarrow\; X_1 \cup_{X_0} X_2 \;\longrightarrow\; X_1' \cup_{X_0'} X_2'$$

stetig ist (Stetigkeit von h_1 und h_2) und wegen der Definition von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ als Quotientenraum von $X_1 \,\dot\cup\, X_2$.

Wir wollen zeigen, daß h eine topologische Äquivalenz ist, also eine Umkehrabbildung hat. Dies erfordert keine neuen Argumente: weil h_1, h_0, h_2 topologische Äquivalenzen sind, können wir das obige Diagramm "rückwärts" lesen, d.h. wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_1' & \xleftarrow{\;f_1'\;} & X_0' & \xrightarrow{\;f_2'\;} & X_2' \\ \downarrow{\scriptstyle h_1^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h_0^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h_2^{-1}} \\ X_1 & \xleftarrow{\;f_1\;} & X_0 & \xrightarrow{\;f_2\;} & X_2 \end{array}$$

Dieses Diagramm nun kommutiert ebenfalls (das folgt aus der Kommutativität des obigen Diagramms), und wie vorher erhalten wir deshalb eine ganz bestimmte Abbildung

$$h' : X_1' \cup_{X_0'} X_2' \;\longrightarrow\; X_1 \cup_{X_0} X_2 \;,$$

die wiederum stetig ist. Wir brauchen nun nur noch die nicht sehr überraschende Tatsache nachzuprüfen, daß h' zu h invers ist; z.B., wenn $x \in X_1$, dann ist

$$h'(h(x)) \;=\; h'\,(h_1(x)) \;=\; h_1^{-1}\,(h_1(x)) \;=\; x \;,$$

und wenn $x \in X_1'$ dann ist

$$h(h'(x)) \;=\; h\left(h_1^{-1}(x)\right) \;=\; h_1\left(h_1^{-1}(x)\right) \;=\; x \;.$$

Die konstruierte Abbildung h ist also eine topologische Äquivalenz von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$.

Deformationsklassen von Schlingen

Im Rahmen der Einführung hatten wir seinerzeit skizzenhaft zur Kenntnis genommen, daß man in einigen interessanten Fällen topologische Räume dadurch als verschieden erkennen kann (genauer: als nicht topologisch äquivalent), daß man “Schlingen” in diesen Räumen betrachtet, oder vielmehr Deformationsklassen von solchen (vgl. Seiten 11–12). Nachdem wir die hierfür benötigten Hilfsmittel uns nunmehr verschafft haben, wollen wir diese Dinge jetzt näher anschauen.

Definition. Bezeichne S^1 den Kreis. Eine *Schlinge* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $f : S^1 \to X$.

Wie angedeutet (vgl. S. 12), sollen zwei Schlingen f_0 und f_1 als “deformations–äquivalent” (oder “homotop”) bezeichnet werden, wenn eine “Deformation” von der einen Schlinge in die andere existiert. Das präzisieren wir jetzt wie folgt:

Definition. Seien f_0, f_1 Schlingen in X . Eine *Deformation* von f_0 zu f_1 ist eine stetige Abbildung

$$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow X ,$$

mit

$$F \mid S^1{\times}0 = f_0 , \quad F \mid S^1{\times}1 = f_1 .$$

Definition. Seien f und f' Schlingen in X . f und f' heißen *homotop*, wenn eine Deformation von f zu f' existiert.

Satz. *Homotopie von Schlingen ist eine Äquivalenz–Relation.*

Beweis. Die Behauptung ist, daß die Relation *homotop* schon die Eigenschaften hat, die eine Äquivalenzrelation ausmachen: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. Der Beweis dafür läuft auf die Angabe geeigneter Homotopien hinaus.

— *Reflexivität*. Ist $f : S^1 \to X$ eine Schlinge, dann ist die *konstante Deformation*, d.h. die Abbildung

$$S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}} S^1 \xrightarrow{f} X , \quad (x,t) \mapsto x \mapsto f(x)$$

eine Deformation von f zu sich selbst.

— *Symmetrie*. Seien f_0, f_1 Schlingen derart, daß eine Deformation von f_0 zu f_1 existiert; sei $F : S^1 \times [0,1] \to X$ eine solche Deformation. Durch das “Umflippen” von F erhält man dann auch eine Deformation F' von f_1 zu f_0 . Im Detail: F' ist die zusammengesetzte Abbildung

$$S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^1}\times\tau} S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{F} X$$

wobei der "Flip" gegeben ist durch

$$\tau: \ [0,1] \longrightarrow [0,1] \ , \ \ \tau(t) \ = \ 1-t \ .$$

— *Transitivität.* Sei F eine Deformation von f_0 zu f_1, und G eine Deformation von f_1 zu f_2. Man erhält eine Deformation H von f_0 zu f_2 durch *Zusammensetzen* von F und G. Im Detail: für $s \in S^1$ und $t \in [0,1]$ definiert man

$$H(s,t) \ = \ \begin{cases} F(s,\, 2t) & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(s,\, 2t-1) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} .$$

Definition. Sei X topologischer Raum. Es bezeichnet $\mathcal{S}(X)$ die *Menge der Homotopieklassen von Schlingen in* X, d.h. die Menge der Schlingen in X modulo der soeben eingeführten Äquivalenz–Relation "*homotop*".

Beispiel. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *hat nur ein Element.* — Denn sind $f_0,\, f_1 : S^1 \to \mathbb{R}^n$ zwei Schlingen, dann ist

$$F(s,t) \ = \ (1-t) f_0(s) + t\, f_1(s)$$

eine Deformation von f_0 zu f_1 ; je zwei Schlingen sind also homotop.

Wie schon erwähnt, ist unser Ziel, zumindest in einigen Fällen Räume dadurch als verschieden (*als nicht topologisch äquivalent*) zu erkennen, daß wir die Mengen $\mathcal{S}(\dots)$ wirklich ausrechnen (und feststellen, daß sie verschieden sind). Das beruht auf dem folgenden Sachverhalt.

Satz: *Wenn X und X' topologisch äquivalente Räume sind, dann sind $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{S}(X')$ äquivalente Mengen.*

Dies ist ein Aspekt der sogenannten *Funktorialität* der Zuordnung $X \mapsto \mathcal{S}(X)$. Was das bedeutet, ist schon in der Einführung (S. 8 – 11) anhand der Konstruktion $X \mapsto \pi_0 X$ (*Menge der Weg–Zusammenhangs–Komponenten von* X) beschrieben worden. Der wesentliche Punkt ist der, daß eine Konstruktion nicht nur für *Objekte* vorliegt (hier: jedem Raum ist eine Menge zugeordnet), sondern *gleichzeitig auch für Abbildungen zwischen diesen* (hier: jeder *Abbildung von Räumen* (stetige Abbildung!) ist auch eine *Abbildung von Mengen* zugeordnet); und daß schließlich diese Zuordnung noch die vernünftigen Eigenschaften hat, die man erwarten kann. Wir gehen die Dinge noch einmal durch.

— *Eine Abbildung* $\varphi \colon X \to Y$ *induziert eine Abbildung* $\varphi_* \colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$. Diese ist definiert durch

$$\varphi_*([f]) := \ [\varphi \circ f] \ .$$

Mit anderen Worten, φ_* ist in der offensichtlichen Weise für Repräsentanten definiert, $\big(f : S^1 \to X\big) \longmapsto \big(\varphi{\circ}f : S^1 \to Y\big)$. Und damit dies die gewünschte Abbildung auf den Homotopieklassen gibt, prüft man nach, daß die Zuordnung die Äquivalenz–Relation "homotop" respektiert. Das ist aber klar, denn ist $F : S^1 \times [0,1] \to X$ eine Deformation von f_0 zu f_1, dann ist $\varphi \circ F : S^1 \times [0,1] \to Y$ eine Deformation von $\varphi \circ f_0$ zu $\varphi \circ f_1$.

— *Die Zuordnung* $\varphi \mapsto \varphi_*$ *ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich.* Das heißt, wenn φ und ψ zusammensetzbare Abbildungen von Räumen sind,

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z ,$$

so gilt $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ (Gleichheit von Abbildungen $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Z)$). Daß dies richtig ist, folgt aber unmittelbar aus den Definitionen von $(\psi \circ \varphi)_*$, ψ_* und φ_*,

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) .$$

— *Die Zuordnung* $\varphi \mapsto \varphi_*$ *respektiert identische Abbildungen.* Das heißt, für jeden Raum X ist (klar!)

$$(Id_X)_* = Id_{\mathcal{S}(X)} .$$

Beweis des Satzes. Sei $\varphi : X \to X'$ topologische Äquivalenz; $\psi : X' \to X$ sei zu φ inverse Abbildung. Dann ist

$$Id_{\mathcal{S}(X)} = (Id_X)_* = (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* .$$

Ähnlich auch $Id_{\mathcal{S}(X')} = \varphi_* \circ \psi_*$. Das heißt aber nichts anderes, als daß φ_* und ψ_* zueinander inverse Abbildungen zwischen $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{S}(X')$ sind. $\square$

Der folgende Satz beinhaltet eine weitere nützliche Tatsache geringen Tiefgangs.

Satz. *Seien* X, Y *topologische Räume und* $X \times Y$ *ihr Produkt. Es ist*

$$\mathcal{S}(X \times Y) \approx \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}(Y) .$$

Beweis. Eine Schlinge in $X \times Y$ ist, nach Definition, eine Abbildung

$$h : S^1 \longrightarrow X \times Y .$$

Per Übergang zu den Komponentenabbildungen entspricht sie einem Paar

$$f : S^1 \to X , \quad g : S^1 \to Y ; \qquad f = pr_1 \circ h , \quad g = pr_2 \circ h$$

und, wie wir wissen (S. 34), gilt auch: h *stetig* $\iff$ f *stetig und* g *stetig.* Die resultierende Bijektion

$$(\text{Schlingen in } X \times Y) \xrightarrow{\approx} (\text{Schlingen in } X) \times (\text{Schlingen in } Y)$$

respektiert zudem die Äquivalenz–Relation, denn eine Deformation von h_0 zu h_1 ist ja, wieder nach Definition, eine Abbildung

$$H : S^1 \times [0,1] \longrightarrow X \times Y$$

mit $H \mid S^1{\times}0 = h_0$, $H \mid S^1{\times}1 = h_1$. Sie entspricht damit, wie oben, einem Paar von Abbildungen

$$F\colon S^1{\times}[0,1] \longrightarrow X \ , \quad G\colon S^1{\times}[0,1] \longrightarrow Y$$

mit $F \mid S^1{\times}0 = f_0$, $F \mid S^1{\times}1 = f_1$ und $G \mid S^1{\times}0 = g_0$, $G \mid S^1{\times}1 = g_1$; d.h. sie entspricht einem Paar von Deformationen von f_0 zu f_1 und von g_0 zu g_1 . $\square$

Weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nur ein Element hat (s. oben) erhalten wir

Korollar. *Für jeden topologischen Raum X gilt*

$$\mathcal{S}(X{\times}\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}(X) \ .$$

Beispiel. Wir wissen, $\mathbb{R}^n - 0$ ist topologisch äquivalent zu $S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$. Es folgt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n - 0) \approx \mathcal{S}\left(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1\right) \approx \mathcal{S}\left(S^{n-1}\right) \ .$$

Unser Programm für die nächste Zukunft ist es, folgendes zu zeigen:

- $\mathcal{S}(S^n)$, *für* $n \geq 2$, *hat nur ein Element.*
- $\mathcal{S}(S^1)$ *hat (abzählbar) unendlich viele Elemente.*

Als Folgerung hiervon werden wir die folgenden Klassifikationssätze haben.

Satz. S^1 *ist nicht topologisch äquivalent zu* S^n *wenn* $n \geq 2$.
Denn sonst würde ja folgen

$$\mathcal{S}(S^1) \approx \mathcal{S}(S^n) \qquad (\,??\,)$$

was aber der angegebenen Berechnung widerspricht.

Satz. $\mathbb{R}^2$ *ist nicht topologisch äquivalent zu* $\mathbb{R}^n$ *wenn* $n \geq 3$.
Denn andernfalls wäre auch $\mathbb{R}^2 - 0$ topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n - 0$ und das hätte zur Folge

$$\mathcal{S}(S^1) \approx \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 - 0) \approx \mathcal{S}(\mathbb{R}^n - 0) \approx \mathcal{S}(S^{n-1}) \qquad (\,??\,)$$

was wiederum der Berechnung widerspricht.

Satz. S^2 *ist nicht topologisch äquivalent zum Torus.*
Denn da der Torus topologisch äquivalent ist zu $S^1 \times S^1$, würde andernfalls folgen

$$\mathcal{S}(S^2) \approx \mathcal{S}(S^1 \times S^1) \approx \mathcal{S}(S^1) \times \mathcal{S}(S^1) \qquad (\,??\,)$$

was aber auch nicht sein kann.

Wir wollen jetzt mit dem Beweis des Satzes beginnen, daß $\mathcal{S}(S^n)$, für $n \geq 2$, nur ein einziges Element hat; daß, mit anderen Worten, je zwei Schlingen in S^n ineinander deformiert werden können, wenn $n \geq 2$. Das Argument geht in mehreren Schritten, wobei zunächst nur Schlingen spezieller Art betrachtet werden, und wobei jeweils der folgende Fall dann auf den vorherigen zurückgeführt wird.

1. Fall. Bezeichne eine *triviale Schlinge* eine solche, die durch eine *konstante Abbildung* $f : S^1 \to X$ gegeben ist, d.h. wo das Bild $f(S^1)$ nur aus einem einzigen Punkt besteht. Da S^n wegzusammenhängend ist (wenn $n \geq 1$) sind je zwei triviale Schlingen in S^n homotop. (Denn sei $w : [0,1] \to S^n$ ein Weg, dann ist die Abbildung

$$S^1 \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} [0,1] \xrightarrow{w} S^n$$

eine Deformation zwischen den trivialen Schlingen mit Werten $w(0)$ und $w(1)$). Es wird also genügen zu zeigen, daß jede Schlinge in S^n in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, wenn $n \geq 2$. Damit befassen sich die beiden folgenden Fälle.

2. Fall. Es sei $f : S^1 \to S^n$ eine Schlinge mit der Eigenschaft, daß $f(S^1) \neq S^n$ (d.h., die Abbildung f ist nicht surjektiv). Es wird gezeigt, daß f in eine triviale Schlinge deformiert werden kann. (Hierbei ist der Fall $n = 1$ zugelassen). Das Argument beruht auf dem folgenden Sachverhalt.

Satz. *Sei* $z \in S^n$. *Es gibt eine topologische Äquivalenz* $\phi\colon S^n - \{z\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es ist nicht immer so, daß man eine topologische Äquivalenz tatsächlich auch explizit hinschreiben kann, aber es ist so im vorliegenden Fall. Die Abbildung ϕ ist gegeben durch die sogenannte *stereographische Projektion*, die folgendermaßen definiert ist. Wir fassen S^n auf als die Einheits–Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$, und $\mathbb{R}^n$ als den zu dem Vektor z orthogonalen Unterraum. Zu einem Punkt $x \in S^n$, $x \neq z$, wird nun der Bildpunkt $y = \phi(x)$ so bestimmt, daß

— y auf der Geraden durch z und x liegt, also $y = z + a\,(x - z)$

— y zu z orthogonal ist, also $y \cdot z = 0$ (Skalarprodukt von Vektoren).

Die Zahl a bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$0 = y \cdot z = z \cdot z + a\,(x - z) \cdot z$$

(sowie $z \cdot z = 1$). Es ergibt sich $a = \frac{-1}{(x-z)\cdot z}$ und

$$y = z - \frac{1}{(x-z)\cdot z}\,(x - z) .$$

Die Umkehrabbildung ψ läßt sich ähnlich explizit angeben. Sei nämlich y ein Punkt in dem zu z orthogonalen Unterraum. Der Punkt $x = \psi(y)$ ist dann gegeben als der (andere) Schnittpunkt der Einheits–Sphäre mit der Geraden durch y und z . Um ihn explizit anzugeben, bemerken wir, daß der Punkt in der Mitte zwischen x und z

derjenige Punkt auf der Geraden ist, der dem Ursprung am nächsten liegt. Wenn wir also den Ansatz machen

$$x \;=\; z \,+\, 2b\,(y-z) \;,$$

so bestimmt sich die Zahl b durch die Gleichung

$$(\, z + b\,(y-z)\,) \,\cdot\, (y-z) \;=\; 0$$

(sowie $z \cdot (y-z) \;=\; -1$). Es ergibt sich $b \;=\; \frac{1}{(y-z)\cdot(y-z)}$ und

$$x \;=\; z \,+\, \frac{2}{(y-z)\cdot(y-z)}\,(y-z) \;\;.$$

Daß die Abbildungen ϕ und ψ stetig sind, ist klar. Daß sie zueinander invers sind, ergibt sich aus ihrer Herleitung; mit ein wenig Geduld könnte man es auch durch Einsetzen nachprüfen (dabei benutzt man, daß $(x{-}z)\cdot(x{+}z) = 0$). $\square$

Zurück nun zu der Situation des 2. Falles. Wir wollen uns davon überzeugen, daß eine vorgegebene Schlinge $f : S^1 \to S^n$ in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, wenn wir noch zusätzlich voraussetzen, daß es einen Punkt $z \in S^n$ gibt, der nicht im Bild von f liegt.

Der wesentliche Punkt hierbei ist, daß wir f auch auffassen können als Abbildung in den Unterraum $S^n{-}\{z\}$; oder, um es genau zu nehmen, wir schreiben f jetzt als Komposition

$$f \;=\; j \circ f' \;,$$

wo $j : S^n{-}\{z\} \to S^n$ die Inklusion des Unterraumes bezeichnet, und $f' : S^1 \to S^n{-}\{z\}$ eine Schlinge in diesem Unterraum.

Es wird genügen, eine Homotopie

$$F' :\; S^1\!\times [0,1] \;\longrightarrow\; S^n{-}\{z\}$$

von der Abbildung f' zu einer trivialen Schlinge anzugeben; denn die zusammengesetzte Abbildung $j \circ F'$ ist dann die gewünschte Homotopie für die Schlinge f selbst. Die Homotopie F' verschaffen wir uns über die topologische Äquivalenz von $S^n{-}\{z\}$ zu $\mathbb{R}^n$. Wir benutzen die oben beschriebenen Abbildungen ϕ und ψ (die stereographische Projektion und ihre Inverse). Zunächst ist $\phi \circ f'$ eine Schlinge in $\mathbb{R}^n$. Diese ist deformierbar in eine triviale Schlinge (etwa mit Wert 0); eine Homotopie, die das leistet, ist gegeben durch

$$F :\; S^1\!\times [0,1] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^n \;, \qquad F(s,t) \;=\; (1-t)\;\phi(f'(s)) \;\;.$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ F$ ist dann die gewünschte Homotopie F' .

3. Fall (*der allgemeine Fall*). Unser Ziel ist, diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen. Dazu werden wir folgendes zeigen. *Sei* $f : S^1 \to S^n$ *eine Schlinge. Wenn* $n \geq 2$ *, dann gibt es eine Deformation von* f *zu einer Schlinge* f' *mit der Eigenschaft* $f'(S^1) \neq S^n$ *.* Der Beweis ist eine Variante des Arguments aus dem vorigen Fall. Es wird nämlich in einem ersten Schritt gezeigt, daß sich S^1 durch endlich viele Teilbögen überdecken läßt

$$S^1 \;=\; B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$$

mit der Eigenschaft, daß jede einzelne der eingeschränkten Abbildungen $f|B_j : B_j \to S^n$ *nicht* surjektiv ist. Im zweiten Schritt werden dann die Abbildungen $f|B_j$ einzeln auf geeignete Weise deformiert.

Der erste Schritt beruht auf einem ganz allgemeinen Sachverhalt. Dies ist ein wichtiger Satz, den wir später auch in anderem Zusammenhang noch oft benötigen werden.

Satz (Lebesgue'scher Überdeckungssatz). *Sei* M *kompakter metrischer Raum. Sei* $\{O_i\}_{i \in I}$ *offene Überdeckung von* M *. Dann existiert ein* $\varepsilon > 0$ *mit der folgenden Eigenschaft. Für jeden Punkt* $x \in M$ *existiert ein* $i \in I$ *, so daß die* ε*–Kugel um* x *ganz enthalten ist in der offenen Menge* O_i *.*

Beweis. Bezeichne $(x, y) \mapsto d(x, y)$ die Distanzfunktion auf dem metrischen Raum M . Ist $A \subset M$ nicht–leere Teilmenge, so definiert man eine Funktion $d_A : M \to \mathbb{R}_+$ ("*Distanz zu* A ") durch

$$d_A(x) \;=\; \inf_{z \in A} d(x, z) \ .$$

Die Gleichung $d_A(x) = 0$ charakterisiert dann diejenigen Punkte x aus M , die Adhärenzpunkte von A sind; wenn speziell A eine abgeschlossene Menge in M ist, so charakterisiert diese Gleichung die Punkte von A selbst. Die Distanzfunktion $d_A : M \to \mathbb{R}_+$ ist eine *stetige Funktion*. Denn für $x, y \in M$ und für alle $z \in A$ ist ja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Hieraus folgt

$$d_A(x) \;\leq\; d(x, y) + d_A(y) \ .$$

Die Ungleichungen $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y)$ und (analog) $d_A(y) \leq d_A(x) + d(x, y)$ zusammen besagen dann, daß $|\, d_A(x) - d_A(y) \,| \leq d(x, y)$.

Die vorgegebene Überdeckung $\{O_i\}_{i \in I}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $\{O_i\}_{i \in J}$ (weil M kompakt ist). Es wird genügen, die vorgegebene Überdeckung durch die Teilüberdeckung zu ersetzen und die Behauptung des Satzes für diese zu beweisen. Dazu betrachten wir die Funktionen $d_i := d_{CO_i}$,

$$d_i(x) \;=\; \textit{Abstand von } x \textit{ zum Komplement von } O_i \ .$$

Weil das Komplement CO_i *abgeschlossene* Menge ist, sind die Punkte aus O_i charakterisiert durch die Tatsache

$$d_i(x) \;>\; 0 \ .$$

Nun ist jeder Punkt aus M enthalten in einer der Mengen O_i (die Mengen bilden ja eine Überdeckung), also ist auch mindestens eine der Funktionen d_i dort > 0 . Es folgt, daß das Supremum dieser Funktionen

$$s(x) \;=\; \sup_{i \in J} d_i(x)$$

überall einen Wert > 0 hat. Andererseits ist s als Supremum endlich vieler stetiger Funktionen auch wieder eine stetige Funktion, und als stetige Funktion auf einem Kompaktum (nämlich M) nimmt die Funktion s ihr Infimum wirklich an. Wenn wir also die Zahl α definieren als

$$\alpha \;=\; \inf_{x \in M} s(x) \;,$$

so ist $\alpha > 0$ (denn α ist Funktionswert von s), und es ist $s(x) \geq \alpha$ für alle x . Nach Definition von $s(x)$ als Supremum heißt dies: für jedes $x \in M$ gibt es ein i , so daß $d_i(x) \geq \alpha$; mit anderen Worten: es gibt ein i , so daß die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius α ganz enthalten ist in der offenen Menge O_i . Mit $\varepsilon = \alpha$ ist die Behauptung des Satzes jetzt bewiesen. $\square$

Zurück nun zur Situation des 3. Falles. Sei $f\colon S^1 \to S^n$ eine vorgegebene Schlinge. Wir wählen zwei verschiedene Punkte z_1 und z_2 in S^n und setzen

$$A_1 \;=\; S^n - \{z_1\} \;, \quad A_2 \;=\; S^n - \{z_2\} \;.$$

Wir definieren nun

$$O_1 \;=\; f^{-1}(A_1) \;, \quad O_2 \;=\; f^{-1}(A_2) \;.$$

Diese beiden sind *offene* Teilmengen in S^1 (weil f stetige Abbildung ist), und das System $\{O_1, O_2\}$ ist *Überdeckung* von S^1 (weil $\{A_1, A_2\}$ eine Überdeckung von S^n ist). Um den Lebesgueschen Überdeckungssatz anwenden zu können, notieren wir, daß S^1 nicht nur kompakt ist, sondern natürlich auch ein metrischer Raum (die Unterraumtopologie von S^1 in $\mathbb{R}^2$ ist dieselbe wie die von der Distanzfunktion auf $\mathbb{R}^2$ per Einschränkung gegebene Topologie). Nach dem Lebesgueschen Satz existiert also ein $\varepsilon > 0$, so daß $\ldots$.

Wir wählen eine Unterteilung von S^1 in m gleichlange Bögen $B_1, \ldots, B_m$. Wenn m groß genug ist (z.B. wenn $m \geq \frac{2}{\varepsilon}$), dann ist jeder dieser Bögen enthalten in einer ε–Kugel in S^1 (= *Durchschnitt von* S^1 *mit einer* ε*–Kugel in* $\mathbb{R}^2$ *mit Mittelpunkt auf* S^1). Nach der Konstruktion von ε über den Lebesgueschen Satz folgt deshalb, daß jeder der Bögen B_j auch ganz in O_1 oder ganz in O_2 enthalten ist (oder in beiden). Wegen $O_1 = f^{-1}(A_1)$, $O_2 = f^{-1}(A_2)$ besagt dies, *daß für jeden der Bögen* $B_1, \ldots, B_m$ *die eingeschränkte Abbildung* $f|B_j$ *ihr Bild ganz in* A_1 ($= S^n - \{z_1\}$) *oder ganz in* A_2 ($= S^n - \{z_2\}$) *hat.*

Die Abbildung f wollen wir nun dadurch verbessern, daß wir die eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ einzeln deformieren. Dabei müssen wir darauf achten, daß die zu konstruierenden Deformationen an den Endpunkten der Bögen auch zusammenpassen.

Dies läßt sich am bequemsten dadurch erreichen, daß die Deformationen an den Endpunkten als *konstant* gewählt werden (m.a.W., die Endpunkte selbst werden gar nicht deformiert). Diese Dinge sollen zunächst jetzt genauer formuliert werden.

Bezeichne ein *Bogen* einen topologischen Raum, der topologisch äquivalent ist zu $[0,1]$ (z.B. die obigen Bögen B_j). Sei B ein Bogen. Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung

$$w: \ B \longrightarrow X \ .$$

Eine *Deformation, relativ zu den Endpunkten*, von dem Weg w_0 zu dem Weg w_1 ist eine stetige Abbildung

$$W: \ B \times [0,1] \ \longrightarrow \ X \ ,$$

die zum einen eine Deformation von w_0 zu w_1 ist, d.h., es ist

$$W \mid B{\times}0 \ = \ w_0 \ , \quad W \mid B{\times}1 \ = \ w_1 \ ,$$

und die zum andern die Eigenschaft hat, daß für den Anfangspunkt a von B und den Endpunkt e von B , und für alle $t \in [0,1]$, gilt

$$W(a,0) \ = \ W(a,1) \ = \ W(a,t) \ , \quad W(e,0) \ = \ W(e,1) \ = \ W(e,t) \ .$$

Mit anderen Worten, alle Wege in der parametrisierten Familie

$$t \ \longmapsto \ w_t \ = \ W|B{\times}t$$

haben denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt. (Damit eine solche Deformation existieren kann, müssen insbesondere natürlich auch die beiden Wege w_0 und w_1 denselben Anfangs- und Endpunkt haben.)

Definition. Zwei Wege sind *homotop relativ zu den Endpunkten*, wenn es eine solche Deformation gibt.

Satz. *Wenn zwei Wege in $\mathbb{R}^n$ denselben Anfangs- und Endpunkt haben, dann sind sie homotop relativ zu den Endpunkten.*

Beweis. Seien $w_0, w_1 : B \to \mathbb{R}^n$ solche Wege. Die verlangte Deformation ist gegeben durch

$$W(s,t) \ = \ (1{-}t)\, w_0(s) + t\, w_1(s) \ ,$$

(wobei $s \in B$, $t \in [0,1]$). Für den Anfangspunkt a gilt

$$\begin{aligned} W(a,t) \ &= \ (1{-}t)\, w_0(a) + t\, w_1(a) \\ &= \ (1{-}t)\, w_0(a) + t\, w_0(a) \ = \ w_0(a) \end{aligned}$$

und analog auch für den Endpunkt. □

Korollar. *Y sei topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n$. Je zwei Wege in Y mit demselben Anfangs- und Endpunkt sind homotop relativ zu den Endpunkten.*

BEWEIS. Seien $v_0, v_1 : B \to Y$ solche Wege. Seien $\phi : Y \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to Y$ zueinander inverse topologische Äquivalenzen. Eine Deformation von v_0 zu v_1 ist gegeben durch $V(s,t) \;=\; \psi\big(\,(1{-}t)\,\phi(v_0(s)) + t\,\phi(v_1(s))\,\big)$. □

Wir werden das Korollar in Kürze anwenden auf die Abbildungen von Bögen, die wir oben aus unserer vorgegebenen Schlinge durch Einschränkung bekommen haben. Dazu notieren wir noch (der folgende Satz), daß wir tatsächlich eine Deformation der vorgegebenen Schlinge f erhalten können, indem wir die Bögen $B_1, \dots, B_m$ einzeln hernehmen und die eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ deformieren.

SATZ. *Seien $f_0, f_1 : S^1 \to X$ zwei Schlingen. S^1 sei unterteilt in Bögen $B_1, \dots, B_m$. Es gelte für jedes j , daß die beiden Wege*

$$f_0|B_j\,,\ f_1|B_j :\ B_j \longrightarrow X$$

homotop sind relativ zu den Endpunkten. Dann ist f_0 homotop zu f_1 .

BEWEIS. Die Deformation, relativ zu den Endpunkten, des j–ten Wegepaares sei gegeben durch

$$W_j :\ B_j \times [0,1] \longrightarrow X\ .$$

Die Deformation von f_0 zu f_1 ist dann gegeben durch die Abbildung $S^1 \times [0,1] \to X$,

$$F(s,t) \quad = \quad \begin{cases} W_1(s,t)\ , & s \in B_1 \\ W_2(s,t)\ , & s \in B_2 \\ \quad\vdots & \end{cases} \quad .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn $s \in B_1 \cap B_2$ z.B. heißt ja, daß s der Endpunkt von B_1 und der Anfangspunkt von B_2 ist, deshalb ist in dem Fall

$$W_1(s,t) \;=\; W_1(s,0) \;=\; f_0(s) \;=\; W_2(s,0) \;=\; W_2(s,t)$$

(für alle $t \in [0,1]$). F ist auch eine *stetige* Abbildung. Denn es ist zusammengebaut aus stetigen Abbildungen (den W_i) auf Unterräumen (den $B_j \times [0,1]$), die sämtlich *abgeschlossene* Unterräume sind. (s. Übungszettel 7, Aufgabe 1). □

Zurück nun zu unserer vorgegebenen Schlinge $f : S^1 \to S^n$. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungssatz konnten wir S^1 unterteilen in Bögen $B_1, \dots, B_m$, so daß jede der eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ mindestens einen Punkt der S^n freiläßt, also aufgefaßt werden kann als Abbildung zu $S^n - \{Punkt\}$; oder, um es ganz genau zu sagen, diese eingeschränkte Abbildung kann als Komposition geschrieben werden von einer Abbildung $B_j \to S^n - \{Punkt\}$ einerseits und der Inklusion $S^n - \{Punkt\} \to S^n$ andererseits.

Nun ist $S^n - \{Punkt\}$ topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n$, daher wissen wir, wie oben diskutiert, daß $f|B_j$ homotop ist, relativ zu den Endpunkten, zu einem *beliebig* vorgegebenen Weg in $S^n - \{Punkt\}$, sofern dieser andere Weg nur wieder denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt hat wie der Weg $f|B_j$; z.B. können wir eine Abbildung von B_j auf den Bogen eines Großkreises zwischen eben diesen Punkten nehmen (ein *Großkreis* in der S^n ist, nach Definition, der Durchschnitt von S^n mit einem zwei–dimensionalen Untervektorraum in $\mathbb{R}^{n+1}$). Die Homotopien für all diese eingeschränkten Abbildungen setzen sich schließlich zusammen, wie auch schon oben diskutiert, zu einer Homotopie der gesamten Abbildung f ; also zu einer Deformation der vorgegebenen Schlinge. Wir fassen zusammen:

Sei $f : S^1 \to S^n$ eine Schlinge. Es gibt eine zu f homotope Schlinge f' mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Unterteilung von S^1 in Bögen $B_1, \ldots, B_m$ und jede der Abbildungen $f'|B_j$ hat als Bild einen Kreisbogen (Stück eines Großkreises) *in* S^n .

Abschluss des Beweises (*dafür, daß* $\mathcal{S}(S^n)$ *für* $n \geq 2$ *nur* 1 *Element hat*):

Wie gerade notiert, gibt es zu einer vorgegebenen Schlinge $f : S^1 \to S^n$ eine homotope Schlinge f' , so daß das Bild $f'(S^1)$ eine Vereinigung von endlich vielen Kreisbögen ist. Wenn $n \geq 2$ (diese Voraussetzung wird hier wirklich benötigt!) dann kann eine Vereinigung von endlich vielen Kreisbögen nicht die ganze S^n sein. Wir wissen aber bereits (der 2. Fall und der 1. Fall), daß eine Abbildung $f' : S^1 \to S^n$, die *nicht* surjektiv ist, in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, und daß je zwei triviale Schlingen in S^n homotop sind. □

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, daß die Menge $\mathcal{S}(S^n)$ für $n \geq 2$ nur ein einziges Element hat, wollen wir uns nun der Bestimmung von $\mathcal{S}(S^1)$ zuwenden. Der Satz, den wir beweisen wollen, sagt, daß $\mathcal{S}(S^1)$ *abzählbar unendlich viele* Elemente hat. Beim Beweis dieses Satzes werden wir auch eine ganz bestimmte Aufzählung der Elemente von $\mathcal{S}(S^1)$ kennenlernen. Wir werden nämlich jeder Schlinge eine ganze Zahl zuordnen (ihre sogenannte *Windungszahl*). Wir werden zeigen, daß die Windungszahl bereits die Homotopieklasse der Schlinge charakterisiert (d.h. wenn zwei Schlingen die gleiche Windungszahl haben, dann sind sie homotop), und schließlich werden wir auch zeigen, daß die Windungszahl umgekehrt nur von der Homotopieklasse der Schlinge abhängt (oder anders gesagt: wenn zwei Schlingen verschiedene Windungszahlen haben, dann sind sie auch nicht homotop). Insgesamt werden wir also eine 1–1 Beziehung herstellen zwischen den Elementen von $\mathcal{S}(S^1)$ und den ganzen Zahlen, eben über die Windungszahl.

Nach Definition nun sind Schlingen in S^1 nichts anderes als stetige Abbildungen von S^1 zu sich selbst. Wir geben zunächst eine Auflistung besonders schöner solcher Abbildungen. Dazu identifizieren wir S^1 mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1 ,

$$S^1 \;=\; \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\} \; .$$

Für jede ganze Zahl k haben wir die Abbildung $S^1 \to S^1$,

$$z \longmapsto z^k \; ,$$

die wir uns vorstellen wollen als die *k–te Standard–Abbildung*. Wie wir später sehen werden, handelt es sich hierbei tatsächlich auch um eine Abbildung mit der Windungszahl k .

Wir wollen diese Standard–Abbildungen noch anders beschreiben. Für die andere Beschreibung benötigen wir die Exponentialfunktion einerseits und eine Identifizierung von S^1 mit einem Quotientenraum vom Intervall $[0,1]$ bzw. von der ganzen Geraden $\mathbb{R}$ andererseits.

Satz. *Es bezeichne* $\exp(x) = e^{2\pi ix}$. *Die Abbildungen*

$$[0,1] \xrightarrow{\text{Inklusion}} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$$

induzieren topologische Äquivalenzen

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \longrightarrow \mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \longrightarrow S^1 \ .$$

Beweis. Da $[0,1]\,/\,0{\sim}1$ quasi–kompakt ist und S^1 Hausdorff–Raum, folgt, daß die bijektive stetige Abbildung $[0,1]\,/\,0{\sim}1 \to S^1$ eine topologische Äquivalenz ist (vgl. S. 32). Da $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1 \to S^1$ ebenfalls bijektive stetige Abbildung ist, folgt aus der Hausdorff–Eigenschaft von S^1 nun auch die Hausdorff–Eigenschaft von $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$. Aus der (Quasi–) Kompaktheit von $[0,1]\,/\,0{\sim}1$ schließlich folgt dann wieder, daß die bijektive stetige Abbildung $[0,1]\,/\,0{\sim}1 \to \mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$ auch eine topologische Äquivalenz ist. Es ist klar (oder?), daß aus diesen Dingen insgesamt folgt, daß die letzte der Abbildungen

$$\mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \longrightarrow S^1$$

ebenfalls eine topologische Äquivalenz ist. □

Es sei nun k eine ganze Zahl. Die Abbildung “ *Multiplikation mit* k ”

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad s \longmapsto k \cdot s$$

induziert eine Abbildung

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \longrightarrow \mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$$

denn es ist $[\,k \cdot 0\,] = [\,k \cdot 1\,]$ in $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$, weil ja k eine *ganze* Zahl ist.

Behauptung. *Unter den oben definierten topologischen Äquivalenzen*

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \longrightarrow S^1 \quad \text{und} \quad \mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \longrightarrow S^1$$

geht diese Abbildung über in die k *–te Standard Abbildung.* — Klar, weil das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{s \,\longmapsto\, k\cdot s} & \mathbb{R} \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{z \,\longmapsto\, z^k} & S^1 \end{array}$$

kommutiert: es ist

$$\left(\exp(s)\right)^k \;=\; \left(e^{2\pi is}\right)^k \;=\; e^{2\pi isk} \;=\; \exp(k\cdot s)\;.$$

Wir wollen uns jetzt überlegen, daß das soeben benutzte Diagramm nicht nur dazu taugt, neues über Standard–Abbildungen zu lernen, sondern daß es uns auch gestattet, Abbildungen allgemein zu studieren. Dazu benötigen wir eine später zu rechtfertigende Hypothese der Art, daß zu einer Abbildung $f: S^1 \to S^1$ ein solches Diagramm überhaupt existiert.

Hypothese. *Es gibt eine Abbildung* $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ *, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\;g\;} & \mathbb{R} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ S^1 & \xrightarrow{\;f\;} & S^1 \end{array}$$

kommutiert.

Satz. *Sei* $f: S^1 \to S^1$ *eine Abbildung, die diese Hypothese erfüllt. Dann gilt*
(i) $k = g(1) - g(0)$ *ist eine ganze Zahl*
(ii) f *ist homotop zur* k*–ten Standard–Abbildung.*

Beweis. (i) Die Kommutativität des Diagramms besagt, daß $\exp(\,g(s)\,) = f(\exp(s)\,)$ für alle $s \in [0,1]$. Weil $\exp(1) = 1 = \exp(0)$, folgt $\exp(\,g(1)\,) = \exp(\,g(0)\,)$, d.h.

$$1 \;=\; \exp(g(1)) \cdot \exp(g(0))^{\,-1} \;=\; e^{2\pi i(\,g(1)-g(0)\,)}\;.$$

Daher ist $g(1) - g(0)$ eine ganze Zahl.

(ii) Wir wissen, daß zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit gleichen Anfangs– und Endpunkten zueinander homotop sind relativ zu den Endpunkten. Insbesondere ist deshalb die Abbildung g homotop, relativ zu den Endpunkten, zu der Abbildung $g_1:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_1(s) \;=\; g(0) + k\cdot s\;.$$

Die Homotopie von g zu g_1 ist eine Abbildung $G: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $G(0,t) = G(0,0)$ und $G(1,t) = G(1,0)$ für alle t . Sei

$$H:\ [0,1]\times[0,1] \;\longrightarrow\; S^1$$

definiert als die zusammengesetzte Abbildung $H = \exp\circ G$. Dann ist

$$H(1,t) \;=\; H(1,0) \;=\; f(\exp(1)\,) \;=\; f(\exp(0)\,) \;=\; H(0,0) \;=\; H(0,t)$$

für alle t , also faktorisiert H über eine Abbildung H' des Quotientenraumes

$$([0,1] \times [0,1]) \,/\, (0,t) \sim (1,t) \quad \approx \quad ([0,1]\,/\,0{\sim}1) \times [0,1] \quad \approx \quad S^1 \times [0,1] \ .$$

Die so konstruierte Abbildung

$$H' : \ S^1 \times [0,1] \longrightarrow S^1$$

ist eine Homotopie von Abbildungen $S^1 \to S^1$; und zwar ist dies eine Homotopie von der Abbildung f zu der Abbildung f_1 , wobei (wegen $\exp(g(0)) = f(\exp(0)) = f(1)$)

$$f_1(s) \underset{(\mathrm{def})}{=} \exp(\,g_1(s)\,) \ = \ \exp(g(0)) \cdot \exp(\,k \cdot s\,) \ = \ f(1) \cdot \exp(\,k \cdot s\,) \ .$$

Wenn $f(1) = 1 \in S^1$, dann ist f_1 schon die k–te Standard–Abbildung. Im allgemeinen Fall kann man es durch eine weitere Homotopie (eine starre Drehung der S^1) in die Standard–Abbildung überführen. □

Um die oben formulierte Hypothese zu diskutieren, werden wir eine bemerkenswerte Eigenschaft der Exponentialfunktion benutzen. Nämlich, die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ ist zwar keine topologische Äquivalenz, sie besitzt aber lokale (!) Umkehrfunktionen in folgendem Sinne:

Satz. *Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ existieren Umgebungen V von x und W von $\exp(x)$, so daß die Einschränkung von $\exp$ eine topologische Äquivalenz von V zu W ist.*

Beweis. Sei V ein offenes Intervall der Länge < 1 , das den Punkt x enthält. Dann hat V die behaupteten Eigenschaften. Denn sei V' der Abschluß von V . Da die Intervall–Länge als < 1 vorausgesetzt war, ist die auf V' eingeschränkte Abbildung *injektiv*. Sie definiert daher eine bijektive stetige Abbildung von V' auf den Bildraum. Nun ist V' kompakt, und der Bildraum ist Hausdorff–Raum (als Unterraum von S^1). Also ist die eingeschränkte Abbildung eine topologische Äquivalenz. □

Zusatz. *Zu jedem Punkt y in S^1 gibt es eine Umgebung U , so daß für jeden Punkt aus $\exp^{-1}(y)$ die lokale Umkehrfunktion des Satzes auf ganz U definiert ist.*

Beweis. Im Beweis des vorstehenden Satzes nimmt man für V ein offenes Intervall der Länge $\frac{1}{2}$, mit x als Mittelpunkt. Das Bild W ist in dem Fall ein offener Halbkreis mit y als mittlerem Punkt. Das so erhaltene W hängt nur von y ab, es ist dasselbe für alle $x \in \exp^{-1}(y)$. □

Bemerkung. Es ist plausibel, daß es sich bei diesen *lokalen Umkehrfunktionen* um vertraute Funktionen handeln sollte. Das ist auch der Fall: es handelt sich dabei (bis auf den Faktor $\frac{1}{2\pi i}$) um die *Logarithmus*–Funktion. Sei a eine komplexe Zahl $\neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \log x \ &= \ \log(\,a - (a{-}x)\,) \ = \ \log a + \log(\,1 - (1{-}\tfrac{x}{a})\,) \\ &= \ \log a \, - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \left(1{-}\tfrac{x}{a}\right)^n \ . \end{aligned}$$

Dies ist eine Potenzreihe, die für diejenigen x konvergiert, welche im Innern des Kreises mit Radius $|a|$ um den Punkt a liegen. Die additive Konstante $\log a$ ist wohldefiniert nur *bis auf ganzzahlige Vielfache von* $2\pi i$. Was die Werte der additiven Konstante $\log a$ angeht, so ist $\log 1 = 0$ (bis auf ...), und wenn z.B. $|1{-}a| < 1$, dann kann $\log a$ ausgerechnet werden mit Hilfe der obigen Potenzreihe als $\log(1-(1{-}a))$. Wie schon betont wurde, so ist die additive Konstante $\log a$ nur *wohldefiniert bis auf ganzzahlige Vielfache von* $2\pi i$. Das heißt konkret einfach dieses: wenn man etwa versucht, unter den möglichen Werten für die additive Konstante ein für alle mal eine Auswahl zu treffen, so kommt man in Schwierigkeiten, sobald man z.B. den Punkt a entlang dem Einheitskreis variieren läßt — die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ hat nun einmal keine globale Umkehrfunktion. $\square$

Wir prüfen jetzt nach, daß die oben als *Hypothese* formulierte Eigenschaft tatsächlich immer erfüllt ist.

Satz. *Sei* $f\colon S^1 \to S^1$ *eine Abbildung. Es existiert eine Abbildung* $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis. Zu jedem Punkt in S^1 gibt es eine offene Umgebung U , auf der die lokalen Umkehrfunktionen von $\exp$ definiert sind (der vorige Satz und Zusatz). Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von S^1 durch solche offenen Mengen. Mit Hilfe der zusammengesetzten Abbildung

$$f \circ \exp : \ [0,1] \ \longrightarrow \ S^1$$

können wir diese Überdeckung zurückziehen zu einer Überdeckung von $[0,1]$, nämlich $\big\{ (f\circ\exp)^{-1}(U_i) \big\}_{i\in I}$. Auf diese Überdeckung wenden wir nun den Lebesgue'schen Überdeckungssatz an. Wir schließen, daß es eine Unterteilung von $[0,1]$ in Bögen $B_1, \ldots, B_m$ gibt, so daß für jedes j das Bild $f(\exp(B_j))$ ganz enthalten ist in einem von den U_i ; wir bezeichnen es mit $U_{i\,(j)}$.

Die Abbildung g wird jetzt induktiv für die Bögen $B_1, \ldots, B_m$ definiert.

• *Definition von* g *auf* B_1 . Die zusammengesetzte Abbildung $B_1 \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{f} S^1$ hat ihr Bild in dem Bereich $U_{i\,(1)}$. In diesem Bereich existieren lokale Umkehrfunktionen für $\exp$. Wir wählen *irgendeine* von diesen lokalen Umkehrfunktionen; etwa die Funktion $u_1 : U_{i\,(1)} \to \mathbb{R}$. Die gesuchte Funktion $g \mid B_1$ wird nun definiert als die Zusammensetzung von $f \circ \exp$ mit der Funktion u_1 . Es ist klar, daß dann

$$\exp\circ g \mid B_1 \ \big(= \ \exp\circ u_1 \circ f \circ \exp \mid B_1 \big) \ = \ f \circ \exp \mid B_1 \ .$$

• *Definition von* g *auf* B_2 . Die zusammengesetzte Abbildung $B_2 \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{f} S^1$ hat ihr Bild in dem Bereich $U_{i\,(2)}$. Auch hier existieren lokale Umkehrfunktionen für exp . Wir wählen nun *eine ganz bestimmte* unter diesen lokalen Umkehrfunktionen aus; es wird in Kürze präzisiert werden, welche. Die gesuchte Funktion $g \mid B_2$ wird wieder definiert als die Zusammensetzung von $f \circ \exp$ mit der lokalen Umkehrfunktion u_2 , und es ist wieder klar, daß

$$\exp \circ g \mid B_2 \;=\; f \circ \exp \mid B_2 \; .$$

Es ist aber zunächst gar nicht klar, daß diese Definition von $g \mid B_2$ überhaupt verträglich ist mit der vorher erfolgten Definition von $g \mid B_1$. Denn die Bögen B_1 und B_2 haben ja einen gemeinsamen Punkt: der Endpunkt von B_1 ist gleich dem Anfangspunkt von B_2 . Wir müssen also darauf achten, daß wir an dieser Stelle nicht aus Versehen die Funktion auf zwei verschiedene Weisen definieren. Dazu müssen wir aber nur darauf achten, daß die lokale Umkehrfunktion $u_2 \colon U_{i\,(2)} \to \mathbb{R}$ in der folgenden Weise gewählt wird: Sei x der gemeinsame Punkt von B_1 und B_2 , sei $y = f(\exp(x))$ sein Bildpunkt. Dann ist y enthalten sowohl in $U_{i\,(1)}$ als auch in $U_{i\,(2)}$, und wir werden jetzt darauf bestehen, daß u_2 diejenige lokale Umkehrfunktion ist, die die Bedingung

$$u_2(y) \;=\; u_1(y)$$

erfüllt.

• *Definition von* g *auf* $B_3, \ldots, B_m$. Diese Definitionen gehen analog zu der Definition von g auf B_2 . □

Mit Hilfe dieses Satzes (früher als "Hypothese" formuliert) hatten wir uns eine gewisse ganze Zahl k (nämlich $k = g(1) - g(0)$) verschafft, und wir hatten uns überlegt, daß diese Zahl k die Homotopieklasse von f bereits charakterisiert.

Wir wollen uns nun überlegen, daß umgekehrt die Homotopieklasse von f auch die Zahl k schon eindeutig festlegt. Dazu benötigen wir den folgenden Sachverhalt.

SATZ. *Sei* $F \colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ *eine Abbildung* (mit anderen Worten, eine Homotopie von Schlingen in S^1). *Es existiert eine Abbildung* $G \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, dashed, "G"] \arrow[d, "\exp \times \mathrm{id}"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "F"] & S^1
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

BEWEIS: Das Argument ist ganz analog zu dem im Beweis des vorigen Satzes. Wir fixieren wieder eine Überdeckung von S^1 durch offene Mengen, auf denen lokale Umkehrfunktionen für exp existieren, $\{U_i\}_{i \in I}$. Mit Hilfe der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ ziehen wir diese Überdeckung zu einer Überdeckung $\{\, (F \circ (\exp \times \mathrm{id}))^{-1}(U_i) \,\}_{i \in I}$ von

$[0,1]\times[0,1]$ zurück. Auf letztere Überdeckung wenden wir den Lebesgueschen Überdeckungssatz an. Das liefert ein ε , so daß . . . . Wir schließen, daß folgendes gilt: Sei $[0,1]\times[0,1]$ unterteilt in $m \cdot m$ Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{m}$. Wenn m hinreichend groß ist, dann ist jedes dieser Quadrate ganz enthalten in einer ε–Kugel; folglich ist sein Bild unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ schon ganz enthalten in einer der offenen Mengen U_i .

Es bleibt nun nur noch, für jedes einzelne der Quadrate die darauf eingeschränkte Abbildung zu liften. Dabei ist, ebenso wie im vorigen Beweis, darauf zu achten, welche der lokalen Umkehrfunktionen jeweils verwendet wird.

Für die Zwecke der Buchführung führen wir Namen ein: Die Teilquadrate seien bezeichnet mit $Q_{p,q}$, wobei die Indizes p und q jeweils von 1 bis m variieren, und wobei wir uns vorstellen wollen, daß der Index p die *horizontale Indizierung* bezeichnet (wachsend von links nach rechts) und der Index q die *vertikale Indizierung* (wachsend von oben nach unten).

Für das Quadrat $Q_{p,q}$ seien folgende Auswahlen getroffen:

• von den offenen Mengen U_i , die das Bild von $Q_{p,q}$ unter der zusammengesetzten Abbildung

$$F \circ (\exp \times \mathrm{id})$$

enthalten, wird eine ausgewählt und hinfort mit $U_{i(p,q)}$ bezeichnet. (Die Konstruktion der kleinen Quadrate über den Lebesgueschen Satz ist gerade so, daß es *mindestens eine* solche offene Menge gibt. Wenn es mehrere geben sollte, stellt es sich als irrelevant heraus, welche Auswahl an dieser Stelle getroffen wird; dieser Punkt braucht im folgenden nicht einmal diskutiert zu werden.)

• von den lokalen Umkehrfunktionen für $\exp$ wird eine ausgewählt (diese Auswahl wird noch zu diskutieren sein),

$$u_{i(p,q)} : \ U_{i(p,q)} \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ .$$

Mit Hilfe der so ausgewählten lokalen Umkehrfunktionen wird dann die Einschränkung der gesuchten Abbildung G ,

$$G_{p,q} \quad (= \ G \mid Q_{p,q} \ ) \ ,$$

definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$G_{p,q} \quad = \quad u_{i(p,q)} \circ F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \ .$$

Mit dieser Definition wird das in der Formulierung des Satzes genannte Diagramm kommutativ sein zumindest insofern als nun gilt

$$\exp \circ G_{p,q} \quad = \quad \exp \circ u_{i(p,q)} \circ F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \quad = \quad F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \ .$$

Es bleibt zu diskutieren, wie die konstruierten Abbildungen $G_{p,q}$ zusammengefaßt werden können zu der gewünschten Abbildung G auf dem ganzen Quadrat $[0,1]\times[0,1]$.

Dazu werden wir das Quadrat nun aus seinen Stücken $Q_{p,q}$ aufbauen, indem wir diese Stücke einzeln hernehmen und zu den vorher behandelten dann dazutun. Wir betrachten die Stücke in einer bestimmten Reihenfolge.

- Wir beginnen mit dem Teilquadrat $Q_{1,1}$. Dabei brauchen wir noch nicht auf irgendetwas zu achten: jede Auswahl ist so gut wie jede andere.

- $Q_{1,2}$ wird dazugenommen. Da $Q_{1,2}$ nicht–leeren Durchschnitt mit $Q_{1,1}$ hat, müssen wir darauf achten, daß die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auf dem Durchschnitt übereinstimmen. Nun ist

$$Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$$

ein Intervall, und sein Bild unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ ist enthalten in

$$U_{1,1} \cap U_{1,2} \ .$$

Durch geeignete Auswahl können wir zumindest erreichen, daß die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ *an einem einzigen Punkt* des Durchschnitts übereinstimmen (z.B. an dem linken Endpunkt des Intervalls). Denn hierfür wird es genügen, die lokale Umkehrfunktion $u_{1,2}$ so zu wählen, daß die beiden lokalen Umkehrfunktionen $u_{1,1}$ und $u_{1,2}$ an eben dem Bildpunkt dieses Punktes unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ denselben Wert haben.

Wir kommen nun zum wesentlichen Punkt des Arguments: *Wenn die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auch nur an einem einzigen Punkt des Intervalls $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ denselben Wert haben, dann stimmen sie schon auf dem ganzen Intervall überein.* Der Grund ist der: Auf dem Intervall $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ können wir die Differenz der beiden reellwertigen Funktionen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ betrachten. Diese Differenzfunktion nimmt nur ganzzahlige Werte an (denn die Kompositionen von $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ mit $\exp$ geben ja dieselbe Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$). Andererseits ist die Funktion auch stetig (als Differenz zweier stetiger Funktionen). Wir haben also eine stetige Funktion auf einem Intervall, die nur ganzzahlige Werte annimmt. Eine solche Funktion ist notwendigerweise konstant.

Nachdem die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auf dem Durchschnitt $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ übereinstimmen, ergeben sie eine wohldefinierte Abbildung auf der Vereinigung $Q_{1,1} \cup Q_{1,2}$. Diese Abbildung ist wieder stetig (da sie ja entsteht durch Zusammenbauen von stetigen Abbildungen auf *abgeschlossenen* Unterräumen).

- Das Hinzunehmen der anderen Teilquadrate geht analog. Das ist klar im Fall von $Q_{1,3}, \ldots, Q_{1,m}$. Es ist auch klar im Fall von $Q_{2,1}$ (denn $Q_{2,1}$ trifft die vorher genannten Teilquadrate nur in seinem Durchschnitt mit $G_{1,1}$). Im Falle von $Q_{2,2}$ gibt es ein geringfügig neues Phänomen, denn $Q_{2,2}$ trifft sowohl $Q_{1,2}$ als auch $Q_{2,1}$ jeweils in einem Intervall. Es genügt aber zu bemerken, daß diese beiden Intervalle einen Punkt gemeinsam haben (den linken oberen Eckpunkt von $Q_{2,2}$): sobald die Abbildung $G_{2,2}$ an diesem Punkt den richtigen Wert annimmt, wird das nach dem genannten Argument auch der Fall sein für alle anderen Punkte des Durchschnitts von $Q_{2,2}$ mit der Vereinigung der vorher behandelten Teilquadrate. Die restlichen Teilquadrate schließlich gehen analog zu diesem. □

KOROLLAR. *Die "Windungszahl" k einer Schlinge $f\colon S^1 \to S^1$ hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.*

BEWEIS. Die Windungszahl k war definiert über eine Liftung

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

als die Differenz der Funktionswerte, $k = g(1) - g(0)$. Es sei nun $F\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ eine Homotopie von f zu f' . Nach dem eben bewiesenen Satz existiert eine Liftung

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp \times \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ S^1 \times [0,1] & \xrightarrow{F} & S^1 \end{array}$$

Für jedes $t \in [0,1]$ sei die Zahl k_t jetzt definiert als $k_t = G(1,t) - G(0,t)$. Dann ist

$$t \longmapsto k_t$$

eine stetige Funktion auf $[0,1]$. Andererseits nimmt diese Funktion nur ganzzahlige Werte an, weil

$$\exp(G(1,t)) = F(1,t) = \exp(G(0,t)) .$$

Es folgt, daß die Funktion *konstant* sein muß. Das heißt, k_t hängt in Wirklichkeit gar nicht vom Parameter t ab. Insbesondere ist deshalb

$$k_0 = k_1 ,$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

BEMERKUNG. Die vorstehenden Sätze werden wir später erkennen als Spezialfälle eines allgemeinen *Liftungssatzes* im Rahmen der Theorie der *Überlagerungen*.

Die "Invariante" $X \longmapsto \mathcal{S}(X)$ taugt dazu, S^1 von S^2 zu unterscheiden (denn, wie wir gesehen haben, sind $\mathcal{S}(S^1)$ und $\mathcal{S}(S^2)$ nicht–isomorphe Mengen; oder, was dasselbe bedeutet, sie haben nicht gleich viele Elemente).

Die Invariante taugt aber nicht ohne weiteres dazu, S^1 von $S^1 \times S^1$ zu unterscheiden. Denn wegen

$$\mathcal{S}(S^1 \times S^1) \quad \approx \quad \mathcal{S}(S^1) \times \mathcal{S}(S^1)$$

hat zwar $\mathcal{S}(S^1 \times S^1)$ auf den ersten Blick mehr Elemente als $\mathcal{S}(S^1)$; das ist aber eine Illusion: das Produkt von zwei abzählbar unendlichen Mengen ist wieder eine abzählbar unendliche Menge — die Mengen $\mathcal{S}(S^1 \times S^1)$ und $\mathcal{S}(S^1)$ sind isomorph.

Nun ist $\mathcal{S}(S^1)$ möglicherweise nicht eine vollkommen unstrukturierte Menge: unsere Ausrechnung ging ja über eine ganz bestimmte Beziehung (die "Windungszahl") zu einer höchst strukturierten Menge, nämlich zu der Menge der ganzen Zahlen. Ist das ein Indiz dafür, daß man die Konstruktion $X \longmapsto \mathcal{S}(X)$ ein wenig modifizieren kann, so daß das Resultat der Modifikation eine eingebaute algebraische Struktur hat? Vielleicht eine Gruppenstruktur?

Im genannten Beispiel würde eine solche Modifikation einen Unterschied machen. Denn für eine *Gruppe* mit abzählbar vielen Elementen (im Gegensatz zu einer *Menge* mit abzählbar vielen Elementen) werden wir im allgemeinen *nicht* die Existenz eines Isomorphismus

$$G \overset{?}{\approx} G \times G$$

erwarten können; z.B. gibt es einen solchen Isomorphismus nicht, wenn G die Gruppe der ganzen Zahlen ist (mit der Addition als Gruppenoperation).

Die angestrebte Modifikation nun existiert. Dies beruht auf der Tatsache, daß man das "Hintereinander–Durchlaufen" von Wegen ausnutzen kann, um ein Kompositionsgesetz für Wege zu definieren.

Natürlich kann man zwei Wege nur dann hintereinander durchlaufen, wenn der Anfangspunkt des zweiten Weges übereinstimmt mit dem Endpunkt des ersten Weges. Und damit Wege *immer* zusammensetzbar sind, braucht man, daß sie *alle* denselben Anfangs– und Endpunkt haben.

Aus dieser Not macht man sogleich eine Tugend. In dem betrachteten Raum zeichnet man nämlich einen Punkt aus als den sogenannten *Basispunkt*, und man betrachtet hinfort nur solche Wege, die in dem Basispunkt sowohl anfangen als auch aufhören. Einen solchen Weg werden wir auch als eine *Schleife* bezeichnen.

Definition. Sei X topologischer Raum und x ein Punkt in X (der Basispunkt). Eine *Schleife in* X *zum Basispunkt* x (oder kurz, eine *Schleife in* (X, x)) ist eine Abbildung von Paaren

$$v : \; ([0,1]\,,\, \{0,1\}) \;\longrightarrow\; (\,X,\, x\,)$$

d.h., eine stetige Abbildung $v\colon [0,1] \to X$ mit der Eigenschaft $v(0) = x = v(1)$. *Homotopie von Schleifen* bezeichnet die Homotopie von Wegen relativ zu Anfangs– und Endpunkt.

$$\pi_1(X,x)$$

ist definiert als die *Menge der Homotopieklassen von Schleifen in* (X,x) .

Bemerkung. Es gibt eine 1–1 Beziehung von $\pi_1(X,x)$ zu der *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren*

$$w:\ (S^1,1) \longrightarrow (X,x)\ .$$

Das geht im einzelnen so. Wir fassen S^1 auf als Quotientenraum von $[0,1]$ vermöge der Abbildung $\exp : [0,1] \to S^1$. Wir fixieren den Punkt $1 \in S^1$ als Basispunkt. Die Bedingung $v(0) = v(1) = x$ für eine Schleife v sagt dann gerade, daß die Abbildung

$$v\colon\ (\,[0,1]\,,\,\{0,1\}) \longrightarrow (\,X,\,x\,)$$

aufgefaßt werden kann als die Komposition der Abbildung (von Paaren)

$$\exp :\ (\,[0,1]\,,\,\{0,1\}) \longrightarrow (\,S^1,\,1\,)$$

mit einer Abbildung auf dem Quotientenraum (wieder eine Abbildung von Paaren)

$$w:\ (S^1,1) \longrightarrow (X,x)\ .$$

Dies ist eine 1–1 Beziehung, denn die Abbildung v (re–)konstruiert sich als die zusammengesetzte Abbildung $w \circ \exp$. Schließlich ist diese 1–1 Beziehung auch verträglich mit dem Übergang zu Homotopieklassen von Abbildungen: Einer Homotopie von Abbildungen $w\colon (S^1,1) \to (X,x)$, die auf dem Basispunkt konstant ist, entspricht eine Homotopie von Wegen $v\colon (\,[0,1]\,,\{0,1\}) \to (X,x)$, die auf den Endpunkten konstant ist; und umgekehrt. $\square$

Definition und Satz. *Die Menge* $\pi_1(X,x)$ *hat eine* (natürliche) *Gruppenstruktur*. $\pi_1(X,x)$ zusammen mit dieser Gruppenstruktur heißt die *Fundamentalgruppe* (oder *Wegegruppe*) des topologischen Raumes X *am Basispunkt* x .

Dazu. Seien v und v' zwei Schleifen (Wege mit Anfangspunkt und Endpunkt jeweils am Basispunkt). Man definiert den *zusammengesetzten Weg* $v\,v'$ so, wie es der Name suggeriert: erst wird v durchlaufen, dann v' . Wenn man dies mit Hilfe einer Formel ausdrückt, so ist das Resultat ein wenig technischer als man es aufgrund der einfachen Idee erwarten sollte. Der Grund liegt darin, daß man sich ja schon darauf festgelegt hat, daß eine *Schleife* eine Abbildung ist, die als ihren Definitionsbereich das *Einheits*–Intervall hat; daß man also sozusagen für das Durchlaufen der Schleife genau eine Zeiteinheit zur Verfügung hat. Beim Hinschreiben des zusammengesetzten Weges muß man sich deshalb insbesondere nun darauf festlegen, wieviel von der zur Verfügung stehenden Zeiteinheit auf die jeweiligen Teilwege entfallen soll. Wenn man, bei zwei

Wegen, sich entschließt, daß jeder der Teilwege die Hälfte der zur Verfügung stehenden Zeit bekommen soll, und daß er im übrigen auch "mit gleichförmiger Geschwindigkeit" durchlaufen werden soll, so bekommt man für den zusammengesetzten Weg die Formel,

$$v\,v'\,(s) \;=\; \begin{cases} v\,(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ v'(2s{-}1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \;. \end{cases}$$

Die erforderte Festlegung hat auch noch andere unerwünschte Konsequenzen. So ist die Komposition von Schleifen *nicht* assoziativ (denn wenn man zwei Wege zusammensetzt und das Resultat wieder mit einem dritten, so bekommen die ersten beiden Wege von der Gesamtzeit jeweils ein Viertel ab und der dritte Weg die Hälfte; bei anderer Klammerung wäre die Aufteilung anders).

Es bezeichne nun $[v]$ das von v repräsentierte Element in $\pi_1(X,x)$. Das *Produkt* in $\pi_1(X,x)$ ist definiert als

$$[v]\;[v'] \;=\; [v\,v'] \;.$$

Oder, um es deutlicher zu machen: wenn a und b Elemente von $\pi_1(X,x)$ sind, so ist ihr Produkt $a\,b$ in $\pi_1(X,x)$ wie folgt gegeben. Seien v und v' Repräsentanten für a und b , d.h., Schleifen mit $[v] = a$ und $[v'] = b$, dann ist das Produkt $a\,b$ repräsentiert durch die *zusammengesetzte Schleife*, $a\,b = [v\,v']$. Selbstverständlich ist hier nachzuweisen, daß das Produkt in Wirklichkeit nicht abhängt von der Auswahl der benutzten Repräsentanten. Das ist eine Übungsaufgabe (s. Übungszettel 9, Aufgabe 5).

Das Produkt hat die folgenden Eigenschaften (der Beweis besteht jeweils in der Angabe geeigneter Homotopien; s. Übungszettel 9, Aufgabe 5):

- Komposition von Schleifen ist assoziativ *nach Übergang zur Homotopieklasse*.
- Der triviale Weg $\mathrm{tr}\colon [0,1] \to X$, $\mathrm{tr}(s) = x$ für alle s , ist neutrales Element für das Produkt, d.h. es ist $[\mathrm{tr}]\;[v] \;=\; [v] \;=\; [v]\;[\mathrm{tr}]$ für alle v .
- Der Weg $\overline{v}$, $\overline{v}(s) := v(1{-}s)$, ist *invers* zu v , d.h. $[\overline{v}]\;[v] \;=\; [v]\;[\overline{v}] \;=\; [\mathrm{tr}]$.

Die Menge $\pi_1(X,x)$ ist also eine *Gruppe* unter dem angegebenen Kompositionsgesetz.

Ähnlich wie wir es von anderen Konstruktionen schon gewöhnt sind, so ist auch die Konstruktion von $\pi_1(X,x)$ *funktoriell*. Nämlich, wenn $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist und wenn zudem f noch den Basispunkt x von X auf den Basispunkt y von Y abbildet oder, wie wir dafür auch sagen wollen, wenn f eine *Abbildung von punktierten Räumen* ist,

$$f :\; (X,x) \;\longrightarrow\; (Y,y) \;,$$

dann gibt es eine induzierte Abbildung

$$f_* :\; \pi_1(X,x) \;\longrightarrow\; \pi_1(Y,y) \;,$$

die definiert ist durch $f_*(\,[v]\,) \;:=\; [\,f{\circ}v\,]$ (wie üblich, so ist hier implizit die Unabhängigkeit von der Auswahl des Repräsentanten v von $[v]$ behauptet). Diese induzierte Abbildung nun ist mit der Gruppenstruktur verträglich oder, was dasselbe bedeutet, f_* ist ein *Gruppenhomomorphismus*,

$$f_*(\,[v]\,[v']\,) \;=\; f_*(\,[v]\,)\,f_*(\,[v']\,) \;.$$

Um dies einzusehen, braucht man nicht einmal Homotopien; eine entsprechende Gleichung gilt schon für geeignete Repräsentanten. Denn wenn v und v' Schleifen in (X,x) sind, so kann man einerseits diese beiden als Schleifen in (X,x) zusammensetzen und das Resultat nach (Y,y) transportieren; das gibt $f\circ(v\,v')$. Zum andern kann man auch zuerst transportieren, das gibt die Schleifen $(f{\circ}v)$ und $(f{\circ}v')$; diese kann man dann zusammensetzen zu $(f{\circ}v)\,(f{\circ}v')$. Man hat aber nun

$$f\circ(v\,v') \;=\; (f{\circ}v)\,(f{\circ}v')\ ,$$

denn beide Seiten dieser behaupteten Gleichung beschreiben in Wirklichkeit *dieselbe* Abbildung (Nachprüfen der Definitionen!). □

Wir schauen einige Beispiele an.

Beispiel. Für $n \geq 2$ und für jedes $x \in S^n$ ist $\pi_1(S^n,x)$ die *triviale Gruppe*; d.h. die Gruppe, die nur ein einziges Element, nämlich das *Eins–Element* oder *neutrale Element* hat (das von der *trivialen Schleife* $S^1 \longrightarrow \{x\}$ repräsentiert wird).

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der Beweis dafür, daß die Menge $\mathcal{S}(S^n)$ für $n \geq 2$ nur ein einziges Element hat. Wir beschreiben Schleifen mit Hilfe von punktierten Abbildungen der S^1 . Den Basispunkt von S^n stellen wir uns als den Südpol vor. Für eine vorgegebenen Schleife $w\colon (S^1,1) \to (S^n,x)$ konstruieren wir, wie früher, eine Homotopie (relative Version!) von w zu einer Abbildung w' , wo $w'(S^1)$ den Nordpol in S^n nicht trifft. Über die topologische Äquivalenz von S^n–Nordpol zu $\mathbb{R}^n$ bekommen wir dann die gewünschte *Nullhomotopie* (= Homotopie zur trivialen Schleife).

Beispiel. Für jeden Basispunkt x in S^1 ist $\pi_1(S^1,x)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$, der *Gruppe der ganzen Zahlen unter der Addition*.

Auch dies haben wir eigentlich schon gezeigt. Bezeichne Z_x das Urbild von $x \in S^1$ unter der Abbildung exp (wenn z.B. $x = 1$ dann ist Z_x die Menge der ganzen Zahlen). Wie früher bei der Bestimmung von $\mathcal{S}(S^1)$ argumentieren wir, daß wir für jede Abbildung $w\colon\ (S^1,1) \to (S^1,x)$ ein Diagramm bekommen können,

$$\begin{array}{ccc}
(\,[0,1]\,,\{0,1\}\,) & \xrightarrow{\ \widetilde{v}\ } & (\mathbb{R},\mathbb{Z}_x) \\
\big\downarrow \mathrm{exp} & & \big\downarrow \mathrm{exp} \\
\big(S^1,1\big) & \xrightarrow{\ w\ } & \big(S^1,x\big)
\end{array}$$

und wie dort hängt die Zahl $k = \widetilde{v}(1) - \widetilde{v}(0)$ nur von der Homotopieklasse von w ab; umgekehrt ist durch k auch die Abbildung w bis auf Homotopie *relativ zu* $\{0,1\}$ schon festlegt. Wir haben also, wie dort, eine Bijektion

$$\pi_1\big(S^1,x\big) \ \xrightarrow{\approx}\ \mathbb{Z}\ .$$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Bijektion ein *Gruppenisomorphismus* ist. Dazu wird es genügen, den Fall zu betrachten, wo die Schleife

$$v \;=\; w \circ \exp : \;\; (\,[0,1]\,,\{0,1\}) \;\longrightarrow\; (S^1, x)$$

die Zusammensetzung von zwei Schleifen v_1 und v_2 ist,

$$v \;=\; v_1\, v_2 \;.$$

In diesem Falle ist aber die Liftung $\widetilde{v}$ ebenfalls eine Zusammensetzung

$$\widetilde{v}(s) \;=\; \widetilde{v}_1\, \widetilde{v}_2(s) \;=\; \begin{cases} \widetilde{v}_1\,(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \widetilde{v}_2(2s{-}1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \;. \end{cases}$$

Für die Windungszahl k von w folgt deshalb

$$k \;=\; \widetilde{v}(1) - \widetilde{v}(0) \;=\; \big(\widetilde{v}(\tfrac{1}{2}) - \widetilde{v}(0)\big) + \big(\widetilde{v}(1) - \widetilde{v}(\tfrac{1}{2})\big) \;=\; k_1 + k_2 \;,$$

wo $k_1 = \widetilde{v}_1(1) - \widetilde{v}_1(0)$ die Windungszahl von w_1 bezeichnet ($v_1 = w_1 \circ \exp$); und k_2 die Windungszahl von w_2 . □

In diesen beiden Beispielen hängt die Fundamentalgruppe nicht von der Wahl des Basispunktes ab. Das ist kein Zufall:

Satz. *Seien* x *und* x' *zwei Punkte in derselben Weg–Zusammenhangs–Komponente von* X *. Dann ist* $\pi_1(X,x)$ *isomorph zu* $\pi_1(X,x')$.

Bemerkung. Auf den Wegzusammenhang kann man hier nicht verzichten. Sei z.B. X die disjunkte Vereinigung $S^1 \dot\cup S^2$. Es ist dann

$$\pi_1(\,S^1 \dot\cup S^2, \,x\,) \;=\; \begin{cases} \pi_1(\,S^1,\, x) & \text{wenn } \; x \in S^1 \\ \pi_1(\,S^2,\, x) & \text{wenn } \; x \in S^2 \end{cases}$$

(denn ein in S^1 in $S^1 \dot\cup S^2$ beginnender Weg kann nicht aus S^1 heraus; ebenso kann ein in S^2 beginnender Weg nicht aus S^2 heraus).

Beweis des Satzes. Nach Voraussetzung existiert ein Weg

$$w : \;\; [0,1] \longrightarrow X \;, \quad \text{mit} \;\; w(0) = x\,, \; w(1) = x' \;.$$

Man definiert eine Abbildung

$$w_* : \;\pi_1(X,x) \;\longrightarrow\; \pi_1(X,x')$$

unter Benutzung dieses Weges, wie folgt. Sei

$$v : \;\; (\,[0,1]\,,\{0,1\}) \;\longrightarrow\; (X,x)$$

eine Schleife in X zum Basispunkt x . Dann ist eine Schleife in X zum Basispunkt x' gegeben durch

$$v'(s) \quad = \quad \begin{cases} w(1{-}3s) & 0 \le s \le \frac{1}{3} \\ v(3s{-}1) & \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3} \\ w(3s{-}2) & \frac{2}{3} \le s \le 1 \ . \end{cases}$$

Analog induziert der Weg $\overline{w}$ von x' zu x eine Abbildung

$$\overline{w}_* : \ \pi_1(X,x') \ \longrightarrow \ \pi_1(X,x) \ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\overline{w}_* \circ w_*$

$$\pi_1(X,x) \ \xrightarrow{w_*} \ \pi_1(X,x') \ \xrightarrow{\overline{w}_*} \ \pi_1(X,x)$$

ist die Identität, denn sie ist gegeben durch Vor– und Nachschalten je einer nullhomotopen Schleife, nämlich von $w\,\overline{w}$ bzw. $\overline{w}\,w$. Ähnlich gilt, daß die zusammengesetzte Abbildung $w_* \circ \overline{w}_*$ die Identität ist.

Es ist klar (oder?), daß der konstruierte Isomorphismus $w_* : \ \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x')$ mit der Gruppenstruktur verträglich ist; d.h., daß die Konstruktion (*nach* Übergang zu Homotopieklassen) mit der Komposition von Wegen verträglich ist.

Die Notation “ w_* ” deutet an, daß für die Konstruktion ein ganz bestimmter Weg, nämlich eben w , benutzt worden ist. Diese Präzisierung in der Notation ist notwendig, weil der resultierende Isomorphismus i.a. wirklich von der Wahl des Weges abhängt. Dies wird besonders deutlich, wenn man den Spezialfall betrachtet, wo $x = x'$ ist; wo in anderen Worten w ein *geschlossener* Weg mit Anfangspunkt und Endpunkt x ist. In diesem Falle wird der Isomorphismus w_* im allgemeinen *nicht* die identische Abbildung sein. Man kann ihn angeben. Nämlich, wenn $[w]$ das von w repräsentierte Element in $\pi_1(X,x)$ bezeichnet, dann ist die Abbildung w_* dasselbe wie der durch dies Element gegebene *innere Isomorphismus*: die Abbildung von $\pi_1(X,x')$ auf sich, die gegeben ist durch

$$\alpha \ \longmapsto \ [w]^{-1}\,\alpha\,[w] \ .$$

Definition. Sei X topologischer Raum. Eine *Überlagerung von* X bezeichnet einen topologischen Raum E zusammen mit einer Abbildung

$$p: \; E \longrightarrow X \; ,$$

die der folgenden Bedingung genügt:

Für jeden Punkt $x \in X$ *existiert eine Umgebung* U *von* x *in* X , *eine diskrete Menge* F_x (d.h. eine Menge, die aufgefaßt wird als topologischer Raum mit der diskreten Topologie) *und eine topologische Äquivalenz* u *von dem Unterraum* $p^{-1}(U)$ *in* E *zu dem Produktraum* $U \times F_x$; dabei soll u eine "*Abbildung über* U " sein, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\;u\;} & U \times F_x \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U & \xrightarrow{\;\mathrm{id}_U\;} & U \end{array}$$

ist kommutativ.

Der Produktraum $U \times F_x$ könnte ebenso gut auch beschrieben werden als eine disjunkte Vereinigung von Kopien von U , nämlich je eine solche Kopie für jeden Punkt y in F_x . Da

$$U \times \{y\} \;\longrightarrow\; U$$

eine topologische Äquivalenz ist, gibt die Definition insbesondere deshalb eine Formulierung der Art, daß die Abbildung $p: E \to X$ "lokal" eine topologische Äquivalenz ist. Dies ist eine *starke* Formulierung insofern als *lokal* sich hier auf X bezieht, also eine *gleichzeitige* Aussage für sämtliche Urbilder macht.

Etwas technischer kann man es auch so ausdrücken: Für jedes $y \in p^{-1}(x)$ gibt es eine *lokale Umkehrabbildung*, definiert auf der Umgebung U , die x auf y abbildet. Dies ist eine Abbildung

$$u_y : \; U \longrightarrow E$$

mit der Eigenschaft, daß $p \circ u_y = \mathrm{id}_U$ und daß eben $u_y(x) = y$. Es ist

$$u_y : \; U \to \mathrm{Bild}\,(u_y)$$

eine topologische Äquivalenz. Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist, insgesamt, die disjunkte Vereinigung

$$p^{-1}(U) \quad \approx \quad \dot{\bigcup}_{y \in p^{-1}(x)} \mathrm{Bild}\,(u_y) \; .$$

Hier sind noch einige Vokabeln. Die Abbildung p heißt die *Überlagerungs–Projektion*. Die in der Definition vorkommende Umgebung U wird als eine *Elementarumgebung* (des Punktes x) bezeichnet. F_x heißt die *Faser über* x (es folgt aus der Definition der Überlagerungen, daß F_x zu dem Urbild $p^{-1}(x)$ isomorph ist; sogar als topologischer Raum — mit anderen Worten, $p^{-1}(x)$ trägt als Unterraum von E die diskrete Topologie). Die Anzahl der Punkte in F_x , insbesondere wenn diese Anzahl endlich ist, wird manchmal als die *Blätterzahl* der Überlagerung bezeichnet. (Genau genommen sollten wir hier von der *Blätterzahl am Punkte* x reden. Wir werden später sehen, daß bei *weg–zusammenhängendem* X die Blätterzahl nicht von dem Punkt x abhängt; im allgemeinen kann das aber durchaus der Fall sein).

Bevor wir zu interessanten Beispielen für Überlagerungen kommen, wollen wir einige eher uninteressante Dinge vorweg abhaken. Zunächst gibt es die banalen Beispiele für Überlagerungen: Jede topologische Äquivalenz ist eine Überlagerung; und die Abbildung der leeren Menge in irgendeinen Raum X ist auch eine Überlagerung.

Als nächstes nehmen wir zur Kenntnis, daß man aus gegebenen Überlagerungen über die *disjunkte Vereinigung* neue produzieren kann. Zunächst, wenn $E_1 \to X_1$ und $E_2 \to X_2$ Überlagerungen sind, dann ist auch die Abbildung der disjunkten Vereinigungen,

$$E_1 \dot\cup E_2 \longrightarrow X_1 \dot\cup X_2 \ ,$$

eine Überlagerung (denn für den Überlagerungstest an einem Punkt $x \in X_1 \dot\cup X_2$ braucht man nur folgendes zu bemerken: wenn $x \in X_1$, dann macht man den Überlagerungstest für $E_1 \to X_1$; ähnlich, wenn $x \in X_2$). — Ein wenig interessanter ist der folgende Sachverhalt.

SATZ. *Wenn* $p_1 : E_1 \to X$ *und* $p_2 : E_2 \to X$ *Überlagerungen sind, dann auch*

$$p_1 \dot\cup p_2 \ : \ E_1 \dot\cup E_2 \longrightarrow X \ .$$

BEWEIS. Sei $x \in X$. Der Überlagerungstest für $p_1 : E_1 \to X$ gibt eine Umgebung U_1 von x und eine topologische Äquivalenz (über U_1)

$$u_1 : \ {p_1}^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times F_x^1 \ .$$

Ähnlich gibt der Überlagerungstest für $p_2 : E_2 \to X$ eine Umgebung U_2 von x und eine topologische Äquivalenz (über U_2)

$$u_2 : \ {p_2}^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times F_x^2 \ .$$

Durch Zusammenbauen dieser beiden bekommt man eine topologische Äquivalenz (über $U_1 \cap U_2$)

$$u_1|_{(U_1\cap U_2)} \dot\cup u_2|_{(U_1\cap U_2)} \ : \ (p_1 \dot\cup p_2)^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cap U_2) \times (F_x^1 \dot\cup F_x^2) \ .$$

Dies ist der erfolgreiche Überlagerungstest für die Abbildung $p_1 \dot\cup p_2$ über der Umgebung $U_1 \cap U_2$ von x . □

Beispiele. (a) Sei die 1-Sphäre gegeben als der Raum der komplexen Zahlen vom Betrag 1, $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. Die Abbildung $S^1 \to S^1$,

$$z \longmapsto z^k$$

(k eine ganze Zahl), kann interpretiert werden als "k–faches Aufwickeln". Vorausgesetzt, daß $k \neq 0$, so ist die Abbildung eine Überlagerung. Die Blätterzahl ist $|k|$, die lokalen (!) Umkehrfunktionen sind gegeben durch

$$x \longmapsto \sqrt[k]{x} \ .$$

Ähnlich wie früher im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion angesprochen, so ist auch die Funktion "*k-te Wurzel*" für $k \geq 2$ im komplexen Bereich nur *lokal* als Funktion eindeutig definierbar (beim Versuch, eine globale Definition zu bekommen, ergeben sich Mehrdeutigkeiten). Technisch zeigt sich das wieder darin: wenn man die Funktion um einen Punkt $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, in eine Potenzreihe entwickelt, so wird diese Potenzreihe nur in einem Kreis um den Punkt a mit Radius $|a|$ konvergieren; die Potenzreihe konvergiert sicherlich nicht für alle Punkte auf dem Einheitskreis gleichzeitig.

(b) Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$,

$$x \longmapsto \exp(x) = e^{2\pi i x} \ ,$$

ist eine unendlich–blättrige Überlagerung (vgl. S. 68). Daß die lokalen Umkehrfunktionen (der Logarithmus) nur *lokal* eindeutig definierbar sind, wurde auch früher schon angesprochen.

(c) Die in (a) und (b) beschriebenen Überlagerungen des Kreises kann man zu weiteren Überlagerungen kombinieren (über die disjunkte Vereinigung — der vorstehende Satz).

(d) Bezeichne $\mathbb{R}P^2$ den Quotienten–Raum von S^2, der durch die Identifizierung von Antipodenpunkten entsteht. Die Quotientenraum–Projektion

$$p : \ S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$$

ist eine Überlagerung (mit Blätterzahl 2). Denn sei z.B. $x \in \mathbb{R}P^2$ der Bildpunkt des Nordpols. Sei die Umgebung $U \subset \mathbb{R}P^2$ definiert als das Bild der nördlichen Polkappe. Dann ist

$$p^{-1}(U) \ \approx \ \text{(nördl. Polkappe)} \ \dot{\cup} \ \text{(südl. Polkappe)} \ .$$

(e) Das letzte Beispiel, das wir hier betrachten, ist *keine* Überlagerung, obwohl es bei einem ersten flüchtigen Blick so aussehen mag. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die (Überlagerungs–) Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ liefert per Einschränkung eine Abbildung, die (a, b) auf den Kreis aufwickelt,

$$q : (a, b) \longrightarrow S^1 \ , \quad y \longmapsto \exp(y) \ .$$

Die Abbildung ist "lokal eine topologische Äquivalenz" in dem Sinne, daß zu jedem Punkt $z \in (a,b)$ eine Umgebung V von z existiert, so daß die eingeschränkte Abbildung $q|_V : V \to q(V)$ eine topologische Äquivalenz von V auf eine Umgebung des Bildpunktes $q(z)$ ist.

Andererseits ist die Abbildung *nicht* eine Überlagerung. Der Überlagerungs–Test funktioniert nämlich nicht für die beiden Punkte in S^1, die unter den Endpunkten von (a,b) liegen. Denn am Punkt $\exp(a)$ zum Beipiel müßte es einerseits eine lokale Umkehrfunktion geben, deren Bild die Punkte in (a,b) in der Nähe von a enthielte, andererseits aber könnte das Bild nicht den Punkt a selbst enthalten. Das ist offenbar widersprüchlich. □

Wir wenden uns jetzt den Überlagerungen allgemein zu. Wir benötigen zwei Sätze technischen Charakters, die wir als nächstes herleiten wollen, den *Wege–Liftungs–Satz* und den *Homotopie–Liftungs–Satz*. Im Grunde kennen wir diese Sätze schon. Wir haben sie nämlich verwendet bei der Berechnung von $\pi_1(S^1, x)$ bzw. $\mathcal{S}(S^1)$ (Seite 69 und Seite 70), wo wir diese Sätze für den speziellen Fall der Überlagerungs–Projektion $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ formuliert hatten.

Abgesehen von der größeren Allgemeinheit gibt es bei der gegenwärtigen Behandlung noch einen weiteren Unterschied. Wir werden bei unseren Liftungs–Problemen nämlich grundsätzlich voraussetzen, daß eine Liftung eines Anfangs–Punktes schon vorgegeben ist (oder schon vorher gewählt worden war). Dem Anschein nach ist dies eine irrelevante Kleinigkeit. Es hat aber einen dramatischen Effekt; es erzwingt nämlich die *Eindeutigkeit*(!) der Liftung.

Satz (Wege–Liftungs–Satz). *Sei $p \colon E \to X$ eine Überlagerung. Sei $w \colon [0,1] \to X$ ein Weg mit Anfangspunkt $w(0) = x_0$. Sei y_0 eine Liftung von x_0* (d.h. $y_0 \in p^{-1}(x_0)$). *Es existiert eine Liftung von w zum Anfangspunkt y_0*; d.h. *es existiert ein Weg*

$$\widetilde{w} : \ [0,1] \to E \ ,$$

so daß $\widetilde{w}(0) = y_0$ und so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\ \widetilde{w}\ } & E \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}|_{[0,1]}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle p} \\ [0,1] & \xrightarrow{\ w\ } & X \end{array}$$

kommutiert. Der geliftete Weg $\widetilde{w}$ ist (bei Vorgabe des Anfangspunktes) *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ sei eine *Elementar–Umgebung* U_x von x gewählt; solche existieren nach Definition der Überlagerungen. Es ist also

$$p^{-1}(U_x) \ \approx \ U_x \times p^{-1}(x)$$

in einer mit der Projektion verträglichen Weise, und auf U_x haben wir lokale Umkehr–Abbildungen zur Verfügung; diese sind indiziert durch die Punkte von $p^{-1}(x)$.

Da wir notfalls U_x auch durch seinen offenen Kern ersetzen können, dürfen wir annehmen, daß U_x selbst eine *offene* Umgebung von x ist. Damit haben wir dann insgesamt eine offene Überdeckung von X , nämlich $\{U_x\}_{x\in X}$. Die zurückgezogene Überdeckung $\{w^{-1}(U_x)\}_{x\in X}$ ist nun eine offene Überdeckung des kompakten, metrischen Raumes $[0,1]$, auf die wir den Lebesgue'schen Überdeckungs–Satz anwenden können. Folglich existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß ... .

Wir wählen eine Unterteilung von $[0,1]$ in Bögen $B_1,\ldots,B_m$, von denen jeder eine Länge $< \varepsilon$ hat. Nach Herleitung gilt dann für jedes $j = 1,\ldots,m$, daß das Bild $w(B_j)$ ganz enthalten ist in einer (oder mehreren) der Elementar–Umgebungen U_x ; sei ein solches x ausgewählt und mit x_j bezeichnet. Statt U_{x_j} schreiben wir kürzer auch U_j ; also

$$w(B_j) \ \subset \ U_{x_j} = U_j \ .$$

Auf der Elementar–Umgebung U_j sind nun die lokalen Umkehr–Abbildungen

$$u_z : \ U_j \longrightarrow E \quad (\text{für } \ z \in p^{-1}(x_j) \ )$$

definiert. In einer Weise, die noch zu beschreiben sein wird, wählen wir unter diesen lokalen Umkehr–Abbildungen eine ganz bestimmte aus, die wir mit u_j bezeichnen. Damit wird dann die eingeschränkte Abbildung $\widetilde{w}|_{B_j}$ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$B_j \ \xrightarrow{w|_{B_j}} \ U_{x_j} \ \xrightarrow{u_j} \ E \ .$$

Die Auswahl der lokalen Umkehr–Abbildungen ist natürlich so zu treffen, daß die eingeschränkten Abbildungen auch zusammenpassen; das geht am besten durch Induktion.

1. Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_1}$). Der Anfangspunkt $w(0) = x_0$ ist enthalten in U_1 , und

$$p^{-1}(U_1) \ = \ \dot{\bigcup}_{z\in p^{-1}(x_1)} \operatorname{Bild}(u_z) \ .$$

Da der vorgegebene Anfangspunkt y_0 enthalten ist in $p^{-1}(x_0)$, und damit auch in $p^{-1}(U_1)$, existiert somit ein z_1 (und zwar genau eins) so daß $y_0 \in \operatorname{Bild}(u_{z_1})$. Wir setzen $u_1 = u_{z_1}$, also

$$\widetilde{w}|_{B_1} \ = \ u_{z_1} \circ (w|_{B_1}) \ .$$

2. Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_2}$). Da der Anfangspunkt von B_2 gleich dem Endpunkt von B_1 ist, ist die zu definierende Abbildung $\widetilde{w}|_{B_2}$ auf dem Anfangspunkt a_2 von B_2 bereits definiert, nämlich als $\widetilde{w}|_{B_1}(a_2)$. Der Bildpunkt nun ist enthalten in

$$p^{-1}(U_2) \ = \ \dot{\bigcup}_{y\in p^{-1}(x_2)} \operatorname{Bild}(u_y)$$

und damit in $\operatorname{Bild}(u_{z_2})$ für genau ein $z_2 \in p^{-1}(x_2)$. Wir setzen

$$\widetilde{w}|_{B_2} \ = \ u_{z_2} \circ (w|_{B_2}) \ .$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$(\widetilde{w}|_{B_2})\,(\text{Anfangspunkt von } B_2) \;=\; (\widetilde{w}|_{B_1})\,(\text{Endpunkt von } B_1) \;.$$

3.Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_3}, \ldots, \widetilde{w}|_{B_m}$). Das geht analog.

Bei der vorstehenden Konstruktion ist schlechterdings nicht zu sehen, was man hätte anders machen können. Insofern ist die Eindeutigkeit der Konstruktion zumindest plausibel. Trotzdem scheint es nicht unangebracht, für die Eindeutigkeit auch noch ein Argument anzugeben.

Sei also $\widetilde{w}'$ eine weitere Liftung von w mit

$$\widetilde{w}'(0) \;=\; \widetilde{w}(0) \;=\; y_0 \;.$$

Sei ε die durch die obige Anwendung des Lebesgue'schen Satzes gegebene Zahl. Es genügt sicherlich, zu zeigen: wenn $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ an einer Stelle $s \in [0,1]$ übereinstimmen, dann auch noch in dem in s beginnenden Bogen B der Länge $\varepsilon/_2$.

Sei also s eine Stelle, an der $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ übereinstimmen. Sei B der dort beginnende Bogen der Länge $\varepsilon/_2$. Dann ist B in einer ε–Kugel enthalten. Nach der Konstruktion von ε über den Lebesgueschen Satz existiert deshalb eine Elementar–Umgebung U_x in X mit

$$w(B) \;\subset\; U_x \;.$$

Das Urbild $p^{-1}(U_x)$ ist eine disjunkte Vereinigung,

$$p^{-1}(U_x) \;\;=\;\; \dot{\bigcup}_{z \in p^{-1}(x)} \mathrm{Bild}(u_z) \;.$$

Andererseits kann der zusammenhängende Raum B nur auf solche Weise in eine disjunkte Vereinigung abbilden, daß der ganze Raum in eine *einzige* Komponente davon abbildet (das Bild eines zusammenhängenden Raumes ist wieder zusammenhängend!). Jeder der beiden Wege $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ ist folglich in jeweils einer einzigen Komponente von $\dot{\bigcup}_{z \in p^{-1}(x)} \mathrm{Bild}(u_z)$ enthalten. Schließlich haben diese beiden Komponenten auch noch einen Punkt gemeinsam, nämlich den Punkt $\widetilde{w}(s) = \widetilde{w}'(s)$. Es folgt, daß sie identisch sind; etwa beide gleich $\mathrm{Bild}(u_{z_0})$.

Nun sind aber die lokale Umkehr–Abbildung u_{z_0} einerseits und die Einschränkung der Überlagerungs–Projektion p andererseits zueinander inverse topologische Äquivalenzen zwischen den Räumen $\mathrm{Bild}\,(u_{z_0})$ und U_x . Es folgt, daß für alle $s' \in B$ gilt

$$\widetilde{w}'(s') \;=\; u_{z_0}(p(\widetilde{w}'(s'))) \;=\; u_{z_0}(w(s')) \;=\; u_{z_0}(p(\widetilde{w}(s'))) \;=\; \widetilde{w}(s') \;.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit des gelifteten Weges sind damit nachgewiesen. □

Satz (Homotopie–Liftungs–Satz). *Sei* $p : E \to X$ *Überlagerung. Seien*

$$\widetilde{w}_0\,,\ \widetilde{w}_1 :\ [0,1] \ \longrightarrow\ E$$

zwei Wege mit demselben Anfangspunkt $\widetilde{w}_0(0) \,=\, \widetilde{w}_1(0)$ (aber nicht notwendigerweise mit demselben Endpunkt). *Seien* w_0 *und* w_1 *die projizierten Wege*

$$w_0 \,=\, p \circ \widetilde{w}_0\ , \quad w_1 \,=\, p \circ \widetilde{w}_1\ ,$$

und sei

$$W :\ [0,1] \times [0,1] \ \longrightarrow\ X$$

eine Homotopie von w_0 *zu* w_1 *, relativ zum Anfangspunkt*

$$(\ W\,|_{\,[0,1]\times 0} \,=\, w_0\ ,\quad W\,|_{\,[0,1]\times 1} \,=\, w_1\ ,\quad W(0,t) \,=\, W(0,0) \ \text{ für alle } t\ )\ .$$

Es existiert eine Liftung von W *zu einer Homotopie*

$$\widetilde{W} :\ [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

(d.h. $p \circ \widetilde{W} = W$), *und* $\widetilde{W}$ *ist Homotopie von* $\widetilde{w}_0$ *zu* $\widetilde{w}_1$ *, relativ zum Anfangspunkt. Wenn die Homotopie* W *auf dem Endpunkt konstant ist, so ist auch die Homotopie* $\widetilde{W}$ *auf dem Endpunkt konstant.*

Beweis. Mit dem mittlerweile schon zur Routine gewordenen Trick der Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungssatzes werden wir uns überlegen, daß *irgendeine* Liftung $\widetilde{W}$ von W existiert mit der Eigenschaft

$$\widetilde{W}(0,0) \ =\ \widetilde{w}_0(0)\ .$$

Diese Liftung stellt sich als *eindeutig* heraus, und sie hat auch die verlangten Eigenschaften; von diesen Dingen werden wir uns zunächst überzeugen.

— *Eindeutigkeit von* $\widetilde{W}$. Sei $\widetilde{W}'$ eine weitere Liftung von W mit $\widetilde{W}'(0,0) \,=\, \widetilde{w}_0(0)$. Zu $(s,t) \,\in\, [0,1] \times [0,1]$ gibt es einen Weg

$$v :\ [0,1] \ \longrightarrow\ [0,1] \times [0,1]$$

mit $v(0) \,=\, (0,0)$, $v(1) \,=\, (s,t)$. Es sind dann $\widetilde{W} \circ v$ und $\widetilde{W}' \circ v$ Wege in E , und beide sind Liftungen des Weges $W \circ v$ in X , mit dem gemeinsamen Anfangspunkt $\widetilde{W}(v(0)) \,=\, \widetilde{w}_0(0)$. Der vorige Satz ist nun anwendbar. Nach der Eindeutigklausel dieses Satzes folgt, daß die Wege $\widetilde{W} \circ v$ und $\widetilde{W}' \circ v$ identisch sind, insbesondere ist deshalb auch

$$\widetilde{W}(s,t) \,=\, (\widetilde{W} \circ v)(1) \,=\, (\widetilde{W}' \circ v)(1) \,=\, \widetilde{W}'(s,t)\ .$$

— *Behauptete Eigenschaften.* (i) Weil $p \circ \widetilde{W} = W$, ist $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 0}$ eine Liftung des Weges $w_0 = W|_{[0,1]\times 0}$. Aber $\widetilde{w}_0$ ist auch eine Liftung von w_0 , und zwar zum selben Anfangspunkt $\widetilde{w}_0(0) = \widetilde{W}(0,0)$. Nach der Eindeutigkeitsklausel des vorigen Satzes folgt wieder, daß die Wege $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 0}$ und $\widetilde{w}_0$ identisch sind.

(ii) Die eingeschränkte Homotopie $\widetilde{W}|_{0\times[0,1]}$ und der triviale Weg $0\times[0,1] \to \widetilde{w}_0(0)$ sind beides Liftungen des trivialen Weges $W|_{0\times[0,1]} : 0\times[0,1] \to w_0(0)$ in X , und zwar zum selben Anfangspunkt; sie sind deshalb identisch.

(iii) Wegen (ii) haben die beiden Liftungen $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 1}$ und $\widetilde{w}_1$ von w_1 denselben Anfangspunkt; sie sind deshalb identisch.

(iv) Wenn die Homotopie W auf dem Endpunkt konstant ist, dann sind sowohl die eingeschränkte Homotopie $\widetilde{W}|_{1\times[0,1]}$ als auch die triviale Abbildung $1\times[0,1] \to \widetilde{w}_0(1)$ Liftungen des trivialen Weges mit Wert $w_0(1)$; diese beiden Liftungen sind dann identisch, d.h. die Homotopie $\widetilde{W}$ ist konstant auf dem Endpunkt von $\widetilde{w}_0$.

— *Existenz von* $\widetilde{W}$. Wie im vorigen Satz sei $\{U_x\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X durch Elementar–Umgebungen. Dann ist $\{W^{-1}(U_x)\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung des kompakten, metrischen Raumes $[0,1]\times[0,1]$. Also existiert nach dem Lebesgue'schen Satz ein $\varepsilon > 0$, so daß . . . . Wir wählen eine Unterteilung von $[0,1]\times[0,1]$ in Quadrate gleicher Größe

$$[0,1]\times[0,1] \quad = \quad \bigcup_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le m}} Q_{k,l} \ ,$$

deren jedes in einer ε–Kugel in $[0,1]\times[0,1]$ liegt. Nach Konstruktion von ε gilt dann für jedes (k,l) , daß das Bild $W(Q_{k,l})$ schon ganz enthalten ist in einer Elementar–Umgebung $U_{x_{k,l}}$, die wir abkürzend auch mit $U_{k,l}$ bezeichnen werden. Nun ist

$$p^{-1}(U_{k,l}) \ = \ \dot{\bigcup}_{y\in p^{-1}(x_{k,l})} \mathrm{Bild}\,(u_y) \ ,$$

wobei die u_y , $y \in p^{-1}(x_{k,l})$, die lokalen Umkehrabbildungen auf $U_{k,l}$ bezeichnen. In einer noch zu beschreibenden Weise wird eine dieser lokalen Umkehr–Abbildungen nun ausgewählt, die wir mit $u_{k,l}$ bezeichnen. Wir definieren dann eine Abbildung $\widetilde{W}_{k,l} : Q_{k,l} \to E$ als

$$\widetilde{W}_{k,l} \ = \ u_{k,l} \circ W|_{Q_{k,l}} \ .$$

Die Auswahl der $u_{k,l}$ kann so erfolgen, daß $\widetilde{W}_{k,l}\,|\,Q_{k,l}\cap Q_{k',l'} \ = \ \widetilde{W}_{k',l'}\,|\,Q_{k,l}\cap Q_{k',l'}$. Um das einzusehen, geht man induktiv vor: erst $(k,l) = (1,1)$, dann $(1,2)$, dann $(1,3),\ldots,(1,m)$; weiter mit $(2,1)$, dann $(2,2)$, etc. Die Details sind identisch mit denen in einem schon früher betrachteten Fall (s. Seite 72). Wir werden die Details deshalb hier weglassen. Wir können also schließlich definieren

$$\widetilde{W}\,|_{Q_{k,l}} \ := \ \widetilde{W}_{k,l} \ .$$

□

Als Anwendung der vorstehenden Resultate erhalten wir den nunmehr zu diskutierenden allgemeinen *Liftungs–Satz*. Das bemerkenswerte an diesem Satz ist, daß er eine Beziehung herstellt zwischen Dingen ganz verschiedener Art, nämlich

— einer geometrischen Aussage auf der einen Seite (Existenz einer Liftung) und

— einer algebraischen Aussage auf der anderen (daß nämlich eine gewisse Untergruppe der Fundamentalgruppe eine gewisse andere Untergruppe enthält).

Zur Formulierung des Satzes benötigen wir eine neue Vokabel. Ein Raum wird nämlich als *lokal weg–zusammenhängend* bezeichnet, wenn jeder Punkt darin beliebig kleine weg–zusammenhängende Umgebungen hat. Oder, etwas genauer:

Definition. Ein Raum X heißt *lokal weg–zusammenhängend*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine weg–zusammenhängende Umgebung V von x existiert, die in U enthalten ist.

Für solche Räume notieren wir:

Satz. *Sei X lokal weg–zusammenhängend. Dann gilt:*

- *Jede Weg–Zusammenhangs–Komponente von X ist offen.*
- *X ist die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangs–Komponenten.*
- *Es gibt in X keinen Unterschied zwischen Zusammenhangs–Komponenten einerseits und Weg–Zusammenhangs–Komponenten andererseits.*

Beweis. Die Definition von "lokal weg–zusammenhängend" sagt insbesondere, daß eine Weg–Zusammenhangs–Komponente in X zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung dieses Punktes enthält; sie ist also offen. Das Komplement einer Weg–Zusammenhangs–Komponente ist Vereinigung der anderen Weg–Zusammenhangs–Komponenten und deshalb ebenfalls offen. Es folgt, daß jede Weg–Zusammenhangs–Komponente sowohl offen als auch abgeschlossen ist; der Raum X ist daher die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangs–Komponenten. Schließlich ist jede Weg–Zusammenhangs–Komponente einerseits zusammenhängend, andererseits nach dem gerade gesagten aber nicht enthalten in irgendeiner größeren zusammenhängenden Teilmenge von X; folglich ist sie auch eine Zusammenhangskomponente. $\square$

Für später notieren wir an dieser Stelle noch den folgenden Sachverhalt.

Satz. *Sei X lokal weg–zusammenhängend. Sei $p : E \to X$ Überlagerung. Dann gilt:*

- *E ist lokal weg–zusammenhängend.*
- *Wenn E' Zusammenhangs–Komponente von E ist (oder, allgemeiner, eine Vereinigung von Zusammenhangs–Komponenten), dann ist $p|_{E'} : E' \to X$ ebenfalls eine Überlagerung.*

Beweis; Sei $e \in E$ und sei V Umgebung von e . Wir wollen zeigen, daß V eine wegzusammenhängende Umgebung von e enthält. Sei U eine Elementarumgebung des Bildpunktes $p(e)$, so daß also eine topologische Äquivalenz (über U) besteht,

$$p^{-1}(U) \approx U \times p^{-1}(p(e)) .$$

Es ist $p|_{(U\times e)} : (U\times e) \to U$ eine topologische Äquivalenz, und $V \cap (U\times e)$ ist Umgebung von e . Es folgt, daß $p(V \cap (U\times e))$ eine Umgebung von $p(e)$ in U ist; und deshalb auch in X . Nach Voraussetzung über X nun enthält diese Umgebung noch eine wegzusammenhängende Umgebung U' von $p(e)$. Damit ist dann

$$U' \times e \subset U \times p^{-1}(p(e))$$

eine wegzusammenhängende Umgebung von e , die in $V \cap (U\times e)$ enthalten ist und deshalb auch in V . Die erste Behauptung ist somit geklärt.

Da wir nun wissen, daß E lokal wegzusammenhängend ist, wissen wir auch (nach dem vorigen Satz), daß E die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangskomponenten ist (und daß *Zusammenhangskomponenten* einerseits und *Weg–Zusammenhangskomponenten* andererseits in E dasselbe bedeuten).

Sei E' eine Zusammenhangskomponente in E (oder eine Vereinigung von solchen), sei E'' das Komplement. E ist dann die disjunkte Vereinigung von E' und E'' . Um zu zeigen, daß die eingeschränkte Abbildung $p|_{E'} : E' \to X$ eine Überlagerung ist, werden wir zeigen, daß wir für jeden Punkt $x \in X$ eine Elementarumgebung finden können.

Sei also $x \in X$. Sei U eine Elementarumgebung von x (für die Überlagerungsprojektion $p \colon E \to X$). Die Umgebung U enthält (nach Voraussetzung über X) eine *wegzusammenhängende* Umgebung U' von x . Die topologische Äquivalenz (über U)

$$p^{-1}(U) \approx U \times p^{-1}(x)$$

induziert eine topologische Äquivalenz (über U')

$$p^{-1}(U') \approx U' \times p^{-1}(x) .$$

Mit anderen Worten, U' ist auch eine Elementarumgebung. Darüberhinaus ist aber mit U' nun auch für jedes $y \in p^{-1}(x)$ der Raum $U' \times \{y\}$ wegzusammenhängend und deshalb entweder ganz in E' enthalten oder ganz in E'' . Es folgt, daß die vorstehende topologische Äquivalenz als Einschränkung die folgende hat,

$$(p|_{E'})^{-1}(U') = E' \cap p^{-1}(U') \approx U' \times (E' \cap p^{-1}(x)) = U' \times (p|_{E'})^{-1}(x)$$

(eine topologische Äquivalenz über U'). Der Überlagerungstest war erfolgreich. □

Nach diesen Vorbemerkungen über den lokalen Wegzusammenhang kommen wir nun schließlich zu dem allgemeinen Liftungs–Satz.

Satz (Liftungs–Satz). *Sei* $p : E \to X$ *eine Überlagerung. Sei* $x_0 \in X$ *und* $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. *Der Raum* Y *sei zusammenhängend und lokal weg–zusammenhängend. Sei* $y_0 \in Y$ *und sei*

$$f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

eine Abbildung von punktierten Räumen. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

- f *hat eine Liftung zu einer Abbildung* $\widetilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$ (d.h., $p \circ \widetilde{f} = f$).
- $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Weiterhin gilt, daß eine Liftung von f (mit der Bedingung $\widetilde{f}(y_0) = e_0$) *schon eindeutig bestimmt ist* (falls sie existiert).

Beweis. Die eine der behaupteten Implikationen ist eine unmittelbare Folge aus der *Natürlichkeit* der Konstruktion der Fundamentalgruppe. Nämlich wenn die Liftung $\widetilde{f}$ von f existiert, so folgt für die Bild–Gruppen (Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$)

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \widetilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)) .$$

Umgekehrt wollen wir, wenn wir diese Inklusion voraussetzen dürfen, für die gegebene Abbildung f eine Liftung $\widetilde{f}$ konstruieren.

Diese Konstruktion geht über den Wege–Liftungs–Satz. Da Y wegzusammenhängend ist (denn es ist ja, nach Voraussetzung, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend), können wir einen vorgegebenen Punkt y in Y durch einen Weg mit dem Basispunkt verbinden: wir *wählen* irgendeinen Weg $w_y : [0, 1] \to Y$ mit

$$w_y(0) = y_0 \ , \quad w_y(1) = y \ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $f \circ w_y$,

$$[0, 1] \xrightarrow{\quad w_y \quad} Y \xrightarrow{\quad f \quad} X \ ,$$

ist dann ein Weg in X . Auf diesen Weg wenden wir den Wege–Liftungs–Satz an. Das Resultat ist ein Weg $\widetilde{f \circ w_y} : [0, 1] \to E$ mit $\widetilde{f \circ w_y}(0) = e_0$. Wir *definieren* nun

$$\widetilde{f}(y) := \widetilde{f \circ w_y}(1) \ .$$

Es bleibt zu zeigen:

- *die Abbildung* $\widetilde{f}$ *ist wohldefiniert*
- *die Abbildung ist stetig.*

Zur Frage der Wohldefiniertheit merken wir zunächst an, daß nach dem Wege–Liftungs–Satz das Liften von Wegen zu vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig ist. Die Definition von $\widetilde{f}(y)$ hängt deshalb allenfalls von der getroffenen Wahl des Weges w_y ab.

Wir wollen zeigen, daß sie von dieser Wahl tatsächlich aber nicht abhängt. Dazu sei $w'_y : [0,1] \to Y$ ein anderer Weg, den wir hätten wählen können,

$$w'_y(0) = y_0 \ , \quad w'_y(1) = y \ .$$

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo w'_y homotop ist zu w_y relativ zu Anfangs- und Endpunkt. In diesem Fall sind auch die Wege $f \circ w'_y$ und $f \circ w_y$ homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt. Die Anwendung des Homotopie–Liftungs–Satzes zeigt nun, daß auch die gelifteten Wege $\widetilde{f \circ w'_y}$ und $\widetilde{f \circ w_y}$ homotop sind relativ zu Anfangs- und Endpunkt; insbesondere haben wir deshalb $\widetilde{f \circ w'_y}(1) = \widetilde{f \circ w_y}(1)$.

Den allgemeinen Fall wollen wir auf diesen Spezialfall zurückführen (sowie auf ein Argument mit der Fundamentalgruppe). Dazu betrachten wir den zusammengesetzten Weg $w'_y\, {w_y}^{-1}$ ("zuerst w'_y , dann den zu w_y inversen Weg") oder, als Formel,

$$w'_y \; {w_y}^{-1}(s) \quad = \quad \begin{cases} w'_y(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ w_y(2{-}2s) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \ . \end{cases}$$

Wenn wir diesen Weg wiederum mit w_y zusammensetzen, so erhalten wir einen Weg $w'_y \; {w_y}^{-1}\, w_y$ oder, wieder als Formel,

$$w'_y \; {w_y}^{-1}\, w_y\,(s) \quad = \quad \begin{cases} w'_y(4s) & 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ w_y(2{-}4s) & \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ w_y(2s{-}1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \ . \end{cases}$$

Dies ist ein Weg von y_0 zu y , und es ist klar (oder?), daß dieser Weg zu w'_y homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt.

Wenn wir abkürzend schreiben $v_y = w'_y\, w_y^{-1}\, w_y$, so folgt also nach dem obigen Spezialfall, daß die Liftungen der beiden Wege $f \circ v_y$ und $f \circ w'_y$ dieselben Endpunkte haben,

$$(\widetilde{f \circ v_y})(1) \quad = \quad (\widetilde{f \circ w'_y})(1) \ .$$

Um nun weiter $(\widetilde{f \circ v_y})(1)$ mit $(\widetilde{f \circ w_y})(1)$ zu vergleichen, verwenden wir den

Hilfssatz. Wenn $f_*(\,\pi_1(Y, y_0)\,) \subset p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$, dann ist die Liftung $f \circ \widetilde{(w'_y\, {w_y}^{-1})}$ von $f \circ (w'_y\, {w_y}^{-1})$ ein *geschlossener* Weg in E mit Anfangs- und Endpunkt e_0 .

Mit dem Hilfssatz können wir den gewünschten Vergleich auf die folgende Weise bewerkstelligen. Die Komposition mit der Abbildung f ist verträglich mit dem Zusammensetzen von Wegen, also

$$(\ f \circ v_y \ = \ ) \quad f \circ (w'_y\, w_y^{-1}\, w_y) \quad = \quad (f \circ (w'_y\, w_y^{-1})\,)\ (f \circ w_y) \ .$$

Die Liftung von $f \circ (w'_y\, w_y^{-1}\, w_y)$ zum vorgegebenen Anfangspunkt e_0 kann daher in zwei Schritten konstruiert werden:

— *zu dem Anfangspunkt* e_0 *wird zunächst der erste Teilweg* $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ *geliftet,*
— *mit dem dabei resultierenden Endpunkt als neuem Anfangspunkt wird danach der zweite Teilweg* $f \circ w_y$ *geliftet.*

Nach dem Hilfssatz ist nun aber der neue Anfangspunkt derselbe wie der alte: die zweite Liftung ist ebenfalls zum Anfangspunkt e_0 vorzunehmen. Es folgt, daß die Liftung des zweiten Teilweges in Wirklichkeit eine Reinkarnation der ursprünglichen Liftung des Weges $f \circ w_y$ ist; sie hat insbesondere deshalb auch denselben Endpunkt.

Beweis des Hilfssatzes. Der Weg $w'_y\, w_y^{-1}$ ist Schleife in Y zum Basispunkt y_0 und repräsentiert ein Element $[\, w'_y\, w_y^{-1}\,]$ in $\pi_1(Y, y_0)$. Die Schleife $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ repräsentiert das Bildelement

$$f_*[\, w'_y\, w_y^{-1}\,] \;\in\; f_*(\, \pi_1(Y, y_0)\,)\ .$$

Nach der Voraussetzung des Hilfssatzes ist dieses Element nun auch enthalten in der Bildgruppe $p_*(\, \pi_1(E, e_0)\,)$. Das bedeutet, daß eine Schleife $\widetilde{u}$ in E zum Basispunkt e_0 existiert mit

$$[\, f \circ (w'_y\; w_y^{-1})\,] \;=\; [\, p \circ \widetilde{u}\,]\ ;$$

was wiederum bedeutet, daß $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu $p \circ \widetilde{u}$. Wir wählen irgendeine solche Homotopie von $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ zu $p \circ \widetilde{u}$. Nach dem Homotopie–Liftungs–Satz hat diese Homotopie eine Liftung zu einer Homotopie von Wegen in E , wobei die Homotopie auf dem Anfangspunkt konstant ist. Zusätzlich war aber die Homotopie in X auch auf dem Endpunkt konstant, und der Homotopie–Liftungs–Satz sagt, daß in dieser Situation auch die geliftete Homotopie auf dem Endpunkt konstant ist. Es folgt insbesondere, daß die Liftung von $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ denselben Endpunkt hat wie diejenige von $p \circ \widetilde{u}$. Die Liftung von $p \circ \widetilde{u}$ ist aber $\widetilde{u}$, und dessen Endpunkt ist e_0 . Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir kommen nun zum Nachweis dessen, daß die (geliftete) Abbildung $\widetilde{f}$ eine *stetige* Abbildung ist; es ist dieser Teil des Arguments, bei dem die ominöse Voraussetzung über den lokalen Wegzusammenhang benötigt wird. Wir werden die Stetigkeit in der folgenden Form nachweisen. Wir zeigen: *Zu jedem Punkt* $y \in Y$ *und zu jeder Umgebung* V *des Bildpunktes* $\widetilde{f}(y)$ *existiert eine Umgebung* W *von* y *mit* $\widetilde{f}(W) \subset V$ *.*

Sei U eine Elementarumgebung des Punktes $x = f(y)$ in X , so daß also eine topologische Äquivalenz (über U) besteht,

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\;u\;} U \times p^{-1}(x)\ .$$

Sei V' definiert als der Durchschnitt

$$V' \;:=\; V \;\cap\; u^{-1}(\, U \times \widetilde{f}(y)\,)\ .$$

Dann ist V' Umgebung von $\widetilde{f}(y)$, die eingeschränkte Abbildung $p|_{V'} :\; V' \to p(V')$ ist eine topologische Äquivalenz, und $p(V')$ ist Umgebung von $f(y) \,=\, p(\,\widetilde{f}(y)\,)$.

Wegen der Stetigkeit von f ist das Urbild $f^{-1}(\,p(V')\,)$ eine Umgebung von y in Y . Wir nutzen nun die Voraussetzung des lokalen Wegzusammenhangs aus. Es folgt, daß die Umgebung $f^{-1}(\,p(V')\,)$ noch eine *wegzusammenhängende* Umgebung W von y enthält. Mit der folgenden Behauptung wird schließlich alles bewiesen sein:

Behauptung. *Das Bild* $\widetilde{f}(W)$ *ist enthalten in* V' (und damit auch in V).

Beweis der Behauptung. Sei $y' \in W$. Dann können wir y' durch einen *ganz in* W *verlaufenden Weg* w mit y verbinden. Sei w_y irgendein Weg von y_0 zu y . Nach dem vorher bewiesenen Teil (daß nämlich die Definition von $\widetilde{f}(y')$ nicht abhängt von der Wahl des Weges von y_0 zu y'), können wir ebenso gut nun auch das folgende Rezept als die Definition von $\widetilde{f}(y')$ nehmen:

Zuerst liften wir den Teilweg $f \circ w_y$ zum Anfangspunkt $e_0 = \widetilde{f}(y_0)$; der geliftete Teilweg wird den Endpunkt $\widetilde{f}(y)$ haben. Danach liften wir den Teilweg $f \circ w$ zum Anfangspunkt $\widetilde{f}(y)$. Der Endpunkt der Liftung des zusammengesetzten Weges, *und damit auch der Endpunkt der Liftung des zweiten Teilweges*, wird dann der Punkt $\widetilde{f}(y')$ sein.

Nach Konstruktion nun ist der Weg $f \circ w$ ganz enthalten in der Umgebung $p(V')$ von $f(y)$. Die eingeschränkte Abbildung $p|_{V'}: \ V' \to p(V')$ ist eine topologische Äquivalenz, und die Liftung von $f \circ w$ hat ihren Anfangspunkt in V' . Nach der Eindeutigkeit der Wegeliftung zu gegebenem Anfangspunkt folgt, daß *die Liftung des zweiten Teilwegs ganz enthalten ist in* V' , insbesondere ist deshalb der Endpunkt $\widetilde{f}(y')$ ebenfalls in V' enthalten. Der Beweis ist fertig. $\square$

Wir kommen nun zu Anwendungen des Liftungs–Satzes.

Eine erste, hier etwas ferner liegende, Anwendung hat Beispiel–Charakter; sie gibt eine "zu–Fuß–Formulierung" der Tatsache, daß die sogenannten *höheren Homotopiegruppen* der 1-Sphäre sämtlich trivial sind.

Satz. *Sei* $n \geq 2$. *Sei eine Abbildung* $f\colon (S^n, s_0) \to (S^1, x_0)$ *gegeben* (eine Abbildung der n-Sphäre in die 1-Sphäre, die den Basispunkt s_0 in den Basispunkt x_0 abbildet). *Es gibt eine Homotopie, relativ zum Basispunkt, von dieser Abbildung zu der trivialen Abbildung* (triviale Abbildung in den Basispunkt).

Beweis. Wir wollen den Liftungs–Satz anwenden auf die Überlagerung von S^1 , die durch $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben ist. Wir wählen irgendeinen Punkt $e_0 \in (\exp)^{-1}(x_0)$ als Basispunkt. Wir wollen eine Liftung von f zu $\widetilde{f}\colon S^n \to \mathbb{R}$ angeben, mit $\widetilde{f}(s_0) = e_0$. Sobald wir das geschafft haben, sind wir schon fertig. Denn für Abbildungen nach $\mathbb{R}$ haben wir *lineare Homotopien* zur Verfügung; in unserem Fall die Homotopie von $\widetilde{f}$ zur trivialen Abbildung nach e_0 ,

$$F: \ S^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad F(s,t) \ = \ (1-t)\,\widetilde{f}(s) + t\,e_0 \ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\exp \circ F: S^n \times [0,1] \to S^1$ ist dann die Homotopie, deren Existenz der Satz behauptet.

Um den Liftungs–Satz in der genannten Weise anzuwenden, müssen wir einige Dinge nachprüfen. Zunächst müssen wir wissen, daß der Raum S^n lokal wegweise zusammenhängend ist; das ist aber klar (oder?). Zum andern müssen wir wissen, daß die Bildgruppe $f_*(\pi_1(S^n, s_0))$ enthalten ist in einer gewissen andern Gruppe (nämlich in der Bildgruppe $\exp_*(\pi_1(\mathbb{R}))$. Nun wissen wir aber schon, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^n, s_0)$ die *triviale Gruppe* ist. Deshalb ist auch die Bildgruppe $f_*(\pi_1(S^n, s_0))$ die triviale Gruppe — und die ist schließlich in *jeder* Gruppe enthalten. □

Unsere nächste Anwendung liefert die erstaunliche Aussage, daß bei "vernünftigen" Räumen die Überlagerungen vollkommen charakterisiert werden können durch algebraische Daten.

Dazu notieren wir zunächst, daß der von einer Überlagerungsprojektion induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppe immer *injektiv* ist.

SATZ. *Sei* $p: E \to X$ *eine Überlagerung. Sei* $x_0 \in X$ *und sei* $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. *Die Abbildung* $p_*: \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ *ist injektiv.*

BEWEIS. Sei v eine Schleife in E. Wenn das von v repräsentierte Element von $\pi_1(E, e_0)$ im Kern der Abbildung p_* liegt, so bedeutet dies, daß die Schleife $p \circ v$ das triviale Element in $\pi_1(X, x_0)$ repräsentiert; d.h., daß die Schleife $p \circ v$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zur trivialen Schleife. Sei F eine Homotopie, die das leistet. Auf diese Homotopie können wir den Homotopie–Liftungs–Satz anwenden. Der Punkt ist nun (Inspektion der Formulierung des Satzes!), daß die geliftete Homotopie ebenfalls relativ ist zu Anfangs- und Endpunkt, und zwar ist sie eine Homotopie von der Schleife v zu der trivialen Schleife am Basispunkt e_0 von E. Daher ist v ein Repräsentant des trivialen Elements in $\pi_1(E, e_0)$. □

Unser erster Klassifikations–Satz nun sagt, daß die so resultierende Untergruppe (die Bildgruppe) *die Überlagerung schon vollkommen charakterisiert*; zumindest, wenn es sich um "vernünftige" Räume handelt, die zudem noch als (weg–)zusammenhängend vorausgesetzt werden.

SATZ. *Sei* X *ein Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist; sei* $x_0 \in X$ *ein Basispunkt. Seien* $p_1: E_1 \to X$ *und* $p_2: E_2 \to X$ *Überlagerungen, wobei* E_1 *und* E_2 *als zusammenhängend vorausgesetzt sind. Seien* e_1 *und* e_2 *über* x_0 *liegende Basispunkte in* E_1 *bzw.* E_2. *Wenn* $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ *(Gleichheit von Untergruppen von* $\pi_1(X, x_0)$ *), dann gibt es eine topologische Äquivalenz (über* X *)*

$$E_1 \xrightarrow{\approx} E_2 .$$

Die topologische Äquivalenz kann so gewählt werden, daß e_1 *auf* e_2 *abgebildet wird; sie ist dann eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Wir wollen die Abbildung $p_1 : E_1 \to X$ zu einer Abbildung

$$f_1 : \ E_1 \ \longrightarrow \ E_2 \ , \quad f_1(e_1) \ = \ e_2 \ ,$$

liften. Der Liftungs–Satz sagt, daß dies unter gewissen Bedingungen möglich ist; der Satz sagt auch, daß eine solche Liftung eindeutig ist, falls sie existiert. Die Bedingungen für die Existenz der Liftung sind:

— der Raum E_1 soll zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sein; das ist aber klar: E_1 ist zusammenhängend nach Voraussetzung, und E_1 ist Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X, daher ebenfalls lokal wegzusammenhängend (nach einem früheren Satz),

— es soll eine Inklusion von Untergruppen $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ bestehen; das ist aber auch klar: diese Untergruppen sind sogar *gleich* (nach Voraussetzung).

Der Liftungs–Satz ist also anwendbar: f_1 existiert. Aus ähnlichen Gründen existiert auch eine Abbildung

$$f_2 : \ E_2 \ \longrightarrow \ E_1 \ , \quad f_2(e_2) \ = \ e_1 \ .$$

Wir behaupten jetzt, daß die Abbildungen f_1 und f_2 zueinander *invers* sind. Auch das ist, wie sich herausstellt, eine unmittelbare Anwendung des Liftungs–Satzes. Das Argument ist allerdings verblüffend: Die zusammengesetzte Abbildung $f_2 \circ f_1$,

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_1 \ ,$$

kann aufgefaßt werden als eine Liftung der Abbildung $p_1 : E_1 \to X$ zu einer Abbildung $E_1 \to E_1$, die e_1 auf e_1 abbildet. Es gibt noch eine andere solche Liftung, nämlich die identische Abbildung auf E_1. *Es kann aber nur eine geben* (nach der Eindeutigkeitsklausel beim Liftungs–Satz). Also ist

$$f_2 \circ f_1 \ = \ \mathrm{id}|_{E_1} \ .$$

Ähnlich ist auch $f_1 \circ f_2 \ = \ \mathrm{id}|_{E_2}$. □

BEISPIEL. Wir betrachten die Überlagerung der $1-$Sphäre auf sich, die gegeben ist durch "*$k-$faches Aufwickeln*", $k \geq 1$; m.a.W., wenn $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, dann die Abbildung

$$p_k : \ S^1 \ \longrightarrow \ S^1 \ , \quad z \ \longmapsto \ z^k \ .$$

Bezeichne $w : ([0,1], \{0,1\}) \to (S^1, 1)$ den Repräsentanten eines Elements von $\pi_1(S^1, 1)$; wie wir wissen, ist jedes Element von $\pi_1(S^1, 1)$ repräsentierbar in der Form $w(s) = \exp(l \cdot s)$. Es folgt, daß die Bildgruppe $p_{k*}(\pi_1(S^1, 1))$ die Untergruppe derjenigen Elemente ist, die einen Repräsentanten der Art

$$w(s) \ = \ \exp(l \cdot k \cdot s)$$

haben. Unter dem Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \approx \mathbb{Z}$ entspricht diese Untergruppe der additiven Gruppe derjenigen ganzen Zahlen, die Vielfache von k sind. Nach dem Satz nun ist die Überlagerung (bis auf Isomorphie) durch diese zugeordnete Untergruppe schon charakterisiert. □

Zunächst einige Vokabeln. Ein Raum Y heißt *einfach–zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Sind y_1 und y_2 Punkte in Y, so gibt es einen Weg, der y_1 und y_2 verbindet, und dieser Weg ist *eindeutig bis auf Homotopie* (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt).

Das läßt sich auch anders formulieren. Nämlich, wenn Y einfach–zusammenhängend ist, dann ist es wegzusammenhängend und hat triviale Fundamentalgruppe (für jeden Basispunkt; das ist der Spezialfall der Definition wo $y_1 = y_2$). Umgekehrt, wenn Y wegzusammenhängend ist und $\pi_1(Y, y_0) = 0$ für irgendeinen Basispunkt y_0 in Y, dann ist, wie wir wissen, auch $\pi_1(Y, y_1) = 0$ für jeden anderen Basispunkt in Y (wenn Y wegzusammenhängend ist, so sind die Fundamentalgruppen für alle Basispunkte zueinander isomorph). Speziell gilt das für den gemeinsamen Anfangspunkt von v und w. Der geschlossene Weg $v\,w^{-1}$ (erst v durchlaufen, dann w rückwärts) ist also nullhomotop. Es folgt, daß der Weg $v\,w^{-1}\,w$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu w. Andererseits ist er aber auch zu v homotop. Y ist also einfach–zusammenhängend im obigen Sinne.

Definition. Eine Überlagerung $p: E \to X$ heißt *universelle Überlagerung* von X, wenn der Raum E einfach–zusammenhängend ist.

Die Wortwahl “universell” für diesen Sachverhalt ist nicht so weit hergeholt, wie das hier scheinen mag. Dies wird später deutlich werden.

Wie wir gesehen haben, sind, bei einem “vernünftigen” Raum, die Überlagerungen charakterisierbar durch (gewisse) Untergruppen der Fundamentalgruppe. Unser gegenwärtiges Ziel ist es, zu zeigen, daß umgekehrt auch *alle* Untergruppen auf diese Weise vorkommen; mit anderen Worten, daß jede Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ vorkommt als $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$, das Bild der Fundamentalgruppe eines geeigneten Überlagerungsraumes E von X. Um das zu zeigen, benötigen wir eine weitere Eigenschaft, die “vernünftige” Räume haben.

Definition. Ein Raum X heißt *semi–lokal einfach–zusammenhängend*, wenn er lokal wegzusammenhängend ist und wenn darüberhinaus gilt: *Für jeden Punkt $x \in X$ existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x, so daß die Abbildung der Fundamentalgruppen am Basispunkt x,*

$$\pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x) \ ,$$

die triviale Abbildung ist. Eine Umgebung U, die diese Eigenschaft hat, wird auch als eine *Spezialumgebung* von x bezeichnen.

Das Bestehen dieser Eigenschaft ist in der Tat eine *notwendige* Bedingung, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung. *Sei X ein lokal–wegzusammenhängender Raum. Wenn eine universelle Überlagerung von X existiert, dann ist X semi–lokal einfach–zusammenhängend.*

Denn sei $x \in X$. Sei U eine Elementarumgebung von x . Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß U wegzusammenhängend ist (denn, da X nach Voraussetzung lokal wegzusammenhängend ist, könnten wir notfalls U ersetzen durch eine kleinere wegzusammenhängende Umgebung; die wäre automatisch ebenfalls eine Elementarumgebung). Sei nun V eine Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$. Unter der topologischen Äquivalenz von $p^{-1}(U)$ zu $U \times p^{-1}(x)$ (Definition von Elementarumgebung) entspricht V einem Unterraum der Art $U \times \{y\}$, wo $y \in p^{-1}(x)$; insbesondere ist die durch Einschränkung von p gegebene Abbildung $q : V \to U$ eine topologische Äquivalenz. Wir haben nun das folgende kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V,y) & \longrightarrow & \pi_1(E,y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi_1(U,x) & \longrightarrow & \pi_1(X,x) \end{array}$$

In diesem Diagramm ist die zusammengesetzte Abbildung $\pi_1(V,y) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung (weil sie über die Gruppe $\pi_1(E,y)$ faktorisiert, die ja nach Voraussetzung trivial ist). Andererseits ist die Abbildung q_* ein Isomorphismus (sie ist ja induziert von der Abbildung q , die eine topologische Äquivalenz ist). Es folgt, daß $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung ist. □

Der zu beweisende Satz wird sagen, daß die beschriebene notwendige Bedingung tatsächlich auch *hinreichend* ist. Bevor wir dazu kommen, machen wir noch eine Notiz über Spezialumgebungen.

Bemerkung. *Sei U Spezialumgebung von x . Wenn $x' \in U$ dann ist auch*

$$\pi_1(U,x') \longrightarrow \pi_1(X,x') \ ,$$

die triviale Abbildung. Wenn w und w' Wege in U sind mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt, dann sind w und w' , als Wege in X betrachtet, homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt.

Denn zunächst, wenn v ein Weg in U von x zu x' ist, so induziert v einen Isomorphismus v_* der Fundamentalgruppen. Dies ist sowohl in U als auch in X richtig, und zwar in kompatibler Weise. Mit anderen Worten, es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U,x) & \xrightarrow{v_*} & \pi_1(U,x') \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \pi_1(X,x) & \xrightarrow{v_*} & \pi_1(X,x') \end{array}$$

in dem die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Es folgt: wenn der linke vertikale Pfeil die triviale Abbildung ist, dann auch der rechte.

Zu den Wegen w und w' nun bezeichne x' den gemeinsamen Anfangspunkt dieser beiden Wege. Es ist dann der zusammengesetzte Weg $w'\,w^{-1}$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x'. Der Weg repräsentiert das triviale Element in $\pi_1(X,x')$, ist also homotop in X, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zum trivialen Weg. Es folgt, daß der zusammengesetzte Weg $w'\,w^{-1}\,w$ homotop in X ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu dem Weg w. Andererseits ist er auch homotop (sogar in U) zu dem Weg w'. $\square$

Die Existenz von Überlagerungen werden wir zuerst in dem speziellen Fall einer universellen Überlagerung diskutieren, den allgemeinen Fall werden wir danach dann daraus ableiten.

SATZ. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Es existiert eine universelle Überlagerung von X.*

BEWEIS. Die Behauptung ist, daß eine Überlagerung $p: E \to X$ existiert, wo eben der Raum E einfach–zusammenhängend ist. Der Beweis dieser Behauptung geht über eine zwar abstrakte, aber sehr direkte Konstruktion für die Existenz. Um diese Konstruktion zu verstehen, gehen wir zunächst den umgekehrten Weg. Wir setzen nämlich voraus, daß wir $p: E \to X$ schon hätten. Mit einigen kleinen Tricks werden wir die Daten von E übersetzen *in Dinge, die nur mit dem Raum X zu tun haben.* Mit ein wenig Glück werden wir anschließend in der Lage sein, diese Übersetzung rückwärts zu lesen, und das wird dann die Konstruktion sein.

Die Übersetzung geht über *Wege–Liftung.* Die Wege–Liftung funktioniert gut für Wege, die an einem Ende fixiert sind, am andern Ende aber nicht. Wir werden also solche Wege nun systematisch betrachten. Dazu wählen wir in X einen Basispunkt x_0 und in E einen Basispunkt e_0 über x_0.

Es soll ein *basierter Weg* in E nun einen Weg bezeichnen, dessen Anfangspunkt der gewählte Basispunkt e_0 in E ist. Die Menge der basierten Wege in E wird mit BE bezeichnet.

Ähnlich soll ein *basierter Weg* in X ein Weg sein, dessen Anfangspunkt der gewählte Basispunkt x_0 in X ist. Die Menge der basierten Wege in X wird mit BX bezeichnet.

Mit der Abbildung $p: E \to X$ bekommt man aus jedem Weg in E einen Weg in X. Da der (Anfangs–) Punkt e_0 über dem Punkt x_0 liegt, bekommt man speziell so auch eine Abbildung $BE \to BX$. Andererseits sagt der Wege–Liftungs–Satz, daß ein Weg in X mit Anfangspunkt x_0 eine eindeutige Liftung hat zu einem Weg in E mit Anfangspunkt e_0. Folglich,

- *Die Abbildung $BE \to BX$ ist bijektiv.*

Als nächstes führen wir auf diesen Mengen von Wegen eine Äquivalenzrelation ein, nämlich die *Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt*. Die Menge der Äquivalenzklassen in BE wird mit $\widetilde{E}$ bezeichnet. Ein Element aus $\widetilde{E}$ läßt sich so beschreiben: es besteht aus einem Punkt e in E (dem Endpunkt) zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen von e_0 zu e.

Ähnlich bezeichnet $\widetilde{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen in BX ; ein Element aus $\widetilde{X}$ besteht aus einem Punkt x in X zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen von x_0 zu x .

Die obige Abbildung, die einem Weg v in E den projizierten Weg $p \circ v$ zuordnet, ist mit Homotopie verträglich, induziert also eine Abbildung $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$. Andererseits ist auch die Wege–Liftung mit Homotopie verträglich; das sagt der Homotopie–Liftungs–Satz. Folglich,

- *Die Abbildung* $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$ *ist bijektiv.*

Die Tatsache, daß man einem Weg seinen Endpunkt zuordnen kann, kann man interpretieren als eine Abbildung $BE \to E$; und auch als eine Abbildung $\widetilde{E} \to E$. Nun ist nach Voraussetzung der Raum E aber einfach–zusammenhängend: zu je zwei Punkten in E gibt es einen und, bis auf Homotopie, auch nur einen Weg, der sie verbindet. Folglich,

- *Die Abbildung* $\widetilde{E} \to E$ *ist bijektiv.*

Mit den letzten beiden Bijektionen haben wir es nunmehr geschafft, für die unterliegende Menge des Raumes E eine Übersetzung zu finden in etwas, das vollständig mit Hilfe von X beschrieben werden kann und tatsächlich auch so beschrieben worden ist, nämlich $\widetilde{X}$.

Der nächste Schritt wird sein, in diese Übersetzung auch die topologische Struktur mit einzubauen. Von jetzt ab werden wir die Voraussetzung benötigen, daß der Raum X semi–lokal einfach–zusammenhängend ist.

Wegen dieser Voraussetzung hat jeder Punkt x in X eine *Spezialumgebung* U ; was nach Definition ja bedeutet, daß U eine weg–zusammenhängende Umgebung von x ist, die die Bedingung erfüllt, daß der (von der Inklusion induzierte) Homomorphismus $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung ist. Es folgt hieraus noch ein wenig mehr: wenn U' eine vorgegebene Umgebung von x ist, so existiert innerhalb der Umgebung $U \cap U'$ noch eine wegzusammenhängende Umgebung U'' von x (wegen der ebenfalls gemachten Voraussetzung, daß X lokal wegzusammenhängend ist); die Umgebung U'' erfüllt nun automatisch auch die Bedingung über die Fundamentalgruppe (denn die Abbildung $\pi_1(U'',x) \to \pi_1(X,x)$ faktorisiert über die (triviale) Abbildung $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, sie ist daher selbst trivial). Wir haben also innerhalb der vorgegebenen Umgebung U' noch eine Spezialumgebung, nämlich U'' , gefunden. Das kann man auch so ausdrücken: eine Teilmenge von X ist eine Umgebung von x genau dann, wenn sie eine Spezialumgebung enthält; oder, wie man für diesen Sachverhalt auch sagt,

- *Die Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von* x .

Es sei nun y ein Punkt in E , der über x liegt. Sei U' eine wegzusammenhängende Elementarumgebung von x , und sei V' die (Weg–)Zusammenhangskomponente des Urbilds $p^{-1}(U')$, die den Punkt y enthält. Dann ist V' Umgebung von y , und die (von der Überlagerungsprojektion induzierte) Abbildung $V' \to U'$ ist eine topologische Äquivalenz. Die in U' enthaltenen Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von x . Unter der genannten topologischen Äquivalenz entsprechen ihnen Teilmengen von V' , die wir als *geliftete Spezialumgebungen* bezeichnen wollen. Es resultiert,

- *Die gelifteten Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von y in E .*

Sei insbesondere nun U'' eine Spezialumgebung, die in U' enthalten ist. Sei V'' die entsprechende geliftete Spezialumgebung in V' . Unter der bijektiven Abbildung von E zu $\widetilde{X}$ entspricht dem V'' dann eine Teilmenge von $\widetilde{X}$. Es ist nun sehr wichtig, daß wir in der Lage sein werden, diese Teilmenge von $\widetilde{X}$ auch *direkt* zu beschreiben (ohne uns auf E zu beziehen).

Es sei dazu v ein Weg vom Basispunkt e_0 zu dem Punkt y (bis auf Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt gibt es genau einen solchen Weg). Wenn y' ein anderer Punkt in V'' ist, so können wir e_0 mit y' verbinden durch einen Weg v' der folgenden Art: zunächst verbinden wir e_0 mit y durch den gerade genannten Weg v , dann setzen wir diesen zusammen mit einem Weg von y zu y' , der ganz in V'' verläuft. Bezeichne nun w den projizierten Weg $w = p \circ v$, und $w' = p \circ v'$. Der Weg w' kann auch beschrieben werden als zusammengesetzter Weg: zunächst wird der Basispunkt x_0 verbunden mit dem Punkt y durch den genannten Weg w , dieser Weg wird dann zusammengesetzt mit einem ganz in U'' verlaufenden Weg von x zu x' . *Umgekehrt ist durch diese Beschreibung der Weg w'* (bis auf Homotopie) *schon eindeutig festgelegt* (denn je zwei in der Spezialumgebung U'' verlaufende Wege von x zu x' sind als Wege in X homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt). Es folgt,

- *Das Bild von V'' in $\widetilde{X}$ ist die Spezialmenge* $M(x, [w], U'')$ (im folgenden Sinne:)

Definition. Sei $(x, [w]) \in \widetilde{X}$; also $x \in X$, und $[w]$ eine Homotopieklasse (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x . Sei U eine Spezialumgebung von x . *Die zu $(x, [w])$ und U gehörende Spezialmenge* $M(x, [w], U)$ ist definiert als die Menge der Paare $(x', [w'])$, wo $x' \in U$ und wo die Homotopieklasse $[w']$ repräsentierbar ist durch einen Weg w' der folgenden Art: w' ist zusammengesetzt aus zwei Wegen; zunächst ist der Basispunkt x_0 mit dem Punkt x verbunden durch den Weg w , der Punkt x ist dann weiter mit dem Punkt x' verbunden durch einen Weg, der ganz innerhalb von U verläuft.

Wir *definieren* nun eine topologische Struktur auf $\widetilde{X}$ durch die folgende Vorschrift.

Definition. *Eine Umgebungsbasis am Punkt $(x, [w])$ ist gegeben durch die Spezialmengen*

$$M(x, [w], U) \ ,$$

wo U die Spezialumgebungen von x durchläuft.

Die Definition verpflichtet uns, folgendes nachzuprüfen: *zu je zwei Mengen der genannten Art enthält ihr Durchschnitt noch eine weitere* — das ist aber klar auf Grund der Tatsache, daß die Spezialumgebungen eine Umgebungsbasis von x in X bilden.

Die gegebene Übersetzung zeigt einerseits, daß der Raum $\widetilde{X}$ topologisch äquivalent zu dem Raum E ist, wenn wir annehmen, daß eine universelle Überlagerung $p: E \to X$

existiert. *Andererseits ist aber die Hypothese der Existenz von* E *ganz und gar unnötig für die Beschreibung von* $\widetilde{X}$; *die gegebene Beschreibung können (und wollen) wir daher als die Konstruktion eines gewissen Raumes* $\widetilde{X}$ *ansehen.* Auf Grund der Herleitung vermuten wir, daß wir eine Abbildung $q : \widetilde{X} \to X$ angeben können; daß wir zeigen können, die Abbildung q ist eine Überlagerungsprojektion; und daß wir schließlich auch noch zeigen können, der Raum $\widetilde{X}$ ist einfach–zusammenhängend. *Diese Vermutungen wollen wir jetzt beweisen.*

Die gewünschte Abbildung $q : \widetilde{X} \to X$ ist sehr leicht zu beschreiben: sie ist gegeben durch $(x, [w]) \mapsto x$.

Um zu zeigen, daß die Abbildung q eine Überlagerungsprojektion ist, notieren wir zunächst, daß jede Spezialumgebung U von $x \in X$ noch eine Spezialumgebung U' von x enthält, die eine *offene Menge* in X ist. Denn sei U' definiert als diejenige Wegzusammenhangskomponente von U^0 , dem offenen Kern von U , die den Punkt x enthält. Dann ist U' eine offene Menge in X (wegen der Voraussetzung, daß X , und damit auch U^0 , lokal–wegzusammenhängend ist), wegzusammenhängend ist U' nach Definition, und schließlich erfüllt es auch die Fundamentalgruppenbedingung, da es in der Spezialumgebung U enthalten ist.

Es sei nun x ein Punkt in X . Sei U eine Spezialumgebung von x . Nach dem gerade Gesagten dürfen wir annehmen, daß U eine *offene Menge* in X ist. Wir werden zeigen, daß U eine Elementarumgebung von x für die Abbildung q ist.

Das Urbild $q^{-1}(U)$ ist, nach Definition, die Menge der Paare $(x', [w'])$ wo $x' \in U$ und wo $[w']$ eine Homotopieklasse ist (relativ Anfangs- und Endpunkt) von Wegen vom Basispunkt x_0 zum Punkt x' . Es gilt, wie wir wissen, folgendes (da U Spezialumgebung ist): wenn man zwei Punkte in U durch einen ganz in U verlaufenden Weg verbindet, so ist dieser als Weg in X eindeutig bis auf Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt. Durch Zusammensetzen mit einem solchen Weg können wir dem w' nun einen Weg w von x_0 zu x zuordnen; die Homotopieklasse $[w]$ ist dann eindeutig bestimmt durch die Homotopieklasse $[w']$, und umgekehrt ist auch die Homotopieklasse $[w']$ eindeutig bestimmt durch die Homotopieklasse $[w]$. Dies zeigt, daß die Menge $q^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung ist

$$q^{-1}(U) \quad = \quad \dot{\bigcup}_{(x,[w]) \in q^{-1}(x)} \; V_{[w]}$$

wo $V_{[w]}$ die Menge derjenigen $(x', [w'])$ bezeichnet, wo $[w']$ und $[w]$ in der beschriebenen Beziehung zueinander stehen.

Nun war U eine *offene* Menge in X . Das bedeutet, daß die Menge $V_{[w]}$ im Sinne der obigen Terminologie eine “Spezialmenge” für jeden ihrer Punkte ist. Nach Definition der Topologie von $\widetilde{X}$ heißt dies, daß $V_{[w]}$ eine *Umgebung* von jedem seiner Punkte ist; $V_{[w]}$ ist also *offen* in $\widetilde{X}$. Es resultiert, daß $q^{-1}(U)$ auch als topologischer Raum die disjunkte Vereinigung der $V_{[w]}$ ist. Wir müssen also nur noch nachprüfen, daß die bijektive Abbildung $V_{[w]} \to U$ eine topologische Äquivalenz ist. Das ist aber auch klar:

Die Topologie von U bestimmt sich durch die in U enthaltenen Spezialumgebungen (U ist Umgebung von jedem seiner Punkte, und jeder Punkt in U hat eine Umgebungsbasis von in U enthaltenen Spezialumgebungen), die Topologie von $V_{[w]}$ bestimmt sich ebenfalls durch die in U enthaltenen Spezialumgebungen (diese Spezialumgebungen entsprechen ein–eindeutig den durch sie bestimmten Spezialmengen in $V_{[w]}$). Unter der Bijektion $V_{[w]} \to U$ gehen diese Umgebungsbasen ineinander über, die Bijektion ist also eine topologische Äquivalenz.

Schließlich ist der Raum $\widetilde{X}$ auch einfach–zusammenhängend. Das folgt aus den folgenden drei Dingen.

- Die Abbildung $\pi_1(\widetilde{X}, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.
- Sei w geschlossener Weg. Wenn $[w] \neq 0$, dann gibt es eine Liftung von w zu einem Weg in $\widetilde{X}$ mit Anfangspunkt e_0 , der *nicht* ein geschlossener Weg ist.
- Es ist $[w] \in q_*(\,\pi_1(\widetilde{X}, e_0)\,)$ genau dann, wenn w zu einem *geschlossenen* Weg liftet.

Das erste davon wissen wir schon (der von einer Überlagerungsprojektion induzierte Homomorphismus ist immer injektiv). Das zweite geht durch explizites Hinschreiben: Dem Weg $w : [0,1] \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ wird der folgende Weg in $\widetilde{X}$ zugeordnet,

$$t \longmapsto (\,w(t)\,,\,w_t\,)\ ,$$

wo w_t den Weg von x_0 zu $w(t)$ bezeichnet, der gegeben ist durch

$$s \longmapsto w_t(s) = w(s \cdot t)\ .$$

Der angegebene Weg in $\widetilde{X}$ ist nicht geschlossen. Denn sein Endpunkt ist der Punkt $(\,w(1)\,,\,w_1\,)$. Obwohl $w(1) = w(0)$, ist dieser Punkt nicht derselbe wie der Anfangspunkt $(\,w(0)\,,\,w_0\,)$, da ja, nach Voraussetzung, der Weg $w_1 = w$ *nicht* homotop ist (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) zum trivialen Weg w_0 .

Was die dritte Aussage angeht, so ist die eine Richtung offensichtlich (wenn v geschlossene Liftung von w ist, so ist $q_*(\,[v]\,) = [w]$) und die andere Richtung folgt aus dem Homotopie–Liftungs–Satz. Sei nämlich $[w] = q_*(\,[v']\,)$. Dies heißt, daß eine Homotopie (relativ Anfangs- und Endpunkt) existiert von w zu $q \circ v'$. Die geliftete Homotopie wird dann ebenfalls relativ zu Anfangs- und Endpunkt sein. Der geliftete Weg zu $q \circ v'$ nun ist v' , welches ein *geschlossener* Weg ist. Es folgt, daß der geliftete Weg von w ebenfalls ein geschlossener Weg ist.

Alle Teile des Satzes sind nun bewiesen. □

Nun der allgemeine Fall:

Satz (Existenz–Satz). *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend, $x_0 \in X$. Sei $H \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Es existiert eine Überlagerung $p : E \to X$ und $e_0 \in E$, so daß die Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ die vorgegebene Untergruppe H ist.*

Beweis. Es sei zunächst angemerkt, daß man den allgemeinen Fall des Satzes auf recht einfache Weise aus dem schon behandelten speziellen Fall der universellen Überlagerung herleiten kann. Davon werden wir uns später überzeugen (man braucht allerdings für die Herleitung noch anderes, was aber ohnehin gemacht werden soll).

Hier soll eine andere Methode beschrieben werden. Dazu wird die gegebene Konstruktion der universellen Überlagerung in geeigneter Weise modifiziert.

Wir gehen wieder so vor, daß wir zunächst annehmen, wir hätten schon die Überlagerung $p: E \to X$. Wir übersetzen die Daten davon in Dinge, die allein durch X ausgedrückt werden können, und zum Schluß überzeugen wir uns wieder, daß die erhaltene Beschreibung schon die Konstruktion liefert.

Es sei an die Bezeichnungen BE , BX , $\widetilde{E}$, $\widetilde{X}$ erinnert. BE ist die Menge der Wege in E , deren Anfangspunkt der Basispunkt e_0 ist, und $\widetilde{E}$ ist die Menge der Homotopieklassen (relativ Anfangs- und Endpunkt) von solchen Wegen. Ähnlich bezeichnen BX und $\widetilde{X}$ die Menge der Wege in X mit Anfangspunkt x_0 , bzw. die Menge der Homotopieklassen davon.

Wie im vorigen Beweis, so ist es auch hier richtig (aus denselben Gründen), daß die Abbildungen $BE \to BX$ und $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$ bijektiv sind.

Es ist aber *nicht* richtig, daß die Abbildung $\widetilde{E} \to E$ bijektiv ist (dies würde nur gelten, wenn E einfach–zusammenhängend wäre). Aus dem Grund brauchen wir eine weitere Konstruktion; sie besteht darin, daß wir auf BE eine noch gröbere Äquivalenzrelation einführen. Diese hat die folgende Beschreibung.

Ist v ein Weg in BE , so darf v auf zwei Weisen modifiziert werden:

— *Homotopie* (relativ Anfangs- und Endpunkt)

— *Vorschalten eines geschlossenen Weges* (Ersetzen von v durch den zusammengesetzten Weg $\overline{v}\, v$, wo $\overline{v}$ einen geschlossenen Weg mit Anfangs- und Endpunkt e_0 bezeichnet).

Die von v repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $[[v]]$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen soll $\widetilde{E}'$ heißen. $\widetilde{E}'$ kann alternativ aufgefaßt werden als eine Menge von Äquivalenzklassen in $\widetilde{E}$; eine Homotopieklasse $[v]$ darf nämlich ersetzt werden durch das Produkt $[\overline{v}]\,[v]$, wo $[\overline{v}]$ die Homotopieklasse eines geschlossenen Weges zum Basispunkt e_0 ist.

Ähnlich führen wir auch eine gröbere Äquivalenzrelation auf BX ein. Ist w ein Weg in BX , so darf w auf zwei Weisen modifiziert werden:

— *Homotopie* (relativ Anfangs- und Endpunkt)

— *Vorschalten spezieller geschlossener Wege*; nämlich w darf ersetzt werden durch einen zusammengesetzten Weg $\overline{w}\, w$, wo $\overline{w}$ einen geschlossenen Weg (mit Anfangs- und Endpunkt x_0) bezeichnet, *der ein Element aus der Untergruppe* $H = p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ *repräsentiert.*

Die von w repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $[[w]]$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen soll $\widetilde{X}'$ heißen. $\widetilde{X}'$ kann alternativ aufgefaßt werden als eine Menge von Äquivalenzklassen in $\widetilde{X}$; nämlich eine Homotopieklasse $[w]$ darf ersetzt werden durch das Produkt $[\overline{w}]\,[w]$, *wo* $[\overline{w}]$ *aus der Untergruppe* $H = p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ *ist.*

Die Äquivalenzrelation auf $\widetilde{E}$ ist verträglich mit der Abbildung $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$; denn wenn $[v]$ ersetzt wird durch $[\overline{v}]\,[v]$, so bedeutet das ja, daß das Bild $[p \circ v]$ zu ersetzen ist durch das (äquivalente) Bild $[p \circ \overline{v}]\,[p \circ v]$. Es gibt also eine induzierte Abbildung $\widetilde{E}' \to \widetilde{X}'$. Umgekehrt ist das Liften von Wegen ebenfalls verträglich mit der Äquivalenzrelation; denn wenn $\overline{w}$ ein geschlossener Weg am Basispunkt x_0 ist, so ist, wie wir wissen (z.B. Schluß des vorigen Beweises) die Voraussetzung $[\overline{w}] \in p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ ja gleichbedeutend dazu, daß die Liftung von $\overline{w}$ zum Anfangspunkt e_0 ebenfalls ein *geschlossener* Weg ist. Es resultiert:

- *Die Abbildung* $\widetilde{E}' \to \widetilde{X}'$ *ist bijektiv.*

Wenn nun v und v' Wege in E mit gemeinsamem Anfangspunkt e_0 und gemeinsamem Endpunkt y sind, so ist einerseits v' homotop, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu dem zusammengesetzten Weg $v'\,v^{-1}\,v$, andererseits unterscheidet sich dieser von dem Weg w aber nur durch das Vorschalten des geschlossenen Weges $v'\,v^{-1}$. Das bedeutet, das die Wege–Daten in einem Element von $\widetilde{E}'$ in Wirklichkeit gar keine zusätzliche Information beinhalten; mit anderen Worten:

- *Die Abbildung* $\widetilde{E}' \to E$ *ist bijektiv.*

Die beiden Bijektionen ergeben eine Übersetzung von E in etwas, nämlich $\widetilde{X}'$, das allein durch den Raum X und die Gruppe H (die spezifizierte Untergruppe in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$), beschrieben werden kann.

Auf $\widetilde{X}'$ definieren wir nun eine topologische Struktur durch die folgende Vorschrift. Die Vorschrift ist eine fast wörtliche Wiederholung derjenigen, die im vorigen Beweis gegeben wurde für die Beschreibung der Topologie des Raumes $\widetilde{E}$; der einzige Unterschied ist, daß (wie die Doppelklammer " [[w]] " andeutet) hier eine andere (gröbere) Äquivalenzrelation für Wege benutzt wird.

DEFINITION. *Eine Umgebungsbasis am Punkt* $(\,x, [[w]]\,)$ *ist gegeben durch die Spezialmengen*

$$M(\,x, [[w]], U\,) \ ,$$

wo U *die Spezialumgebungen von* x *durchläuft.*

Es ist klar (oder?), daß die topologische Struktur auf $\widetilde{E}'$ ebenso gut auch hätte definiert werden können mit Hilfe der früher definierten Topologie von $\widetilde{E}$ als die *Quotientenraumtopologie bezüglich der Abbildung* $\widetilde{E} \to \widetilde{E}'$.

Schließlich zeigen wir, daß die Abbildung $q: \widetilde{E}' \to X$, $(\,x, [[w]]\,) \mapsto x$, eine Überlagerungsprojektion ist. Die Details dazu sind ganz ähnlich zu denen im vorigen Beweis, deshalb sollen sie hier nur angedeutet werden. Wir prüfen wieder nach: wenn U eine offene Spezialumgebung von x ist, dann ist U auch eine Elementarumgebung für die

Abbildung q . Ähnlich wie im vorigen Beweis stellen wir hierzu fest, daß das Urbild $q^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung ist,

$$q^{-1}(U) \quad = \quad \dot{\bigcup}_{(x,[[w]])\,\in\, q^{-1}(x)} \; V_{[[w]]} \ ,$$

wo $V_{[[w]]}$ die Menge derjenigen $(\,x',[[w']]\,)$ bezeichnet, wo $x' \in U$, und wo $[[w']]$ und $[[w]]$ in der Beziehung zueinander stehen, daß $[[w]]$ und $[[w']]$ Repräsentanten w und w' haben, so daß w' die Zusammensetzung von w mit einem ganz in U verlaufenden Weg ist. Wie im vorigen Beweis, so ist diese Vereinigung nun auch hier eine disjunkte Vereinigung offener Mengen; und jede von diesen wird per topologischer Äquivalenz auf U abgebildet. $\square$

Als Nebenprodukt der vorstehenden Resultate haben wir den folgenden Satz.

SATZ. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Sei $\{p_i : E_i \to X\}_{i\in I}$ eine Familie von Überlagerungen. Die disjunkte Vereinigung*

$$\dot{\bigcup}_{i\in I} \; p_i \ : \ \dot{\bigcup}_{i\in I} \; E_i \ \longrightarrow \ X$$

ist ebenfalls eine Überlagerung.

BEWEIS. Das ist *nicht* eine Trivialität. Das Problem ist dies. Die Behauptung des Satzes ist, daß für jedes $x \in X$ eine Elementarumgebung U existiert, die für die disjunkte Vereinigung der p_i funktioniert; oder, was dasselbe bedeutet, daß eine solche Elementarumgebung U existiert, die *für alle p_i gleichzeitig* funktioniert. Man muß also mehr oder weniger folgendes wissen: Zu dem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung, die tatsächlich *für jede Überlagerung von X als Elementarumgebung verwendbar ist*.

Die Klassifikation der Überlagerungen ergibt das. Nach dem Klassifikations–Satz ist jede zusammenhängende Überlagerung von X isomorph zu einer solchen, wie sie im vorstehenden Existenzsatz behandelt wurde. Im Beweis dort wurde gezeigt, daß eine offene Spezialumgebung immer auch als Elementarumgebung funktioniert; jedenfalls für die dort behandelten Überlagerungen, d.h., die zusammenhängenden. Es ist aber klar (oder?), daß das an dieser Stelle ausreicht. $\square$

BEMERKUNG. Alternativ kann man den vorstehenden Satz auch über den allgemeinen Liftungs-Satz erhalten: die Aussage “Zu dem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung, die tatsächlich für jede Überlagerung von X als Elementarumgebung verwendbar ist” kann man nämlich auch dadurch rechtfertigen, daß man den allgemeinen Liftungs-Satz anwendet auf die Inklusions-Abbildung $U \to X$, wo U eine Spezialumgebung von x in X bezeichnet.

Das Studium der Überlagerungen hat bisher folgendes Bild ergeben. Sei X ein "vernünftiger" Raum und $x_0 \in X$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ klassifiziert die zusammenhängenden Überlagerungen von X auf die folgende Weise: zu einer Überlagerung $p : E \to X$ gehört, sobald ein Punkt $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ ausgewählt worden ist, eine Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, nämlich die Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$. Die Untergruppe charakterisiert das Paar (E, e_0) . Umgekehrt kommt auch jede Untergruppe her von einer geeigneten Überlagerung.

Das Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist es, dieses Bild in einem wesentlichen Detail zu modifizieren. Es soll nämlich erreicht werden, daß auf die Auswahl des Punktes e_0 in $p^{-1}(x_0)$ verzichtet werden kann. Diese Modifikation ist notwendig, um die Gruppe der Automorphismen einer Überlagerung (die sogenannte *Decktransformationengruppe*) studieren zu können.

Das wesentliche Hilfsmittel wird das systematische Heranziehen einer einfachen Art von algebraischer Struktur sein, die, wie sich herausstellt, auf der Menge $p^{-1}(x_0)$ vorhanden ist. Die Menge $p^{-1}(x_0)$ ist nämlich eine sogenannte *G–Menge*, wo G die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet. Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß die Gruppe G auf der Menge $p^{-1}(x_0)$ *operiert*. Bevor wir die Operation näher anschauen (sie kommt her von der Wege–Liftung), sollen zunächst die benötigten Begriffe und Resultate über G–Mengen zusammengestellt werden.

Definition. Sei G eine Gruppe. Eine (rechte) *G–Operation* auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$M \times G \longrightarrow M \ , \qquad (\,m\,,\,g\,) \longmapsto m \cdot g \ ,$$

(oder, was auf dasselbe hinausläuft, jedem Element g ist eine Abbildung $M \to M$, $m \mapsto m \cdot g$, zugeordnet); dabei sollen einige naheliegende Bedingungen erfüllt sein. Nämlich einmal soll das Einselement der Gruppe auch als die identische Abbildung operieren,

$$m \cdot 1 \ = \ m \ ,$$

und zweitens soll die Komposition der Abbildungen kompatibel sein mit der Komposition in der Gruppe,

$$m \cdot (g\,g') \ = \ (\,m \cdot g\,) \cdot g' \ .$$

Definition. Die Menge M zusammen mit der Operation der Gruppe G wird als eine (*rechte*) *G–Menge* bezeichnet.

Bemerkung. Es gibt auch *linke* G–Operationen und linke G–Mengen (wir werden später eine treffen—der wesentliche Unterschied ist in dem gerade formulierten Assoziativitätsgesetz: die Reihenfolge ist da anders). Mit den G–Mengen verhält es sich ähnlich wie mit dem Straßenverkehr. Obwohl es eigentlich irrelevant ist, ob man nun rechts fährt oder links, so braucht man doch eine Regelung.

Definition und Konstruktion. Sei H eine Untergruppe von G . Eine *linke Nebenklasse* von H in G ist eine Untermenge in G von der Art

$$Hg_1 \quad = \quad \{\, h\, g_1 \mid h \in H \,\}$$

wo g_1 ein (festes) Element aus G ist. Ist g ebenfalls ein Element aus G , so kann man die linke Nebenklasse Hg_1 *von rechts* mit dem Element g multiplizieren. Das Resultat ist wieder eine linke Nebenklasse (im allgemeinen eine andere),

$$(Hg_1)\cdot g \quad = \quad \{\, h\,(g_1 g) \mid h \in H \,\}\ .$$

Die *Menge der linken Nebenklassen von* H *in* G wird mit $H\backslash G$ bezeichnet. Durch die beschriebene Operation wird $H\backslash G$ zu einer rechten G–Menge.

Bemerkung. Die Notation $H\backslash G$ deutet an, daß diese Menge auch interpretiert werden kann als eine Menge von Äquivalenzklassen, die man aus G durch eine Äquivalenzrelation erhält; nämlich zwei Elemente von G werden als äquivalent angesehen, wenn sie durch linke Multiplikation mit einem Element aus H auseinander hervorgehen.

Definition. Sei M eine G–Menge, sei $m \in M$. Die *Standgruppe* (oder *Isotropiegruppe*) von m ist die Untergruppe G_m derjenigen Elemente in G , die das Element m festlassen,

$$G_m \quad = \quad \{\, g \in G \ \mid\ m \cdot g \,=\, m \,\}\ .$$

Beispiel. In der G–Menge $H\backslash G$ hat das Element $H1$ als Standgruppe die Untergruppe H . Auch die Standgruppe irgendeines anderen Elements Hg kann man sofort angeben: die Standgruppe G_{Hg} ist die (zu H) *konjugierte Untergruppe*

$$G_{Hg} \quad = \quad g^{-1}Hg \underset{\text{(Def)}}{=} \{\, g^{-1}hg \in G \ \mid\ h \in H \,\}\ .$$

Definition. Eine G–Menge N heißt *transitiv*, wenn je zwei Elemente aus N durch die G–Operation ineinander übergeführt werden können; d.h., wenn zu vorgegebenen n_1 und n_2 in N immer ein g in G existiert mit $n_1 \cdot g = n_2$.

Beispiel. Sei H Untergruppe von G . Die G–Menge $H\backslash G$ ist transitiv.

Satz und Definition. *Sei M eine G–Menge. M zerfällt in eindeutiger Weise in eine* (disjunkte) *Vereinigung transitiver G–Mengen, der sogenannten Bahnen* (oder *Orbiten*).

Beweis. Wir betrachten die Relation auf M ,

$$m_1 \sim m_2 \iff \exists\, g \in G\,,\ m_1 \cdot g \,=\, m_2\ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies eine Äquivalenzrelation auf M ist. Die Äquivalenzklassen zu der Relation ergeben die behauptete Zerlegung. □

Sind M und N zwei G–Mengen, so soll eine *G–Abbildung* zwischen diesen beiden (oder auch eine *Abbildung von G–Mengen*) eine Abbildung bezeichnen, die mit den jeweiligen Operationen verträglich ist; also eine Abbildung $\varphi : M \to N$, so daß, für alle $g \in G$,

$$\varphi(m \cdot g) \;=\; \varphi(m) \cdot g \;.$$

Wenn die M_i , $i \in I$, die Bahnen in M bezeichnen, so induziert φ , per Einschränkung, G–Abbildungen $\varphi_i : M_i \to N$. Umgekehrt werden solche G–Abbildungen $\varphi'_i : M_i \to N$ sich auch zusammensetzen zu einer G–Abbildung $\varphi' : M \to N$ (die nachzuprüfende Bedingung $\varphi(m \cdot g) = \varphi(m) \cdot g$ bereitet keine Probleme, weil eben $m \cdot g$ und m immer in ein- und derselben Bahn liegen). Schließlich gilt auch noch: wenn M' eine transitive G–Menge in M ist (also eine Bahn), dann ist das Bild $\varphi(M')$ schon ganz enthalten in einer transitiven G–Menge in N . Wegen dieser Dinge wird es genügen, daß wir in erster Linie die Abbildungen transitiver G–Mengen betrachten.

Satz. *Sei M eine transitive G–Menge. Sei $m \in M$, mit Standgruppe G_m . Es gibt eine G–Abbildung*

$$\varphi_{M,m} : \; G_m \backslash G \;\longrightarrow\; M \;,$$

welche die linke Nebenklasse $G_m 1$ auf das Element m abbildet. Die Abbildung ist eindeutig bestimmt. Die Abbildung ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $\varphi_{M,m} : G_m \backslash G \to M$ ist definiert als $\varphi_{M,m}(\, G_m \, g \,) := m{\cdot}g$. Die Definition ist unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten $g \in G_m \, g$. Denn ist g' ein anderer Repräsentant, so ist $g' = h\,g$, wo $h \in G_m$, deshalb

$$m \cdot g' \;=\; m \cdot (h\,g) \;=\; (m \cdot h) \cdot g \;=\; m \cdot g \;.$$

Die Abbildung $\varphi_{M,m}$ ist eine G–Abbildung, denn es ist

$$\varphi_{M,m}(\,(G_m \, g) \cdot g'\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m \, g g'\,) \;=\; m \cdot g g' \;=\; (m \cdot g) \cdot g' \;=\; \varphi_{M,m}(G_m \, g) \cdot g' \;.$$

Die Abbildung ist surjektiv, da M transitive G–Menge ist. Die Abbildung ist injektiv, denn wenn $G_m \, g_1$ und $G_m \, g_2$ dasselbe Bild haben, so haben auch $G_m \, g_1 \, g_1^{-1}$ und $G_m \, g_2 \, g_1^{-1}$ dasselbe Bild; das bedeutet, daß

$$m \cdot g_2 \, g_1^{-1} \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m \, g_2 \, g_1{}^{-1}\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m \, g_1 \, g_1{}^{-1}\,) \;=\; m \;,$$

also ist $g_2 \, g_1{}^{-1} \in G_m$ und daher $G_m \, g_1 = G_m \, g_2$. Als G–Abbildung ist die Abbildung eindeutig bestimmt wegen

$$\varphi_{M,m}(\,G_m \, g\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,(G_m \, 1) \cdot g\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m \, 1\,) \cdot g \;.$$

Schließlich ist die Abbildung ein Isomorphismus. Denn da $\varphi_{M,m}$ eine bijektive Abbildung ist, gibt es zumindest eine Umkehrabbildung auf dem Mengen–Niveau (ohne Berücksichtigung der Bedingung, die eine *G–Abbildung* nach Definition zu erfüllen hat). Es ist aber klar (oder?), daß diese Bedingung automatisch erfüllt sein wird. $\square$

Satz. *Seien M und N transitive G–Mengen. Seien $m \in M$ und $n \in N$, mit Standgruppen G_m und G_n . Es existiert eine G–Abbildung $\varphi : M \to N$ mit $m \mapsto n$ genau dann, wenn die Standgruppe G_m enthalten ist in der Standgruppe G_n . Die Abbildung ist eindeutig bestimmt* (wenn sie existiert), *und sie ist surjektiv.*

Beweis. Wenn $\varphi : M \to N$ existiert, so ist $G_m \subset G_n$. Denn wenn $g \in G_m$, dann ist

$$n \cdot g \;=\; \varphi(m) \cdot g \;=\; \varphi(\, m \cdot g\,) \;=\; \varphi(m) \;=\; n \;,$$

also auch $g \in G_n$. Umgekehrt sei jetzt angenommen, daß $G_m \subset G_n$. Man kann jeder linken Nebenklasse von G_m diejenige linke Nebenklasse von G_n zuordnen, worin sie enthalten ist. Dies definiert eine Abbildung $q : G_m \backslash G \to G_n \backslash G$, und zwar eine G–Abbildung. Mit Hilfe der Isomorphismen aus dem vorigen Satz wird die gewünschte Abbildung φ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$M \xrightarrow{\;{\varphi_{M,m}}^{-1}\;} G_m \backslash G \xrightarrow{\;q\;} G_n \backslash G \xrightarrow{\;\varphi_{N,n}\;} N \;.$$

Die Abbildung ist eindeutig bestimmt durch ihren Wert auf $m \in M$, da M transitive G–Menge ist. Die Abbildung ist surjektiv, da N transitive G–Menge ist (und da die Abbildung nicht–leeres Bild in N hat). □

Korollar. *Sei M eine transitive G–Menge. Seien m und n Elemente aus M . Es gibt einen Isomorphismus $M \to M$ mit $m \mapsto n$ genau dann, wenn m und n dieselbe Standgruppe haben. Der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt* (wenn er existiert).

Beweis. Wenn der Isomorphismus existiert, so liefert der Satz (angewandt auf den Isomorphismus, sowie auf seine Umkehrung), daß $G_m \subset G_n$ und $G_n \subset G_m$; also $G_m = G_n$. Wenn diese Gleichheit umgekehrt nun angenommen wird, so liefert der Satz G–Abbildungen $\varphi : M \to M$ und $\psi : M \to M$ mit $\varphi(m) = n$ und $\psi(n) = m$. Die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ \varphi$,

$$M \xrightarrow{\;\varphi\;} M \xrightarrow{\;\psi\;} M \;,$$

ist dann eine G–Abbildung von M auf sich, die m auf m abbildet. Nach der Eindeutigkeitsklausel des Satzes folgt, daß $\psi \circ \varphi$ gleich der identischen Abbildung auf M ist. Ähnlich folgt, daß auch $\varphi \circ \psi$ gleich der identischen Abbildung ist. Also sind φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen von M auf sich. □

Es bezeichne $\mathcal{A}_G(M)$ die Menge der G–Automorphismen von M (Isomorphismen von M auf sich, die G–Abbildungen sind). Unter der Komposition von Abbildungen ist dies eine Gruppe. Es stellt sich heraus, daß diese Gruppe vollständig beschrieben werden kann. Das notieren wir in den folgenden Sätzen. In einem (besonders wichtigen) speziellen Fall ist die Antwort besonders einfach:

Bezeichne $\overline{G}$ die Menge der linken Nebenklassen der trivialen Untergruppe in G . Mit anderen Worten, es handelt sich bei $\overline{G}$ um die unterliegende Menge von G , aufgefaßt als rechte G–Menge.

Satz. *Die Gruppe* $\mathcal{A}_G(\overline{G}\,)$ *ist isomorph zu* G *selbst. Ein Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung*

$$G \longrightarrow \mathcal{A}_G(\overline{G}\,)\ , \qquad g \longmapsto \alpha_g\ ,$$

wo $\alpha_g : \overline{G} \to \overline{G}$ *derjenige Isomorphismus ist* (er ist eindeutig bestimmt), *der das Element* $1 \in \overline{G}$ *abbildet auf das Element* $g \in \overline{G}$.

Beweis. Nach dem vorstehenden Korollar ist die Abbildung $g \mapsto \alpha_g$ eine Bijektion zwischen den Elementen von G einerseits und den Elementen von $\mathcal{A}_G(\overline{G}\,)$ andererseits. Es ist noch nachzuprüfen, daß die Abbildung mit Komposition verträglich ist, daß also gilt

$$\alpha_{g_1 g_2} \;=\; \alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2}\ .$$

Die Rechnung

$$(\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2})(1) \;=\; \alpha_{g_1}(\,\alpha_{g_2}(1)\,) \;=\; \alpha_{g_1}(\,g_2\,) \;=\; \alpha_{g_1}(1)\cdot g_2 \;=\; g_1 \cdot g_2 \;=\; g_1\, g_2$$

zeigt, daß diese beiden Isomorphismen auf $1 \in \overline{G}$ denselben Wert annehmen. Es folgt, daß sie gleich sind. □

Was transitive G–Mengen angeht, so ist es keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, sich auf solche der Art $H\backslash G$ zu beschränken.

Es bezeichne $N(H)$ die Menge derjenigen Elemente $g \in G$, welche die Eigenschaft haben, daß die zu H konjugierte Untergruppe

$$g^{-1}Hg \underset{\text{(Def)}}{=} \big\{\, g^{-1}hg \in G \;\mid\; h \in H \,\big\}$$

in Wirklichkeit *dasselbe* ist wie die Gruppe H selbst. Es ist klar (oder?), daß die Menge $N(H)$ selbst eine Gruppe ist, der sogenannte *Normalisator* von H in G . Die Gruppe H ist als Untergruppe in $N(H)$ enthalten, und zwar als *normale Untergruppe* (alias *Normalteiler*); es existiert also die Quotientengruppe $N(H)/H$.

Satz. *Die Gruppe* $\mathcal{A}_G(H\backslash G)$ *ist isomorph zu* $N(H)/H$ *. Ein Isomorphismus ist induziert durch die Abbildung*

$$N(H) \longrightarrow \mathcal{A}_G(H\backslash G)\ , \qquad g \longmapsto \alpha_g\ ,$$

wo $\alpha_g : H\backslash G \to H\backslash G$ *derjenige Isomorphismus ist* (er ist eindeutig bestimmt), *der das Element* $H1$ *von* $H\backslash G$ *auf das Element* Hg *abbildet.*

Beweis. Da $g^{-1}Hg$ die Standgruppe von Hg ist, ist die Bedingung “ $g \in N(H)$ ” gleichbedeutend damit, daß $H1$ und Hg dieselbe Standgruppe haben; daß also ein G–Isomorphismus von $H\backslash G$ auf sich existiert mit $H1 \mapsto Hg$. Dies ist, nach Definition, α_g . Es ist klar (oder?), daß α_g nur von der Restklasse von g in $N(H)/H$ abhängt. Daß die Abbildung $N(H)/H \to \mathcal{A}_G(H\backslash G)$ mit der Komposition verträglich ist, wird durch die im vorigen Beweis gegebene Rechnung gezeigt. □

Wir kommen jetzt zu der Übersetzung von *Überlagerungen* einerseits in G–*Mengen* andererseits. Die Übersetzung beruht auf der *Wege–Liftung*, die wir hier in der folgenden Form zitieren.

Satz. *Sei* $p : E \to X$ *eine Überlagerung. Sei* $w : [0,1] \to X$ *ein Weg mit Anfangspunkt* x_0 *und Endpunkt* x_1 *. Es gilt:*

• w *induziert eine Abbildung* $w_* : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ *; diese Abbildung hängt nur von der Homotopieklasse* (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) *von* w *ab.*

• *Die Zuordnung* $w \longmapsto w_*$ *ist verträglich mit der Komposition von Wegen*; d.h. ist w' ein Weg von x_1 zu x_2 , so ist die zusammengesetzte Abbildung " *zuerst* w_* *, dann* w'_* " dasselbe wie die Abbildung $(ww')_*$, die von dem zusammengesetzten Weg ww' induziert ist.

• *Die Abbildung* w_* *ist eine Bijektion, und die zu* w_* *inverse Abbildung ist induziert von dem zu* w *inversen Weg* $\overline{w}$ *.*

Beweis. Die Abbildung w_* ist auf die folgende Weise definiert. Nach dem Wege–Liftungs–Satz existiert zu einem Punkt $y \in p^{-1}(x_0)$ ein (eindeutig bestimmter) gelifteter Weg $\widetilde{w}$ mit Anfangspunkt $\widetilde{w}(0) = y$; der Endpunkt $\widetilde{w}(1)$ dieses Weges ist, nach Definition, der Punkt $w_*(y)$. Der Homotopie–Liftungs–Satz sagt, daß eine Homotopie (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen in X liftet zu einer ebensolchen Homotopie in E ; insbesondere wird die Liftung des deformierten Weges denselben Endpunkt haben wie $\widetilde{w}$ auch.

Die Verträglichkeit mit der Komposition von Wegen liegt schlicht daran, daß man einen zusammengesetzten Weg in seinen Einzelteilen liften kann: zuerst wird der erste Teilweg zum vorgegebenen Anfangspunkt geliftet; danach dann der zweite Teilweg zu dem neuen Anfangspunkt (dem Endpunkt der Liftung des ersten Teilweges).

Der Weg $w\,\overline{w}$ ist *null-homotop* (= homotop, relativ Basispunkt, zum trivialen Weg). Nach den obigen Dingen gilt deshalb

$$\overline{w}_* \circ w_* \;=\; (w\,\overline{w})_* \;=\; Id_{p^{-1}(x_0)} \; .$$

Ähnlich ist auch $w_* \circ \overline{w}_* = Id_{p^{-1}(x_1)}$. □

Bemerkung. Der Satz sagt insbesondere, daß bei *weg–zusammenhängendem* X die *Blätterzahl* von $p : E \to X$ über allen Punkten von X dieselbe ist. Man ist somit berechtigt, von der *Blätterzahl der Überlagerung* zu reden. □

Für den nächsten Satz wird die folgende Begriffsbildung benötigt. Seien $p_1 : E_1 \to X$ und $p_2 : E_2 \to X$ Überlagerungen. Eine *Abbildung von Überlagerungen*

$$(p_1 : \; E_1 \to X) \quad \longrightarrow \quad (p_2 : \; E_2 \to X)$$

ist, nach Definition, eine Abbildung $f : E_1 \to E_2$, wo f eine *Abbildung über* X ist; d.h. wo $p_2 \circ f \;=\; p_1$.

Satz. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0 \in X$. Bezeichne G die Fundamentalgruppe, $G := \pi_1(X, x_0)$. Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung.*

- *Das Urbild $p^{-1}(x_0)$ hat die Struktur einer rechten G–Menge.*

- *Die Weg–Zusammenhangskomponenten von E entsprechen den Bahnen dieser G–Menge; die Standgruppe von $y \in p^{-1}(x_0)$ ist gleich der Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, y)\,)$.*

- *Eine Abbildung von Überlagerungen $(\,p_1 : E_1 \to X\,) \;\to\; (\,p_2 : E_2 \to X\,)$ induziert eine Abbildung von G–Mengen $p_1^{-1}(x_0) \;\to\; p_2^{-1}(x_0)$.*

Beweis. Für den Spezialfall geschlossener Wege w mit Anfangs- und Endpunkt x_0 sagt der vorige Satz, daß w eine Abbildung w_* von $p^{-1}(x_0)$ auf sich induziert, die nur von der Klasse $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ abhängt. Dies definiert eine G–Operation, da, wie der Satz auch sagt, die von einer solchen Operation verlangten formalen Eigenschaften erfüllt sind.

Seien $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$. Wenn y_1 und y_2 durch die Operation auseinander hervorgehen, so heißt dies insbesondere, daß sie durch einen Weg verbindbar sind. Wenn umgekehrt v ein Weg von y_1 zu y_2 ist, so folgt (wieder aus der Definition der Operation), daß y_2 aus y_1 hervorgeht durch die Operation des von dem geschlossenen Weg $p \circ v$ repräsentierten Gruppenelements. Die weitere Behauptung, daß die Standgruppe von $y \in p^{-1}(x_0)$ dasselbe ist wie die Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, y)\,)$, ist eine Umformulierung der uns schon bekannten Tatsache, daß ein geschlossener Weg an x_0 genau dann zu einem *geschlossenen* Weg mit Anfangspunkt y liftet, wenn das von ihm repräsentierte Element in der genannten Bildgruppe liegt.

Sei $f : E_1 \to E_2$ eine Abbildung über X . Sei w ein geschlossener Weg in X (am Basispunkt). Sei $y \in p_1^{-1}(x_0)$. Eine Liftung $\widetilde{w}$ von w zum Anfangspunkt y ergibt, nach Definition, als ihren Endpunkt das Ergebnis der Operation von w_* auf y . Dies $\widetilde{w}$ nun war eine Liftung nach E_1 ; es ist dann $f \circ \widetilde{w}$ eine Liftung von w nach E_2 , zum Anfangspunkt $f(y)$. Nach Definition der Operation von w_* auf $f(y)$ ist das Ergebnis (dieser Operation) gegeben durch den Endpunkt der Liftung $f \circ \widetilde{w}$. Andererseits ist besagter Endpunkt aber auch das Bild von $w_*(y)$ unter der Abbildung f . □

Wir betrachten speziell jetzt "vernünftige" Räume. Es sei daran erinnert, daß ein *semi–lokal einfach–zusammenhängender* Raum insbesondere auch *lokal wegzusammenhängend* ist. Ist er zusammenhängend, so ist er folglich auch weg–zusammenhängend.

Satz. *X sei ein zusammenhängender und semi–lokal einfach–zusammenhängender Raum. Sei $x_0 \in X$ und $G = \pi_1(X, x_0)$. Seien $p_1 : E_1 \to X$ und $p_2 : E_2 \to X$ zwei Überlagerungen. Die Zuordnung*

$$\Big(\,(\,p_1 : E_1 \to X\,) \xrightarrow{\;f\;} (\,p_2 : E_2 \to X\,)\,\Big) \quad\longmapsto\quad \Big(\,p_1^{-1}(x_0) \xrightarrow{\;f|p_1^{-1}(x_0)\;} p_2^{-1}(x_0)\,\Big)$$

gibt eine $1:1$ Beziehung zwischen

- *Abbildungen von Überlagerungen* (von $p_1 : E_1 \to X$ zu $p_2 : E_2 \to X$) ,
- *Abbildungen von G–Mengen* (von $p_1^{-1}(x_0)$ zu $p_2^{-1}(x_0)$) .

Beweis. Das wird eine Konsequenz aus dem allgemeinen *Liftungs–Satz* sein. Wir müssen uns nur klar machen, daß wir uns auf ein Argument mit *zusammenhängenden* Räumen zurückziehen können.

Da E_1 lokal weg–zusammenhängend ist (weil ja X diese Eigenschaft, nach Voraussetzung, hat), ist E_1 die disjunkte Vereinigung seiner (Weg–)Zusammenhangskomponenten. Sei E eine Zusammenhangskomponente von E_1. Der Durchschnitt $E \cap p^{-1}(x_0)$ ist nicht leer. Denn ist e irgendein Punkt in E, so kann man den Bildpunkt $p(e)$ durch einen Weg mit dem Basispunkt x_0 verbinden. Eine Liftung dieses Weges zum Anfangspunkt e produziert als ihren Endpunkt dann einen Punkt in $E \cap p^{-1}(x_0)$.

Es ist nun klar, daß die Abbildung $f : E_1 \to E_2$, als Abbildung über X, durch ihren Effekt auf $p^{-1}(x_0)$ schon festgelegt ist. Denn sei E eine Zusammenhangskomponente von E_1, sei $y \in E \cap p^{-1}(x_0)$ (wir haben uns soeben von der Existenz eines solchen y überzeugt), dann sagt die Eindeutigkeitsklausel im Liftungs–Satz, daß die eingeschränkte Abbildung $f\,|\,E$ schon durch ihren Effekt auf dem Punkt y bestimmt ist.

Auch für die Frage der Existenz von f zu vorgegebenem Verhalten auf $p^{-1}(x_0)$ wird es genügen, eine einzelne Zusammenhangskomponente zu betrachten (denn um eine Abbildung auf einer disjunkten Vereinigung zu definieren, darf man die Abbildungen auf den einzelnen Komponenten beliebig vorgeben). Sei also E eine Zusammenhangskomponente von E_1, sei $y \in (p_1|E)^{-1}(x_0)$. Nun ist f auf $p^{-1}(x_0)$ nicht schlicht als *Abbildung* vorgegeben, sondern vielmehr als *Abbildung von G–Mengen.* Das impliziert, wie wir wissen, eine Relation zwischen Standgruppen; es impliziert nämlich, *daß die Standgruppe am Punkt y enthalten ist in der Standgruppe am Punkt $f(y)$*. Wir können andererseits, wie wir wissen, die Standgruppen über die Fundamentalgruppe ausdrücken: die Standgruppe an y ist die Bildgruppe $(p_1|E)_*(\,\pi_1(E,y)\,)$, die Standgruppe an $f(y)$ ist die Bildgruppe $(p_2)_*(\,\pi_1(E_2,f(y)\,)\,)$. Unsere Voraussetzung ergibt somit die Relation

$$(p_1|E)_*(\,\pi_1(E,y)\,) \quad \subset \quad (p_2)_*(\,\pi_1(E_2,f(y)\,)\,)\ .$$

Das ist aber gerade die Voraussetzung, die der Liftungs–Satz akzeptiert, um zu garantieren, daß eine Abbildung $E \to E_2$ (über X) existiert, mit $y \mapsto f(y)$. Diese Abbildung nun können wir nehmen. Denn ihre Einschränkung auf $(p_1|E)^{-1}(x_0)$ hat das vorgegebene Verhalten. Das liegt daran, daß die konstruierte Abbildung $E \to E_2$ als Abbildung von Überlagerungen ja ihrerseits auch eine Abbildung von G–Mengen $(p_1|E)^{-1}(x_0) \to (p_2)^{-1}(x_0)$ induziert. Wir haben also nun *zwei* Abbildungen von G–Mengen, die auf einer transitiven G–Menge definiert sind und die an einem Punkt übereinstimmen; solche zwei Abbildungen sind aber gleich. $\square$

Zusatz zum Satz. *Die Abbildung von Überlagerungen $f : E_1 \to E_2$ (über X) ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugeordnete Abbildung von G–Mengen $p_1^{-1}(x_0) \to p_2^{-1}(x_0)$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar: die Zuordnung $f \mapsto f \,|\, p_1^{-1}(x_0)$ ist *funktoriell* in dem Sinne, daß sie mit Komposition von Abbildungen verträglich ist und daß sie Identitäten respektiert; sie respektiert deshalb auch Isomorphismen.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß f eine Abbildung ist, so daß die zugeordnete Abbildung g von G–Mengen ein Isomorphismus ist. Die Behauptung ist, daß in dieser Situation die Abbildung f selbst auch schon ein Isomorphismus ist. Nun hat der Isomorphismus g eine inverse Abbildung g'. Die Abbildung g' ist nach dem vorigen Satz ebenfalls von einer Abbildung von Überlagerungen existiert, diese heiße f'. Wir zeigen jetzt, daß die Abbildung f' tatsächlich invers zur Abbildung f ist.

Die zusammengesetzte Abbildung $f' \circ f$ induziert die Abbildung von G–Mengen $g' \circ g$, die eine identische Abbildung ist (nach Voraussetzung). Das bedeutet, im Klartext, daß $f' \circ f$ eine Abbildung von Überlagerungen ist, *die das Urbild des Basispunktes* $x_0 \in X$ *festläßt*. Eine solche Abbildung ist aber notwendigerweise eine identische Abbildung (nach der Eindeutigkeitsklausel des allgemeinen Liftungs–Satzes, angewandt auf die Zusammenhangskomponenten). — Auf ähnliche Weise folgt, daß auch die zusammengesetzte Abbildung $f \circ f'$ eine identische Abbildung ist. □

Als die *Decktransformationengruppe* einer Überlagerung $p : E \to X$ bezeichnet man die Gruppe der Isomorphismen $E \to E$ (über X).

Satz. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Die Decktransformationengruppe der universellen Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Nach den vorigen beiden Sätzen ist diese Decktransformationengruppe isomorph zur G–Automorphismengruppe der G–Menge $p^{-1}(x_0)$ (wo $G = \pi_1(X, x_0)$). Bei dieser G–Menge handelt es sich um die *freie* transitive G–Menge; wo "frei" bedeutet, daß die Standgruppe jedes Punktes die triviale Gruppe ist — daß dies so ist, folgt aus der Identifikation der Standgruppe von $y \in p^{-1}(x_0)$ mit der Bildgruppe $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, y))$. Von dieser speziellen Automorphismengruppe haben wir aber oben ausgerechnet, daß sie zu G selbst isomorph ist. □

Bemerkung. Der Isomorphismus im vorangegangenen Satz ist *nicht* kanonisch; er ist nur kanonisch *bis auf innere Automorphismen*. Wir haben zwar oben einen Isomorphismus explizit angegeben; die Angabe dieses Isomorphismus benutzte aber zusätzliche Information (nämlich die Auswahl eines ausgezeichneten Punktes in der G-Menge).

Wir haben oben andererseits aber auch ein ganz bestimmtes Modell für die universelle Überlagerung kennengelernt (s. S. 98-99). Nämlich, wenn X ein "vernünftiger" Raum ist, dann ist ein Modell für die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ wie folgt beschreibbar: ein Punkt in $\widetilde{X}$ ist repräsentiert von einem Paar (x, v), wo x ein Punkt aus X ist und v ein Weg, der den Basispunkt x_0 mit dem Punkt x verbindet (x_0 ist der Anfangspunkt von v, und x ist der Endpunkt). Die Punkte in $\widetilde{X}$ sind dann die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation, wo (x, v) und (x, v') als äquivalent angesehen werden, wenn v homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu v'. Kurz gesagt, ein Punkt in $\widetilde{X}$ besteht aus einem Punkt x in X zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen vom Basispunkt zu x . Die Abbildung $\widetilde{X} \to X$ für dieses Modell ist schlicht die "vergeßliche" Abbildung, die den Weg v vergißt. Ferner gibt es in diesem Modell einen ganz kanonischen Punkt über dem Basispunkt x_0 , nämlich den Punkt in $\widetilde{X}$, der gegeben ist durch das Paar (x_0, x_0) (das zweite " x_0 " hier bezeichnet einen trivialen Weg). Und schließlich gibt es in diesem Modell auch eine ganz explizite Beschreibung der Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$. Nämlich, wenn $[w] \in \pi_1(X, x_0)$, dann ist das Resultat der Operation von $[w]$ auf dem Punkt (x, v) gegeben durch den Punkt $[w]_*(x, v) := (x, wv)$ (wo wv den zusammengesetzten Weg " erst w , dann v " bezeichnet; dieser zusammengesetzte Weg existiert, da der Endpunkt von w , nämlich der Basispunkt x_0 , ja auch der Anfangspunkt von v ist).

Auch die Beziehung zu den rechten G-Mengen ist ganz explizit angebbar. Nämlich in $\widetilde{X}$ haben wir die Menge $p^{-1}(x_0)$, die eine rechte G-Menge ist. Konkret besteht diese Menge aus denjenigen Punkten (x_0, w) in $\widetilde{X}$, bei denen w ein *geschlossener* Weg ist (also nicht nur der Anfangspunkt, sondern auch der Endpunkt von w ist gleich dem Basispunkt x_0). Durch Ignorieren von " x_0 " kann man diese Menge mit der unterliegenden Menge der Gruppe G identifizieren; wie früher wollen wir diese mit $\overline{G}$ bezeichnen. Wenn nun $g \in G$ und wenn β_g die zugehörige Decktransformation bezeichnet, so ist die Einschränkung von β_g auf $p^{-1}(x_0)$ ein Isomorphismus von rechten G-Mengen. Es ist klar (oder?), daß unter der Identifikation von $p^{-1}(x_0)$ mit $\overline{G}$ dieser Isomorphismus dann demjenigen Isomorphismus von $\overline{G}$ auf sich entspricht, der früher mit α_g bezeichnet worden ist (S. 110). $\square$

Bemerkung. Eine Überlagerung $p : E \to X$ wird als *regulär* bezeichnet, wenn sie "maximale Symmetrie" besitzt; d.h. wenn zu je zwei Punkten über $x_0 \in X$ eine Decktransformation existiert, welche diese beiden Punkte aufeinander abbildet. Bezeichne wie vorher $G = \pi_1(X, x_0)$; sei $y \in E$ ein Punkt über x_0 und $H = p_*(\pi_1(E, y))$. Die Regularität der Überlagerung bedeutet, nach der durch die obigen Sätze gegebenen Übersetzung, daß je zwei Punkte der G-Menge $p^{-1}(x_0)$ dieselbe Standgruppe haben. Es kommen aber sämtliche Konjugierten von H tatsächlich als Standgruppen vor. Die Regularität bedeutet also, daß die Konjugierten von H alle zueinander gleich sind; das heißt, daß H eine *normale Untergruppe* in G ist (oder daß der Normalisator von H die ganze Gruppe G ist). Als Variante des vorangehenden Satzes bekommt man, daß die Decktransformationengruppe der regulären Überlagerung $p : E \to X$ isomorph ist zur Quotientengruppe G/H .

Bemerkung. Unter Verwendung der Decktransformationengruppe kann man die anderen Überlagerungen eines (vernünftigen) Raumes X direkt aus der universellen Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ konstruieren. Sei $x_0 \in X$ und sei ein Punkt $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gewählt, so daß man also in der beschriebenen Weise die Decktransformationengruppe mit der Fundamentalgruppe $G = \pi_1(X, x_0)$ identifizieren kann. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann operiert auch H auf $\widetilde{X}$, und man kann somit einen Raum E definieren als den Quotienten bezüglich dieser Aktion (zwei Punkte aus $\widetilde{X}$ werden identifiziert, wenn sie durch die Operation eines Elements $h \in H$ auseinander hervorgehen; der entstehende Raum wird mit der Quotiententopologie versehen).

Es ist nun klar, daß die resultierenden Abbildungen $\widetilde{X} \to E$ und $q : E \to X$ Überlagerungsprojektionen sind; denn sei $U \subset X$ eine *Spezialumgebung* in dem früher definierten Sinn (S. 96), die auch noch offen sei (S. 101). Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist dann eine disjunkte Vereinigung von Mengen U_i , $i \in I$, deren jede zu U topologisch äquivalent ist (vermöge der Abbildung p). Die Indexmenge I ist isomorph zu der unterliegenden Menge von G (allerdings nicht in kanonischer Weise; um einen bestimmten solchen Isomorphismus auszuwählen, müßte man z.B. einen Weg von x_0 zu U zu wählen). Die Gruppe H operiert auf der Vereinigung der U_i indem sie die U_i schlicht permutiert. Der Quotientenraum nach der Operation von H ist wieder eine disjunkte Vereinigung von Kopien von U ; die Indexmenge ist gegeben durch die Menge der Äquivalenzklassen in I bezüglich der Operation von H .

Um schließlich zu sagen, um *welche* Überlagerung es sich bei $q : E \to X$ denn nun handelt, genügt die folgende Bemerkung: Das Urbild $p^{-1}(x_0)$ ist *in bestimmter Weise* mit der unterliegenden Menge von G identifiziert (wegen der Wahl des Punktes $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$). Bezüglich dieser Identifizierung operiert ein Element $h \in H$ auf G durch die *linke Multiplikation mit* h (vgl. die explizite Beschreibung auf S. 110). Es folgt, daß $p^{-1}(x_0)$ die G–Menge $H\backslash G$ ist. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $e_0 \in E$ das Bild von $\widetilde{x}_0$ bezeichnet, so ist die Bildgruppe $q_*(\pi_1(E, e_0))$ gerade die Gruppe H selbst. $\square$

Wie wir zum Schluß noch anmerken wollen, so hat die Theorie der Überlagerungen auch einen "numerischen" Aspekt. Sie taugt nämlich dazu, Fundamentalgruppen in einigen Fällen wirklich auszurechnen. Das liegt daran, daß es bei einer Decktransformationengruppe durchaus offensichtlich(!) sein kann, um welche Gruppe es sich denn nun handelt.

Beispiel. Die 1–Sphäre S^1 hat als Überlagerung die Gerade $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ einfach–zusammenhängend ist, handelt es sich hier um die universelle Überlagerung. Die Decktransformationengruppe ist $\mathbb{Z}$, die Gruppe der ganzen Zahlen (mit der Addition als Verknüpfung). Über den Isomorphismus von "Decktransformationengruppe der universellen Überlagerung" einerseits und "Fundamentalgruppe" andererseits erhalten wir somit einen anderen Beweis für die uns schon bekannte Tatsache, daß $\pi_1(S^1, s_0) \approx \mathbb{Z}$.

Beispiel. Die projektive Ebene RP^2 hat als Überlagerung die 2–Sphäre S^2 . Da S^2 einfach–zusammenhängend ist, handelt es sich hier um die universelle Überlagerung. Die Decktransformationengruppe ist die (zyklische) Gruppe der Ordnung 2 (das nicht–triviale Element ist die Antipoden-Abbildung). Die Fundamentalgruppe von RP^2 ist also die Gruppe der Ordnung 2 .

Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie

Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Einführung (1-5)

- Homotopietyp (2)
- Whitehead-Satz (3, 46)
- Räume von Matrizen und von Diffeomorphismen (3-5)

CW-Komplexe (6-19)

- Anheften von Zellen (6-8)
- Hausdorff-Eigenschaft und Kompaktheit (11-12, 15-16)
- Definition von CW-Komplexen (12-13)
- Zellen, Charakteristische Abbildungen von Zellen (13)
- Euler-Charakteristik (14)
- Euler'scher Polyeder-Satz (15, 64)
- Ein Kompaktum liegt in einem endlichen Unterkomplex (18)

Zellulärer Approximations-Satz (20-29)

- zelluläre Abbildung (20)
- (Quotientenräume und Produkte) (27)
- (Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft) (28)
- Abschluß des Beweises (42)

Produkte (30-37)

- Kompatibilität von Quotientenraum-Konstruktionen und Produkten (33)
- Produkte von CW-Komplexen (35)
- Ein Gegenbeispiel (36-37)

Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (38-44)

- Umformulierungen (38-39)
- HEE für zelluläre Inklusionen (40)
- Gegenbeispiele (z.B. Hawaiische Ohrringe) (41-42)
- Abbildungs-Zylinder (43-44)

Whitehead-Satz (45-47)

- n-zusammenhängend (45)
- schwache Homotopieäquivalenz (46)
- Whitehead-Satz (46)
- Abschluß des Beweises (61)

Homotopiegruppen (48-61)
- exakte Folgen (51)
- exakte Folge der Homotopiegruppen (54)
- Gruppenstruktur (55-56)
- Kommutativität der Gruppenstruktur (58)
- Rolle des Basispunktes (59)

Einführung in Homologie (62-64)
- Kurven-Integrale (63)
- 1-Ketten (63)
- Euler'scher Polyeder-Satz (15, 64)

Simplizialkomplexe (65-67)
- Simplex (65)
- geordneter Simplizialkomplex (67)

Linearisierung (68-69)
- formale endliche Summen (68)
- Rand-Operator (69)
- Homologiegruppen eines geordneten Simplizialkomplexes (69)

Δ-Mengen (70-77)
- affines Standard-Simplex (70)
- geometrische Realisierung (71)
- kanonische Repräsentanten für Punkte der geometrischen Realisierung (74)
- geometrische Realisierung ist ein CW-Komplex (76)

Singulärer Komplex (78-80)
- singuläre Homologiegruppen (78)
- (erste) geometrische Realisierung des singulären Komplexes (79)
- ausgeartete Simplizes (80)

Simpliziale Mengen (81-86)
- die Kategorie Δ (80)
- Struktur der Kategorie Δ (82-83)
- simpliziale Mengen, Rand-Abbildungen, Ausartungs-Abbildungen (82-83)
- geometrische Realisierung einer simplizialen Menge (85)
- Struktursatz für simpliziale Mengen (86)

Nützliche Konstruktionen (87-94)
- von einer Δ-Menge erzeugte simpliziale Menge (87)
- affine singuläre Simplizes (87)
- simpliziale Menge "Standard-k-Simplex" (89)
- Quotienten-Konstruktionen (90)

charakteristische Abbildung eines Simplexes (91)
Zellenaufbau einer simpliziale Menge (92, 94)
n-Skelett einer simpliziale Menge (93)
die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge ist ein CW-Komplex (94)

Homotopie (bei simplizialen Mengen) (95-102)
Produkt von simplizialen Mengen, Definition von Homotopie (87)
geometrische Realisierung einer Produkt-simplizialen-Menge (96)
Simplizialzerlegung eines Prismas (98)
partiell geordnete Mengen als Repräsentanten spezieller simplizialer Mengen (98)

Homotopie (bei Kettenkomplexen) (103-106)
Homotopie-Eigenschaft der singulären Homologie (106)

Kleine Simplizes (107-110)
Satz über kleine Simplizes (107)
die geometrische Realisierung des singulären Komplexes
rekonstruiert einen CW-Komplex (bis auf Homotopie) (107, 110)
(Klebelemma) (109)

Relative Homologiegruppen (111-117)
Unterkomplex, Quotientenkomplex (112)
lange exakte Folge der Homologiegruppen (112)
Ausschneidungs-Satz (114)
$H_*(S^n)$ und andere (116)

Zelluläre Homologie (118-122)
Euler-Charakteristik eines endlichen CW-Komplexes (118)
lange exakte Folge eines Tripels (119)
Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes (120)

Unterteilung (123-129)
baryzentrische Unterteilung (123)
die "Unterteilungs-Abbildung" $\mathrm{Unt}: \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ (124)
Satz über kleine Simplizes (betreffend geometrische Realisierung) (128)

Ketten-Unterteilung (130-134)
Unterteilungs-Operator (130)
Satz über kleine Simplizes (betreffend Homologie) (134)

Vergleich von Realisierungen (135-139)
zwei Reduktionen (136, 137)
die wichtige Homotopie (138, 139)

Klebelemma (140-147)

Algebraische Topologie

Einführung

Zu Beginn dieser Veranstaltung erwarten Sie vermutlich von mir, daß ich Ihnen in wenigen Worten beschreibe, was "Algebraische Topologie" ist. Das geht zwar nicht, aber ich will es wenigstens versuchen.

Die algebraische Topologie ist etwa so alt wie dieses Jahrhundert.[1] Ihre Erschaffung geschah in einer Art Urknall, nämlich durch Poincaré's Erfindung der sogenannten "Homologiegruppen". Die Anzahl der bisher publizierten wissenschaftlichen Arbeiten, die der algebraischen Topologie zuzurechnen sind, dürfte an die zehntausend betragen. Es werden auch immer noch mehr, denn es gibt heutzutage einige hundert Mathematiker, die sich in ihrer Eigenschaft als Forscher hauptsächlich mit algebraischer Topologie beschäftigen. Nun zu mehr inhaltlichen Dingen. In der "Topologie"–Veranstaltung des vorherigen Semesters haben wir Beispiele dafür kennengelernt, wie man einem topologischen Raum X gewisse "diskrete Strukturen" zuordnet, von denen man hofft, daß sie überschaubarer sind als der Raum X selbst, nämlich einmal

$$\pi_0(X) \ = \ \text{Menge der Weg–Zusammenhangsklassen von } X$$

und zum anderen

$$\pi_1(X, x_0) \ = \ \text{Fundamentalgruppe von } X \text{ zum Basispunkt } x_0 \ .$$

Ganz grob nun gesprochen, befaßt sich algebraische Topologie mit der Systematik derartiger "Diskretisierungen", nämlich deren Konstruktion, Berechnung und Anwendung.

In dieser Veranstaltung werden wir uns mit zwei solcher Konstruktionen beschäftigen, nämlich den *Homotopiegruppen* $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ (aus technischen Gründen braucht man wie im Falle $n = 1$ (Fundamentalgruppe) immer einen Basispunkt) und den *Homologiegruppen* $H_n(X)$, $n \geq 0$.

Bei beiden Konstruktionen muß ich leider eine traurige Nachricht vorweg schicken: Die Homotopiegruppen sind zwar sehr einfach zu definieren (nämlich die unterliegende Menge von $\pi_n(X, x_0)$ ist nichts anderes als die Menge der Homotopieklassen (Homotopie relativ zum Basispunkt) von Abbildungen $S^n \longrightarrow X$), aber sie sind extrem schwierig zu berechnen. Sei z.B. X ein "vernünftiger" Raum mit den Eigenschaften (i) X ist kompakt, (ii) es gibt ein $m \geq 2$, so daß $\pi_m(X, x_0) \neq 0$ (die m–dimensionale

[1] Das Skript (und damit auch diese Feststellung) stammt aus dem vorigen Jahrhundert.

Sphäre S^m ist ein Beispiel für solch ein X), dann weiß man: Es gibt unendlich viele n mit $\pi_n(X, x_0) \neq 0$, und nur sehr wenige von diesen sind explizit bekannt.

Die Homologiegruppen andererseits sind verhältnismäßig einfach zu berechnen (es gibt beliebig viele Räume, wo man sie alle kennt), aber sie sind schwierig zu konstruieren. Zumindest wird ihre Konstruktion, wenn man sie kennenlernt, meist als sehr technisch empfunden. Das mag überraschend erscheinen auf dem Hintergrund dessen, daß die Homologiegruppen ca. 40 Jahre älter sind als die Homotopiegruppen (ca. 1890 bzw. ca. 1930). Es ist aber so, daß die Homologiegruppen zunächst nur erklärt waren für Räume mit einer gewissen Zusatzstruktur (sogenannte Simplizialkomplexe), und die Annahme, daß die Homologiegruppen "topologische Invarianten" seien, d.h., nur von dem Raum abhängen und nicht von der Zusatzstruktur, diese Annahme erforderte gewisse Akte des Glaubens. Erst im Laufe der 20er und 30er Jahre gelang es, Konstruktionen der Homologiegruppen zu geben, die sowohl topologisch invariant waren als auch technisch einwandrei (d.h., frei von inneren Widersprüchen). Ein interessanter Aspekt der Entwicklung ist, daß es sich schließlich auch als unvernünftig herausstellte, die topologische Invarianz der Homologiegruppen direkt beweisen zu wollen. Das richtige Vorgehen war vielmehr, einen in Wirklichkeit viel stärkeren Satz zu beweisen, nämlich den, daß die Homologiegruppen sogar nur von dem *Homotopietyp* des fraglichen Raumes abhängen.

Erinnerung. Es bezeichne $[0,1]$ das Einheits-Intervall. Zwei (stetige!) Abbildungen $f_0, f_1 : X \longrightarrow X'$ heißen *homotop*, wenn eine *Homotopie* zwischen ihnen exisiert; d.h., eine Abbildung

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow X'$$

so daß

$$F \mid X \times 0 = f_0 \quad \text{und} \quad F \mid X \times 1 = f_1 .$$

(Vielleicht sollte man hier etwas genauer sagen, daß $F \mid X \times 0 = f_0 \circ i_0$, wo i_0 eine Identifikation von X mit dem Unterraum $X \times 0$ bezeichnet; und ähnlich auch für f_1).

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ wird eine *Homotopieäquivalenz* genannt, wenn eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ existiert, so daß die zusammengesetzten Abbildungen gf und fg jeweils homotop sind zu der identischen Abbildung auf X bzw. auf Y .

Und ein *Homotopietyp* bezeichnet eine Äquivalenzklasse von topologischen Räumen bezüglich der Äquivalenzrelation "Homotopieäquivalenz". Mit anderen Worten: zwei Räume X und Y gehören zum selben Homotopietyp, wenn eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen existiert.

Abweichend von der historischen Entwicklung des Gebiets werden wir uns in dieser Veranstaltung zunächst nicht mit den Homologiegruppen befassen, sondern vielmehr mit den Homotopiegruppen. Der Hauptgrund ist der, daß wir auf diese Weise am besten an das Material des vorigen Semesters anknüpfen können. Im Zusammenhang hiermit werden wir auch eine wichtige Art von "vernünftigen" Räumen studieren, die sogenannten *Zellenkomplexe*. Eines der ersten Resultate, die wir dann herleiten wollen ist folgender spektakulär aussehender Satz, der zum Glück nicht ganz so schwierig ist, wie das auf den ersten Blick aussieht.

Satz von Whitehead. *$f : X \longrightarrow Y$ sei eine Abbildung zwischen wegzusammenhängenden "vernünftigen" Räumen. Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:*
(i) *f ist eine Homotopieäquivalenz.*
(ii) *f induziert Isomorphismen der Homotopiegruppen*

$$f_* : \ \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(Y, f(x_0)) \ , \quad n = 1, 2 \dots .$$

Nachdem wir anhand dieses Satzes zur Kenntnis genommen haben, daß der Begriff der Homotopieäquivalenz doch schon recht algebraisch angehaucht ist, wollen wir bei unserem weiteren Vorgehen dann auch selbst etwas mehr in Richtung Algebra und Kombinatorik abdriften. — Soweit zur Einführung in das Programm.

Als nächstes werde ich jetzt eine Abschweifung machen. Ich werde einfach einige Räume vorstellen, die es wert sind, daß man sich dafür interessiert. Dabei wird es insbesondere auch um die explizite Konstruktion einiger sehr interessanter Homotopien gehen.

Die Menge der reellen $n \times n$ Matrizen

$$M_n(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ \, (a_{i,j})_{\,1 \le i,j \le n} \ \mid \ a_{ij} \in \mathbb{R} \, \right\}$$

ist in offensichtlicher Weise isomorph zu $\mathbb{R}^{n \times n}$, und damit selbst auch ein topologischer Raum. Unterräume davon sind

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \ &— \ \text{der Raum der invertierbaren Matrizen} \\ O_n(\mathbb{R}) \ &— \ \text{der Raum der orthogonalen Matrizen}\,. \end{aligned}$$

Ersterer Unterraum ist gegeben durch die Ungleichung $\det(M) \neq 0$ (bezüglich der stetigen Funktion *Determinante* : $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$), daher ist er *offener* Unterraum. Letzterer ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$O_n(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ (a_{i,j}) \ \middle| \ \sum_j a_{ij}\ a_{kj} \ = \ \delta_{ik} \ = \ \begin{cases} 1 \text{ wenn } i = k \\ 0 \text{ wenn } i \neq k \end{cases} \right\} ,$$

ist also ein *abgeschlossener* Unterraum; aus dem Gleichungssystem folgt auch noch, daß $|a_{i,j}| \le 1$ für alle i, j . Damit ist $O_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem *beschränkten* abgeschlossenen Unterraum des $\mathbb{R}^{n \times n}$, und ist somit *kompakt*.

Behauptung. *Die Inklusion $O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Wir werden zeigen, daß sogar $O_n(\mathbb{R})$ *Deformationsretrakt* von $GL_n(\mathbb{R})$ ist; das heißt, daß eine stetige Familie von stetigen Abbildungen existiert,

$$h_t : \ GL_n(\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ GL_n(\mathbb{R}) \ , \quad t \in [0,1] \ ,$$

so daß gilt

$$h_0\,(\,GL_n(\mathbb{R})\,) \ \subset \ O_n(\mathbb{R}) \ , \quad h_1 \ = \ \mathrm{Id}_{GL_n(\mathbb{R})} \ , \quad h_t \,|\, O_n(\mathbb{R}) \ = \ \mathrm{Id}_{O_n(\mathbb{R})} \quad (\text{für alle } t\,) .$$

Die Familie $t \longmapsto h_t$ ist gegeben durch den sogenannten *Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsprozeß* — wenn man diese aus der linearen Algebra bekannte Konstruktion nur richtig anschaut. Bezeichne nämlich $a_i = (a_{ij})_{1 \le j \le n}$ den i-ten Zeilenvektor, sei $\langle a_i\,, a_k \rangle \;=\; \sum_j a_{ij}\, a_{kj}$, und $|a_i|^2 = \langle a_i, a_i \rangle$. In einem ersten Schritt wird definiert:

$$\begin{aligned}
f_t\,(a_1) \;&=\; a_1 \\
f_t\,(a_2) \;&=\; a_2 \,-\, (1{-}t)\, \tfrac{\langle a_2, f_t(a_1)\rangle}{|f_t(a_1)|^2}\; f_t\,(a_1) \\
&\;\vdots \\
f_t\,(a_n) \;&=\; a_n - \,(1{-}t)\, \tfrac{\langle a_n, f_t(a_{n-1})\rangle}{|f_t(a_{n-1})|^2}\; f_t\,(a_{n-1}) \\
&\qquad\quad -\;\; \ldots \;\; - (1{-}t)\, \tfrac{\langle a_n, f_t(a_1)\rangle}{|f_t(a_1)|^2}\; f_t\,(a_1) \;\; .
\end{aligned}$$

Die Vektoren $f_0(a_1)\,,\,\ldots\,,\,f_0(a_n)$ sind nun orthogonal zueinander, sie haben aber vielleicht noch nicht die Länge 1. Das erreichen wir im zweiten Schritt; wir setzen nämlich einfach

$$h_t(a_i) \;:=\; |f_t(a_i)|^{t-1}\, f_t(a_i)\ . \qquad \square$$

Jeder reellen $n{\times}n$ Matrix entspricht eine (automatisch stetige!) lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und wenn die Matrix *invertierbar* ist, so ist auch diese Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, d.h., sie ist eine topologische Äquivalenz. Wir können allgemeiner die Menge solcher topologischen Äquivalenzen betrachten; also

$$\mathrm{Top}\,(\mathbb{R}^n) \;=\; \big\{\, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;\mid\; h \;\text{ ist topologische Äquivalenz}\,\big\}\ .$$

Man könnte diese Menge als metrischen Raum auffassen bezüglich der Sup-Norm; weil aber $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, wäre die hiervon induzierte topologische Struktur nicht sehr schön, wie sich herausstellt. Das 'richtige' Vorgehen ist es vielmehr, das Verhalten der h's 'im Unendlichen' in geeigneter Weise zu vernachlässigen. Dazu betrachtet man die folgende topologische Struktur. Sie wird dadurch spezifiziert, daß man für jedes h eine *Umgebungsbasis* $\{\, U_{K,\varepsilon}(h)\,\}$ definiert; nämlich in Abhängigkeit von einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und von einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$ wird definiert

$$U_{K,\varepsilon}(h) \;=\; \{\, g \in \mathrm{Top}\,(\mathbb{R}^n) \;\mid\; |g(x) - h(x)| < \varepsilon \;\;\text{für}\;\; x \in K\,\}\ .$$

Die so spezifizierte topologische Struktur auf $\mathrm{Top}\,(\mathbb{R}^n)$ nennt man auch die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.*

In ähnlicher Weise kann man auch die Menge der *Diffeomorphismen* betrachten,

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n) \;=\; \{\, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid\; & \textit{h ist topologische Äquivalenz;} \\ & \textit{h und } h^{-1} \textit{ sind stetig differenzierbar}\,\}\,.\end{aligned}$$

Eine Topologie verschafft man sich ähnlich wie vorhin, nur daß man jetzt auch die Ableitung noch mit einbaut — kurz gesagt ist dies die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta *für die Abbildung h selbst und für ihre erste Ableitung.*

Behauptung. *Die Inklusion* $GL_n(\mathbb{R}) \to$ *Diff* $(\mathbb{R}^n)$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis (Skizze). Wir geben eine Deformationsretraktion an. In einem ersten (offensichtlichen) Schritt geben wir eine Deformationsretraktion in einen Unterraum $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ an. Der Unterraum besteht aus den $h \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $h(0) = 0$; die Deformation ist so definiert: dem Paar $g \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ und $t \in [0,1]$ wird zugeordnet

$$g_t(x) \;=\; g(x) - (1{-}t)\, g(0) \;.$$

Es ist dann $g_0 \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$.

Der zweite (interessantere) Schritt gibt eine Deformationsretraktion von $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ in den Unterraum $GL_n(\mathbb{R})$ an; nämlich zu $f \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ und zu $t \in [0,1]$ definieren wir

$$f_t(x) \;=\; \tfrac{1}{t} \cdot f(t \cdot x) \;, \quad \text{für} \quad t > 0 \;, \quad \text{und} \quad f_0(x) \;=\; D_0 f(x) \;,$$

wobei $D_0 f \in GL_n(\mathbb{R})$ die Ableitung von f im Nullpunkt bezeichnet. Die Definition der Ableitung $D_0 f$ (eine *lineare Funktion, die* f *in der Nähe von* 0 *besser als linear approximiert*) besagt nun, daß bei $t \to 0$ tatsächlich $f_t \to f_0$ gilt (Konvergenz für die Funktionswerte). Um auch die ensprechende Sache für die Ableitung zu bekommen, braucht man die *stetige* Differenzierbarkeit. Auf die Details wollen wir hier nicht weiter eingehen. $\square$

Insgesamt erhält man so, daß der 'sehr große' Raum $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ als Deformationsretrakt den doch sehr viel übersichtlicheren Raum $O_n(\mathbb{R})$ enthält. Eine Frage, die sich danach geradezu aufdrängt, ist die, ob etwa die Inklusion

$$\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n) \;\longrightarrow\; \mathrm{TOP}\,(\mathbb{R}^n)$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist?

Die Antwort zu dieser Frage ist *nein.* Allerdings ist dieses 'nein' eine von den Aussagen in der Mathematik, die nicht so leicht zu begründen sind, wie man das vielleicht hoffen möchte. Die Begründung braucht viel Apparat und darüberhinaus auch viele Ideen. Sie wird nicht Gegenstand dieser Veranstaltung sein.

CW-Komplexe

Ein 'Zellenkomplex' ist ein topologischer Raum, der "aus Zellen besteht". Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Aussage zu interpretieren. Uns wird es in erster Linie darum gehen, Räume zu betrachten, die auf eine bestimmte induktive Weise konstruiert werden können mit Hilfe eines Prozesses *Anheften von Zellen*. Unser Grund ist natürlich der, daß die (richtig eingeführte) 'Zellenstruktur' ein ungeheuer nützliches Hilfsmittel ist und daß sie für viele Zwecke nicht einmal eine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Nachdem der Anhefte-Prozeß beschrieben ist, werden wir eine besonders wichtige Sorte von Zellenkomplexen zur Kenntnis nehmen, die als *CW-Komplexe* bezeichnet werden.

Zunächst also der Prozess 'Anheften von Zellen' — oder, um klein anzufangen, das 'Anheften einer Zelle'. Es sei X ein topologischer Raum. Wir wollen erklären, was es heißt, daß ein topologischer Raum X' *aus* X *entsteht durch das Anheften einer Zelle*; oder, etwas genauer, *durch das Anheften einer* n*-Zelle*, wo die Zahl n die *Dimension* der Zelle bezeichnet.

Es bezeichne D^n den *n-dimensionalen Ball*,

$$D^n \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \|x\| \le 1 \,\} \;,$$

und ∂D^n seinen *Rand*,

$$\partial D^n \;=\; S^{n-1} \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \|x\| = 1 \,\} \;.$$

Der Raum X' nun soll aus der disjunkten Vereinigung $X \,\dot{\cup}\, D^n$ gebildet werden mit Hilfe einer geeigneten Quotientenraum-Konstruktion; nämlich die Randpunkte von D^n sollen "keine neuen Punkte liefern", sie sollen also mit schon vorhandenen Punkten aus X identifiziert werden. Dazu benötigen wir eine Abbildung $f\colon \partial D^n \to X$, die sogenannte *Anhefte-Abbildung*. Dies gibt uns die Möglichkeit zu sagen, daß jeder Punkt $z \in \partial D^n$ mit seinem Bildpunkt $f(z)$ in X identifiziert werden soll — so daß also solch ein Punkt $z \in \partial D^n$ tatsächlich nichts neues liefern wird.

Warum nun diese so umständliche Prozedur? Es sollen ja schließlich nur die Punkte aus dem *Innern* von D^n zu dem Raum X hinzugefügt werden. Warum fügt man zuerst *alle* Punkte aus D^n hinzu, um dann nachträglich die Randpunkte von D^n wieder zu vernichten? Nun, dieses 'Vernichten' geht nicht irgendwie, es geht vielmehr mit Hilfe der Anhefte-Abbildung; und dies gibt uns die Möglichkeit zur Einbringung eines ungemein wichtigen Details. Nämlich wir können (und wir wollen auch) von der Anhefte-Abbildung verlangen, daß es sich um eine *stetige* Abbildung handelt. Wir werden später des öfteren die Gelegenheit haben, festzustellen, daß es insbesondere die *Stetigkeit der Anhefte-Abbildungen* ist, die die Nützlichkeit von 'Zellenstrukturen' ausmacht.

Wie schon ausgeführt, definieren wir also X' als den Quotientenraum

$$X' \;=\; X \,\dot{\cup}\, D^n \,/\, {}_{z\sim f(z)\,,\ \text{für } z\in\partial D^n} \;;$$

für diese Konstruktion ist auch die Schreibweise

$$X \cup_{\partial D^n} D^n \;:=\; X \,\dot{\cup}\, D^n \,/\, {}_{z\sim f(z)\,,\ \text{für } z\in\partial D^n}$$

gebräuchlich; in Worten: $X \cup_{\partial D^n} D^n$ *ist entstanden aus* X *und* D^n *durch Verkleben entlang* ∂D^n *vermöge* f. Die Notation ist etwas ungenau insofern als in ihr die Abbildung f nicht genannt wird; eine genauere Notation wäre etwa

$$X\,{}_f\!\cup_{\partial D^n} D^n \;,$$

solch genauere Notation werden wir aber nur selten verwenden. Abkürzend sagen wir für den beschriebenen Sachverhalt auch: $X \cup_{\partial D^n} D^n$ entsteht aus X durch *Anheften einer n-Zelle*; und die benutzte Abbildung f heißt die *Anhefte-Abbildung* der Zelle.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, soll noch betont werden, daß weitere Eigenschaften der Anhefte-Abbildung (über die Stetigkeit hinaus) *nicht* verlangt werden. Insbesondere wird z.B. *nicht* verlangt, daß die Anhefte-Abbildung injektiv wäre. Unser erstes Beispiel illustriert das in drastischer Weise.

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an einen Punkt*). Es ist $D^0 \cup_{\partial D^n} D^n \;\approx\; S^n$.

Denn D^0 ist ein einziger Punkt, und $D^0 \cup_{\partial D^n} D^n$ ist deshalb in Wirklichkeit dasselbe wie der Quotientenraum $D^n \,/\, \partial D^n$. Von diesem Quotientenraum wissen wir aber schon, daß er isomorph zu S^n ist. Nämlich nach dem *Quotientenraum-Kriterium* genügt es dafür, zu wissen, daß $D^n \,/\, \partial D^n$ quasi-kompakt ist, S^n ein Hausdorff-Raum, und daß eine stetige bijektive Abbildung $D^n \,/\, \partial D^n \to S^n$ existiert; oder, was auf dasselbe hinausläuft wie letzteres, daß man eine Abbildung $D^n \to S^n$ mit bestimmten Eigenschaften finden kann (nämlich: das Urbild des Nordpols ist ∂D^n, und jeder andere Punkt hat genau einen Urbildpunkt). Es ist klar (oder?), daß das geht. □

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an die* $(n{-}1)$*-Sphäre* — erster spezieller Fall). $S^{n-1} \cup_{\partial D^n} D^n$ ergibt D^n, wenn die Anhefte-Abildung $\partial D^n \to S^{n-1}$ die identische Abbildung ist (oder, allgemeiner, wenn sie ein Isomorphismus ist). □

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an die* $(n{-}1)$*-Sphäre* — zweiter spezieller Fall). Die Anhefte-Abbildung $\partial D^n \to S^{n-1}$ sei eine *triviale* Abbildung; d.h., die Abbildung läßt sich schreiben als eine Komposition $\partial D^n \to D^0 \to S^{n-1}$. Man erhält dann

$$S^{n-1} \cup_{\partial D^n} D^n \;\approx\; S^{n-1} \cup_{D^0} \big(D^0 \cup_{\partial D^n} D^n\big) \;\approx\; S^{n-1} \cup_{D^0} S^n \;,$$

eine sogenannte "1-Punkt-Vereinigung" von S^{n-1} und S^n. □

Die beiden letzten Beispiele illustrieren die plausible Tatsache, daß das Resultat der Konstruktion "*Anheften von* D^n *an* X *vermöge von* $f : \partial D^n \to X$" i.a. von der Anhefte-Abbildung f in erheblicher Weise wirklich abhängen wird.

Eine technische Variante vom "*Anheften einer n-Zelle*" ist das "*Anheften mehrerer n-Zellen*". Es ist nützlich, diese Variante explizit zur Kenntnis zu nehmen.

Wenn man nämlich erst eine n-Zelle an einen Raum X anheftet, und dann an den entstehenden Raum X' eine weitere, so ist folgendes Phänomen möglich, das wir andererseits nicht wollen, da es eine überflüssige Komplikation darstellt. Die Anhefte-Abbildung für die zweite n-Zelle ist ja einfach eine Abbildung $f' : \partial D^n \to X'$ (eine *stetige* Abbildung; aber das Wort 'stetig' fangen wir jetzt an, wegzulassen). Und nichts hindert die Abbildung f' daran, daß ihr Bild die erste Zelle in nicht-trivialer Weise trifft; genauer, *daß der Bildraum $f'(\partial D^n)$ nicht-leeren Durchschnitt hat mit dem Innern der ersten Zelle*. Das nun ist das Phänomen, das wir nicht wollen. Und wir können es auch ganz leicht vermeiden; wir müssen nur darauf achten, daß die beiden n-Zellen *gleichzeitig* angeheftet werden (und zwar beide an den Raum X). Daß das unerwünschte Phänomen durch unseren einfachen Kunstgriff wirklich vermieden wird, ist nicht ganz selbstverständlich, wir werden uns später davon überzeugen. Im Moment begnügen wir uns damit, das "*gleichzeitige Anheften mehrerer n-Zellen*" zu beschreiben.

Da wir jetzt mehrere Zellen gleichzeitig betrachten wollen, sollten wir, um sie auseinanderzuhalten, ihnen Namen geben und über diese Namen auch Buch führen. Wir machen das hier nicht mit dem Einwohnermeldeamt. Wir benutzen stattdessen eine Menge J (*die Indexmenge für die anzuheftenden n-Zellen*). Die Menge J braucht nicht einmal endlich zu sein (die etwas exotisch aussehende Tatsache, daß wir gelegentlich auch das Anheften von *unendlich vielen* Zellen zulassen wollen, macht praktisch kaum zusätzliche Mühe).

Für die Zwecke der Buchführung ist es bequem, die Menge J in trivialer Weise als topologischen Raum aufzufassen (mit der *diskreten Topologie*) und dann davon den Produktraum mit dem n-Ball D^n zu bilden, $J \times D^n$. Denn dieser Produktraum liefert eine prägnante Beschreibung für den (kanonisch isomorphen) Raum

$$\dot{\bigcup}_{j \in J} \{j\} \times D^n \ ,$$

die *disjunkte Vereinigung* von n-Bällen, indiziert durch die Menge J. Statt der pedantischen (und eigentlich richtigen) Bezeichnung $\{j\} \times D^n$ werden wir im folgenden abkürzend auch die Bezeichnung $j \times D^n$ für den durch j indizierten Ball in dieser disjunkten Vereinigung verwenden.

Ähnlich haben wir auch eine Identifizierung von dem Produktraum $J \times \partial D^n$ mit der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup}_{j \in J} \{j\} \times \partial D^n$.

Für das "*Anheften von n-Zellen, indiziert durch J*" benötigen wir je eine Anhefte-Abbildung $f_j : \partial D^n \longrightarrow X$ für jedes $j \in J$. Eine solche Kollektion von Abbildungen können wir auch beschreiben als eine *einzige* Abbildung, nämlich eine Abbildung der disjunkten Vereinigung,

$$f : \ \dot{\bigcup}_{j \in J} \{j\} \times \partial D^n \ \longrightarrow \ X \ .$$

Diese Abbildung ist so, daß die Einschränkung $f \,|\, j \times \partial D^n$ gerade die Abbildung f_j ist (vermöge der Identifizierung von $j \times \partial D^n$ mit ∂D^n). Mit der obigen Übersetzung der disjunkten Vereinigung in den Produktraum (und unter Weiterverwendung des Buchstabens 'f') können wir die Abbildung nun schließlich auch schreiben als

$$f: \ J \times \partial D^n \longrightarrow X \ .$$

(Bei all diesen Abbildungen ist im übrigen die Stetigkeit gemeint, wenn sie auch nicht mehr erwähnt wurde.)

Man bildet nun den Quotientenraum

$$X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n \ = \ X \ \dot\cup \ J\times D^n \, / \, {}_{x\sim f(x)\,,\ \text{für } x\in J\times\partial D^n} \ ,$$

und das ist der gewünschte Raum, das Resultat der *Anheftung von n-Zellen an X, indiziert durch J*.

Wir listen einfache Eigenschaften der Konstruktion auf. Bezeichne

$$p: \ X \ \dot\cup \ J\times D^n \ \longrightarrow \ X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$$

die Projektionsabbildung. Es gilt (nach Definition der Quotientenraumtopologie) folgendes. Sei N Teilmenge von $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$. Dann ist N genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$, wenn das Urbild $p^{-1}(N)$ offen (bzw. abgeschlossen) in $X \ \dot\cup \ J\times D^n$ ist.

Es werde, wie früher auch schon, eine Untermenge $M \subset X \ \dot\cup \ J\times D^n$ als *saturiert* bezeichnet, wenn

$$p^{-1}(\,p(M)\,) \ = \ M \ ;$$

wenn also das Urbild des Bildes nicht größer ist als die Menge selbst. Aus der Definition der Quotiententopologie folgt, speziell: Sei M *saturierte* Teilmenge von $X \ \dot\cup \ J\times D^n$. Wenn M offen (bzw. abgeschlossen) in $X \ \dot\cup \ J\times D^n$ ist, dann ist auch die Bildmenge $p(M)$ offen (bzw. abgeschlossen) in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$.

Wir fassen X als Unterraum von $X \ \dot\cup \ J\times D^n$ auf. Bezeichne $\mathring{D}^n$ das *Innere* von D^n,

$$\mathring{D}^n \ = \ \{\, x\in\mathbb{R}^n \ | \ \|x\| < 1 \,\} \ .$$

Wir fassen $J\times D^n$ und $J\times\mathring{D}^n$ ebenfalls als Unterräume von $X \ \dot\cup \ J\times D^n$ auf.

Satz. *X ist* (topologisch äquivalent zu einem) *Unterraum von $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$; nämlich die Projektion p induziert eine topologische Äquivalenz von X auf den Bildraum $p(X)$ in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$. Dieser Unterraum ist abgeschlossen. Ähnlich ist $J\times\mathring{D}^n$* (topologisch äquivalent zu einem) *Unterraum von $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$; nämlich die Projektion p induziert eine topologische Äquivalenz von $J\times\mathring{D}^n$ auf den Bildraum $p(J\times\mathring{D}^n)$ in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$. Dieser Unterraum ist offen.*

Beweis. Die Abbildung von X auf den Unterraum $p(X)$ in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$ ist stetig und bijektiv. Wir werden also wissen, daß sie eine topologische Äquivalenz ist, sobald wir uns davon überzeugt haben, daß sie eine *abgeschlossene* Abbildung ist. Sei also A abgeschlossene Teilmenge von X. Wir wollen uns davon überzeugen, daß dann auch das Urbild $p^{-1}(\,p(A)\,)$ abgeschlossen in $X \ \dot\cup \ J\times D^n$ ist. Dieses Urbild besteht aus zwei Teilen, nämlich $A \subset X$ einerseits (was zweifellos abgeschlossen im Gesamtraum ist) und

$$f^{-1}(A) \;\subset\; J \times \partial D^n \;\subset\; X \;\dot{\cup}\; J \times D^n$$

andererseits. Letzterer Teil ist abgeschlossen wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Anhefte-Abbildung f, und da $J \times \partial D^n$ abgeschlossener Unterraum von $J \times D^n$ ist.

Der zweite Teil des Beweises geht ähnlich, aber noch einfacher. Nämlich die Abbildung von $J \times \mathring{D}^n$ auf den Bildraum $p(J \times \mathring{D}^n)$ ist ebenfalls stetig und bijektiv, und es wird genügen zu wissen, daß sie eine *offene* Abbildung ist. Wir wollen uns also davon überzeugen, wenn O offene Teilmenge in $J \times \mathring{D}^n$ ist, dann ist das Bild $p(O)$ offene Teilmenge in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Das ist aber klar, denn eine offene Teilmenge von $J \times \mathring{D}^n$ ist auch offen in dem Gesamtraum $X \;\dot{\cup}\; J \times D^n$, und eine offene Teilmenge von $J \times \mathring{D}^n$ ist automatisch auch saturiert. □

Aus ähnlichen Gründen haben wir die folgende Tatsache, die nützlich ist, um offene Mengen zu konstruieren.

SATZ. *Für jedes $j \in J$ sei V_j eine offene Teilmenge in $j \times D^n$, die den Rand $j \times \partial D^n$ enthält. Dann ist*

$$V \;=\; X \,\cup\, \bigcup\nolimits_{j \in J} \mathrm{Bild}\,(V_j)$$

offene Teilmenge von $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$.

BEWEIS. Die Bedingung $V_j \supset j \times \partial D^n$ garantiert, daß

$$X \;\dot{\cup}\; \dot{\bigcup}_{j \in J} V_j$$

saturierte Teilmenge ist. □

BEISPIEL. "*Die Hawaiischen Ohrringe*" ist der Name für einen bestimmten Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Der Unterraum ist eine Vereinigung von Kreislinien, die alle den Punkt $(0,0)$ (aber keinen andern Punkt des $\mathbb{R}^2$) gemeinsam haben. Die Kreise werden immer kleiner, und sie häufen sich gegen den Punkt $(0,0)$; kurz, der Unterraum ist

$$H \;=\; H_1 \,\cup\, H_2 \,\cup\, \ldots \;,$$

wo H_j den Kreis mit Radius $1/j$ und Mittelpunkt $\left(0\,,\, \frac{-1}{j}\right)$ bezeichnet,

$$H_j \;=\; \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + (\,y + 1/j\,)^2 \;=\; (\,1/j\,)^2 \,\right\} \;.$$

Wenn man ein Bild malt, so meint man zu sehen, daß der Raum H erhalten werden kann durch Anheften von (unendlich vielen) 1-Zellen an den Unterraum $\{\,(0,0)\,\}$. Der Eindruck ist aber nicht ganz richtig, was die topologische Struktur angeht: *Der Raum H entsteht nicht durch Anheften von 1-Zellen an den Unterraum $\{\,(0,0)\,\}$.* Denn angenommen, das wäre doch der Fall. Nach dem vorigen Satz könnte man dann eine offene Umgebung V des Punktes $(0,0)$ konstruieren, die *keinen* der Kreise H_j ganz enthält. Das kann aber nicht sein: Nach Definition der Topologie von H (Unterraum-Topologie von H in $\mathbb{R}^2$) enthält jede Umgebung von $(0,0)$ den Durchschnitt von H mit einer Kreisumgebung von $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Bis auf endlich viele Ausnahmen enthält sie deshalb alle die Kreise H_j ganz. □

Satz. (i) *Ist* X *Hausdorff-Raum, dann auch* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$.

(ii) *Ist* X *kompakt und* J *endlich, dann ist auch* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *kompakt.*

(iii) *Ist* J *nicht endlich, dann ist* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *nicht kompakt. Allgemeiner gilt: Ist* K *kompakte Teilmenge von* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$, *dann ist* $K \cap \mathrm{Bild}\,(j \times \mathring{D}^n) \neq \emptyset$ *für höchstens endlich viele* j .

Beweis. (i) Seien $x, y \in X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Wir wollen disjunkte offene Umgebungen dieser beiden Punkte finden.

1. Fall. $x, y \in J \times \mathring{D}^n$. Dieser Fall ist klar, weil $J \times \mathring{D}^n$ offener Unterraum (s. oben) und selbst ein Hausdorff-Raum ist.

2. Fall. $x \in X,\ y \in j \times \mathring{D}^n$. Wir können eine offene Menge V_j in $j \times D^n$ finden, die den Rand $j \times \partial D^n$, aber nicht den Punkt y enthält, und weiter dann eine offene Menge U_j in $j \times D^n$, die den Punkt y enthält, aber die Menge V_j nicht trifft. Umgebungen der verlangten Art in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ sind nun gegeben durch die beiden Mengen U_j einerseits und

$$X \cup V_j \cup \bigcup_{j' \neq j} j' \times D^n$$

andererseits (die Mengen sind offen nach dem vorigen Satz).

3. Fall. $x, y \in X$. Nach Voraussetzung über X gibt es offene Mengen O_x und O_y , die x und y trennen. Wir benutzen:

Lemma. *Es gibt eine offene Umgebung* V *von* X *in* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$, *und eine Retraktion* $r : V \to X$ (d.h. $r \circ i = \mathrm{Id}_X$, wobei $i : X \to V$ die Inklusion bezeichnet).

Die verlangten trennenden Mengen im 3. Fall können wir dann erhalten als Urbilder unter der Retraktions-Abbildung, nämlich als die beiden Mengen $r^{-1}(O_x)$ und $r^{-1}(O_y)$.

Beweis des Lemmas. Wir können nehmen

$$V \;=\; X \cup_{J \times \partial D^n} J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \,.$$

Die verlangte Retraktion ist induziert durch die Retraktion “radiales Hinausschieben”

$$(D^n\text{–Mittelpunkt}) \longrightarrow \partial D^n \quad , \qquad x \mapsto \tfrac{x}{|x|} \,.$$

Letztere Abbildung gibt nämlich eine Abbildung der disjunkten Vereinigungen

$$X \,\dot\cup\, J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \;\longrightarrow\; X \,\dot\cup\, J \times \partial D^n \,.$$

Diese ist mit der Äquivalenzrelation verträglich, und sie faktorisiert deshalb über eine Abbildung

$$X \cup_{J \times \partial D^n} J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \;\longrightarrow\; X \cup_{J \times \partial D^n} J \times \partial D^n \;\approx\; X \;,$$

die die gesuchte Abbildung r ist. □

(ii) Ein Ball ist kompakt, und endlich viele sind es auch. Also ist $J \times D^n$ kompakt, da J endlich ist. Folglich ist $X \,\dot{\cup}\, J \times D^n$ die disjunkte Vereinigung zweier kompakter Räume und daher auch kompakt. Von diesem Raum ist $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ ein Quotientenraum und daher zumindest quasikompakt — was uns hier reicht, da wir die Hausdorff-Eigenschaft ja schon in (i) geklärt haben.

(iii) Wie wir auch oben schon benutzt haben, so können wir eine offene Menge in D^n finden, die einerseits den ganzen Rand ∂D^n enthält, die andererseits aber einen vorgegebenen Punkt im Innern von D^n *nicht* enthält. Das bedeutet: wenn der Durchschnitt $K \cap p(j \times \mathring{D}^n)$ nicht leer ist, dann können wir eine offene Menge V_j in $j \times D^n$ finden, die einerseits den Rand $j \times \partial D^n$ ganz enthält, die andererseits aber mindestens einen Punkt aus $p^{-1}(K) \cap j \times D^n$ nicht enthält. Wir fixieren ein solches V_j .

Wenn $K \cap p(j \times \mathring{D}^n) = \emptyset$, so sei für V_j irgendeine offene Menge genommen, die den Rand $j \times \partial D^n$ enthält; z.B. $j \times D^n$ selbst.

Die Menge $X \cup \bigcup_{j \in J} p(V_j)$ ist offene Teilmenge in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$; und die Mengen $p(j \times \mathring{D}^n)$ sind es auch. Diese Mengen zusammen bilden eine offene Überdeckung von $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Ihre Durchschnitte mit dem Unterraum K geben also eine offene Überdeckung von dem Unterraum.

Nun ist K nach Voraussetzung *kompakt*. Die Überdeckung hat also eine endliche Teilüberdeckung.

Andererseits hat die Überdeckung die folgende Eigenschaft: Wenn $j \in J$ derart ist, daß $K \cap p(j \times \mathring{D}^n) \neq \emptyset$, dann gibt es mindestens einen Punkt aus $p^{-1}(K) \cap j \times D^n$, der *nicht* enthalten ist in der Menge $(X \cup \bigcup_{j \in J} p(V_j))$ — und natürlich auch nicht in einer von den Mengen $p(j' \times \mathring{D}^n)$, $j' \neq j$. Es muß also so sein, daß die Menge $p(j \times \mathring{D}^n)$, für dieses spezielle j , in der Teilüberdeckung wirklich vorkommt.

Da die Teilüberdeckung endlich ist, gibt es deshalb nur endlich viele j von dieser Art. $\square$

Nun zu der wichtigen Definition.

Definition. Sei A ein topologischer Raum. Ein *CW-Komplex, relativ zu* A , besteht aus einem Raum X (dem *Totalraum*) zusammen mit einer Folge von Unterräumen

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X \ ,$$

so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Für jedes* $n \geq 0$ *kann der Raum* X_n *aus dem Raum* X_{n-1} *erhalten werden durch das Anheften von Zellen* (in dem oben beschriebenen Sinn), *und zwar von Zellen der Dimension* n .

(ii) Es ist $X = \bigcup_n X_n$, *und die topologische Struktur von* X *ist bereits festgelegt durch die Folge der Unterräume* X_n . Das heißt konkret: *Eine Teilmenge* O *von* X

ist genau dann eine offene Menge von X , *wenn gilt, daß für jedes* n *die Menge* $O \cap X_n$ *eine offene Menge von* X_n *ist.*

Der bei weitem wichtigste Spezialfall ist der, wo $A = \emptyset$, wo, in anderen Worten, der Raum A eigentlich gar nicht da ist. In dem Fall spricht man auch von einem *absoluten CW-Komplex*, oder einfach von einem *CW-Komplex*. Es ist aber gut, den allgemeinen Fall zu haben; er ist z.B. nützlich bei Buchführungstricks in Beweisen.

Die Bedingung (ii) an $X = \bigcup_n X_n$ impliziert:

(ii′) Sei $f\colon X \to Y$ eine nicht notwendigerweise stetige Abbildung. Es sind äquivalent:
- die Abbildung f ist stetig,
- für jedes n ist die eingeschränkte Abbildung $f \,|\, X_n$ stetig.

Man kann sich, umgekehrt, überlegen, daß die unter (ii) genannte Bedingung auch von der Bedingung (ii′) impliziert wird (der Beweis besteht darin, daß man sich einen ganz bestimmten Raum Y ausdenkt, nämlich gerade das unter (ii) beschriebene X !) .

Die Bedingung (i) sagt insbesondere, daß das Komplement $X_n - X_{n-1}$ eine *disjunkte Vereinigung von offenen n-Zellen* ist. Denn, wie wir anläßlich eines Satzes (Stichwort: *Anheften von n-Zellen an einen Raum*) zur Kenntnis genommen haben, so ist dieses Komplement ja topologisch äquivalent zu einer disjunkten Vereinigung offener Bälle,

$$J_n \times \mathring{D}^n \quad \approx \quad \dot{\bigcup}_{j \in J_n} \; j \times \mathring{D}^n \quad ,$$

und die einzelnen Zellen kann man charakterisieren als die Zusammenhangskomponenten von $X_n - X_{n-1}$. Das ist aber noch nicht alles. Darüberhinaus nämlich besagt die Bedingung auch — und das ist sehr wichtig — daß für jede einzelne solche Zelle eine Inklusion

$$\mathring{D}^n \;\longrightarrow\; X_n - X_{n-1}$$

so gewählt werden kann (Identifikation von $\mathring{D}^n$ mit der fraglichen offenen Zelle), *daß die Inklusions-Abbildung sich fortsetzen läßt zu einer stetigen Abbildung* $D^n \to X_n$.

Bemerkung. 1.) Diese Inklusionen $\mathring{D}^n \to X_n – X_{n-1}$ sind (für $n \geq 1$) *nicht* eindeutig bestimmt. Ferner gibt es (im allgemeinen) ‘schlechte’ Inklusionen, d.h. solche, die sich überhaupt nicht zu einer stetigen Abbildung $D^n \to X_n$ fortsetzen lassen. Auch ‘gute’ Inklusionen sind (i.a.) nicht eindeutig bestimmt.

2.) Man könnte die Definition eines CW-Komplexes so modifizieren, daß man ganz bestimmte Inklusionen $\mathring{D}^n \to X_n - X_{n-1}$ sowie ihre stetigen Fortsetzungen $D^n \to X_n$ explizit auswählt (letztere Abbildung wird auch als eine *charakteristische Abbildung* der Zelle bezeichnet). Die modifizierte Definition würde darauf hinauslaufen, daß der Begriff CW-Komplex eine vollständige Beschreibung der zugrunde liegenden Konstruktion beinhaltet. Wir gehen bei der hier gewählten Definition (die auch die übliche ist) einen Mittelweg: wir erinnern nur die bei der Konstruktion auftretende Filtrierung (Folge von Unterräumen)

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset \; \cdots \; \subset X_n \subset \quad \cdots \; \subset \; X$$

und die Fakten, daß

– X_n aus X_{n-1} erhalten werden kann durch Anheften von n-Zellen (für jedes n)
– die Struktur von X durch die Folge $X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ bestimmt ist.

Es sind diese Daten, mit denen man arbeitet. Die speziellen Daten der Konstruktion von X_n aus X_{n-1} sind in der Praxis nicht so wichtig. Wichtig ist vor allem, daß X_n überhaupt auf die beschriebene Weise aus X_{n-1} konstruiert werden kann.

Um es noch einmal zu betonen, ein CW-Komplex ist ein topologischer Raum X *zusammen mit* einer Zusatzstruktur (nämlich einer Filtrierung $X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$, so daß gewisse Bedingungen erfüllt sind). Es ist daher nicht überraschend, daß ein Raum, wenn er überhaupt eine Struktur als CW-Komplex besitzt, dann i.a. auch gleich ganz viele solcher Strukturen hat.

Wir werden jetzt einige Beispiele betrachten.

Beispiel (n-*Sphäre*). Wir haben schon früher zur Kenntnis genommen, daß

$$D^0 \cup_{\partial D^n} D^n \;\approx\; D^n \,/\, \partial D^n \;\approx\; S^n \,.$$

Die n-Sphäre besitzt also eine Struktur als CW-Komplex mit genau zwei Zellen, nämlich mit je einer 0-Zelle und einer n-Zelle.

Beispiel (1-*Sphäre*). Man nimmt m verschiedene Punkte auf S^1 als 0-Zellen; und die "Stücke dazwischen" als 1-Zellen. Die 1-Sphäre hat also eine Struktur als CW-Komplex mit m 0-Zellen und m 1-Zellen. Für $m \geq 3$ kann man sich den Sachverhalt vielleicht besser mit regelmäßigen Figuren vorstellen: Dreieck, Viereck, Pentagon, ... , m-gon.

Beispiel (2-*Sphäre*). Oben haben wir eine Zellenstruktur (genauer: eine Struktur als CW-Komplex) mit einer 0-Zelle und einer 2-Zelle gesehen.

Für eine andere Zellenstruktur kann man mit der S^1 (dem "Äquator") anfangen (mit, z.B., zwei 0-Zellen und zwei 1-Zellen, wie gerade gesehen); und man setzt dann mit zwei 2-Zellen fort ("nördliche Halbkugel" und "südliche Halbkugel"). Das gibt eine Zellenstruktur mit je zwei Zellen in den Dimensionen 0 , 1 und 2 .

Der *Würfel* (genauer: die Würfeloberfläche) entspricht einer Zellenstruktur der S^2 mit acht 0-Zellen, zwölf 1-Zellen und sechs 2-Zellen.

Das *Tetraeder* entspricht einer Zellenstruktur der S^2 mit vier 0-Zellen, sechs 1-Zellen und vier 2-Zellen.

Bemerkung. Wenn man einen *endlichen CW-Komplex* hat (das heißt, wenn in der Folge $\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_0 \;\cdots\; \subset X_n \;\cdots\; \subset X$ bei jedem Schritt nur endlich viele Zellen dazukommen ; und von irgendeinem Zeitpunkt an gar keine mehr — die obigen Beispiele sind alle von diesem Typ), so kann man auf die folgende Weise eine Zahl definieren, die sogenannte *Euler'sche Charakteristik*. Man bildet nämlich die Wechselsumme

$$\#(\text{0-Zellen}) \,-\, \#(\text{1-Zellen}) \,+\, \#(\text{2-Zellen}) \,-\, \#(\text{3-Zellen}) \,+\, -\, \ldots$$

wo $\#(n\text{-Zellen})$ die *Anzahl der n-Zellen* (oder, was dasselbe ist, die Anzahl der (Weg-)Zusammenhangskomponenten von $X_n - X_{n-1}$) bezeichnet.

Euler hat experimentell festgestellt, daß im Falle von $X = S^2$ hier immer die Zahl '2' herauskommt. Natürlich geht es eigentlich nicht, daß man 'experimentell' irgendetwas feststellt über eine so große Menge wie die der endlichen Zellenkomplexe mit Totalraum S^2. Euler hat auch gar nicht Zellenkomplexe in unserem Sinne betrachtet, sondern eher spezielle ('Polyeder'), aber selbst da ist nicht so klar, welche genau das waren. Jedenfalls wurde der *Euler'sche Polyeder-Satz* sehr berühmt und hatte in der Folge auch eine turbulente Geschichte.

Eine—wohl etwas persiflierte—Darstellung dieser Geschichte kann man in dem Buch eines Logikers finden (I. Lakatoś, *Proofs and Refutations*; Beweise und Widerlegungen). Da ist die Rede von Beweisen in Spezialfällen, dann Gegenbeispielen von speziellen dieser Spezialfälle; danach Widerlegungen von einigen dieser Gegenbeispiele, danach ... . Das Buch nimmt den Euler'schen Polyeder-Satz (und speziell diese Geschichte) als exemplarisch für die Mathematik überhaupt, es hat eine Art Moral (so etwas wie die intellektuelle Erbsünde). Man kann die ganze Sache aber vielleicht auch ein wenig tiefer hängen: Wenn eine Sprache erst im Entstehen ist, so ist bei denen, die mit dieser Sprache umgehen müssen, und die sie gleichzeitig auch noch zu entwickeln haben, die Fehlerwahrscheinlichkeit eben ein bißchen größer. Software-Entwickler z.B. sehen das gelassen; sie wissen, daß es ohne 'de-bugging' nicht geht, und sie planen dafür eigens einen Arbeitsgang von vornherein ein. □

Inoffizielle Mitteilung. Den Euler'schen Polyeder-Satz werden wir im Laufe dieser Veranstaltung beweisen. Dies wird eine der Anwendungen sein, die wir mit den sogenannten *Homologiegruppen* machen werden. □

Wir werden jetzt einige Dinge über CW-Komplexe systematisch auflisten. Im Hinblick auf eventuelle Buchführungstricks betrachten wir für solche technischen Dinge grundsätzlich den Fall eines *relativen CW-Komplexes*, auch wenn wir letztlich eigentlich eher an dem absoluten Fall interessiert sein werden.

Sei also (X, A) ein relativer CW-Komplex (oder, genauer: X ist mit einer Filtrierung $A = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$ versehen, etc.); er heißt *endlich*, wenn insgesamt nur endlich viele Zellen angeheftet werden. D.h. erstens, es gibt ein m, so daß $X_m = X$ (X ist also insbesondere das, was man *endlich-dimensional* nennt), und zweitens ist es so, daß für jedes n der Raum X_n aus dem Raum X_{n-1} entsteht durch das Anheften von nur endlich vielen Zellen.

Satz. *Sei (X, A) relativer CW-Komplex.*

(i) *Ist A Hausdorff-Raum, so auch X.*

(ii) *Ist A kompakt und (X, A) endlich, so ist auch X kompakt.*

Beweis. Induktion über einen früheren Satz (über das Anheften von n-Zellen) liefert die Behauptung (ii) und einen Teil der Behauptung (i), nämlich daß X_n Hausdorff ist für alle n. Daß dann auch X Hausdorff ist, folgt aus:

BEHAUPTUNG. *Seien O_n und P_n disjunkte offene Mengen in X_n. Dann existieren disjunkte offene Mengen O und P in X mit $O \cap X_n = O_n$, $P \cap X_n = P_n$.*

BEWEIS. Wir hatten gezeigt, es gibt eine offene Teilmenge V_{n+1} in X_{n+1} und eine Retraktion $r_{n+1} \colon V_{n+1} \to X_n$. Wir definieren

$$O_{n+1} \ = \ r_{n+1}^{-1}(O_n) \ , \quad P_{n+1} = r_{n+1}^{-1}(P_n) \ .$$

Entsprechend werden auch O_{n+2}, P_{n+2}, O_{n+3}, P_{n+3} ... definiert, und dann

$$O \ = \ \bigcup_j O_{n+j} \ , \quad P \ = \ \bigcup_j P_{n+j} \ .$$

Es ist $O \cap P = \emptyset$, da $O_{n+j} \cap P_{n+j} = \emptyset$ für alle j. Die Menge O ist offen in X, da der Durchschnitt $O \cap X_m = O_m$ offen in X_m ist für alle m — dies ist so wegen der Bedingung in der Definition von CW-Komplexen, daß die topologische Struktur des Raumes X schon bestimmt sein soll durch die topologische Struktur der Unterräume $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots$. Entsprechend ist auch die Menge P offen in X. □

Die Hausdorff-Eigenschaft sei hinfort vorausgesetzt.

SATZ. *Sei (X, A) relativer CW-Komplex.*

(i) *Der Abschluß jeder Zelle ist kompakt.*

(ii) *Sei $U \subset X$ Unterraum, $U \supset A$. Dann ist U abgeschlossen in X schon dann, wenn der Durchschnitt von U mit dem Abschluß jeder Zelle abgeschlossen ist.*

BEWEIS. (i) Zu einer n-Zelle gibt es, nach Definition, eine charakteristische Abbildung $D^n \to X$, so daß die Einschränkung $\mathring{D}^n \to X$ ein Isomorphismus auf die vorgegebene offene Zelle ist. Der Abschluß von $\mathring{D}^n$ ist ganz D^n, folglich ist $\mathrm{Bild}(D^n)$ enthalten im Abschluß der Zelle. Andererseits ist $\mathrm{Bild}(D^n)$ (quasi-)kompakt (weil D^n kompakt), daher (kompakt und) abgeschlossen (wegen der vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft) und folglich auch gleich diesem Abschluß.

(ii) Ist U abgeschlossen, so auch sein Durchschnitt mit einer abgeschlossenen Teilmenge; z.B. dem Abschluß irgendeiner Zelle. Es gelte umgekehrt, daß für jede Zelle der Durchschnitt von U mit dem Abschluß dieser Zelle abgeschlossen ist. Zu zeigen (nach Definition der Topologie von X), daß $U \cap X_n$ abgeschlossen in X_n, für alle n. Dies gilt nach Voraussetzung (und weil A abgeschlossener Unterraum ist) für $n = -1$. Es gelte induktiv für $n-1$. Sei p die Projektion,

$$p : \ X_{n-1} \ \dot\cup \ \dot{\bigcup}_{j \in J} \, j \times D^n \ \longrightarrow \ X_{n-1} \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$$

(wobei wir die Indexmenge für die n-Zellen mit J statt mit J_n bezeichnet haben). Es folgt aus der Voraussetzung betreffend den Durchschnitt mit dem Abschluß von Zellen, daß das Urbild $p^{-1}(U \cap X_n)$ abgeschlossen ist. Denn was den Anteil in X_{n-1} angeht, so ist das die Induktionsvoraussetzung. Und was den Anteil in dem Ball $j \times D^n$ angeht, so folgt das aus der Voraussetzung, daß der Durchschnitt mit dem Abschluß einer Zelle, nämlich mit dem Bild $p(j \times D^n)$, abgeschlossen ist. Aus der Abgeschlossenheit von

$p^{-1}(U \cap X_n)$ folgt die von $U \cap X_n$, da ja X_n die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung p trägt. $\square$

Sei (X, A) wieder ein relativer CW-Komplex. Ein anderer relativer CW-Komplex (Y, A) (das A ist in beiden Fällen dasselbe) heißt *Unterkomplex* von (X, A), wenn erstens Y ein Unterraum von X ist und wenn zweitens gilt, daß die Zellenstruktur des Raumes Y durch die Zellenstruktur des Raumes X induziert ist. Letzteres heißt, daß für jedes $n \geq 0$ zum einen gilt

$$Y_n \ = \ Y \cap X_n$$

und zum andern auch,

$$Y_n - Y_{n-1} \ \text{ ist Vereinigung von offenen Zellen aus } \ X_n - X_{n-1} \ .$$

Bemerkung. Die letzte dieser Bedingungen ist tatsächlich überflüssig, insofern, als sie sich aus den anderen Bedingungen folgern läßt — das ist aber nicht einfach.

Satz. *Wenn (Y, A) Unterkomplex von (X, A) ist, dann ist Y abgeschlossen in X.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $Y \cap X_n$ abgeschlossen in X_n ist, für alle n. Wir nehmen induktiv an, daß $Y \cap X_{n-1}$ abgeschlossen in X_{n-1} ist. Dann ist $Y \cap X_{n-1}$ auch abgeschlossen in X_n, da X_{n-1} abgeschlossen in X_n ist. Bezeichne wieder p die Quotientenraumprojektion, $p: X_{n-1} \,\dot\cup\, \dot{\bigcup}_{j \in J} j \times D^n \ \to \ X_{n-1} \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ (wo auch wieder die Indexmenge für die n-Zellen mit J statt mit J_n bezeichnet wird). Es ist

$$Y \cap X_n \ = \ Y \cap X_{n-1} \cup \bigcup_{j \in J} \ Y \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n) \ \ ,$$

und sobald der Durchschnitt $Y \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n)$ nicht-leer ist, muß notwendigerweise die Zelle $p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n)$ von (X, A) auch eine Zelle von (Y, A) sein. Folglich[1] ist ihr Abschluß, der gleich dem Bild $p(j \times D^n)$ ist, auch enthalten in Y. Es folgt, daß, abgesehen von $Y \cap X_{n-1}$, das Urbild $p^{-1}(Y \cap X_n)$ durch die Vereinigung der beiden Teile

$$\dot{\bigcup}_{j \in J \, , \, Y \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n) \neq \emptyset} j \times D^n \quad \text{ und } \quad \bigcup_{j \in J} \ j \times D^n \cap p^{-1}(Y \cap X_{n-1})$$

gegeben ist. Diese sind abgeschlossen. Also ist auch $p^{-1}(Y \cap X_n)$ abgeschlossen in $X_{n-1} \,\dot\cup\, \dot{\bigcup}_{j \in J} j \times D^n$, wie zu zeigen war. $\square$

---

[1] Hier sind Details für diese Behauptung. Y ist selbst CW-Komplex, deshalb läßt die Inklusion der offenen Zelle sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $q: j \times D^n \to Y$. Zwar hat die Abbildung q nicht notwendigerweise irgendetwas mit der Einschränkung der obigen Abbildung p zu tun; das ist aber auch nicht nötig. Alles was wir brauchen, ist, daß das Bild von q quasi-kompakt ist. Aus der Quasi-Kompaktheit (zusammen mit der schon etablierten Hausdorff-Eigenschaft) ergibt sich, daß das Bild von q ein abgeschlossener Unterraum von X ist, der in Y liegt und der das Bild der offenen Zelle unter der Abbildung p enthält. Er enthält also auch davon den Abschluß, $p(j \times D^n)$.

Satz. *Sei* (X,A) *CW-Komplex, sei* Y *abgeschlossener Unterraum von* X *, mit* $A \subset Y$ *. Es gelte, daß für jedes* n *der Durchschnitt* $Y \cap (X_n - X_{n-1})$ *eine Vereinigung von offenen* n*-Zellen ist. Dann ist*

$$A = Y_{-1} \subset Y_0 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots \subset Y$$

ein CW-Komplex, wo $Y_n = Y \cap X_n$ *.*

Beweis. (i) Wir prüfen nach, daß Y_n aus Y_{n-1} durch Anheften von n-Zellen entsteht. Bezeichne J die Indexmenge für die n-Zellen von X und J' die Teil–Index–Menge derjenigen n-Zellen, deren Inneres in Y liegt. Die charakteristischen Abbildungen $D^n \to X$ für letztere Zellen (wir nehmen an, charakteristische Abbildungen für Zellen waren in X gewählt) können auch als Abbildungen $D^n \to Y$ aufgefaßt werden, da Y *abgeschlossen in* X ist. Per Einschränkung dieser Abbildungen auf den Rand ∂D^n erhalten wir (Anhefte-)Abbildungen $\partial D^n \longrightarrow Y \cap X_{n-1} = Y_{n-1}$ zur Konstruktion von

$$\widetilde{Y}_n \;=\; Y_{n-1} \cup_{J' \times \partial D^n} J' \times D^n \;.$$

Mit Hilfe der Abbildungen $D^n \to Y$ bekommen wir eine stetige bijektive Abbildung $\widetilde{Y}_n \to Y_n$. Dafür, daß dies eine topologische Äquivalenz ist, müssen wir noch nachprüfen, daß es sich hier um eine *abgeschlossene Abbildung* handelt: Sei $\widetilde{B} \subset \widetilde{Y}_n$ eine Teilmenge (z.B. eine abgeschlossene). Bezeichne B das Bild davon in Y . Es sei B' das Urbild von B in $X_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J} j \times D^n$; und entsprechend $\widetilde{B}'$ das Urbild von $\widetilde{B}$ in $Y_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J'} j \times D^n \;=\; Y \cap X_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J'} j \times D^n$. Die Frage ist, ob die Abgeschlossenheit von $\widetilde{B}'$ diejenige von B' impliziert. Das ist der Fall. Denn diese beiden unterscheiden sich nur dadurch, daß zu $\widetilde{B}'$ in B' der Teil $q^{-1}(B \cap X_{n-1})$ hinzukommt, wo q die (Anhefte-) Abbildung $q \colon (J - J') \times \partial D^n \to X_{n-1}$ bezeichnet. Als Anhefte-Abbildung ist q stetig. Und $B \cap X_{n-1}$ ist abgeschlossen, da es in $\widetilde{B}'$ vorkommt.

(ii) Sei M Teilmenge von Y . Dann ist M abgeschlossen in Y genau dann, wenn M abgeschlossen in X ist (da Y abgeschlossen in X ist). Nach Definition der Topologie von X ist dies äquivalent dazu, daß $M \cap X_n$ abgeschlossen in X_n ist für alle n . Unter nochmaliger Benutzung der Abgeschlossenheit von Y schließt man dann, daß dieses gleichbedeutend damit ist, daß $M \cap X_n \cap Y$ abgeschlossen in $X_n \cap Y = Y_n$ ist für alle n . □

Satz. *Sei* (X,A) *CW-Komplex.*

(i) *Der Abschluß jeder Zelle liegt in einem endlichen Unterkomplex.*

(ii) *Jedes Kompaktum* $K \subset X$ *liegt in einem endlichen Unterkomplex.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 1. *Sei* K *kompakt. Es gelte,* $K \subset X_n$ *, für ein* $n \geq -1$ *. Dann liegt* K *in einem endlichen Unterkomplex.*

Beweis. (*durch Induktion über* n) . Der Induktionsanfang $n = -1$ ist trivial. Die Behauptung gelte induktiv für $n{-}1$. Wir haben früher gesehen, daß das Kompaktum K nur *endlich viele* der offenen n-Zellen in $X_n{-}X_{n-1}$ trifft; diese seien indiziert durch

$j \in J'$. Wegen der Endlichkeit von J' ist $\bigcup_{j\in J'} \mathrm{Bild}(j\times D^n)$ kompakt. Da X_{n-1} abgeschlossen in X_n ist, folgt, daß der Durchschnitt

$$X_{n-1} \cap \left(K \cup \bigcup_{j\in J'} \mathrm{Bild}(j\times D^n) \right)$$

ebenfalls kompakt ist; also, nach der Induktionsvoraussetzung, enthalten ist in einem endlichen Unterkomplex (Y,A). Der gewünschte endliche Unterkomplex ist nun gegeben durch

$$Y \cup_{J'\times\partial D^n} J'\times D^n \ . \qquad \square$$

Zum Satz: Wir haben früher gesehen, daß der Abschluß einer n-Zelle kompakt ist und in X_n liegt. Nach dem Hilfssatz liegt er daher in einem endlichen Unterkomplex; Teil (i) des Satzes ist damit gezeigt. — Wir benötigen einen weiteren Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Sei $D \subset (X-A)$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, daß D jede Zelle von X nur in endlich vielen Punkten trifft. Dann gilt*

a) *D ist abgeschlossene Teilmenge von X*

b) *Als Unterraum von X trägt D die diskrete Topologie.*

Beweis. (a) Nach einem früher gegebenen Kriterium genügt es zu zeigen, daß

$$D \cap \textit{Abschluß einer Zelle}$$

abgeschlossen ist für jede Zelle. Nach Teil (i) des Satzes (den wir schon gezeigt haben) ist dies enthalten in

$$D \cap \textit{endlicher Unterkomplex}\ ,$$

also eine endliche Menge (nach Definition von D) und damit *abgeschlossen* in X, da X Hausdorff-Raum ist.

(b) Zu zeigen ist, daß jede Teilmenge $D' \subset D$ abgeschlossen in D ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß D' abgeschlossen in X ist. Aber letzteres gilt nach Anwendung von (a) auf die Teilmenge $D' \subset X$. $\square$

Beweis des Satzes (Fortsetzung). Es ist noch zu zeigen, zu $K \subset X$ kompakt existiert ein n, so daß $K \subset X_n$. Angenommen, dies wäre falsch. Dann gäbe es eine unendliche Menge $D \subset K$

$$D = \{ x_1 , x_2 , \dots \}$$

mit $x_i \in X_{n_i} - X_{n_{i-1}}$, $n_i > n_{i-1}$. Nach Hilfssatz 2 wäre D abgeschlossen in X, daher auch in K und somit kompakt in der von K induzierten Topologie. Die von K induzierte Topologie ist aber dieselbe, wie die von X induzierte Topologie, da ja K Unterraum von X ist (Unterraumtopologie!). Folglich trägt die Menge D die *diskrete* Topologie. Das ist aber ein Widerspruch, da eine unendliche Menge mit der diskreten Topologie ganz sicherlich nicht kompakt ist. $\square$

Bemerkung. Die Terminologie CW-Komplex (wie auch der Begriff selbst) stammen von J.H.C. Whitehead. Der Buchstabe C steht (laut Whitehead) für *closure finite* (der vorige Satz) und W steht für *weak topology* (eine Menge $M \subset X$ ist genau dann offen, wenn $M \cap X_n$ offen für alle n).

Zellulärer Approximations-Satz

Seien (X, A) und (Y, B) CW-Komplexe, und sei $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von CW-Komplexen. D.h., $f : X \to Y$ ist stetige Abbildung mit $f(A) \subset B$.

Definition. Die Abbildung heißt *zelluläre Abbildung*, wenn sie die zelluläre Struktur respektiert in dem Sinne, daß

$$f(X_n) \subset Y_n \ , \quad \text{für alle } n \ .$$

Satz. (Zellulärer Approximations-Satz). *Sei $f_0 : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von CW-Komplexen. Es existiert eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum A, von der Abbildung f_0 zu einer zellulären Abbildung f_1.*

Hierbei bezeichnet eine *Homotopie, relativ zu A*, eine Homotopie, die *auf dem Unterraum A konstant* ist; das heißt, eine Abbildung

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

die erstens eine Homotopie von f_0 zu f_1 ist, d.h.,

$$F \,|\, X \times 0 = f_0 \ , \quad F \,|\, X \times 1 = f_1 \ ;$$

und die zweitens auf dem Unterraum A nichts tut ("konstant ist")

$$F \,|\, A \times t = f_0 \,|\, A \quad \text{für alle } t \ .$$

Bemerkung. Die Terminologie "Approximations-Satz" soll hier nur suggerieren "hinreichend genau ersetzen" (nämlich ersetzen bis auf Homotopie) durch eine 'bessere' (nämlich durch eine zelluläre) Abbildung. Die Terminologie hat dagegen nichts zu tun mit Approximation etwa im Sinne einer Metrik.

Der Satz ist ziemlich inhaltsreich, wie der folgende spezielle Fall zeigt.

Beispiel. Sei $A = \{x_0\}$ (ein Punkt) und $X = \{x_0\} \cup_{\partial D^m} D^m$ (die m-Sphäre), wobei (X, A) als CW-Komplex aufgefaßt wird durch die Festsetzung

$$X_i = \begin{cases} \{x_0\} & \text{wenn } i < m \ , \\ X & \text{wenn } i \geq m \ . \end{cases}$$

Sei entsprechend $B = \{y_0\}$, $Y = \{y_0\} \cup_{\partial D^n} D^n$, und sei (Y, B) in ähnlicher Weise als CW-Komplex aufgefaßt.

Wenn $m < n$ ist, dann kann eine zelluläre Abbildung $(X, A) \to (Y, B)$ offenbar nichts anderes sein als die triviale Abbildung in den Punkt y_0. Der zelluläre Approximations-Satz sagt also in diesem Falle:

KOROLLAR. *Wenn $m < n$, dann ist jede Abbildung*

$$(S^m, x_0) \longrightarrow (S^n, y_0)$$

homotop, relativ zum Punkt x_0, zur trivialen Abbildung in den Punkt y_0. □

BEMERKUNG. Wir werden das Korollar später interpretieren als das "Verschwinden der m-ten Homotopiegruppe der S^n, für $m < n$" — was immer das sein mag.

Der Hauptteil des Beweises des zellulären Approximations-Satzes besteht tatsächlich darin, daß wir eine leichte Verallgemeinerung des im Korollar genannten speziellen Falles vorweg behandeln.

SATZ. *Sei $X = A \cup_{\partial D^m} D^m$, $Y = B \cup_{\partial D^n} D^n$, wo $m < n$. Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung. Die Abbildung f ist homotop, relativ zu A, zu einer Abbildung mit Bild in B.*

BEWEIS. Der Satz ist äquivalent zu der Behauptung, daß für $Y = B \cup_{\partial D^n} D^n$, und $m < n$, gilt: Jede Abbildung $g : (D^m, \partial D^m) \to (Y, B)$ ist homotop, relativ zu ∂D^m, zu einer Abbildung mit Bild in B. Denn zunächst ist dies ein spezieller Fall. Umgekehrt, ist $f : (A \cup_{\partial D^m} D^m, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung, dann induziert eine Deformation (relativ zu ∂D^m) von der zusammengesetzten Abbildung g,

$$D^m \xrightarrow{\text{char. Abb.}} A \cup_{\partial D^m} D^m \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

ganz automatisch eine Deformation von f relativ zu A — zumindest ist es plausibel, daß das so ist; tatsächlich ist hier noch ein technisches Detail zu klären (Stichwort: *Kompatibilität von Produkten mit Quotientenraum-Konstruktionen*; der Homotopiebegriff benutzt ja Produktbildung). Wir werden das in Kürze nachholen.

Der Beweis der Behauptung geht über Induktion nach n. Als Induktions-Anfang nehmen wir den Fall $n = 1$. Dann ist $m = 0$, $\partial D^0 = \emptyset$, und die Behauptung ist, daß jede Abbildung $f\colon D^0 \to B \cup_{\partial D^1} D^1$ homotop ist zu einer Abbildung mit Bild in B. Das ist sicherlich richtig: Ein Weg in $B \cup_{\partial D^1} D^1$ mit Anfangspunkt $f(D^0)$ und mit Endpunkt in $\mathrm{Bild}(\partial D^1)$ liefert die verlangte Homotopie.

Sei jetzt $n \geq 2$. Wir setzen induktiv voraus, daß der Satz für $n{-}1$ bereits bewiesen ist. Wir leiten einige Folgerungen hieraus ab, die wir benötigen werden.

FOLGERUNG 1. *Für $p < n{-}1$ ist jede Abbildung $h\colon S^p \to S^{n-1}$ deformierbar in eine triviale Abbildung.*

Das wurde im vorigen Korollar schon angemerkt: Wir schreiben $S^p = \{x_0\} \cup_{\partial D^p} D^p$ und $S^{n-1} = \{y_0\} \cup_{\partial D^{n-1}} D^{n-1}$, wo $y_0 = h(x_0)$, und wenden dann die Induktionsvoraussetzung an.

Folgerung 2. *Für* $p < n-1$ *ist jede Abbildung* $h\colon S^p \to S^{n-1} \times (a,b)$ *deformierbar in eine triviale Abbildung* (*wo* (a,b) *ein Intervall bezeichnet*).

Das folgt durch Zusammenbauen zweier Homotopien, nämlich Homotopien für die beiden Abbildungen

$$\mathrm{pr}_1 \circ h: \ S^p \longrightarrow S^{n-1} \ , \quad \mathrm{pr}_2 \circ h: \ S^p \longrightarrow (a,b)$$

(wo pr_i die i–te Projektion bezeichnet). Erstere Homotopie ist die aus Folgerung 1, letztere ist induziert von einer Null-Homotopie der identischen Abbildung auf (a,b).

Folgerung 3. *Für* $q < n$ *gilt: Jede Abbildung* $h : \partial D^q \longrightarrow S^{n-1} \times (a,b)$ *kann erweitert werden zu einer auf ganz* D^q *definierten Abbildung.*

Das folgt aus Folgerung 2 wegen

Lemma. *Sei* Z *topologischer Raum,* $h : \partial D^q \to Z$ *eine Abbildung. Es sind äquivalent:*

(i) h *ist homotop zu einer trivialen Abbildung,*

(ii) h *kann auf* D^q *erweitert werden.*

Beweis. Die erste Aussage besagt, es gibt eine Abbildung $H\colon \partial D^q \times [0,1] \to Z$ mit

$$H \,|\, \partial D^q \times 1 \ = \ h \ , \quad H \,|\, \partial D^q \times 0 \ = \ \text{triviale Abbildung} \ .$$

Dies ist äquivalent dazu, daß sich h ($= H \,|\, \partial D^q \times 1$) fortsetzen läßt zu einer Abbildung des Quotientenraumes

$$\partial D^q \times [0,1] \ / \ \partial D^q \times 0 \quad \longrightarrow \quad Z \ .$$

Schließlich ist der Quotientenraum $\partial D^q \times [0,1] \,/\, \partial D^q \times 0$ topologisch äquivalent zu D^q (man kann sich die Punkte aus D^q, bis auf den Mittelpunkt, vorstellen als durch *verallgemeinerte Polarkoordinaten* dargestellt, d.h. einem solchen Punkt entspricht ein Paar (x,t) mit $x \in \partial D^q$ und $t \in [0,1]$; dem Mittelpunkt dagegen entspricht der Wert $t = 0$, und x ist unbestimmt). □

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes für den Fall der Dimension n. Die Hauptarbeit besteht darin, sicherzustellen, daß *mindestens ein Punkt von*

$$\overset{\circ}{D}{}^n \ \subset \ B \cup_{\partial D^n} D^n$$

von der Abbildung g *nicht mehr getroffen wird*. Bei unserer Konstruktion wird das der Mittelpunkt sein — wenn das natürlich letztlich auch irrelevant ist.

Das Argument beruht auf einer Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes. Dazu verschaffen wir uns eine offene Überdeckung von $B \cup_{\partial D^n} D^n$, um damit zu arbeiten. Das Ziel ist es, wie gesagt, eine Umgebung des Mittelpunktes von dem Bild der Abbildung g 'freizuschaufeln'. Deshalb wird eine der offenen Mengen in unserem Werkzeugkasten (die Menge U unten) eine offene Umgebung eben dieses Mittelpunktes sein, und die andere offene Menge (die Menge V unten) wird für den Rest des Raumes zuständig sein.

Für die genauere Beschreibung dieser Mengen seien U' und V' definiert als

$$U' = \{ x \in D^n \mid \|x\| < \tfrac{2}{3} \} \quad \text{und} \quad V' = \{ x \in D^n \mid \|x\| > \tfrac{1}{3} \}$$

und U und V in $B \cup_{\partial D^n} D^n$ als

$$U = \text{Bild}(U') \ , \quad V = B \cup \text{Bild}(V') \ .$$

U und V sind dann offene Mengen in $B \cup_{\partial D^n} D^n$, und ihre Vereinigungsmenge ist der ganze Raum; sie bilden also eine offene Überdeckung. Ihr Durchschnitt ist

$$U \cap V \approx U' \cap V' \approx S^{n-1} \times (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \ .$$

Nach der obigen Folgerung 3 aus der Induktionsvoraussetzung gilt deshalb:

Tatsache. *Für $q < n$ besitzt jede Abbildung $\partial D^q \to U \cap V$ eine Fortsetzung auf ganz D^q .*

Für die Zwecke einer bequemeren Beschreibung dessen, was nun kommt, wollen wir, durch die Wahl einer topologischen Äquivalenz, den m-dimensionalen Ball D^m mit dem m-dimensionalen Würfel identifizieren. Statt von D^m werden wir also von jetzt an von

$$[0,1]^m = \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{\longleftarrow\ m\ \longrightarrow}$$

reden. Der Einfachheit halber behalten wir die Bezeichnung ‘ g ’ für die vorgegebene Abbildung, wir bezeichnen diese Abbildung also jetzt als $g : [0,1]^m \to B \cup_{\partial D^n} D^n$.

Wir wenden den Lebesgue’schen Überdeckungssatz an auf die offene Überdeckung $\{g^{-1}(U),\ g^{-1}(V)\}$ von $[0,1]^m$. Wir schließen: Es gibt eine Unterteilung von $[0,1]^m$ in m-dimensionale Würfel gleicher Größe, so daß für jeden der m-dimensionalen Teilwürfel gilt: Das Bild dieses Teilwürfels unter der Abbildung g ist entweder ganz enthalten in U oder ganz enthalten in V (oder, natürlich, eventuell auch in beiden).

Wir müssen nicht nur die Würfel der Dimension m betrachten, sondern, für induktive Zwecke, auch solche von kleinerer Dimension. Der Rand eines Würfels besteht ja aus Würfeln kleinerer Dimension — z.B. besteht der Rand eines 2-Würfels (Quadrat) aus 0-Würfeln (Ecken) und 1-Würfeln (Kanten). Gegenstand unserer Betrachtung werden alle die Würfel sein, die in der angesprochenen Weise mit der Zerlegung von $[0,1]^m$ in Teilwürfel daherkommen: Ecken, Kanten, Quadrate, 3-Würfel, etc..

Für die anstehende Konstruktion zerlegen wir die Menge der Würfel der Dimension p (wobei $p = 0, 1, 2, \ldots, m$) in zwei Klassen, die *guten* und die *schlechten*. Die guten, das sind die, wo wir nichts mehr tun müssen, und die schlechten, das sind eben die anderen. Den genannten Namen entsprechend, wird die erste Teilmenge mit Γ^p bezeichnet; und die zweite mit Σ^p .

Sei W ein p-dimensionaler Würfel. Wir sagen, $W \in \Gamma^p$ (Menge der ‘guten’ Würfel), wenn $W \subset g^{-1}(V)$. Und wir sagen, $W \in \Sigma^p$ (Menge der ‘schlechten’ Würfel), wenn W *nicht ganz* in $g^{-1}(V)$ enthalten ist. Σ^p ist also das Komplement von Γ^p .

Wenn $W \in \Sigma^p$, dann ist notwendigerweise $W \subset g^{-1}(U)$, weil ja W ganz in einem der m-dimensionalen Teilwürfel enthalten ist; und jeder von denen wiederum ganz in $g^{-1}(U)$ oder ganz in $g^{-1}(V)$, nach der Konstruktion über den Lebesgue'schen Satz.

Es sei nun Γ definiert als

$$\Gamma \;=\; \bigcup_p \;(\,\text{Vereinigung der Würfel in } \Gamma^p\,)$$

(der 'gute' Unterraum aller der Teilwürfel der Dimensionen $0, 1, \ldots, m$, die schon ganz nach V abgebildet werden). Nach Voraussetzung über die Abbildung g ist der Rand von $[0,1]^m$ ganz enthalten in Γ .

Durch Induktion über die Dimension p werden wir die Abbildung g auf den 'schlechten' Würfeln nun abändern. Die Konstruktion beruht auf der folgenden Beobachtung.

Es sei W ein 'schlechter' Würfel mit der Eigenschaft, daß die Würfel im Rand von W 'gut' sind. Z.B. ein schlechter Würfel von kleinster Dimension (kleinste Dimension unter den schlechten Würfeln) hat notwendigerweise diese Eigenschaft. Weil nun W ein schlechter Würfel ist, so ist W enthalten in $g^{-1}(U)$. Andererseits sind die Würfel im Rand von W 'gut' und deshalb enthalten in $g^{-1}(V)$. Es folgt, daß die Würfel im Rand von W enthalten sind im Durchschnitt dieser beiden. D.h., die Würfel im Rand von W werden durch die Abbildung g abgebildet in den Durchschnitt $U \cap V$; oder, was dasselbe ist, der ganze Rand des Würfels W wird durch g nach $U \cap V$ abgebildet. Nach der früher festgestellten Folgerung aus der Induktionsvoraussetzung (Folgerung 3 oben) existiert deshalb eine Abbildung (eine 'bessere' Abbildung für unsere Zwecke)

$$W \longrightarrow U \cap V \;,$$

die mit der Abbildung g auf dem Rand ∂W übereinstimmt.

Dieses wollen wir nun systematisieren. Es sei $K^{-1} = \Gamma$ $(=$ Unterraum der 'guten' Würfel). Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned}
K^0 \;&=\; K^{-1} \cup \text{ 0-Würfel aus } \Sigma^0 \\
&\;\;\vdots \\
K^p \;&=\; K^{p-1} \cup \; p\text{-Würfel aus } \Sigma^p \\
&\;\;\vdots \\
K^m \;&=\; K^{m-1} \cup \; m\text{-Würfel aus } \Sigma^m
\end{aligned}$$

so daß also K^m der ganze Würfel $[0,1]^m$ ist.

Auf diesen Unterräumen definieren wir durch Induktion über $p = 0, 1, \ldots ,$ eine Folge von Abbildungen

$$g_p : \; K^p \longrightarrow Y$$

mit den beiden Eigenschaften

(1) $\;g_p \,|\, K^{p-1} \;=\; g_{p-1}\;$ (insbesondere also $g_p \,|\, \Gamma \;=\; g \,|\, \Gamma$) und

(2) *wenn* $W \in \Sigma^p$, *dann* $g_p(W) \subset U \cap V$.

Der Induktionsanfang ist trivial, $g_{-1} = g\,|\,\Gamma$. Induktiv nehmen wir jetzt an, daß die Folge schon konstruiert ist bis $p{-}1$. Sei $W \in \Sigma^p$.

Behauptung. $\partial W \subset (g_{p-1})^{-1}(U \cap V)$.

Denn sei W' ein q-Würfel in ∂W, wo $q < p$. Wenn W' 'gut' ist, dann ist $g_{p-1}(W') = g(W') \subset V$; andererseits aber auch $g_{p-1}(W') = g(W') \subset g(W) \subset U$, weil W selbst 'schlecht' ist. Wenn W' 'schlecht' ist, dann ist $g_{p-1}(W') \subset U \cap V$ nach der Induktionsvoraussetzung.

Wir erinnern uns jetzt daran, daß (für $p < n$) jede Abbildung

$$\partial W \longrightarrow U \cap V \ \left(\approx\ S^{n-1} \times \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \right)$$

erweitert werden kann zu einer Abbildung des p-Würfels W (wegen der Induktionsvoraussetzung unseres Satzes). Also können wir $g_p\,|\,W$ jetzt *definieren* als (irgend-)eine solche Erweiterung. Nachdem wir dies für alle Würfel aus Σ^p gemacht haben, ist die Konstruktion von g_p fertig. Der Fall $p = m$ schließlich liefert eine Abbildung

$$g' = g_m : \ [0,1]^m \longrightarrow V .$$

Behauptung. *g' ist homotop zu g, relativ zum Rand von $[0,1]^m$.*

Beweis. Der Rand von $[0,1]^m$ ist enthalten in Γ, und wir zeigen, daß g und g' sogar homotop sind relativ zu Γ. Zunächst ist es so, nach Konstruktion, daß $g'\,|\,\Gamma = g\,|\,\Gamma$. Wenn nun Σ definiert wird als der 'schlechte' Unterraum, die Vereinigung der 'schlechten' Würfel (einschließlich ihrer Ränder), so enthält Σ das Komplement von Γ, so daß sich also g und g' höchstens innerhalb von Σ unterscheiden.

Nach Definition von Σ ist $g(\Sigma) \subset U$. Und nach Konstruktion von g' ist $g'(\Sigma) \subset U \cap V \subset U$. Also können $g\,|\,\Sigma$ und $g'\,|\,\Sigma$ beide aufgefaßt werden als Abbildungen nach U. Andererseits ist U topologisch äquivalent zu einer offenen Kugel, also einem konvexen Unterraum eines Vektorraumes. Die Abbildungen $g\,|\,\Sigma$ und $g'\,|\,\Sigma : \ \Sigma \to U$ sind also homotop mit Hilfe einer linearen Homotopie, und diese Homotopie ist automatisch dort konstant, wo g und g' übereinstimmen; insbesondere also auf $\Sigma \cap \Gamma$.

Wir erweitern die Homotopie zu einer auf ganz $[0,1]^m$ definierten Homotopie von g zu g' dadurch, daß wir auf Γ die konstante Homotopie nehmen — das geht sicherlich, da $\Sigma \cap \Gamma$ abgeschlossener Unterraum ist (denn $\Sigma \cap \Gamma$ ist endliche Vereinigung von Würfeln, daher kompakt). □

Ende des Beweises. Die Abbildung g' läßt die Mitte der offenen Zelle $\mathrm{Bild}(\mathring{D}^n) \subset Y$ frei. Durch eine *radiale Homotopie*,

$$(x,t) \longmapsto \left((1{-}t) + t \cdot \tfrac{1}{|g'(x)|} \right) g'(x) \ ,$$

schieben wir das Bild von g' aus der Zelle hinaus. □

Als Folgerung dieses Satzes können wir nun einen Teil der Behauptung des zellulären Approximations-Satzes beweisen. Diesen Teil werden wir später benötigen im induktiven Beweis des zellulären Approximations-Satzes. Wir formulieren ihn als Hilfssatz.

Hilfssatz. *Sei $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von CW-Komplexen. Es gelte, daß f zellulär ist bis zur Stufe $m-1$, d.h.,*

$$f(X_0) \subset Y_0\,,\ f(X_1) \subset Y_1\,,\ \ldots,\ f(X_{m-1}) \subset Y_{m-1}\ .$$

Dann ist die eingeschränkte Abbildung

$$f \,|\, X_m :\ X_m \ \longrightarrow\ Y$$

homotop, relativ zu X_{m-1}, zu einer Abbildung nach Y_m.

Beweis. Wir wählen ein System von charakteristischen Abbildungen für die m-Zellen von X,

$$d_j :\ D^m \ \longrightarrow\ X_m\ ,\quad j \in J$$

(so daß also $X_m = X_{m-1} \cup_{J \times \partial D^m} J \times D^m$ bezüglich der Anhefte-Abbildungen $d_j \,|\, \partial D^m : \partial D^m \to X_{m-1}\ ,\ j \in J$).

Das Paar (Y, Y_m) kann aufgefaßt werden als ein relativer CW-Komplex, und zwar als ein solcher *ohne* Zellen der Dimension $\leq m$.

Für jedes j ist das Bild $f(\,d_j\,(D^m)\,)$ kompakt, deshalb enthalten in einem *endlichen Unterkomplex* $\big(Y^j, Y_m\big)$. Die Komposition von f mit der charakteristischen Abbildung d_j,

$$f \circ d_j :\ D^m \ \longrightarrow\ Y$$

kann nun aufgefaßt werden als eine Abbildung

$$g_j :\ (D^m, \partial D^m)\ \longrightarrow\ \big(Y^j, Y_m\big)\ .$$

Wir betrachten eine Zelle höchster Dimension in dem endlichen relativen CW-Komplex $\big(Y^j, Y_m\big)$. Wir können dann schreiben

$$Y^j \ = \ \overline{Y}^j \cup_{\partial D^{\overline{n}}} D^{\overline{n}}$$

wobei $(\overline{Y}^j, Y_m)$ Unterkomplex von (Y^j, Y_m) ist, und zwar mit einer Zelle weniger. Die fragliche Zelle hat Dimension $> m$, deshalb können wir unseren Satz anwenden auf die Abbildung

$$(D^m, \partial D^m) \longrightarrow (Y^j, \overline{Y}^j)$$

und schließen, daß diese Abbildung homotop ist, relativ zu ∂D^m, zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{Y}^j$.

In $\overline{Y}^j$ nehmen wir wieder eine Zelle höchster Dimension, die Dimension dieser Zelle ist auch $> m$, und wir können wie oben wieder unseren Satz anwenden. Und so fort.

Nach endlich vielen Schritten haben wir eine Homotopie, relativ zu ∂D^m, konstruiert von der Abbildung $g_j : (D^m, \partial D^m) \longrightarrow (Y, Y_m)$ zu einer Abbildung mit Bild in Y_m.

Es ist nun plausibel, daß die konstruierten Homotopien der Abbildungen g_j sich zusammensetzen zu einer Homotopie (relativ X_{m-1}) der auf $X_{m-1} \cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m$ definierten Abbildung f .

Im Detail: die Homotopie von g_j ist eine Abbildung

$$G_j : D^m \times [0,1] \longrightarrow Y$$

mit gewissen Eigenschaften. Die Gesamtheit der G_j können wir auffassen als Abbildung

$$G : J\times D^m \times [0,1] \longrightarrow Y$$

und G hat die Eigenschaft, daß die eingeschränkte Abbildung $G \,|\, J\times\partial D^m \times t$ nicht von t abhängt. Deshalb existiert (nach Definition der Quotiententopologie) eine Abbildung F des zusammengeklebten Raumes,

$$F : X_{m-1}\times [0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m\times[0,1] \longrightarrow Y$$

mit den Eigenschaften

(i) die Einschränkung $F \,|\, X_{m-1}\times [0,1]$ ist gegeben durch

$$f \,|\, X_{m-1} \circ \ (\mathrm{pr}_1 : X_{m-1}\times [0,1] \ \rightarrow X_{m-1})$$
$$(= \text{konstante Homotopie von } f \text{ auf } X_{m-1})$$

(ii) die Abbildung G ist die Zusammensetzung von F mit der Abbildung

$$J\times D^m \times [0,1] \longrightarrow X_{m-1}\times [0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m \times [0,1]$$

— und F ist durch die Bedingungen (i) und (ii) eindeutig festgelegt.

An dieser Stelle brauchen wir einen Akt des Glaubens, um F als Homotopie interpretieren zu können. Nämlich wir brauchen

Lemma. *Die natürliche Abbildung* (eine stetige bijektive Abbildung!)

$$X_{m-1}\times [0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m \times [0,1] \longrightarrow (X_{m-1} \cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m) \times [0,1]$$

ist eine topologische Äquivalenz.

Die Richtigkeit dieses Lemmas könnten wir uns an dieser Stelle direkt überlegen. Das lohnt sich aber nicht, da wir uns in Kürze ähnliche Sachen etwas allgemeiner klarmachen werden. Wir verschieben deshalb den Beweis.

Der Hilfssatz, den wir soeben bewiesen haben (oder jedenfalls bewiesen haben bis auf das noch nachzutragende Lemma), dieser Hilfssatz zeigt ein Problem auf. Nämlich wir haben uns klargemacht, daß wir die Situation auf den m-Zellen wie gewünscht durch eine Homotopie verbessern können. Die Sache hat aber den Haken, daß diese Homotopie auf einem zu kleinen Raum definiert ist, nämlich auf X_m (statt X). Erfreulicherweise gibt es nun einen sehr allgemeinen Sachverhalt, der dieses Problem auf einfache Weise löst, nämlich

Satz (Homotopie-Erweiterungs-Satz). *Sei (Z,C) ein CW-Komplex. Das Paar (Z,C) hat die* Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (*abkürzend* HEE), *im folgenden Sinne*:

DEFINITION (HEE). Ein Paar von Räumen (Z, C) hat die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft* wenn folgendes gilt. Gegeben seien

(i) eine auf Z definierte Abbildung

(ii) eine Homotopie der auf C eingeschränkten Abbildung.

Dann existiert eine Homotopie der auf Z definierten Abbildung, die die auf C vorgegebene Homotopie erweitert.

Den Beweis des HE-Satzes wollen wir auf später verschieben, um zunächst den Satz über die zelluläre Approximation zu Ende zu bringen. Damit wir nicht die Übersicht verlieren, formulieren wir den nächsten Schritt als Hilfssatz.

HILFSSATZ. *Sei* $f = f_{-1} \colon (X, A) \to (Y, B)$ *eine Abbildung von CW-Komplexen. Es existiert eine Folge von Abbildungen* $f_m \colon (X, A) \to (Y, B)$, $m = -1, 0, 1, \ldots$, *und von Homotopien*

$$F_m : \ (\, X \times [0,1]\,,\, A \times [0,1]\,) \ \longrightarrow \ (Y, B)$$

mit

(i) f_m *ist zellulär bis zur Stufe* m, *d.h.* $f_m(X_i) \subset Y_i$ *für* $i \leq m$

(ii) *für* $m = 0\,, 1\,, \ldots$, *ist* F_m *Homotopie* (*relativ* X_{m-1}) *von* f_{m-1} *zu* f_m.

BEWEIS. Das ist eine Folgerung aus dem vorigen Hilfssatz und dem Homotopie-Erweiterungs-Satz. Seien nämlich induktiv die Paare $(f_0, F_0)\,, \ldots, (f_{m-1}, F_{m-1})$ schon konstruiert. Nach dem vorigen Hilfssatz existiert eine Homotopie H_m (relativ X_{m-1}) von der eingeschränkten Abbildung $h_m = f_{m-1} \,|\, X_m$ zu einer Abbildung $h'_m = H_m \,|\, X_m \times 1$ mit $h'_m(X_m) \subset Y_m$. Nach dem Homotopie-Erweiterungs-Satz existiert eine Erweiterung der Homotopie H_m zu einer Homotopie F_m der Abbildung f_{m-1}, d.h. $F_m \,|\, X \times 0 = f_{m-1}$. Wir *definieren* die Abbildung f_m nun als die Einschränkung $f_m = F_m \,|\, X \times 1$. Der Induktionsschritt ist fertig. □

Mit diesem Hilfssatz haben wir tatsächlich den zellulären Approximations-Satz schon bewiesen für den speziellen Fall eines endlich-dimensionalen CW-Komplexes, d.h., wo ein m existiert, so daß $X_m = X$. Denn in diesem Fall ist ja das f_m aus dem Hilfssatz schon eine zelluläre Abbildung, und die Homotopien $F_0\,, \ldots, F_m$ liefern (per Zusammensetzung) eine Homotopie von f zu f_m.

Im Fall eines nicht endlich-dimensionalen CW-Komplexes sieht es auf den ersten Blick so aus, als ob dieses Argument nicht funktionieren kann. Denn der Hilfssatz liefert ja explizit eine unendliche Folge von Homotopien $F_0, F_1, \ldots$ und die müßten wir ja alle sozusagen hintereinander durchlaufen.

Es geht aber doch! Tatsächlich können wir ohne weiteres so etwas wie eine Homotopie *hinschreiben*, die das Hintereinanderdurchlaufen der ganzen Folge $F_0, F_1, \ldots$ beinhaltet. Die einzige Unbequemlichkeit ist die, daß wir zum Schluß die Stetigkeit der hingeschriebenen Abbildung noch explizit werden nachweisen müssen.

Hier ist die (Pseudo-)Homotopie (Stetigkeit wird im Moment noch nicht behauptet). Für $t < 1$ sei

$$F(x,t) \quad = \quad \begin{cases} F_0(\,x,\,2\,t\,) & \text{wenn} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F_1(\,x,\,2\cdot 3\,(\,t-\frac{1}{2})\,) & \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \le t \le \frac{2}{3} \\ \quad \vdots & \\ F_m(\,x,\,(m{+}1)(m{+}2)\,(\,t-\frac{m}{m+1})\,) & \text{wenn} \quad \frac{m}{m+1} \le t \le \frac{m+1}{m+2} \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

Für $t = 1$ verwenden wir einen Trick. Nämlich für $n > m$ und $x \in X_m$ ist das vorher definierte $F_n(x,t)$ *unabhängig* von n und t (wo $t \in [0,1)$), weil F_n ja Homotopie *relativ zu* X_{n-1} ist. Wir *definieren* $F(x,1)$ als diesen Wert. Da jedes $x \in X$ in einem der X_m liegt, ist $F(x,t)$ somit auch für $t = 1$ für alle x definiert.

Zu zeigen ist noch, daß die Abbildung $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tatsächlich stetig ist. Sobald man das gezeigt hat, bekommt man auch die verlangte zelluläre Abbildung von X nach Y ; sie wird einfach *definiert* als die Einschränkung $F \,|\, X \times 1$.

Nach Konstruktion von F nun ist für jedes $m = 0\,,1\,,\ldots$ die eingeschränkte Abbildung

$$F \,|\, X_m \times [0,1]$$

stetig, denn das ist ja, bis auf Umparametrisierung, nichts anderes als die Zusammensetzung der Homotopien

$$F_i \,|\, X_m \times [0,1]\ ,\ i = 0\,,1\,,\ldots\,,m\ .$$

Also genügt es, zu zeigen:

Lemma. *Sei* (X,A) *CW-Komplex und*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow T$$

eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) F *ist stetig*

(ii) *für jedes* n *ist die eingeschränkte Abbildung* $F \,|\, X_n \times [0,1]$ *stetig.*

Bis auf die beiden noch nachzutragenden Lemmas und den ebenso noch nachzutragenden Homotopie-Erweiterungs-Satz ist der Beweis des Satzes über die zelluläre Approximation damit nun fertig.

Produkte

Im Falle der beiden nachzutragenden Lemmas muß man etwas darüber wissen, wie weit die Bildung von *Quotientenräumen* mit der Bildung von *Produkten* verträglich ist. Wir brauchen einen Satz, den wir im vorigen Semester hätten machen können, aber nicht gemacht haben.

Satz. *Sei* $f : X \to Y$ *eine Quotientenraum-Abbildung* (d.h., f ist surjektive Abbildung; und eine Teilmenge A von Y ist offene Menge in Y dann (und nur dann), wenn ihr Urbild $f^{-1}(A)$ offene Menge in X ist). *Sei* K *ein topologischer Raum.*

Hinreichend dafür, daß dann auch die Abbildung

$$f \times \mathrm{Id}_K : \; X \times K \;\longrightarrow\; Y \times K$$

eine Quotientenraum-Abbildung ist, ist jede der beiden folgenden Bedingungen:

(i) K *ist kompakt*

(ii) K *ist lokal-kompakt* (d.h., für jedes $x \in K$ und für jede Umgebung U von x, existiert eine *kompakte* Umgebung V von x in U).

Beweis. Zunächst ist (i) ein Spezialfall von (ii) wegen:

Hilfssatz. *Ist* K *kompakt, dann ist* K *auch lokal kompakt.*

(Die Umkehrung davon gilt natürlich nicht. Beispiel: $\mathbb{R}^n$, $n > 0$.)

Beweis. Die vorgegebene Umgebung U enthält eine offene Umgebung U' von x. Nun sind $\{x\}$ und das Komplement CU' abgeschlossene disjunkte Mengen in K, also ("*ein kompakter Raum ist normal*") existieren offene Mengen W_1 und W_2 mit

$$x \in W_1 \; , \quad CU' \subset W_2 \; , \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset \; .$$

Das Komplement CW_2 ist dann abgeschlossen in K und daher selbst kompakt. Es ist $CW_2 \subset U'$. Und CW_2 ist Umgebung von x, weil $W_1 \subset CW_2$. □

Bemerkung. Der obige Beweis zeigt, daß schon die folgende Bedingung 'lokal-kompakt' impliziert: "Jedes $x \in K$ besitzt mindestens eine kompakte Umgebung V". Um nämlich hieraus auf 'lokal-kompakt' zu schließen, argumentiert man anstelle des Kompaktums K mit der nach Voraussetzung existierenden kompakten Umgebung V. □

Zurück zum Beweis des Satzes. Die Abbildung $f \times \mathrm{Id}_K$ ist, als Produkt zweier stetiger Abbildungen, wieder stetig. Wenn also W offene Teilmenge von $Y \times K$ ist, dann hat W offenes Urbild in $X \times K$. Wir müssen zeigen, daß diese Eigenschaft schon die offenen Mengen in $Y \times K$ charakterisiert (unter der Voraussetzung, daß K lokal-kompakt ist), d.h., wir müssen zeigen: Sei W Teilmenge von $Y \times K$. Wenn

$$(f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W)$$

offene Teilmenge von $X \times K$ ist, dann ist notwendigerweise W offen in $Y \times K$; d.h. (nach Definition der Produkttopologie) zu jedem $(y_0, k_0) \in W$ existieren Umgebungen

$$U = U(y_0) \subset Y \ , \quad L = L(k_0) \subset K \ ,$$

so daß

$$U \times L \subset W \ .$$

Zu vorgegebenem (y_0, k_0) wollen wir solche U und L jetzt konstruieren.

Um die Voraussetzung auszunutzen, daß $(f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W)$ offen in $X \times K$ ist (über W selbst wissen wir ja gar nichts!) wählen wir $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Sei $K_0 \subset K$ so definiert, daß

$$\{x_0\} \times K_0 = (\{x_0\} \times K) \cap (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \ .$$

Dann ist K_0 offen in K und enthält k_0. Nach Voraussetzung über K existiert deshalb eine *kompakte* Umgebung L von k_0 in K_0.

Versuchsweise definieren wir die Menge U jetzt als

$$U = \{ y \in Y \mid \{y\} \times L \subset W \} \ .$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$(y_0, k_0) \in U \times L \ , \quad L \text{ ist Umgebung von } k_0 \ , \quad \text{und } y_0 \in U \ .$$

Zu zeigen ist also nur noch, daß U Umgebung von y_0 ist. Dazu zeigen wir, daß U offen ist oder, was dasselbe ist nach Voraussetzung über die Abbildung f, daß $f^{-1}(U)$ offen in X ist. Nun ist, nach Definition von U,

$$f^{-1}(U) = \big\{ x \in X \mid \{x\} \times L \subset (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \big\} \ .$$

Wir zeigen, zu vorgegebenem $x \in f^{-1}(U)$ existiert eine Umgebung V von x in X, so daß gilt

$$V \times L \subset (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \ .$$

Der Existenzbeweis für V ist einer der elementaren Sätze über Kompaktheit, nämlich:

HILFSSATZ. *Seien X und K topologische Räume. Sei $x \in X$ und sei L kompakter Unterraum von K. Sei W' eine offene Teilmenge von $X \times K$ derart, daß $\{x\} \times L \subset W'$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x in X so daß $V \times L \subset W'$.*

BEWEIS. Nach Definition der Produkttopologie hat jeder Punkt $(x, \ell) \in W'$ eine ganz in W' liegende Kästchen-Umgebung

$$A_{x,\ell} \times B_{x,\ell} \ , \quad A_{x,\ell} \text{ offen in } X \ , \quad B_{x,\ell} \text{ offen in } K \ .$$

Für variables $\ell \in L$ bilden die $L \cap B_{x,\ell}$ eine offene Überdeckung von L. Endlich viele dieser ℓ tun's dann auch schon wegen der Kompaktheit von L, und der Durchschnitt der fraglichen endlich vielen $A_{x,\ell}$ liefert die behauptete Umgebung V von x. Damit ist der Hilfssatz (und somit auch der Satz) bewiesen. $\square$

Nach diesem Exkurs in die allgemeine Topologie können wir die beiden nachzutragenden Lemmas nun abhaken. Die nachfolgenden Korollare sind ein bißchen allgemeiner.

Korollar 1. *Der Raum K sei kompakt (oder allgemeiner: lokal kompakt). Dann ist der Prozeß "Produkt mit K" verträglich mit dem Anheften von n-Zellen, d.h. wenn*

$$X \;=\; X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$$

dann ist die natürliche Abbildung

$$X'\times K \cup_{J\times\partial D^n\times K} J\times D^n\times K \longrightarrow (X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n)\times K$$

eine topologische Äquivalenz.

Beweis. Der Term auf der linken Seite ist nach Definition ein Quotientenraum der disjunkten Vereinigung

$$X'\times K \;\dot\cup\; J\times D^n\times K\ ,$$

nämlich zu der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von der Anhefte-Abbildung

$$(g\times \mathrm{Id}_K):\; J\times\partial D^n\times K \longrightarrow X'\times K\ ,$$

wo g die Anhefte-Abbildung für X ist. Nun ist

$$X'\times K \;\dot\cup\; J\times D^n\times K \xrightarrow{\approx} (\,X' \;\dot\cup\; J\times D^n\,)\times K$$

(*disjunkte Vereinigung ist mit Produkten verträglich* — ein ziemlich triviales Nachprüfen der Definitionen), deshalb ist der Raum $X'\times K \cup_{J\times\partial D^n\times K} J\times D^n\times K$ ebenso auch ein Quotientenraum von $(\,X' \;\dot\cup\; J\times D^n\,)\times K$ (bezüglich der 'transportierten' Äquivalenzrelation). Der andere Raum, $(X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n)\times K$, ist Quotient von letzterem Raum bezüglich *derselben* Äquivalenzrelation — zumindest, was die unterliegenden Mengen angeht. Die topologische Struktur ist aber möglicherweise anders, und unser Problem ist es, zu zeigen, daß sie tatsächlich nicht anders ist. Dazu verwenden wir den vorigen Satz. Die Abbildung ist nämlich gegeben durch

$$f\times \mathrm{Id}_K:\; (\,X' \;\dot\cup\; J\times D^n\,)\times K \longrightarrow (X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n)\times K$$

wo f die Quotientenraumprojektion bezeichnet. Unter der Voraussetzung, daß K lokal-kompakt ist, sagt der Satz, daß auch die Abbildung $f\times \mathrm{Id}_K$ eine Quotientenraumprojektion ist, wie behauptet. $\square$

Korollar 2. *Sei (X,A) CW-Komplex mit Zellfiltrierung*

$$A = X_{-1}\subset X_0\subset X_1\subset \ldots \subset X_n\subset \ldots \subset X\ .$$

Sei K lokal kompakt. Sei $O\subset X\times K$. Dann sind äquivalent:

(i) *O ist offen*

(ii) *für jedes n ist $O\cap(X_n\times K)$ offen in $X_n\times K$*

(iii) *für jeden endlichen Unterkomplex (Y,A) von (X,A) ist $O\cap(Y\times K)$ offen in $Y\times K$.*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Wir bilden die disjunkte Vereinigung

$$\overline{X} \;=\; X_{-1} \;\dot\cup\; X_0 \;\dot\cup\; X_1 \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; X_n \;\dot\cup\; \;\dots\; .$$

Dann gibt es eine natürliche Abbildung $p : \overline{X} \longrightarrow X$. Diese Abbildung ist eine Quotientenraumprojektion. Denn wenn $P \subset X$, dann ist $p^{-1}(P)$ offen in $\overline{X}$ genau dann, wenn $P \cap X_n$ offen in X_n für alle n , und das ist ja gerade (nach Definition eines CW-Komplexes) gleichbedeutend damit, daß P offen in X ist.

Unter der Voraussetzung, daß K lokalkompakt ist, sagt nun der Satz, daß $X \times K$ Quotientenraum von

$$\overline{X} \times K \quad (\;\approx\; X_{-1} \times K \;\dot\cup\; X_0 \times K \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; X_n \times K \;\dot\cup\; \dots)$$

ist. D.h., eine Teilmenge $W \subset X \times K$ ist offen genau dann, wenn $(p \times \mathrm{Id})^{-1}(W)$ offen in $\overline{X} \times K$ ist, was wiederum bedeutet, daß $W \cap (X_n \times K)$ offen in $X_n \times K$ ist, für jedes n .

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Das Argument ist ganz analog. $\square$

Satz. *Sei* (X, A) *relativer CW-Komplex. Sei* K *lokal-kompakt* (z.B. $K = [0,1]$) . *Sei* Y *ein topologischer Raum, und sei*

$$f : \; X \times K \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f *ist stetig*

(ii) *für jedes* m *ist die eingeschränkte Abbildung* $f \,|\, X_m \times K$ *stetig.*

Beweis. Für jede offene Menge $O \subset Y$ sind nach dem vorigen Korollar äquivalent:

(i) $f^{-1}(O)$ ist offen in $X \times K$

(ii) für jedes m ist $(f \,|\, X_m \times K)^{-1}\,(O)$ offen in $X_m \times K$. $\square$

Der Raum $X \times K$ verhält sich also in einer wichtigen Angelegenheit genauso wie ein CW-Komplex (für den ja auch gilt, daß eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn ihre Einschränkungen auf die Skelette stetig sind). Dies suggeriert, daß auch $X \times K$ ein CW-Komplex sein sollte, wenn es eine Chance hat. Wir wollen uns überlegen, daß das tatsächlich so ist. Der Einfachheit halber behandeln wir nur den Fall *absoluter* CW-Komplexe,

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X \; .$$

Bemerkung. *Dieses* X *ist Quotientenraum der disjunkten Vereinigung*

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot\cup\; J_1 \times D^1 \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; J_n \times D^n \;\dot\cup\; \dots$$

wobei J_n *die Indexmenge für die* n*-Zellen bezeichnet.*

Beweis. Für jede Zelle sei eine charakteristische Abbildung $D^n \to X_n$ ausgewählt. Diese Abbildungen liefern zusammen eine surjektive Abbildung $p : \widehat{X} \to X$. Zu zeigen:

Wenn $B \subset X$ und $p^{-1}(B)$ abgeschlossen in $\widehat{X}$, dann ist schon B abgeschlossen in X. Das kennen wir aber: nämlich "$p^{-1}(B)$ abgeschlossen" heißt, $p^{-1}(B)$ trifft jedes $j \times D^n$ in einer abgeschlossenen (und damit kompakten) Untermenge. Dann ist auch $p\left(p^{-1}(B) \cap (j \times D^n)\right)$ kompakt und daher abgeschlossen. Das heißt, B trifft den Abschluß einer jeden Zelle in einer abgeschlossenen Teilmenge. Das ist aber ein Kriterium dafür, daß B selbst abgeschlossen ist. □

BEMERKUNG. Die vorige Bemerkung können wir auch umkehren. Nämlich sei $\widehat{X}$ eine disjunkte Vereinigung von Bällen

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot{\cup}\; J_1 \times D^1 \;\dot{\cup}\; \dots$$

und sei X ein Quotientenraum von $\widehat{X}$. Dann ist X ein CW-Komplex, sobald die zugrundeliegende Äquivalenzrelation eine gewisse induktiv formulierbare Bedingung erfüllt. Es sei nämlich $\widehat{X}_n$ definiert als $\widehat{X}_n := J_0 \times D^1 \;\dot{\cup}\; \dots \;\dot{\cup}\; J_n \times D^n$, und X_n als das Bild von $\widehat{X}_n$. Die Bedingung ist dann, daß die eingeschränkte Äquivalenzrelation auf $\widehat{X}_n$ erzeugt wird von

1. *der eingeschränkten Äquivalenzrelation auf* $\widehat{X}_{n-1}$
2. *einer Anhefteabbildung* $J_n \times \partial D^n \longrightarrow X_{n-1}$. □

Wir wollen nun Produkte von CW-Komplexen betrachten. Seien also X und X' CW-Komplexe, aufgefaßt als Quotientenräume von

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot{\cup}\; J_1 \times D^1 \;\dot{\cup}\; \dots \qquad \text{und} \qquad \widehat{X}' \;=\; J_0' \times D^0 \;\dot{\cup}\; J_1' \times D^1 \;\dot{\cup}\; \dots$$

Die Äquivalenzrelationen auf $\widehat{X}$ und $\widehat{X}'$ erzeugen eine Äquivalenzrelation auf

$$\begin{aligned}
\widehat{X} \times \widehat{X}' \;&=\; \Big(\dot{\bigcup}_p \; J_p \times D^p \Big) \times \Big(\dot{\bigcup}_q \; J_q' \times D^q \Big) \\
&=\; \dot{\bigcup}_n \Big(\dot{\bigcup}_{p+q=n} \; J_p \times J_q' \times D^p \times D^q \Big) \\
&\approx\; \dot{\bigcup}_n \Big(\dot{\bigcup}_{p+q=n} \; J_p \times J_q' \Big) \times D^n \;,
\end{aligned}$$

weil $D^p \times D^q \;\approx\; D^n$, wenn $p+q=n$.

Diese Äquivalenzrelation ist von dem soeben diskutierten speziellen Typ. Denn der Rand des Balles $D^p \times D^q$ setzt sich zusammen in der Weise

$$\partial(D^p \times D^q) \;=\; (\partial D^p \times D^q) \;\cup\; (D^p \times \partial D^q)\;.$$

Soweit die Äquivalenzrelation Punkte aus $D^p \times D^q$ und solche von Zellen kleinerer Dimension betrifft, kommt sie also her von einer Anhefte-Abbildung

$$\begin{aligned}
&\partial(D^p \times D^q) \;=\; (\partial D^p \times D^q) \cup (D^p \times \partial D^q) \;\longrightarrow \\
&\qquad \operatorname{Bild}(\widehat{X}_{p-1} \times \widehat{X}_q') \cup \operatorname{Bild}(\widehat{X}_p \times \widehat{X}_{q-1}') \;\subset\; \operatorname{Bild}\big(\bigcup_{p+q \le n-1} \; \widehat{X}_p \times \widehat{X}_q' \big)\;.
\end{aligned}$$

Der zugehörige Quotientenraum ist folglich ein CW-Komplex. Wir bezeichnen ihn mit $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$. Die Skelette sind

$$\begin{aligned}(X \mathbin{\widehat{\times}} X')_n &= \operatorname{Bild}(\textstyle\bigcup_{p+q\leq n} \ \widehat{X}_p \times \widehat{X}'_q \ ) \\ &= \textstyle\bigcup_{p+q\leq n} \ X_p \mathbin{\widehat{\times}} X'_q \ .\end{aligned}$$

Es gibt eine natürliche Abbildung

$$X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X' \ .$$

Sie kommt daher, daß die Abbildung $\operatorname{proj}_X \times \operatorname{proj}_{X'} \colon \widehat{X} \times \widehat{X}' \to X \times X'$ faktorisiert als die Projektion $\widehat{X} \times \widehat{X}' \to X \mathbin{\widehat{\times}} X'$, gefolgt von einer stetigen bijektiven Abbildung, eben $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$.

Diese Abbildung ist *nicht immer* eine topologische Äquivalenz (ein Beispiel dazu wird unten angegeben). Es ist Geschmacksache, ob man in einem solchen Fall $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$ oder $X \times X'$ (das übliche Produkt) als besser ansehen will. (Viele Leute entscheiden sich in der Situation für den CW-Komplex $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$.)

Satz: *Wenn X' endlicher CW-Komplex ist, dann ist die Abbildung*

$$X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$$

eine topologische Äquivalenz. Ansonsten sind zueinander äquivalent:

(a) $X \times X'$ (mit der induzierten Zellenstruktur) *ist CW-Komplex.*

(b) *Die stetige bijektive Abbildung $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ ist topologische Äquivalenz.*

Beweis. Sei X' endlicher CW-Komplex. Zu zeigen ist, daß dann $\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow X \times X'$ eine Quotientenraum-Abbildung ist. Dies nun folgt, sobald die beiden Abbildungen

$$\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{X} \times X' \quad \text{und} \quad \widehat{X} \times X' \longrightarrow X \times X'$$

Quotientenraum-Abbildungen sind. Das ist aber so nach einem oben angegebenen Kriterium über die Verträglichkeit von Quotientenraum-Konstruktionen mit Produkten: Im Fall der ersten Abbildung ist das Kriterium anwendbar, da der Raum $\widehat{X}$ eine disjunkte Vereinigung von Bällen ist, und daher lokal-kompakt. Im Fall der zweiten Abbildung ist es anwendbar, da der Raum X' als lokal-kompakt (sogar als kompakt) ausdrücklich vorausgesetzt wurde.

Auch im allgemeinen Fall ist der Raum $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$ ein CW-Komplex. Wenn also $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ eine topologische Äquivalenz ist, so erbt der Produktraum $X \times X'$ eine solche Struktur.

Umgekehrt sei nun vorausgesetzt, daß $X \times X'$, mit der induzierten Zellenstruktur, ein CW-Komplex ist. Die offenen Zellen der beiden Räume $\widehat{X} \times \widehat{X}'$ und $X \times X'$ entsprechen sich dann unter der stetigen bijektiven Abbildung $\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow X \times X'$.

Wir wollen zeigen, daß letztere Abbildung eine topologische Äquivalenz ist. In unserer Situation läuft es auf dasselbe hinaus, zu zeigen, daß es sich um eine *abgeschlossene*

Abbildung handelt. Dies gibt uns die Möglichkeit, einen Trick zu benutzen. Denn wir können abgeschlossene Mengen mit Hilfe der *endlichen Unterkomplexe* charakterisieren (eine Menge ist abgeschlossen schon dann, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlichen Unterkomplex abgeschlossen ist).

Seien Y und Y' endliche Unterkomplexe von X und X', dann ist die induzierte Abbildung $Y \mathbin{\widehat{\times}} Y' \longrightarrow Y \times Y'$ eine topologische Äquivalenz, wie schon gezeigt. Wegen der nunmehr gemachten Voraussetzung (a) gilt auch: Eine Teilmenge $O \subset X \times X'$ ist abgeschlossen schon dann, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlichen Unterkomplex von $X \times X'$ abgeschlossen ist. Dies ist aber äquivalent dazu, daß der Durchschnitt von O mit $Y \times Y'$ abgeschlossen ist, für jedes Paar endlicher Unterkomplexe (Y, Y') (denn jeder endliche Unterkomplex von $X \times X'$ ist enthalten in einem solchen $Y \times Y'$). Die Abbildung $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ ist also abgeschlossen. □

Bemerkung. Die Endlichkeits-Bedingung in dem Satz wurde nur benutzt, um sicherzustellen, daß X' *lokal kompakt* ist. Letzteres ist z.B. auch dann erfüllt, wenn X' *lokal-endlich* ist, d.h., wenn jeder Punkt als Umgebung einen endlichen Unterkomplex besitzt. □

Bemerkung. *Sind X und Y CW-Komplexe, so muß das Produkt $X \times Y$ nicht wieder CW-Komplex sein.*

Hierzu betrachten wir zwei CW-Komplexe, deren jeder eine einzige 0-Zelle und unendlich viele 1-Zellen hat. (Das ist der einfachste Fall eines nicht lokal-endlichen Komplexes; allerdings wird einer der beiden Komplexe besonders viele 1-Zellen haben, nämlich überabzählbar viele). Das Produkt $X \times Y$ ist dann ein Zellenkomplex (möglicherweise aber nicht CW-Komplex) mit Zellen in den Dimensionen 0, 1 und 2. Speziell gibt es eine einzige 0-Zelle, und die 2-Zellen entsprechen den Paaren

$$(\,1\text{-}\mathit{Zelle\ von}\ X\,,\ 1\text{-}\mathit{Zelle\ von}\ Y\,)\,.$$

Um einzusehen, daß $X \times Y$ (mit der Produkttopologie!) tatsächlich nicht die richtige Topologie für einen CW-Komplex hat, werden wir einen bestimmten Unterraum P betrachten. Nach Konstruktion wird P aus jeder der 2-Zellen genau einen Punkt enthalten; und keine Punkte sonst. Wäre $X \times Y$ ein CW-Komplex, dann müßte, wie wir wissen, ein solches P ein *abgeschlossener* Unterraum sein. Wir werden uns aber davon überzeugen, daß jede Umgebung der 0-Zelle den Unterraum P trifft. Da die 0-Zelle selbst nicht zu dem Unterraum gehört, kann dieser somit nicht abgeschlossen sein; also kann auch $X \times Y$ kein CW-Komplex sein.

Um Dinge im Detail benennen zu können, stellen wir uns nun vor, daß für jede der 1-Zellen in unseren beiden CW-Komplexen eine charakteristische Abbildung fest gewählt ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß der Abschluß einer solchen Zelle in bestimmter Weise mit einer S^1 identifiziert ist. Wir können somit von *Distanz* reden. Z.B. kann eine Umgebung der 0-Zelle charakterisiert werden als eine Teilmenge, die aus der i-ten 1-Zelle alle Punkte bis zu einer Distanz ε_i enthält; ε_i ist hier eine Zahl > 0, die von i (und natürlich auch von der Umgebung) abhängt.

Wie eingangs gesagt, sollen X und Y jeweils eine einzige 0-Zelle haben und ansonsten nur 1-Zellen; letztere seien indiziert von Indexmengen

$$I = I_X \quad , \quad J = J_Y \quad ,$$

über die wir nun verfügen wollen. Die Menge J sei einfach die Menge der natürlichen Zahlen $j = 1, 2, 3, \ldots$. Die Menge I ist dagegen viel größer (und ist auch ein wenig komplizierter zu beschreiben), die Elemente $i \in I$ sind die *Folgen natürlicher Zahlen*

$$i \;=\; (i_1\,,\; i_2\,,\; i_3\,,\; \ldots\;)\;.$$

Der Trick, der mit dieser großen Indexmenge hier erreicht wird, ist, daß die Punkte der nunmehr zu definierenden Menge P in der Nähe der 0-Zelle sich arg werden drängen müssen. Die Menge P wird so definiert. P enthält, nach Definition, genau einen Punkt aus der durch das Paar (i,j) indizierten offenen 2-Zelle von $X \times Y$. Dazu nimmt man irgendeinen Punkt aus dieser 2-Zelle, der genügend nahe bei der 0-Zelle ist; nämlich dessen Koordinaten in den beiden zugehörigen 1-Zellen von der 0-Zelle eine Distanz von höchstens $(i_j)^{-1}$ haben.

Der Unterraum P trifft jede Umgebung der 0-Zelle. Denn sei eine solche Umgebung vorgegeben. Da $X \times Y$ mit der *Produkttopologie* versehen ist, enthält diese Umgebung eine *Produktumgebung* (*Kästchen-Umgebung*) $U \times V$. Wir werden zeigen, daß P schon $U \times V$ trifft.

Als Umgebung der 0-Zelle in Y enthält V aus der 1-Zelle mit dem Index j alle Punkte bis zu einer Distanz b_j von der 0-Zelle. Wir nehmen dies zum Anlaß, eine ganz bestimmte Folge von natürlichen Zahlen zu bestimmen, nämlich

$$\mathbf{i} \;=\; (\mathbf{i}_1\,,\; \mathbf{i}_2\,,\; \mathbf{i}_3\,,\; \ldots\;)$$

wo für alle j gilt

$$\mathbf{i}_j \;>\; j \qquad \text{und} \qquad \mathbf{i}_j \;>\; (b_j)^{-1} \quad .$$

Ähnlich enthält U als Umgebung der 0-Zelle in X aus der 1-Zelle mit dem Index i alle Punkte bis zu einer Distanz a_i . Dies nutzen wir aus für die Wahl einer Zahl $\mathbf{j}$ mit

$$\mathbf{j} > (a_{\mathbf{i}})^{-1} \quad .$$

Der Punkt in P , dessen Index $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ist, hat von der 0-Zelle in beiden Koordinaten eine Distanz von $(\mathbf{i}_{\mathbf{j}})^{-1}$ oder weniger. Nach Konstruktion ist andererseits

$$(\mathbf{i}_{\mathbf{j}})^{-1} \;<\; (\mathbf{j})^{-1} \;<\; a_{\mathbf{i}} \quad \text{und} \quad (\mathbf{i}_{\mathbf{j}})^{-1} \;<\; b_{\mathbf{j}}\;,$$

der Punkt ist also enthalten in $U \times V$. $\square$

Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft

Die HEE ist nützlich und ist auch nicht selten. Speziell werden wir uns von ihrem Vorhandensein bei CW-Komplexen überzeugen. Wir beginnen mit einigen Allgemeinheiten: wir wiederholen die Definition und geben ein paar Umformulierungen.

Definition (HEE). Sei X Raum und $A \subset X$ Unterraum. Das Paar (X, A) hat die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft*, wenn folgendes gilt. Gegeben seien

(i) eine auf X definierte Abbildung

(ii) eine Homotopie der auf A eingeschränkten Abbildung.

Dann existiert eine Homotopie der auf X definierten Abbildung, die die auf A vorgegebene Homotopie erweitert.

Bemerkung 1. Die HEE für (X, A) ist äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und Abbildungen $X \to Y$ und $A \times [0,1] \to Y$, die auf $A = A{\times}0$ übereinstimmen, dann haben diese Abbildungen eine gemeinsame Erweiterung auf den Raum $X \times [0,1]$ (wo X als Unterraum von letzterem betrachtet wird vermöge $X = X \times 0$).

Das ist nur die Ausformulierung der Definition.

Bemerkung 2. Die HEE für (X, A) ist äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und eine auf dem zusammengeklebten Raum $X \cup_A A{\times}[0,1]$ definierte Abbildung

$$X \cup_A \, A \times [0,1] \;\longrightarrow\; Y \,.$$

Dann existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf den Raum $X \times [0,1]$.

Denn statt, wie in der Bemerkung 1, die beiden Abbildungen auf X und auf $A{\times}[0,1]$ anzugeben, so kann man ebenso gut eine Abbildung auf deren disjunkter Vereinigung angeben,

$$X \;\dot\cup\; A \times [0,1] \;\longrightarrow\; Y \,,$$

die verträglich ist mit einer gewissen Äquivalenzrelation (sie wird erzeugt durch die beiden Inklusionen $A \to X$ und $A \to A \times [0,1]$, $a \longmapsto (a, 0)$). Es läuft deshalb auf dasselbe hinaus, eine Abbildung auf $X \cup_A A \times [0,1]$, dem zusammengeklebten Raum, anzugeben.

Bemerkung 3. Wenn A *abgeschlossener* Unterraum von X ist, dann ist die HEE für (X, A) äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und eine auf dem Unterraum $X\times 0 \cup A\times [0,1] \subset X\times [0,1]$ definierte Abbildung

$$X\times 0 \cup A\times [0,1] \longrightarrow Y .$$

Dann existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf den Raum $X\times [0,1]$.

Denn die Abgeschlossenheit von A garantiert, daß die natürliche Abbildung

$$X \cup_A A \times [0,1] \longrightarrow X\times 0 \cup A\times [0,1]$$

eine topologische Äquivalenz ist. Diese Abbildung ist ja ohnehin eine stetige bijektive Abbildung. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist sie auch eine *abgeschlossene Abbildung* (das läuft darauf hinaus, daß eine Teilmenge in dem Unterraum $X\times 0 \cup A\times [0,1]$ genau dann abgeschlossen ist, wenn ihre Durchschnitte mit den abgeschlossenen Unterräumen $X\times 0$ und $A\times [0,1]$ jeweils abgeschlossen sind).

Bemerkung 4. Wenn A *abgeschlossener* Unterraum von X ist, dann ist die HEE für (X, A) äquivalent zu der folgenden Bedingung. Der Unterraum $X\cup A\times[0,1] \subset X\times[0,1]$ ist *Retrakt* von $X\times [0,1]$.

Der Übergang zwischen (3) und (4) ist ein Spezialfall von

Hilfssatz. *Sei C Unterraum von Z. Es sind äquivalent*:
(a) *Jede Abbildung $C \to Y$ läßt sich erweitern zu einer Abbildung $Z \to Y$.*
(b) *C ist Retrakt von Z.*

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a). Sei $r : Z \to C$ eine Retraktion (also $r \,|\, C = \mathrm{Id}_C$). Ist $f : C \to Y$ eine Abbildung, so ist $f \circ r : \; Z \to Y$ eine Erweiterung von f.
(a) $\Rightarrow$ (b). Die Voraussetzung liefert, insbesondere, daß Id_C, die identische Abbildung auf C, erweitert werden kann zu einer Abbildung $r\colon Z \to C$. $\square$

Um die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für interessante Raumpaare nun nachzuweisen, hangeln wir uns hoch an Fällen wachsender Allgemeinheit.

Satz. *Das Paar $(D^m, \partial D^m)$ hat die* HEE.

Beweis. Wir geben eine Retraktion an,

$$D^m\times [0,1] \longrightarrow D^m\times 0 \,\cup\, \partial D^m\times [0,1] .$$

Die Abbildung wird definiert mit Hilfe der Schar von Geraden in $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1$, die durch den Punkt $(0,2)$, $0 \in \mathbb{R}^m$, $2 \in \mathbb{R}^1$, gehen. Jede solche Gerade trifft $D^m\times 0 \cup \partial D^m\times [0,1]$ in höchstens einem Punkt. Andererseits liegt jeder Punkt von $D^m \times [0,1]$ auf genau einer von den Geraden.

Die Abbildung besteht nun darin, daß für jede von den Geraden der gesamte Durchschnitt mit $D^m\times [0,1]$ auf den entsprechenden Punkt in $D^m\times 0\cup\partial D^m\times[0,1]$ abgebildet wird. Es ist klar (oder?), daß die Abbildung stetig ist. $\square$

Bezeichne eine *diskrete Menge* eine Menge, die mit der diskreten Topologie versehen ist — das, was manchmal auch als “diskreter topologischer Raum” bezeichnet wird.

KOROLLAR. *Für jede diskrete Menge* J *hat* $(J\times D^m,\ J\times\partial D^m)$ *die* HEE.

BEWEIS. Ist $r:\ D^m\times[0,1]\ \longrightarrow\ D^m\times 0\ \cup\ \partial D^m\times[0,1]$ eine Retraktion, dann auch

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_J\times r):\ J\times D^m\times\ [0,1]\ &\longrightarrow\ J\times(D^m\times 0\cup\partial D^m\times[0,1])\\ &\approx\ J\times D^m\times 0\ \cup\ J\times\partial D^m\times[0,1]\ .\end{aligned}$$

□

SATZ. X *entstehe aus* X' *durch Anheften von* m*-Zellen,* (*mit Indexmenge* J),

$$X\ =\ X'\cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m\ .$$

Dann hat (X,X') *die* HEE.

BEWEIS. Eine Retraktion

$$J\times D^m\times[0,1]\ \longrightarrow\ J\times D^m\times 0\ \cup\ J\times\partial D^m\times[0,1]$$

induziert eine solche auf der disjunkten Vereinigung mit $X'\times[0,1]$. Letztere Retraktion ist verträglich mit der Äquivalenzrelation, die durch die Verklebe-Abbildung

$$(\,g\times\mathrm{Id}_{[0,1]}\,):\ J\times\partial D^m\times\ [0,1]\ \longrightarrow\ X'\times[0,1]$$

gegeben ist (wo $g\colon J\times\partial D^m\to X'$ die ursprüngliche Verklebe-Abbildung bezeichnet). Sie induziert deshalb eine Retraktion der verklebten Räume,

$$\begin{aligned}X\times[0,1]\ &\underset{\text{(Satz von oben)}}{\approx}\ X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ J\times D^m\times[0,1]\\ &\longrightarrow\ X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times D^m\times 0\cup J\times\partial D^m\times[0,1])\ .\end{aligned}$$

Den Zielraum können wir über Buchführungs-Manipulationen nun umformen,

$$\begin{aligned}&X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times D^m\times 0\cup J\times\partial D^m\times[0,1])\\ \approx\ &X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times\partial D^m\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0)\\ \approx\ &(\ X'\times[0,1]\cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ J\times\partial D^m\times[0,1]\ )\cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0\\ \approx\ &X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0\\ \approx\ &X'\times[0,1]\cup X\times 0\quad (\ \subset X\times[0,1]\ )\ .\end{aligned}$$

□

SATZ. *Sei* (X,A) *ein relativer CW-Komplex. Das Raumpaar* (X,A) *hat die* HEE.

BEWEIS. Zu zeigen ist, daß eine Retraktion

$$f:\ X\times[0,1]\ \longrightarrow\ X\times 0\cup A\times[0,1]$$

existiert. Sei

$$A=X_{-1}\ \subset\ X_0\ \subset\ \dots\ \subset\ X_n\ \subset\ \dots\ \subset\ X$$

die Skelettfiltrierung. Das gesuchte f würde, per Restriktion, eine Folge von Retraktionen

$$f_m : \; X_m \times [0,1] \longrightarrow X_m \times 0 \cup A \times [0,1]$$

induzieren, mit

$$f_m \mid X_{m-1} \times [0,1] \; = \; f_{m-1} \; .$$

Um f zu konstruieren, genügt es umgekehrt aber auch, eine solche Folge von f_m's zu finden. Wir können dann nämlich f *definieren* als

$$f \mid X_m \times [0,1] \; = \; f_m \; ;$$

dieses f ist wohldefiniert (weil $f_m \mid X_{m-1} \times [0,1] = f_{m-1}$), es ist eine Retraktion (weil die f_m Retraktionen sind), und schließlich ist f auch stetig (nach dem Satz, daß f genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f \mid X_m \times [0,1]$ für alle m stetig sind.)

Die Existenz der gesuchten Folge $\{f_m\}$ haben wir praktisch schon früher gezeigt. Hier sind die Details. Wir konstruieren die Folge induktiv. Der Induktionsanfang ist trivial: f_{-1} ist die identische Abbildung auf $A \times [0,1]$. Wir nehmen nun an, f_{m-1} sei schon konstruiert. f_m verschaffen wir uns dann so:

Weil die Einschränkung von f_{m-1} auf

$$X_m \times 0 \; \cap \; X_{m-1} \times [0,1] \; = \; X_{m-1} \times 0$$

eine identische Abbildung ist, können wir f_{m-1} mit der Identität auf $X_m \times 0$ fortsetzen zu einer Abbildung

$$X_m \times 0 \; \cup \; X_{m-1} \times [0,1] \xrightarrow{\;\mathrm{Id} \,\cup\, f_{m-1}\;} X_m \times 0 \cup A \times [0,1] \; .$$

Diese Abbildung ist wieder stetig (weil $X_{m-1} \times 0$ abgeschlossen in $X_m \times 0$ ist), und sie ist auch eine Retraktion.

Nach dem vorigen Satz gibt es eine Retraktion

$$r_m : \; X_m \times [0,1] \longrightarrow X_m \times 0 \; \cup \; X_{m-1} \times [0,1] \; .$$

Die Zusammensetzung $(\,\mathrm{Id} \cup f_{m-1}\,) \circ r_m$ ist dann das gesuchte f_m. □

BEMERKUNG. Für Raumpaare (X, A) im allgemeinen (also solche, die keine CW-Komplexe sind) braucht die HEE nicht zu gelten. *Beispiel*: Sei X folgender Unterraum von $\mathbb{R}$,

$$X \; = \; [-1,0] \; \cup \; \{ \, \tfrac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots \; \} \; .$$

Jede Homotopie der identischen Abbildung läßt jeden der isolierten Punkte $\frac{1}{n}$ fest, aus Stetigkeitsgründen also auch den Punkt 0. Sei A der Unterraum $[-1,0]$. Wegen des eben gesagten kann eine Homotopie der Inklusionsabbildung $A \longrightarrow X$ nur dann erweitert werden zu einer Homotopie von Id_X, wenn sie den Punkt 0 festhält. Es gibt aber Homotopien, die nicht diese Eigenschaft haben; z.B. die Homotopie, die $[-1,0]$ auf $\{-1\}$ zusammenzieht.

Ein amüsanteres, wenn auch etwas komplizierteres Beispiel für dieses Phänomen liefern die *Hawaiischen Ohrringe*, wobei A der ausgezeichnete Punkt ist (der gemeinsame Punkt aller der Kreise). Keine (!) nicht-triviale Homotopie der Inklusion $A \to X$ läßt sich erweitern zu einer Homotopie von Id_X. Denn angenommen, Id_X sei homotop zu einer Abbildung $f : X \to X$ mit $f(A) \neq A$. Aus Stetigkeitsgründen muß f unendlich viele der Kreise in eine (Intervall-) Umgebung von $f(A)$ abbilden. Diese Intervallumgebung ist zusammenziehbar; also folgt, daß für diese unendlich vielen Kreise die jeweilige Inklusionsabbildung $S^1 \to X$ nullhomotop ist (d.h., homotop zu einer trivialen Abbildung). Das kann aber nicht sein: Jeder der Kreise ist Retrakt von X, und es würde folgen, daß die identische Abbildung $S^1 \to S^1$ homotop ist zu einer trivialen Abbildung — was aber, wie wir wissen, nicht der Fall ist. □

Mit dem obigen Beweis des Homotopie-Erweiterungssatzes ist schließlich auch der Beweis des zellulären Approximationssatzes fertig.

Wir wollen jetzt eine weitere Anwendung zur Kenntnis nehmen: *Bis auf Homotopie läßt sich jede Abbildung zwischen CW-Komplexen schreiben als eine zelluläre Inklusion, gefolgt von einer Homotopieäquivalenz*!

Als Vorbereitung hierzu brauchen wir eine Konstruktion mit zellulären Abbildungen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall *absoluter* CW-Komplexe

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X \ .$$

Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine zelluläre Abbildung. Und sei X Unterkomplex von X'. Dann ist der zusammengeklebte Raum*

$$Z \ = \ Y \cup_X X' \qquad (\ = Y \ \dot{\cup} \ X' \ / \ _{x \sim f(x)\,,\ \text{für } x \in X} \ )$$

wieder ein CW-Komplex, mit Skeletten

$$Z_n \ = \ Y_n \cup_{X_n} X'_n \ .$$

Beweis. (i) Die Räume Z_n existieren, weil f zelluläre Abbildung ist, also, per Einschränkung, auch Abbildungen $X_n \to Y_n$ liefert.

(ii) Z_n entsteht aus Z_{n-1} durch Anheften von n-Zellen. Denn Z_n enthält den Unterraum

$$Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ ,$$

der aus $Z_{n-1} = Y_{n-1} \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}$ durch Anheften von n-Zellen entsteht (nämlich den n-Zellen von Y) :

$$\begin{aligned} Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ &= \ (\, J \times D^n \cup_{J \times \partial D^n} Y_{n-1} \,) \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \\ &\approx \ J \times D^n \cup_{J \times \partial D^n} (Y_{n-1} \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}) \ . \end{aligned}$$

Aus diesem Unterraum entsteht Z_n durch Anheften weiterer n-Zellen, denn man kann schreiben:

$$Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ \approx \ (Y_n \cup_{X_n} X_n) \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ \approx \ Y_n \cup_{X_n} (X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}) \ ,$$

sowie

$$Y_n \cup_{X_n} X'_n \;\approx\; \big(\, Y_n \cup_{X_n} (\, X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \,) \,\big) \cup_{(\, X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \,)} X'_n \;,$$

und X'_n entsteht ja aus $X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}$ durch Anheften von n-Zellen, nämlich derjenigen Zellen, die nicht zu dem Unterkomplex X_n gehören.

(iii) Zu zeigen ist noch, daß die Abbildung $\dot{\bigcup} Z_n \longrightarrow Z$ Quotientenabbildung ist. Das folgt aber, weil (nach Definition) die anderen Abbildungen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \dot{\bigcup}_n \Big(Y_n \;\dot{\cup}\; X'_n \Big) & \longrightarrow & Y \;\dot{\cup}\; X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \dot{\bigcup}_n Z_n & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Quotientenabbildungen sind. □

Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zu dem schon angekündigten 'Abbildungs-Zylinder'. Zunächst sagt man ganz allgemein für eine Abbildung von topologischen Räumen, $f: X \to Y$, daß der *Abbildungszylinder* $Z(f)$ folgendermaßen definiert sein soll.

Nämlich, der Raum X wird zunächst 'aufgedickt' zu $X \times [0.1]$, und das 'hintere Ende' dieser Aufdickung, also $X \times 1$, wird dann an den Raum Y angeheftet vermöge der Abbildung f.

Oder, in technischer Sprache,

$$Z(f) \;=\; X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y \;\; ;$$

der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung $X \times [0,1] \;\dot{\cup}\; Y$ bezüglich der Äquivalenzrelation, die erzeugt ist von $(x,1) \sim f(x)$, für $x \in X$.

Die Konstruktion hat die folgenden (offensichtlichen) Eigenschaften:

Es gibt eine Projektion $p\colon Z(f) \to Y$. Sie ist induziert von der Abbildung "Projektion auf den ersten Faktor" $X \times [0,1] \to X$; nämlich als die Abbildung

$$X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y \;\longrightarrow\; X \cup_X Y \;\approx\; Y \;\; .$$

Es gibt eine Inklusion $j_0 : X \to Z(f)$. Sie ist induziert von $x \mapsto (x,0)$; nämlich als die Zusammensetzung

$$X \;\longrightarrow\; X \times [0,1] \;\dot{\cup}\; Y \;\longrightarrow\; X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y$$

Es gilt, daß die Komposition von der Inklusion j_0 mit der Projektion p gleich der ursprünglichen Abbildung f ist.

Es gibt auch eine Inklusion $j_1 : Y \to Z(f)$. Die Komposition der Inklusion j_1 mit der Projektion p ist die identische Abbildung auf Y.

Schließlich gilt auch noch, daß Y tatsächlich Deformationsretrakt von $Z(f)$ ist: Die Kontraktion von $[0,1]$ auf den Endpunkt 1 induziert eine Deformation von $X \times [0,1]$

auf $X \times 1$, und damit auch eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $j_1(Y)$, von der identischen Abbildung auf $Z(f)$ zu der Abbildung $j_1 \circ p$.

Wenn nun X und Y CW-Komplexe sind, so hätte man gern, daß auch der Abbildungszylinder ein CW-Komplex ist. Beim zweiten Hinschauen stellt man aber fest, daß es in dieser Allgemeinheit in Wirklichkeit keine Chance gibt. Es ist nämlich nötig, zu verlangen, daß die fragliche Abbildung sich *in Bezug auf die Zellenstruktur vernünftig verhält*; mit anderen Worten, daß es sich um eine *zelluläre* Abbildung handelt. Damit kommt man andererseits aber auch hin.

Seien X und Y (absolute) CW-Komplexe, und sei $f : X \to Y$ eine *zelluläre* Abbildung. Der Abbildungszylinder $Z(f)$ ist dann auf natürliche Weise wieder ein CW-Komplex, nämlich:

(i) Das Intervall $[0,1]$ ist CW-Komplex in naheliegender Weise (mit zwei 0-Zellen und einer 1-Zelle).

(ii) Der Produktraum $X \times [0,1]$ ist dann auch CW-Komplex (früherer Satz) und enthält die Unterräume $X \times 0$ und $X \times 1$ als Unterkomplexe.

(iii) Da die Abbildung f als zellulär vorausgesetzt war, ist dann auch der zusammengeklebte Raum $Z(f) = X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y$ wieder ein CW-Komplex (nach dem vorigen Satz).

Die Inklusionen $j_0 \colon X \to Z(f)$ und $j_1 \colon Y \to Z(f)$ sind jetzt zelluläre Inklusionen (d.h., sie gestatten uns, X und Y als Unterkomplexe von $Z(f)$ aufzufassen). Die Abbildung $p : Z(f) \longrightarrow Y$ ist ebenfalls zellulär.

Außer den Zellen von $Z(f)$, die in den Unterkomplexen X und Y enthalten sind, gibt es noch einen weiteren Typ von Zellen: Jede n-Zelle von X ergibt, mit der 1-Zelle von $[0,1]$ kombiniert, eine $(n{+}1)$ -Zelle von $Z(f)$.

Satz. *Sei $g : X \to Y$ eine Abbildung von CW-Komplexen. Dann gibt es eine zu g homotope Abbildung f , die geschrieben werden kann als eine zelluläre Inklusion gefolgt von einer zellulären Abbildung, wobei letztere Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist.*

Beweis. Anwendung des zellulären Approximationssatzes liefert eine zu g homotope Abbildung f , die zellulär ist. f ist dann gleich der zusammengesetzten Abbildung

$$X \xrightarrow{\ j_0\ } Z(f) \xrightarrow{\ p\ } Y . \qquad \square$$

Whitehead-Satz

Wir wollen uns jetzt dem Beweis des Satzes von Whitehead zuwenden, daß eine Abbildung zwischen 'vernünftigen' Räumen (d.h., CW-Komplexen — oder CW-Komplexen bis auf Homotopieäquivalenz), daß also eine solche Abbildung schon dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Der Beweis geht in drei Schritten.

1. *Reduktion auf den Fall einer Inklusionsabbildung*
2. *Formulierung (und Beweis) eines solchen Satzes, in dem Homotopiegruppen gar nicht vorkommen*
3. *Übersetzung des letzten Schrittes in eine Formulierung mit Homotopiegruppen.*

Der erste Schritt ist durch die Konstruktion des Abbildungszylinders im wesentlichen schon geleistet, wir werden bei der endgültigen Formulierung noch einmal darauf eingehen. Wir kommen jetzt zum zweiten Schritt.

Definition. Sei Y topologischer Raum und $B \subset Y$ Unterraum. Die Inklusion $B \to Y$ heißt *n-zusammenhängend*, wenn für jedes $m \leq n$ und für jede Abbildung

$$g: \ (D^m, \partial D^m) \ \longrightarrow \ (Y, B)$$

gilt: Es gibt eine Homotopie, relativ ∂D^m, von g zu einer Abbildung, deren Bild ganz in B enthalten ist.

Beispiele. 1) Ist B Deformationsretrakt von Y, so ist $B \to Y$ n-zusammenhängend für alle n.

2) Der Fall $n = 0$ besagt: Jeder Punkt von Y ist deformierbar in einen solchen von B (m.a.W., die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_0(B) \to \pi_0(Y)$ ist surjektiv).

Wie bereits angedeutet, werden wir diese Begriffsbildung später (3. Schritt) "noch algebraischer" (nämlich mit Hilfe von Homotopiegruppen) formulieren.

Satz. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung, wobei (Y, B) n-zusammenhängend ist. Dann ist f homotop zu einer Abbildung mit*

$$\mathrm{Bild}\,(X_n) \subset B \ .$$

Beweis. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Abbildungen $f_m\colon (X, A) \to (Y, B)$, $m = -1, 0, 1, \ldots, n$, $f_{-1} = f$, mit $f_m(X_m) \subset B$, wobei jeweils f_m homotop zu f_{m-1} ist, bezüglich einer Homotopie, die auf X_{m-1} konstant ist.

Sei $m \geq 0$ und sei f_{m-1} bereits konstruiert; wir wollen jetzt f_m konstruieren. Per Einschränkung liefert f_{m-1} eine Abbildung

$$(X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B) .$$

Sei $(D^m, \partial D^m) \to (X_m, X_{m-1})$ repräsentierende Abbildung für eine der m-Zellen. Nach Definition von "*n-zusammenhängend*" (und weil $m \leq n$) gibt es nun eine Homotopie, relativ ∂D^m, von der zusammengesetzten Abbildung

$$(D^m, \partial D^m) \longrightarrow (X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B)$$

zu einer Abbildung mit Bild in B.

Allgemeiner, wenn J die Indexmenge für die m-Zellen von (X, A) ist, dann gibt es eine Homotopie, relativ $J \times \partial D^m$, von der zusammengesetzten Abbildung

$$(J \times D^m, J \times \partial D^m) \longrightarrow (X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B)$$

zu einer Abbildung mit Bild in B. Zusammen mit der konstanten Homotopie auf X_{m-1} liefert dies, per Verkleben, eine Homotopie auf X_m, relativ X_{m-1}, von der Einschränkung von f_{m-1} auf X_m zu einer Abbildung auf X_m mit $\operatorname{Bild}(X_m)$ ganz enthalten in B. Mit Hilfe der HEE für das Paar (X, X_m) erhalten wir dann eine Homotopie relativ X_{m-1}, von f_{m-1} zu unserem gesuchten f_m. □

Definition. Eine Inklusion $B \to Y$ heißt eine *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn sie n-zusammenhängend ist für alle n.

Bemerkung. Allgemeiner gibt es diese Vokabel für Abbildungen, die nicht notwendig Inklusionen sind (die Definition lautet dann, etwa, "eine Abbildung, die Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen induziert"). Die Wortwahl bei der Begriffsbildung ist vielleicht ein wenig unglücklich. Sie dürfte herkommen von "wird impliziert von Homotopie-Äquivalenz, ist aber möglicherweise ein wenig schwächer". *Schwache* Homotopie-Äquivalenz ist jedenfalls im allgemeinen *keine* Äquivalenzrelation. Es folgt allerdings aus dem Whitehead-Satz, daß schwache Homotopie-Äquivalenz zumindest für CW-Komplexe doch eine Äquivalenzrelation ist. □

Satz. *Die Inklusion $B \to Y$ sei eine schwache Homotopieäquivalenz. Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex und*

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine Abbildung. Dann ist f homotop, relativ A, zu einer Abbildung mit Bild in B.

Beweis. Wir geben eine Folge von Abbildungen $(X, A) \to (Y, B)$ an,

$$f = f_{-1} ,\ f_0 ,\ f_1 ,\ \ldots$$

und von Homotopien

$$F_0 ,\ F_1 ,\ \ldots ,$$

wobei F_n eine Homotopie, relativ X_{n-1}, von f_{n-1} zu f_n ist, und $f_n(X_n) \subset B$.

Die induktive Konstruktion von f_n und F_n, ausgehend von f_{n-1}, wurde im Beweis des vorigen Satzes bereits angegeben. Wie im Beweis des Zelluläre-Approximations-Satzes kann man diese unendlich vielen Homotopien nun zusammenbauen zu *einer einzigen* Homotopie (derselbe Trick, dieselbe Formel; vgl. S. 29). Letztere Homotopie liefert als ihren 'Endzustand' insbesondere die gesuchte Abbildung. □

KOROLLAR. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Die Inklusion $A \to X$ sei schwache Homotopieäquivalenz. Dann ist A Deformationsretrakt von X.*

BEWEIS. Wir wenden den vorigen Satz an auf die identische Abbildung $(X, A) \to (X, A)$. Dies zeigt, es gibt eine Homotopie, relativ A, von Id_X zu einer Abbildung mit Bild in A. □

Homotopiegruppen

Als nächstes wollen wir uns jetzt mit *Homotopiegruppen* beschäftigen. Wie schon bei der Fundamentalgruppe, so braucht man aus technischen Gründen immer einen *Basispunkt* (man benötigt ihn, um die Gruppenstruktur zu definieren).

Bezeichne also $s_0 \in S^n$ einen ein für allemal fest gewählten Punkt (z.B. den Südpol —welchen Punkt man nimmt, ist letztlich irrelevant; es gibt ja zu z.B. auch zu je zwei Punkten immer eine topologische Äquivalenz von S^n auf sich, die diese beiden Punkte ineinander überführt).

Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt, der Basispunkt. Dann ist $\pi_n(X, x_0)$ definiert als die *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen*

$$(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

(d.h., stetigen Abbildungen $S^n \to X$ mit $s_0 \mapsto x_0$; und 'Homotopien' solcher Abbildungen sind relativ zu s_0).

Der Fall $n = 0$. Die 0-Sphäre S^0 ist die disjunkte Vereinigung zweier Punkte, und auf einem davon (nämlich auf s_0) ist über die Abbildung schon verfügt. Die Menge $\pi_0(X, x_0)$ ist daher in 1:1 Beziehung zu der Menge der Wegzusammenhangsklassen von Punkten in X (die wir früher mit $\pi_0(X)$ bezeichnet hatten). Die jetzt vorgenommene Auswahl des Basispunktes bewirkt nur, daß unter den Wegzusammenhangskomponenten von X nunmehr eine als ausgezeichnet betrachtet wird, nämlich diejenige, die den Punkt x_0 enthält. Die punktierte Menge $\pi_0(X, x_0)$ läßt sich *i.a. nicht* auf vernünftige Weise mit einer Gruppenstruktur versehen.

Der Fall $n > 0$. Da S^n wegzusammenhängend ist für $n > 0$, hat jeder Repräsentant von $\pi_n(X, x_0)$ sein Bild ganz in der Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes x_0. Das heißt, $\pi_n(X, x_0)$ 'sieht' nur diese eine Wegzusammenhangskomponente. Oder anders gesagt, es ist $\pi_n(X', x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X, x_0)$, wenn X' die x_0 enthaltende Wegzusammenhangskomponente bezeichnet. Die Menge $\pi_n(X, x_0)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, nämlich die Klasse der trivialen Abbildung $S^n \to x_0$.

Im Falle $n = 1$ läßt sich $\pi_n(X, x_0)$ in einer schon bekannten Weise mit einer Gruppenstruktur versehen; das Resultat ist die Fundamentalgruppe. Dasselbe Verfahren (im wesentlichen) liefert auch eine Gruppenstruktur für $n \geq 2$; wir gehen später im Detail darauf ein. Dabei werden wir die etwas überraschende Tatsache zur Kenntnis nehmen, daß diese Gruppen (für $n \geq 2$) immer abelsch sind.

MERKREGEL. Je höher der Index, desto "besser" die Struktur
$n = 0$: *punktierte Menge*
$n = 1$: *Gruppe*
$n \geq 2$: *abelsche Gruppe.*

In allen Fällen ist das ausgezeichnete Element $S^n \to x_0$ von $\pi_n(X, x_0)$ auch das neutrale Element für die Gruppenstruktur.

Die Konstruktion von $\pi_n(X, x_0)$ ist 'natürlich' im technischen Sinn. Das heißt, die Konstruktion ist mit Abbildungen verträglich (was eine *sehr* wichtige Eigenschaft ist). Sei nämlich $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine *Abbildung von punktierten Räumen* (d.h., eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$). f induziert dann eine Abbildung

$$f_* : \ \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

in naheliegender Weise. Wenn nämlich $[\alpha]$ die Klasse von $\alpha : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ bezeichnet, dann wird $f_*([\alpha])$ definiert als $[f \circ \alpha]$, die Klasse der zusammengesetzten Abbildung

$$f \circ \alpha : \ (S^n, s_0) \longrightarrow (Y, y_0) \ , \quad (S^n, s_0) \xrightarrow{\ \alpha\ } (X, x_0) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_0) \ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies wohldefiniert ist, d.h., daß die Klasse $[f \circ \alpha]$ nur abhängt von der Klasse $[\alpha]$, nicht von dem Repräsentanten α selbst.

Ist speziell A ein Unterraum von X und $x_0 \in A$, dann induziert die Inklusionsabbildung $A \to X$ auch Abbildungen $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$. Wenn diese Abbildungen keine Isomorphismen sind, was ja vermutlich im allgemeinen der Fall sein wird, so hätte man gern eine Art von 'Maß' dafür, wieweit die Abbildungen davon abweichen, Isomorphismen zu sein. Interessanterweise nun ist es möglich, genau so eine Art Maß wirklich zu bauen.

Dazu definiert man die *relativen Homotopiegruppen* $\pi_n(X, A, x_0)$. Diese sind gerade so gemacht, wie sich in Kürze herausstellen wird, daß sie (bei wegzusammenhängendem X) *genau dann* sämtlich trivial sind, *wenn* die Abbildungen $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ sämtlich Isomorphismen sind.

DEFINITION. $\pi_n(X, A, x_0)$ ist die *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen*

$$\alpha : \ \left(D^n, S^{n-1}, s_0\right) \longrightarrow (X, A, x_0) \ .$$

Im Detail: D^n ist der n-dimensionale Ball, S^{n-1} ist die Randsphäre von D^n, $s_0 \in S^{n-1}$ ist der Basispunkt (die vorausgesetzte Existenz des Basispunktes erzwingt, daß $S^{n-1} \neq \emptyset$, also $n \geq 1$). α ist eine Abbildung $D^n \to X$, die zwei Bedingungen erfüllt, nämlich $\alpha\left(S^{n-1}\right) \subset A$ und $\alpha(s_0) = x_0$. Der Begriff *Homotopieklassen* bezieht sich auf Abbildungen eben dieses Typs: d.h., als *Homotopie* bezeichnen wir hier eine stetige Familie von Abbildungen α_t, $t \in [0,1]$, mit $\alpha_t\left(S^{n-1}\right) \subset A$ und $\alpha_t(s_0) = x_0$ für alle t.

Die Menge $\pi_n(X,A,x_0)$ hat ein ausgezeichnetes Element (nämlich die Klasse der trivialen Abbildung $D^n \to x_0$), und es gilt wiederum die Merkregel, daß mit wachsendem Index n die Struktur immer besser wird: $\pi_n(X,A,x_0)$ ist definiert für $n \geq 1$, es hat eine Gruppenstruktur für $n \geq 2$ (wie wir uns später im Detail überlegen werden), und für $n \geq 3$ ist diese Gruppenstruktur sogar abelsch.

Die Definition von $\pi_n(X,A,x_0)$ ist 'natürlich' im technischen Sinn, d.h., eine Abbildung $(X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ (eine Abbildung $X \to Y$ mit $A \to B$ und $x_0 \to y_0$) induziert Abbildungen

$$\pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_n(Y,B,y_0)$$

wie es sich gehört.

Speziell hat man Abbildungen $\pi_n(X,\{x_0\},x_0) \to \pi_n(X,A,x_0)$. Diese sind interessant wegen

Satz. *Es gilt* $\pi_n\,(X,\{x_0\},x_0) \;\approx\; \pi_n(X,x_0)$ *für jedes* $n \geq 1$.

Beweis. Klar, denn die Abbildungen $\big(D^n,S^{n-1},s_0\big) \to (X,\{x_0\},x_0)$ sind in 1:1 Beziehung zu den Abbildungen des Quotientenraumes $\big(D^n/S^{n-1},s_0\big) \to (X,x_0)$; diese 1:1 Beziehung respektiert *Homotopie*, und $D^n/S^{n-1} \approx S^n$. □

Man hat also insgesamt eine natürliche Abbildung

$$\pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0)\ .$$

Man hat auch eine natürliche Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X,A,x_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A,x_0) \\[4pt] \big(\,\alpha\colon\,(D^n,S^{n-1},s_0) \to (X,A,x_0)\,\big) & \longmapsto & \big(\,\alpha\,|\,S^{n-1}\colon\,(S^{n-1},s_0) \to (A,x_0)\,\big)\ . \end{array}$$

Zusammen mit den Abbildungen $\pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)$ bekommt man so die *lange Folge der Homotopiegruppen* von (X,A,x_0),

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \cdots$$

Die Folge endet mit

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_0(A,x_0) \longrightarrow \pi_0(X,x_0)\ .$$

Die letzten drei Terme hier sind keine Gruppen, sondern nur punktierte Mengen. Das soll uns aber nicht weiter stören.

Wie früher schon angekündigt wurde, so messen die relativen Homotopiegruppen, wie weit die Abbildungen $\pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)$ von Isomorphismen abweichen. Dies können wir jetzt präzisieren in einer nunmehr einzuführenden Sprechweise: Die lange Folge der Homotopiegruppen ist eine *exakte Folge* im Sinne der folgenden Definition.

Definition. Sei $g : L \to M$ eine Abbildung von punktierten Mengen, wo M den Basispunkt m_0 hat. Das Urbild $g^{-1}(m_0)$ wird als der *Kern* der Abbildung g bezeichnet. Sei

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$$

eine drei-Term-Folge von Abbildungen von punktierten Mengen. Die Folge heißt *exakt* (oder genauer auch: *exakt an der Stelle* L), wenn gilt

$$\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g) .$$

Eine lange Folge von punktierten Mengen

$$\cdots \longrightarrow L_{m+2} \longrightarrow L_{m+1} \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt* oder heißt eine *exakte Folge* wenn gilt, daß jede der drei-Term-Folgen $L_{n+1} \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1}$ exakt ist.

Der Begriff der exakten Folge ist absolut fundamental. Man muß sich damit vertraut machen.

Beispiele. (a) Sei $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} \{*\}$ exakt, wo $\{*\}$ eine einpunktige Menge bezeichnet. In diesem Fall ist $\mathrm{Kern}(g) = L$. Die Beziehung $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ besagt also in dem Fall, daß die Abbildung f *surjektiv* ist.

(b) Sei $\{*\} \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ eine exakte Folge von Gruppen. (Die Abbildungen seien Gruppenhomomorphismen, und die Einselemente seien als die ausgezeichnete Elemente angesehen). Die Beziehung $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ besagt in dem Fall, daß g trivialen (= einelementigen) Kern hat. Da g ein Gruppenhomomorphismus ist, ist dies äquivalent dazu, daß g *injektiv* ist.

Zur weiteren Illustration des Begriffs dient der folgende Satz.

Satz. *Sei X wegzusammenhängender Raum. Sei A Unterraum von X. Sei $x_0 \in A$. Es sind folgende beiden Aussagen zueinander äquivalent:*

(i) $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$, *für* $n = 1, 2, \ldots$

(ii) *Die Abbildung* $i_* \colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *ist ein Isomorphismus für alle* n.

Beweis. Im Vorgriff auf noch zu behandelnde Dinge benutzen wir:

(1) *Die Exaktheit der langen Folge*

(2) *Die algebraische Struktur von* $\pi_n(\ldots)$

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Beispiel (a) angewandt auf die Teilfolge

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$$

ergibt die Surjektivität von i_* (für $n \geq 1$). Beispiel (b) angewandt auf die Folge von Gruppen (für $n \geq 1$)

$$\{*\} = \pi_{n+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0)$$

ergibt die Injektivität von i_* (für $n \geq 1$).

Der Fall $n = 0$ ist eine (triviale) Ausnahme. Nämlich nach Voraussetzung ist $\pi_0(X, x_0) = \{*\}$, deshalb

$$\begin{aligned}\pi_0(A, x_0) &= \text{Kern}\,(\ \pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)\ ) \\ &= \text{Bild}\,(\ \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_0(A, x_0)\ ) \ = \ \{*\}\ ,\end{aligned}$$

also ist $\pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)$ auch in diesem Fall ein Isomorphismus.

“ (ii) $\Rightarrow$ (i) ” Wegen der Injektivität von i_* ist

$$\text{Bild}\,(\ \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)\ ) \ = \ \text{Kern}\,(\ \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0)\ ) \ = \ \{*\}\ .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi_n(X, A, x_0) &= \text{Kern}\,(\ \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)\ ) \\ &= \text{Bild}\,(\ \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)\ )\end{aligned}$$

d.h., $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ ist surjektiv.

Wegen der Surjektivität von i_* gilt andererseits

$$\begin{aligned}\pi_n(X, x_0) &= \text{Bild}\,(\ \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)\ ) \\ &= \text{Kern}\,(\ \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)\ )\end{aligned}$$

Folglich ist Bild $(\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0))$ trivial und damit (wegen der vorher nachgewiesenen Surjektivität) auch $\pi_n(X, A, x_0)$ selbst trivial. $\square$

Bemerkung. Tatsächlich liefert der vorstehende Beweis auch einen etwas allgemeineren Sachverhalt: *In der Situation des Satzes* (X wegzusammenhängend, A Unterraum von X , $x_0 \in A$) *sind zueinander äquivalent*:

(i) $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$, *für* $n = 1, 2, \ldots, m$.

(ii) $i_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *ist isomorph für* $n < m$ *und ist surjektiv für* $n = m$.

Dies ist insbesondere deshalb interessant, als die Aussage (i) äquivalent ist dazu, daß (X, A) m-zusammenhängend ist:

Satz. *Sei* X *wegzusammenhängender Raum. Sei* A *Unterraum von* X . *Sei* $x_0 \in A$. *Es sind äquivalent*:

(i) $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$, *für alle* $n = 1, 2, \ldots, m$

(ii) (X, A) *ist* m*-zusammenhängend.*

Beweis. Für das folgende Argument dürfen wir zusätzlich annehmen, daß der Raum A wegzusammenhängend ist. Denn zu vorgegebenem $a \in A$ gibt es eine Abbildung

$$\big(D^1, \partial D^1\big) \longrightarrow (X, A) \ \text{ mit } \ \text{Bild}\,\big(\partial D^1\big) \ = \ \{x_0, a\}\ ,$$

weil X wegzusammenhängend ist. Wenn wir die Aussage (i) als gegeben annehmen, so folgt, daß diese Abbildung deformierbar ist (in spezieller Weise!) in eine triviale Abbildung; wenn wir die Aussage (ii) als gegeben annehmen, so folgt, daß die Abbildung deformierbar ist (relativ Rand) in eine Abbildung mit Bild in A . In jedem Falle folgt also, daß a mit x_0 durch einen Weg in A verbindbar ist. Ein Weg von x_0 zu x_1 in A nun induziert einen Isomorphismus

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X, A, x_1)$$

nach einem einfachen Argument, das wir später (in Zusammenhang mit dem Kompositionsgesetz) zur Kenntnis nehmen werden. Die Aussage " $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$ " hängt also nicht von dem gewählten Basispunkt x_0 ab. Der Satz folgt damit aus dem folgenden Hilfssatz (den wir später auch noch benötigen werden, um die *Exaktheit* der langen Folge nachzuweisen).

Hilfssatz. *Gegeben sei* $\alpha\colon (D^n, \partial D^n) \to (X, A)$, *mit* $\alpha(s_0) = x_0$. *Es sind äquivalent*:
(i) $[\alpha] =$ *Klasse der trivialen Abbildung*
(ii) *Es gibt eine Homotopie, relativ* ∂D^n , *von* α *zu einer Abbildung mit Bild in* A .

Beweis. " (i) $\Rightarrow$ (ii) ". Eine Homotopie von der trivialen Abbildung zu der Abbildung α ist eine Abbildung

$$F : D^n \times [0,1] \longrightarrow X$$

mit den Eigenschaften $F(D^n \times 0) = x_0$, $F \,|\, D^n \times 1 = \alpha$, und

$$F(s_0, t) = x_0 \ \text{ für alle } \ t \in [0,1] \ , \quad \text{und} \quad F(\,\partial D^n \times [0,1]\,) \subset A \ .$$

Es wird nun genügen, zu zeigen, daß α homotop ist, relativ zu ∂D^n, zu einer zusammengesetzten Abbildung α' , der Art

$$D^n \xrightarrow{\approx} D^n \times 0 \cup_{\partial D^n \times 0} \partial D^n \times [0,1] \xrightarrow{F\,|\,—} A$$

(wo die Abbildung " $F \,|\, —$ " eine Einschränkung von F bezeichnet). Dazu konstruieren wir explizit eine solche Homotopie H von α zu α' . Die Homotopie H wird definiert als die Komposition der Abbildung F (die ursprüngliche Homotopie) mit einer Abbildung $G\colon D^n \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$, die jetzt angegeben werden soll.

Die Konstruktion hat zu tun mit derjenigen, die im Nachweis der HEE für das Paar $(D^n, \partial D^n)$ verwendet wurde. Wie dort betrachten wir $D^n \times [0,1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Die gewünschte Selbst-Abbildung G des Unterraumes $D^n \times [0,1]$ wird definiert mit Hilfe der Schar von Geraden durch den Punkt $(0, 2)$, $0 \in \mathbb{R}^n$, $2 \in \mathbb{R}^1$.

Kurz gesagt, eine "vertikale Strecke" in $D^n \times [0,1]$ soll durch G abgebildet werden auf den Durchschnitt von $D^n \times [0,1]$ mit einer Geraden aus der Schar.

Im Detail: Ist $x \in D^n$, so gibt es genau eine Gerade der Schar, die durch den Punkt $(x, 1)$ geht. Nach Definition bildet G nun die Strecke $\{x\} \times [0,1]$ linear (oder besser vielleicht, 'affin') ab auf den Durchschnitt der fraglichen Geraden mit $D^n \times [0,1]$. Dieser Durchschnitt ist entweder selbst eine Strecke (wenn $x \in \overset{\circ}{D}{}^n$) oder er ist ein einziger Punkt (wenn $x \in \partial D^n$). Es ist klar (oder?), daß G eine stetige Abbildung ist; und daß sie auch die folgenden Eigenschaften hat.

(1) Die Einschränkung auf $\partial D^n \times [0,1]$ bildet alle "vertikalen Strecken" auf Punkte ab. Es folgt, daß die Homotopie $H = F \circ G$ auf dem Rand ∂D^n konstant ist.

(2) Die Einschränkung auf $D^n \times 1$ ist die identische Abbildung. Es folgt, daß H eine Homotopie ist, die mit α 'aufhört'.

(3) Die Einschränkung auf $D^n \times 0$ ist eine topologische Äquivalenz

$$D^n \times 0 \longrightarrow D^n \times 0 \cup_{\partial D^n \times 0} \partial D^n \times [0,1]$$

Es folgt, daß H eine Homotopie ist, die mit dem obigen α' 'anfängt'.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Es genügt zu zeigen, eine Abbildung $(D^n, s_0) \to (A, x_0)$ repräsentiert das triviale Element von $\pi_n(X, A, x_0)$. Klar, denn die verlangte Deformation ist induziert von einer Deformationsretraktion von D^n zu s_0. □

SATZ. *Die Folge der Homotopiegruppen*

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow$$

ist eine lange exakte Folge.

BEWEIS. Wir haben drei Fälle nachzuweisen, von denen jeder aus zwei Teilaussagen besteht, nämlich

$$\text{Bild}(?) \subset \text{Kern}(??) \quad \text{und} \quad \text{Bild}(?) \supset \text{Kern}(??)\ .$$

Exaktheit von $\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0)$ $(n \geq 1)$

Sei $\alpha : (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$ Repräsentant eines Elements $[\alpha]$ von $\pi_n(X, x_0)$. Wir müssen zeigen:

$$[\alpha] \in \text{Bild}(i) \quad \Rightarrow \text{ (bzw. '} \Leftarrow \text{')} \quad [\alpha] \in \text{Kern}(j)$$

"$\Rightarrow$" $[\alpha] \in \text{Bild}(i)$ heißt, α ist homotop (rel. ∂D^n) zu einer Abbildung

$$\alpha' : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (A, x_0)\ .$$

Aber als Abbildung $(D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, x_0)$ aufgefaßt, repräsentiert α' das triviale Element von $\pi_n(X, A, x_0)$ (siehe obigen Hilfssatz).

"$\Leftarrow$" Wenn $\alpha : (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$, aufgefaßt als Repräsentant eines Elements von $\pi_n(X, A, x_0)$, das triviale Element repräsentiert, dann gibt es nach dem Hilfssatz eine Homotopie, relativ ∂D^n, von α zu einer Abbildung mit Bild in A.

Exaktheit von $\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0)$

Sei $\alpha \colon (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) α ist nullhomotop relativ s_0

(b) α läßt sich erweitern zu einer Abbildung von D^{n+1}.

Wir haben dies früher zur Kenntnis genommen in einer Formulierung ohne Basispunkte. Mit Basispunkten ist es auch nicht schwieriger:

(a) $\Rightarrow$ (b) weil $S^n \times [0,1] \,/\, S^n \times 1 \;\approx\; D^{n+1}$

(b) $\Rightarrow$ (a) weil s_0 Deformationsretrakt von D^{n+1} ist.

Speziell für Abbildungen $\alpha\colon (S^n, s_0) \to (A, x_0)$ ist Aussage (a) gleichbedeutend mit $[\alpha] \in \mathrm{Kern}(i)$, und Aussage (b) ist gleichbedeutend mit $[\alpha] \in \mathrm{Bild}(p)$. Es folgt, daß $\mathrm{Kern}(i) = \mathrm{Bild}(p)$.

Exaktheit von $\pi_{n+1}(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0)$

Sei $[\alpha] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, sei $\alpha\colon (D^{n+1}, \partial D^{n+1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ ein Repräsentant von $[\alpha]$. Die Aussage "$[\alpha] \in \mathrm{Bild}(j)$" ist gleichbedeutend damit, daß die Abbildung α homotop ist zu einer Abbildung α' mit $\alpha'(\partial D^{n+1}) = x_0$. Daraus folgt $p[\alpha] = p[\alpha'] = [\alpha' \,|\, \partial D^{n+1}]$ ist trivial.

Umgekehrt, $p[\alpha]$ trivial heißt, es gibt eine Homotopie, relativ s_0, von $\alpha \,|\, \partial D^{n+1}$ zur trivialen Abbildung. Nach der HEE von $(D^{n+1}, \partial D^{n+1})$ folgt, es gibt eine Homotopie von α zu α'', die diese Homotopie erweitert. α'' hat dann die Eigenschaft $\alpha''(\partial D^{n+1}) = x_0$, also $[\alpha] = [\alpha''] \in \mathrm{Bild}(j)$. □

Wir wollen nun die *Gruppenstruktur* auf der Menge $\pi_n(X, A, x_0)$ beschreiben (dazu müssen wir annehmen $n \geq 1$ und, wenn der Unterraum A nicht nur aus dem Basispunkt x_0 besteht, sogar $n \geq 2$).

Wir geben zunächst eine Beschreibung im Rahmen unserer bisher benutzten Definition von $\pi_n(X, A, x_0)$; dabei beschränken wir uns auf den absoluten Fall (der Fall, wo der Unterraum A eigentlich gar nicht da ist; also nur aus dem Basispunkt besteht).

Bezeichne $S^n \vee S^n$ den Raum, der durch das "Verkleben zweier n-Sphären an ihren Basispunkten" entsteht (d.h., der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung der beiden Sphären, der dadurch entsteht, daß die beiden Punkte identifiziert werden). Die Abbildungen

$$\alpha\colon\ (S^n \vee S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

sind dann in 1:1 Beziehung zu den Paaren von Abbildungen

$$\alpha_1\colon (S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)\ , \qquad \alpha_2\colon (S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)\ ;$$

dabei ist z.B. α_1 durch α gegeben als die Komposition

$$(S^n, s_0) \xrightarrow{\text{erste Inklusion}} (S^n \vee S^n, s_0) \xrightarrow{\quad\alpha\quad} (X, x_0)\ .$$

Aus α (oder was dasselbe ist, aus dem Paar (α_1, α_2)) gewinnt man eine neue Abbildung, die mit $\alpha_1 + \alpha_2$ bezeichnet werden soll, dadurch, daß man mit einer ganz bestimmten Abbildung $p\colon\ S^n \to S^n \vee S^n$ zusammensetzt. Nämlich $S^n \vee S^n$ kann identifiziert werden mit dem Quotientenraum $S^n/\,\text{Äquator}$ (vorausgesetzt, $n \geq 1$); für p nimmt man die Quotientenabbildung

$$S^n \longrightarrow S^n/\,\text{Äquator} \ \approx\ S^n \vee S^n\ ;$$

und man definiert dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 := \alpha \circ p\ .$$

Diese Komposition ist mit dem Übergang zu Homotopieklassen verträglich (was wir hier nicht weiter nachprüfen), deshalb kann man schließlich auch definieren

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] \ := \ [\alpha_1 + \alpha_2] \ .$$

Es ist eine nützliche Übung, sich im Rahmen dieser Beschreibung zumindest folgendes klarzumachen: (1) das triviale Element ist neutrales Element für das Kompositionsgesetz, (2) inverse Elemente existieren, (3) es gilt das Assoziativgesetz für die Komposition; denn folgendes Diagramm kommutiert bis auf Homotopie (d.h., die beiden zusammengesetzten Abbildungen in dem Diagramm, von oben links nach unten rechts, sind zueinander homotop)

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & S^n \vee S^n \arrow[d, "\mathrm{Id} \vee p"] \\ S^n \vee S^n \arrow[r, "p \vee \mathrm{Id}"'] & S^n \vee S^n \vee S^n \end{tikzcd}$$

Wir kommen nun zu der zweiten Beschreibung für das Kompositionsgesetz. Dazu ersetzen wir in der Definition von $\pi_n(X, A, x_0)$ den n-dimensionalen Ball durch den n-dimensionalen Würfel. Der Grund dafür ist der, daß uns die Produktstruktur des Würfels ein explizites Hantieren mit Koordinaten gestattet. So werden wir z.B. in der Lage sein, eine Formel hinzuschreiben, bei der eine einzige der Koordinaten manipuliert wird, während die anderen Koordinaten alle in Ruhe gelassen werden.

Es bezeichne I^n den n-dimensionalen Würfel

$$I^n \ = \ \{ \ (t_1, \ldots, t_n) \ \mid \ t_i \in [0,1] \ \} \ .$$

Etwas mißbräuchlich werden wir die durch $t_n = 0$ gegebenen Seite von I^n mit I^{n-1} bezeichnen; mit J^{n-1} bezeichnen wir die Vereinigung der restlichen Seiten. Es ist

$$I^{n-1} \cup J^{n-1} \ = \ \partial I^n \quad \text{und} \quad I^{n-1} \cap J^{n-1} \ = \ \partial I^{n-1} \ .$$

Die Situation in Bezug auf diese beiden Unterräume ist, was den topologischen Typ angeht, nicht so unsymmetrisch wie das auf den ersten Blick aussieht; so gibt es z.B. eine topologische Äquivalenz von I^n auf den n-Ball D^n, bei der J^{n-1} auf die nördliche Halbkugel in S^{n-1} abgebildet wird, und I^{n-1} auf die südliche.

Unsere neue Definition nun sagt, daß $\pi_n(X, A, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen

$$\left(I^n, \partial I^n, J^{n-1}\right) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft (da J^{n-1} notwendigerweise trivial abgebildet wird), die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen

$$\left(I^n/J^{n-1},\ \partial I^n/J^{n-1},\ J^{n-1}/J^{n-1}\right) \ \longrightarrow \ (X, A, x_0) \ .$$

Die neue Definition ist äquivalent zu der früheren; denn von dem Quotientenraum I^n/J^{n-1} gibt es eine topologische Äquivalenz zu D^n ; und dabei geht $\partial I^n/J^{n-1}$ in ∂D^n über (und J^{n-1}/J^{n-1} in den Basispunkt s_0) .

Seien $[f]$, $[g] \in \pi_n(X,A,x_0)$. Wir *definieren* $[f]+[g] := [\,f{+}g\,]$, wo

$$(f{+}g)\,(t_1,\dots,t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\;,\,t_2,\dots,t_n) & ;\quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\,t_2,\dots,t_n) & ;\quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\;. \end{cases}$$

Die Formel für die Abbildung $f{+}g$ ist sinnvoll (d.h., auch wohldefiniert für $t_1 = \frac{1}{2}$), wenn entweder $n \ge 2$ oder wenn $n \ge 1$ und $A = \{x_0\}$; diese Komposition von Abbildungen ist verträglich mit 'Homotopie' (wir verzichten hier auf den Nachweis), deshalb induziert sie auch eine Komposition auf der Menge der Homotopieklassen (wie oben in der Notation schon behauptet).

Sobald es überhaupt definiert ist, ist das Kompositionsgesetz assoziativ *bis auf Homotopie*; d.h., sind f , g und h repräsentierende Abbildungen, dann ist

$$(f+g)+h \;\simeq\; f+(g+h)\;.$$

Um dies einzusehen, schreibt man eine ganz bestimmte Homotopie hin; diese besteht aus einer Manipulation der t_1-Koordinate, die Formel für die Manipulation ist schon bekannt von der Behandlung der Fundamentalgruppe. Ähnlich sieht man ein, daß die triviale Abbildung das neutrale Element repräsentiert, und daß Inverse existieren.

Mit der Verwendung des ' + ' Zeichens soll im übrigen hier natürlich nicht behauptet werden, daß das Kompositionsgesetz immer kommutativ ist. Tatsächlich ist aber das Kompositionsgesetz kommutativ, wenn entweder $n \ge 3$ oder $n \ge 2$ und $A = \{x_0\}$.

Das hängt damit zusammen, daß in diesem Fall *zwei* Koordinaten zur Verfügung stehen, um das Kompositionsgesetz zu definieren, nämlich die t_1-Koordinate (wie oben) und zusätzlich auch die t_2-Koordinate (analog). Wir überlegen uns zunächst, daß diese beiden Kompositionsgesetze, nämlich

$$(f+_1 g)\,(t_1,\dots,t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\;,\,t_2,\dots,t_n) & ;\quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\,t_2,\dots,t_n) & ;\quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

und

$$(f+_2 g)\,(t_1,\dots,t_n) \;=\; \begin{cases} f(t_1,\;2t_2\;,\,t_3,\dots,t_n) & ;\quad 0 \le t_2 \le 1 \\ g(t_1,\;2t_2{-}1,\,t_3,\dots,t_n) & ;\quad \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \end{cases}$$

bis auf Homotopie übereinstimmen. Der Vergleich geht am bequemsten, wenn wir noch ein weiteres Kompositionsgesetz betrachten,

$$(f\widehat{+}g)\,(t_1,\dots,t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\;,\;2t_2\;,\,t_3\dots,t_n) & ;\quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2}\,,\quad 0 \le t_2 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\,2t_2{-}1,\,t_3\dots,t_n) & ;\quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\,,\quad \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \\ x_0 & ;\quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \\ x_0 & ;\quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\,,\quad 0 \le t_2 \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eine Homotopie von $f +_1 g$ zu $f \widehat{+} g$ ist z.B. gegeben durch

$$F(t_1, \dots, t_n, t) \;=\; \begin{cases} f(\;2t_1\;,\;\min(t_2 + t\,t_2,\,1)\;,\,t_3, \dots, t_n) & ;\;\; 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2t_1{-}1, \max(t_2 + t\,(t_2{-}1),\,0),\,t_3, \dots, t_n) & ;\;\; \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

und eine Homotopie zwischen $f +_2 g$ und $f \widehat{+} g$ könnte man ähnlich angeben.

Satz. *Wenn zwei Koordinaten für das Kompositionsgesetz zur Verfügung stehen* (wenn also entweder $n \ge 3$ oder $n \ge 2$ und $A = \{x_0\}$), *dann ist* $\pi_n(X, A, x_0)$ *eine abelsche Gruppe.*

Beweis. Die verlangte Homotopie von $f+g$ zu $g+f$ kann man zusammensetzen aus Homotopien des gerade beschriebenen Typs. Wie das im einzelnen geht, werden wir am besten verstehen, wenn wir unser Augenmerk auf die beiden relevanten Koordinaten richten, die t_1-Koordinate und die t_2-Koordinate.

Das Quadrat, das für diese beiden Koordinaten zur Verfügung steht, ist jeweils in bestimmter Weise eingeteilt (in zwei Hälften, bzw. in vier Teilquadrate):

Für die Definition von $f +_1 g$: f lebt in der linken Hälfte, g in der rechten.

Für die Definition von $f +_2 g$: f lebt in der unteren Hälfte, g in der oberen.

Für die Definition von $f \widehat{+} g$: f lebt in der linken unteren Ecke, g in der rechten oberen.

Zusätzlich betrachtet man nun ein weiteres Kompositionsgesetz $f \widetilde{+} g$, das ganz ähnlich wie $f \widehat{+} g$ definiert ist, nur daß, schematisch gesprochen, jetzt f in der rechten unteren Ecke lebt, und g in der linken oberen.

Man kann dann vier Homotopien des oben beschriebenen Typs zusammensetzen, schematisch:

$$f +_1 g \quad\sim\quad f \widehat{+} g \quad\sim\quad f +_2 g \quad\sim\quad f \widetilde{+} g \quad\sim\quad g +_1 f \qquad \square$$

Es gibt auch eine 'rein algebraische' Version des gerade gegebenen Beweises. Das ist das folgende Lemma (aus dem der Satz folgt).

Lemma. *Die Menge M sei mit zwei Gruppenstrukturen '$+$' und '$*$' versehen. Diese beiden Gruppenstrukturen sollen dasselbe Eins-Element haben, und sie sollen kompatibel sein in dem Sinne, daß für je vier Elemente a, b, c, d von M immer gilt*

$$(a+b) * (c+d) \quad=\quad (a*c) + (b*d) \;\;.$$

Dann sind die beiden Gruppenstrukturen zueinander gleich, und abelsch.

Beweis. $\quad a * b \;=\; (a+1) * (1+b) \;=\; (a*1) + (1*b) \;=\; a+b$

und $\quad a * b \;=\; (1+a) * (b+1) \;=\; (1*b) + (a*1) \;=\; b+a\;.$ $\square$

Welche Rolle spielt der Basispunkt für die Homotopiegruppen? Bei nicht-zusammenhängenden Räumen (Beispiel: $S^1 \mathbin{\dot\cup} S^2$) offenbar eine sehr große. Im Falle von weg-zusammenhängenden Räumen sind zwar, wie sich herausstellt, die Homotopiegruppen zu verschiedenen Basispunkten zueinander isomorph. Aber auch da muß man aufpassen. Wenn man etwa darauf Wert legt, einen *bestimmten* Isomorphismus zu bekommen, ist es nötig, weitere Daten zu fixieren; nämlich einen Weg, der die beiden fraglichen Punkte verbindet. Der Isomorphismus wird im allgemeinen von der Wahl des Weges wirklich abhängen (jedenfalls von seiner Homotopieklasse, relativ zu Anfangs- und Endpunkt). Genauer sagt all dieses der folgende Satz.

Satz. *Sei X ein Raum und $A \subset X$ ein Unterraum. Seien $x_1, x_2 \in A$ zwei Basispunkte. Sei w ein Weg in A, der diese beiden Punkte verbindet, $w: [1,2] \to A$, $w(1) = x_1$, $w(2) = x_2$. Dann gilt: w induziert einen Isomorphismus*

$$w_*\colon\ \pi_n(A, x_2) \longrightarrow \pi_n(A, x_1)\ ;$$

und ähnlich auch $w_*: \pi_n(X, x_2) \to \pi_n(X, x_1)$ und $w_*: \pi_n(X, A, x_2) \to \pi_n(X, A, x_1)$. w_* hängt nur ab von der Homotopieklasse (Homotopie relativ Endpunkten) *von w.*

w_* ist verträglich mit den Abbildungen der langen exakten Folge: das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A,x_2) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "w_*"] & \pi_n(A,x_2) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "w_*"] & \pi_n(X,x_2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "w_*"] & \pi_n(X,A,x_2) \arrow[r] \arrow[d, "w_*"] & {} \\
\arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A,x_1) \arrow[r, "p"] & \pi_n(A,x_1) \arrow[r, "i"] & \pi_n(X,x_1) \arrow[r, "j"] & \pi_n(X,A,x_1) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Ist w ein trivialer Weg, so ist w_* eine identische Abbildung. Ist w wie oben, und ist v ein Weg, der mit w zusammensetzbar ist, $v\colon [0,1] \to A$, $v(0) = x_0$, $v(1) = x_1$, so gilt für den zusammengesetzten Weg vw von x_0 zu x_2, daß $(vw)_* = v_* w_*$.

Beweis. Sei $\alpha\colon (I^n, \partial I^n) \to (A, x_2)$ Repräsentant eines Elementes $[\alpha] \in \pi_n(A, x_2)$. Dann ist, per Definition, $w_*[\alpha] \in \pi_n(A, x_1)$ das Element, das repräsentiert wird von der Abbildung α',

$$I^n \ \approx\ \partial I^n \times [1,2] \cup_{\partial I^n \times 2} I^n \xrightarrow{\ w\circ \mathrm{pr}\ \cup\ \alpha\ } A$$

(wo 'pr' die Projektion $\partial I^n \times [1,2] \to [1,2]$ bezeichnet). Die Homotopieklasse der Abbildung α' hängt nur ab von der Homotopieklasse von α und von der Homotopieklasse (relativ Endpunkten) des Weges w. Denn eine Deformation von α, bzw. von w, induziert eine Deformation von α', deren Träger der 'rechte' bzw. der 'linke' Teil des Definitionsbereiches $\partial I^n \times [1,2] \cup_{\partial I^n \times 2} I^n$ ist.

Im relativen Fall ist die Definition ähnlich. Wenn $\beta\colon (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_2)$ Repräsentant eines Elementes $[\beta] \in \pi_n(X, A, x_2)$ ist, dann wird $w_*[\beta]$ definiert als das Element von $\pi_n(X, A, x_1)$, das repräsentiert ist von der Abbildung

$$I^n \ \approx\ J^{n-1} \times [1,2] \cup_{J^{n-1} \times 2} I^n \xrightarrow{\ w\circ \mathrm{pr}\ \cup\ \beta\ } X\ .$$

Was die Eigenschaften von w_* angeht (bis auf die Bijektivität), so läuft jede von diesen darauf hinaus, daß man eine geeignete Homotopie angeben muß. Diese Homotopien sind von ähnlicher Art, wie wir sie schon bei Einführung der Homotopiegruppen kennengelernt haben (z.B. für die Assoziativität der Komposition). Natürlich sind die Einzelheiten hier anders. Trotzdem wollen wir diese Einzelheiten jetzt weglassen.

Die Bijektivität ist eine formale Folgerung aus den anderen Eigenschaften. Ist nämlich $\overline{w}$ der zu w inverse Weg, so folgt

$$w_*\overline{w}_* = (w\,\overline{w})_* = (\text{trivialer Weg } x_1)_* = \mathrm{Id}_{\pi_n(\ldots x_1)}$$

und, ebenso, $\overline{w}_* w_* = \mathrm{Id}_{\pi_n(\ldots x_2)}$. □

Ein Raum X heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und triviale Fundamentalgruppe hat. Es läuft auf dasselbe hinaus, zu sagen, daß je zwei Punkte x_1 und x_2 in X durch einen Weg verbindbar sind und daß dieser Weg eindeutig ist bis auf Homotopie.

Korollar. *Seien x_1 und x_2 Basispunkte in X . Wenn X einfach-zusammenhängend ist, dann sind $\pi_n(X,x_1)$ und $\pi_n(X,x_2)$ zueinander kanonisch isomorph* (d.h., isomorph in ganz bestimmter 'ausgezeichneter' Weise).

Denn nach dem Satz bekommt man einen Isomorphismus durch die Wahl eines Weges von x_1 zu x_2 . Andererseits ist dieser Weg eindeutig bis auf Homotopie, nach Voraussetzung über X , und damit ist auch der erhaltene Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Im einfach-zusammenhängenden Fall darf man also den Basispunkt schlicht vergessen und, abkürzend, $\pi_n(X)$ für die n-te Homotopiegruppe schreiben. Ähnlich darf man auch im relativen Fall die Notation für $\pi_n(X,A,x_1)$ vereinfachen, wenn der Unterraum A einfach-zusammenhängend ist.

Bemerkung. Im allgemeinen Fall, wenn X wegzusammenhängend aber nicht einfach-zusammenhängend ist, kann der Isomorphismus $w_*\colon \pi_n(X,x_2)\to\pi_n(X,x_1)$ durchaus von (der Homotopieklasse von) w abhängen. Speziell, wenn man $x_2=x_1$ nimmt, so erhält man auf diese Weise eine *Operation* der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_1)$ auf der Homotopiegruppe $\pi_n(X,x_1)$. Diese Operation kann hochgradig nicht-trivial sein.

Es gibt eine andere Möglichkeit, sich die Operation vorzustellen. Dazu nehmen wir an, daß der Raum X eine *universelle Überlagerung* $\widetilde{X}$ besitzt. In dem Fall kann man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ mit der Decktransformationengruppe von $\widetilde{X}$ über X identifizieren. Für $n\geq 2$ nun ist $\pi_n(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\xrightarrow{\approx}\pi_n(X,x_0)$ (für $\widetilde{x}_0$ über x_0), andererseits hängt $\pi_n(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ gar nicht von $\widetilde{x}_0$ ab, wie wir oben gesehen haben, da ja $\widetilde{X}$ einfach-zusammenhängend ist. Also operiert die Decktransformationengruppe auf $\pi_n(\widetilde{X})$ und damit auch auf $\pi_n(X,x_0)$. Durch Hinschreiben aller relevanten Daten kann man sich überlegen, daß diese Operation tatsächlich dieselbe ist wie die vorher diskutierte.

Für Abbildungen weg-zusammenhängender Räume wollen wir den Begriff "schwache Homotopie-Äquivalenz" definieren als "eine Abbildung, die Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen induziert". Dafür brauchen wir, daß diese Eigenschaft nicht von der Wahl eines Basispunktes abhängt. Das sagt das folgende Lemma.

LEMMA. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung, wo der Raum* X *als weg-zusammenhängend vorausgesetzt ist. Seien* $x_1, x_2 \in X$. *Wenn* $f_* : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(Y, f(x_1))$ *ein Isomorphismus ist, dann auch* $f_*\colon \pi_n(X, x_2) \to \pi_n(Y, f(x_2))$.

BEWEIS. Sei w ein Weg von x_1 zu x_2. Dann ist $f \circ w$ ein Weg von $f(x_1)$ zu $f(x_2)$. Es ergibt sich aus der Definition der Abbildungen w_* und $(f{\circ}w)_*$, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "w_*"'] & \pi_n(Y, f(x_1)) \arrow[d, "(f\circ w)_*"] \\
\pi_n(X, x_2) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_n(Y, f(x_2))
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Die vertikalen Pfeile in dem Diagramm sind Isomorphismen. Wenn also der obere horizontale Pfeil ein Isomorphismus ist, dann auch der untere. $\square$

DEFINITION. Eine Abbildung weg-zusammenhängender Räume, $f : X \to Y$, heißt eine *schwache Homotopie-Äquivalenz*, wenn für einen Basispunkt $x_1 \in X$ (und damit auch für jeden anderen) gilt: die Abbildung $f_* : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(Y, f(x_1))$ ist ein Isomorphismus, für alle n.

SATZ (Whitehead-Satz). *Seien* X *und* Y *weg-zusammenhängende CW-Komplexe, sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung. Wenn* f *schwache Homotopie-Äquivalenz ist, dann ist* f *schon eine Homotopie-Äquivalenz.*

BEWEIS. Dies ist jetzt nur eine formale Zusammenfassung früher gemachter Dinge. O.B.d.A. (zellulärer Approximations-Satz) ist f eine *zelluläre* Abbildung. In dem Fall ist der Abbildungs-Zylinder $Z(f)$ wieder ein CW-Komplex, und die Abbildung f läßt sich schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{\ j\ } Z(f) \xrightarrow{\ p\ } Y$$

wo j eine zelluläre Inklusion ist und p eine Homotopie-Äquivalenz. Aus der Voraussetzung, daß f schwache Homotopie-Äquivalenz ist, folgt jetzt, daß dasselbe auch für die Inklusion j gilt. Nun haben wir aber früher schon geklärt, daß j genau dann Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert, wenn die relativen Homotopiegruppen der Inklusion $X \subset Z(f)$ alle trivial sind; was wiederum dazu äquivalent ist , daß diese Inklusion n-zusammenhängend für alle n ist. Letzteres war die hinreichende Bedingung für den früher formulierten "Whitehead-Satz ohne Homotopiegruppen". $\square$

Vorgeschichte

Zwei wichtige Vokabeln in der algebraischen Topologie sind 'homotop' und 'homolog'. Beides sind griechische Mischworte. Das Wort 'homotop' bedeutet in etwa "ähnlich gelegen". Den Begriff zu diesem Wort haben wir kennengelernt, auch auf diesem Begriff fußende Konstruktionen wie Homotopiegruppen. (Es ist ziemlich sicher, daß das Wort 'homotop' gewählt wurde wegen seiner Ähnlichkeit mit dem Wort 'homolog', das ja um einiges älter ist.)

Das Wort 'homolog' bedeutet so etwas wie "von ähnlicher Gestalt". Sie erwarten jetzt sicher von mir, daß ich Ihnen den Begriff erkläre, den diese Vokabel bezeichnet. Ich muß Sie leider enttäuschen, denn eigentlich gibt es diesen Begriff gar nicht. Die einzige Stelle, wo das Wort 'homolog' wirklich in Gebrauch ist, ist ein technischer Punkt im Rahmen einer verhältnismäßig komplizierten Konstruktion, wo es eine gewisse Äquivalenzrelation bezeichnet, die sogenannte "Homologie von Ketten". Wie zu erwarten, handelt es sich bei dieser Konstruktion um die der 'Homologiegruppen'. Die Homologiegruppen sind historisch älter als die Homotopiegruppen. Das ist eigentlich ganz erstaunlich insofern, als ihre Konstruktion komplizierter ist — zumindest ist das so für meinen Geschmack, und auch wohl für den Ihrigen, sobald Sie die Konstruktion kennengelernt haben.

Ein Mathematiker vor 100 Jahren hätte aber möglicherweise anders darüber gedacht. Denn der Begriff 'homotop' ist zwar begrifflich nicht aufwendig, psychologisch aber sehr. Er setzt voraus, daß man mit dem Begriff der "stetigen Abbildung" schlechthin soweit vertraut ist, daß man sich zutraut, von der Gesamtheit aller stetigen Abbildungen zwischen zwei Räumen zu reden. Das ist historisch ziemlich neu. (So wurde etwa eine ähnliche Idee, die Einführung des Hilbert-Raumes durch Hilbert, von einigen Mathematikern als Skandal empfunden — einer der damaligen Kritiker meinte, dies sei "nicht Mathematik, sondern Theologie".)

Die Homologiegruppen wurden endgültig eingeführt von Poincaré vor 100 Jahren. Die Wurzeln des Begriffs sind aber noch um etliches älter. Zu der Zeit gab es noch gar nicht den Begriff des *topologischen Raumes*, wie wir ihn heute kennen. Die 'Räume', die damals betrachtet wurden, waren vom Standpunkt der Topologie von sehr speziellem Typ, nämlich *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* einerseits, und *Polyeder* andererseits.

Unter den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gab es speziell die *Riemann'schen Flächen*, die in der Funktionentheorie auftreten. Die Betrachtung dieser Objekte war ungeheuer fruchtbar für die Mathematik schlechthin. Sie sind eine der Hauptquellen für unseren heutigen Raumbegriff. Sie sind auch eine wichtige Quelle für die Betrachtung von Homologie. Das liegt an dem Cauchy'schen Satz über Kurvenintegrale holomorpher Funktionen (genauer: Differentialformen), ω, bezüglich 'glatter' Wege.

Der Cauchy'sche Satz sagt nämlich: Hinreichend dafür, daß das Kurvenintegral über einem geschlossenen Weg null ist, ist daß dieser geschlossene Weg "null-homolog" ist in dem Sinne, daß er den vollständigen Rand eines kompakten Gebietes im Definitionsbereich bildet.

Es sind solche geschlossenen Kurven besonders interessant, für die das Kurvenintegral *nicht* null ist, denn sie sind ja, nach dem Satz, gewissermaßen für die Struktur der Fläche charakteristisch. Man will sich deshalb einen Überblick über solche Kurven verschaffen.

Auf dem Hintergrund hiervon läßt sich einiges aus der Terminologie in Zusammenhang mit Homologie illustrieren.

Zunächst ist ja das Integral ein Funktional (mit Werten in $\mathbb{C}$). Deshalb ist das Kurvenintegral nicht nur für Wege erklärbar, $\int_v \omega$, sondern auch für *formale Linearkombinationen* von Wegen,

$$\int_{\sum a_i v_i} \omega \quad := \quad \sum a_i \int_{v_i} \omega \ .$$

Eine solche formale Linearkombination $\sum a_i v_i$ wird auch als eine *Kette* bezeichnet (genauser: eine 1-*Kette* — Wege sind 1-dimensionale Gebilde); das Integral ist nun ein lineares Funktional auf den 1-Ketten.

Eine *geschlossene Kette* (oder ein 'Zykel') ist eine Kette ohne Rand. Beispiele davon sind formale Linearkombinationen geschlossener Wege. Es gibt aber noch eine andere Art. Wir geben dafür ein besonders einfaches (wenn auch vielleicht in seiner Einfachheit untypisches) Beispiel. Seien v und w zwei Wege mit der Eigenschaft, daß der Anfangspunkt von v gleich dem Endpunkt von w ist und daß, umgekehrt, auch der Anfangspunkt von w gleich dem Endpunkt von v ist. In dem Fall wird die formale Summe der beiden Wege als eine *geschlossene* Kette betrachtet (da "die Ränder sich gegenseitig kürzen"). Das ist insofern sinnvoll, als ja gilt

$$\int_{v+w} \omega \ = \ \int_v \omega + \int_w \omega \ = \ \int_{v\,w} \omega$$

d.h. bezüglich der Integration verhält sich die formale Summe "$v+w$" genauso wie der geschlossene Weg $v\,w$, da sich die Beiträge von den Randpunkten gerade wegkürzen.

Damit das Integral $\int_w \omega$ erklärt ist, ist es selbstverständlich unerheblich, ob der Weg "nicht-singulär" ist (z.B. ob man davon ein Bild malen kann). Hieraus erklärt sich die etwas unglückliche Terminologie der *singulären* 1-*Kette*: eine formale Linearkombination von Wegen, die eben nicht notwendig nicht-singulär sind.

Eine Kette heißt *null-homolog*, wenn sie der Rand einer anderen Kette ist (von einer Dimension höher; z.B. eine 1-Kette ist (möglicherweise) Rand einer 2-Kette — der oben zitierte Cauchy'sche Satz ist dann i.w. die Aussage, daß bei dem Kurvenintegral über eine geschlossene 1-Kette sicherlich dann der Wert 0 herauskommt, wenn die Kette null-homolog ist). Zwei Ketten heißen *homolog*, wenn ihre Differenz null-homolog ist.

Die andere Quelle, die zur Entwicklung der Homologiegruppen führte (und die letztlich für uns wichtigere) ist das Studium von *Polyedern*. Ein berühmter Satz hier ist der sogenannte *Euler'sche Polyeder-Satz*.

In moderner Sprache formuliert lautet er so: Ein Polyeder P, dessen unterliegender topologischer Raum homöomorph zur 2-Sphäre ist, hat die *Eulersche Charakteristik* $\chi(P) = 2$, wobei

$$\chi(P) \ := \ \ \#(\text{Ecken}) \ - \ \#(\text{Kanten}) \ + \ \#(\text{Flächen}) \ ,$$

wenn $\#(\text{Dinge})$ die Anzahl der 'Dinge' bezeichnet. Dieser Satz wurde von Euler als experimentell gefundenes Faktum publiziert (ca. 1750) aber nicht von ihm bewiesen (er publizierte zwar einen Beweisversuch, von dem er aber später wieder abrückte). Der Satz war möglicherweise auch schon Descartes bekannt (gut 100 Jahre früher). Überzeugende Argumente für die Richtigkeit des Satzes wurden erst im vorigen Jahrhundert publiziert (beginnend mit Cauchy). Diese Argumente waren aber noch lange Gegenstand der Kontroverse. Dafür gab es zwei Gründe: erstens eine Unbekümmertheit um Details; und zweitens, was noch schwerer wiegt, eine Vagheit der verwendeten Begriffe. So ließen diese Begriffe etwa Interpretationen zu, für die der Satz einfach falsch wurde.

Daß diese Vagheit der Begriffe in der Natur der Sache liegt, ist klar, wenn man sich die Formulierung des Satzes genauer anschaut. Denn wie soll man die wichtige vorausgesetzte Eigenschaft des Polyeders P ("homöomorph zur 2-Sphäre") überhaupt formulieren, wenn man nicht über den Begriff des topologischen Raumes verfügt?

Im übrigen ist auch die oben gegebene Formulierung des Satzes noch nicht präzise: In der Definition von $\chi(P)$ ist etwa nicht klar, was mit $\#(\text{Flächen})$, also letztlich mit *Flächen* gemeint ist (dürfen z.B. Flächen sich schneiden? — wohl kaum!). Eine Möglichkeit, derartige Unklarheit ein für allemal auszuräumen (nicht die allerbeste, da etwas speziell) ist die, daß wir in einer gleich zu entwickelnden Sprache *definieren*: Ein Polyeder ist ein Unterraum eines euklidischen Raumes, der eine Struktur als endlicher *Simplizialkomplex* besitzt; und wo wir zudem diesen Simplizialkomplex auch noch als Teil der Daten ansehen wollen. Wir können in dem Fall die Euler'sche Charakteristik dann definieren als die Wechselsumme

$$\sum_i \ (-1)^i \ (\textit{Anzahl der Simplizes der Dimension } i) \ .$$

Simplizialkomplexe

Um zu definieren, was ein Simplizialkomplex sein soll, müssen wir zunächst sagen, was ein *Simplex* ist.

Seien $v_0, \ldots, v_n$ Punkte in einem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle dieser Punkte ist dann gegeben durch

$$\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n) \;=\; \{\, a_0\, v_0 + \ldots + a_n\, v_n \;\mid\; a_i \geq 0\,,\ \sum a_i = 1 \,\}\ .$$

Die $v_0, \ldots, v_n$ hier könnten *affin abhängig* sein (s.u.); den Fall wollen wir aber nicht. Wenn die $v_0, \ldots, v_n$ *affin unabhängig* sind, dann wird die konvexe Hülle $\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n)$ als das *affine Simplex*, *mit der Eckenmenge* $\{v_0, \ldots, v_n\}$, bezeichnet; wir reservieren dafür die Notation

$$\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)\ .$$

Das System $v_0, \ldots, v_n$ ist, nach Definition, *affin* unabhängig genau dann, wenn das System der Vektoren

$$v_1 - v_0\ ,\quad v_2 - v_0\ ,\quad \ldots\ ,\quad v_n - v_0$$

linear unabhängig ist (wobei die Rolle von v_0 keineswegs so ausgezeichnet ist, wie das auf den ersten Blick vielleicht scheinen mag). Die affine Unabhängigkeit der v_i impliziert (und ist sogar äquivalent dazu), daß die Darstellung als $\sum a_i\, v_i$ für die Punkte aus $\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n)$ *eindeutig* ist. Die Zahl n heißt die *Dimension* von dem Simplex. Sie ist um 1 weniger als die Anzahl der Ecken (wegen deren affiner Unabhängigkeit), und sie ist gleich der Dimension des von den Ecken aufgespannten affinen Unterraumes. Das Simplex $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$ wird auch als ein *n-Simplex* bezeichnet.

Beispiele.

0-*Simplex*	—	*Punkt*
1-*Simplex*	—	*Strecke*
2-*Simplex*	—	*Dreieck*
3-*Simplex*	—	*Tetraeder*

Sind die Punkte $v_0, \ldots, v_n$ affin unabhängig, dann ist auch jede Teilmenge dieser Punkte affin unabhängig. Ein Simplex, das von einer solchen Teilmenge aufgespannt wird, heißt eine *Seite* von $\mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n)$. Das affine n-Simplex $\mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n)$ hat $\binom{n+1}{k+1}$ k-dimensionale Seiten, also

$n+1$	0-Seiten	(Ecken)
$\frac{n(n+1)}{2}$	1-Seiten	(Kanten)
	$\vdots$	
$n+1$	$(n-1)$-Seiten	$\mathrm{Simp}(v_0,\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_n)$ (weglassen von v_j)
1	n-Seite	(das Simplex selbst)

DEFINITION. Ein *endlicher Simplizialkomplex* in $\mathbb{R}^N$ ist ein Unterraum, der gegeben ist als Vereinigung einer endlichen Menge von affinen Simplizes; wobei diese endliche Menge von affinen Simplices den folgenden beiden Bedingungen genügt:

(i) Die Seiten eines jeden Simplexes der Menge sind ebenfalls in der Menge.

(ii) Der Durchschnitt von je zweien der Simplizes (sofern er nicht leer ist) ist wieder ein Simplex; *und* er ist Seite von jedem der beiden.

Offensichtlich kann ein Simplizialkomplex aufgefaßt werden als ein CW-Komplex speziellen Typs: Die Zellen entsprechen den Simplizes; das n-Skelett ist gegeben durch die Vereinigung aller Simplizes der Dimension $\leq n$, und für jedes $(n+1)$-Simplex ist die Anhefte-Abbildung gegeben durch einen Isomorphismus vom Rand dieses $(n+1)$-Simplexes auf einen Unterkomplex vom n-Skelett.

Andererseits kann ein Simplizialkomplex auch aufgefaßt werden als ein gewisses kombinatorisches Schema:

— die Menge der Simplizes der Dimension 0,
— die Menge der Simplizes der Dimension 1,
— .... ;

und die Weise, wie all diese Dinge zusammenpassen.

Bevor wir uns aber weiter damit beschäftigen und die Homologiegruppen definieren, müssen wir noch eine kleine Verfeinerung anbringen. Der Grund ist der, daß in den gleich hinzuschreibenden Formeln Vorzeichen vorkommen, die $+1$ oder -1 sein können und die richtig festgelegt werden müssen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies technisch durchzuführen. Eine dieser Möglichkeiten ist, die Kombinatorik bei den Simplizialkomplexen noch ein bißchen mehr zu betonen und mit *geordneten Simplizialkomplexen* zu arbeiten.

Definition. Ein *geordneter Simplizialkomplex* ist ein Simplizialkomplex (wie oben), zusammen mit den folgenden zusätzlichen Daten: Für jedes einzelne Simplex ist eine (totale) Anordnung seiner Eckenmenge gewählt; dabei ist verlangt: Die Ecken einer Seite sind immer mit der induzierten Anordnung versehen.

In einem geordneten Simplizialkomplex gibt es zu jedem Simplex der Dimension n eine (und auch nur eine) Möglichkeit, die Ecken von 0 bis n durchzunumerieren. Mit anderen Worten, jedes n-Simplex ist *kanonisch* beschreibbar als $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$, *wo die Ecken gemäß ihrer Anordnung aufgeführt sind*. Es bezeichne nun

$$\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_{i-1}\, , \, \widehat{v_i}\, , \, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

diejenige Seite von $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$, die entsteht durch das *Weglassen der i-ten Ecke* (oder, vielleicht etwas genauer: diejenige Seite, die die i-te Ecke *nicht* enthält, dagegen aber alle anderen Ecken enthält). Diese Seite hat die Dimension $n{-}1$, und sie hat die kanonische Beschreibung

$$\mathrm{Simp}(w_0, \ldots, w_{n-1}) \quad , \qquad \begin{cases} w_j \; = \; v_j & , \quad j < i \\ w_j \; = \; v_{j+1} & , \quad j \geq i \ . \end{cases}$$

Sei nun ein geordneter Simplizialkomplex gegeben. Es bezeichne X_n die Menge der Simplizes der Dimension n. Für jedes i zwischen 0 und n haben wir dann eine Abbildung

$$\begin{aligned} d_i : \; X_n \; & \longrightarrow \; X_{n-1} \\ \mathrm{Simp}(v_0, \ldots v_n) \; & \longmapsto \; \mathrm{Simp}(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist in Worten: Jedem n-Simplex wird seine i-te $(n{-}1)$-dimensionale Seite zugeordnet.

Für die Komposition solcher Abbildungen

$$X_n \xrightarrow{\ d_i\ } X_{n-1} \xrightarrow{\ d_j\ } X_{n-2}$$

gilt die fundamentale Beziehung

$$d_j \, d_i \; = \; d_{i-1} \, d_j \quad , \quad \text{wenn} \;\; j < i \quad .$$

In Worten: Zuerst die i-te Ecke weglassen und dann die j-te ist für $j < i$ dasselbe wie zuerst die j-te Ecke weglassen und dann eben nicht die i-te, sondern die $(i{-}1)$-te.

Linearisierung

Wir brauchen eine Konstruktion allgemeiner Art. Ist A eine abelsche Gruppe und M eine Menge, dann kann man eine abelsche Gruppe $A[M]$ bilden, deren Elemente die formalen endlichen Summen sind,

$$a_1\, x_1 \,+\, \ldots \,+\, a_k\, x_k \;, \quad a_i \in A \;, \;\; x_i \in M \;;$$

bis auf eine naheliegende Äquivalenzrelation: nämlich man darf immer

$$a\, x + a'\, x \quad \text{mit} \quad (\, a + a'\,)\, x$$

identifizieren, und man darf einen Term $0 \cdot x$ immer weglassen. Die Addition geschieht in der offensichtlichen Weise.

Eine (vielleicht) bessere Beschreibung von $A[M]$ ist diese: Seine Elemente sind die Abbildungen $f:\, M \to A$ mit der Eigenschaft, daß $f(x) \neq 0$ für höchstens endliche viele x in M. Die formale Summe $a_1\, x_1 + \ldots + a_k\, x_k$ (wo die x_i alle verschieden sind) entspricht hier der Abbildung $x_i \mapsto a_i$ (und $x \mapsto 0$, sonst).

Beispiel. Wenn A ein Körper ist, dann ist $A[M]$ in naheliegender Weise ein Vektorraum über A. Dieser Vektorraum hat eine kanonische Basis, nämlich M.

Definition. Ist X ein geordneter Simplizialkomplex, dann heißt $A[X_n]$ die *Gruppe der n-Ketten von X mit Koeffizienten in A*.

Bemerkung. *Die Abbildung $d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ induziert* (über "lineare Fortsetzung") *eine Abbildung*

$$\begin{aligned} A[X_n] \quad &\longrightarrow \quad A[X_{n-1}] \\ a_1\, x_1 + \ldots + a_k\, x_k \quad &\longmapsto \quad a_1\, d_i(x_1) + \ldots + a_k\, d_i(x_k) \;. \end{aligned}$$

Diese Abbildung soll ebenfalls mit d_i bezeichnet werden. Für die so fortgesetzten Abbildungen gilt immer noch die fundamentale Gleichung

$$d_j\, d_i \;=\; d_{i-1}\, d_j \qquad \text{wenn} \qquad j < i$$

(warum?).

Wegen der nunmehr vorhandenen abelschen Gruppenstruktur können wir die d_i jetzt zusammenbauen zu *einer einzigen Abbildung*, dem sogenannten *Rand-Operator*

$$d \ := \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, d_i \ : \ A[X_n] \longrightarrow A[X_{n-1}] \ .$$

Statt d werden wir manchmal auch d^n schreiben, wenn wir betonen wollen, daß $A[X_n]$ die Quelle der Abbildung ist.

Satz. *Es ist* $d\,d = 0$.

In Worten: *Für jedes* n *ist die Komposition* $d^n\, d^{n+1}$ *gleich der* 0*-Abbildung.*

Beweis. Das beruht auf der Tatsache, daß $d_j\, d_i \ = \ d_{i-1}\, d_j$ wenn $j < i$. Nämlich,

$$\begin{aligned}
d^n\, d^{n+1} \ &\underset{\text{Def.}}{=} \ \sum (-1)^j \, d_j^n \ \sum (-1)^i \, d_i^{n+1} \qquad (0 \le j \le n\,,\ 0 \le i \le n{+}1) \\
&= \ \sum_{j,i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \\
&= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ + \ \sum_{j<i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \\
(d_j\, d_i \ = \ d_{i-1}\, d_j \text{ wenn } j < i) \qquad &= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ + \ \sum_{j<i} (-1)^{j+i}\, d_{i-1}\, d_j \\
(i{-}1 \text{ wird umbenannt in } i') \qquad &= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ - \ \sum_{i' \ge j} (-1)^{j+i'}\, d_{i'}\, d_j \\
&= \ 0
\end{aligned}$$

□

Folgerung. $\operatorname{Bild}(d^{n+1}) \ \subset \ \operatorname{Kern}(d^n)$.

Aufgrund dieser Folgerung können wir die folgende Definition machen.

Definition. Die n-te *Homologiegruppe* des Simplizialkomplexes X , *mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe* A , ist definiert als die Quotientengruppe

$$H_n(X;A) \ := \ \operatorname{Kern}\big(A[X_n] \xrightarrow{d^n} A[X_{n-1}] \big) \ / \ \operatorname{Bild}\big(A[X_{n+1}] \xrightarrow{d^{n+1}} A[X_n] \big) \ .$$

Der bei weitem wichtigste Spezialfall für die Koeffizientengruppe ist der Fall $A = \mathbb{Z}$ (= *Gruppe der ganzen Zahlen*). Dieser Fall ist so wichtig, daß man üblicherweise sogar die Koeffizienten aus der Notation wegläßt: anstatt $H_n(X,\mathbb{Z})$ schreibt man $H_n(X)$.

Ein anderer wichtiger Fall ist der, wo A ein Körper ist; z.B. $\mathbb{Q}$ (= *Körper der rationalen Zahlen*) oder $\mathbb{F}_2$ (= *Körper mit zwei Elementen*). Wenn A ein Körper ist, dann sind die Homologiegruppen Vektorräume über diesem Körper; sie haben in dem Fall also eine besonders einfache Struktur.

Δ -Mengen

Die Definition der Homologiegruppen hat auf die Betrachtung einer Art von kombinatorischer Struktur geführt: die Kodifizierung dessen, wie die diversen Simplizes in einem Simplizialkomplex 'zusammengebaut' sind. Diese kombinatorische Struktur wollen wir nun genauer anschauen. Zur Bezeichnung verwenden wir einen Buchstaben, der in seinem Aussehen einem Simplex nahekommt, das " Δ " ('Delta').

Definition. Eine Δ-*Menge* besteht aus einer Folge von Mengen

$$X_0\,,\ X_1\,,\ X_2\,,\ \ldots$$

sowie (für jedes n) einem System von Abbildungen d_i^n (oder, kurz, d_i)

$$d_i^n:\ X_n \longrightarrow X_{n-1}\ , \qquad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n\ ,$$

so daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Für die zusammengesetzten Abbildungen (wenn $n \geq 2$)

$$d_j\, d_i : \quad X_n \xrightarrow{d_i} X_{n-1} \xrightarrow{d_j} X_{n-2}$$

gilt die Beziehung

$$d_j\, d_i \;=\; d_{i-1}\, d_j\ , \quad \text{wenn}\ \ j < i\ .$$

Dies ist die Abstraktion dessen, was wir früher kennengelernt haben: X_n stellen wir uns vor als die Menge der n-Simplizes. Und die Abbildung d_i^n ist diejenige, die jedem n-Simplex x seine 'i-te Seite' $d_i(x)$ zuordnet.

Man kann den Begriff der Δ-Menge interpretieren als einen Code, der das *Zusammenkleben von Simplizes* spezifiziert. Dies ist ganz analog zur Konstruktion von CW-Komplexen, nur eben etwas 'kombinatorischer'. Anstatt von "Standard-Bällen" werden nunmehr "Standard-Simplizes" verklebt. Das wollen wir jetzt präzisieren.

Das *affine Standard Simplex*, ∇^n, ist dasjenige affine n-Simplex im $\mathbb{R}^{n+1}$, dessen Eckenmenge die Menge der kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist,

$$i\text{-te Ecke} \;=\; (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \qquad (\text{“}\,1\,\text{” an der } i\text{-ten Stelle})$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$\nabla^n \;=\; \{\,(t_0,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ \mid\ t_i \geq 0,\ \Sigma\, t_i = 1\,\}\ .$$

Auf den ersten Blick sieht das unnötig kompliziert aus: Warum ist das n-dimensionale Standard-Simplex als Teilraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben und nicht, wie man vernünftigerweise erwarten sollte, als Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

Die gegebene Beschreibung hat den Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe einige Dinge besonders prägnant ausdrücken kann. Insbesondere ist das so für einige wichtige Abbildungen zwischen den Standard-Simplizes.

So hat man für jedes i (wo $0 \le i \le n$) die *i-te Seiten-Inklusion* $\delta_i \colon \nabla^n \to \nabla^{n+1}$. Dies ist die Inklusion, deren Bild *nicht* die i-te Ecke von ∇^{n+1} enthält. Die Inklusions-Abbildung $\delta_i \colon \nabla^n \to \nabla^{n+1}$ läßt sich beschreiben als

$$(t_0, \ldots, t_n) \longmapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0}, t_i, \ldots, t_n) \ .$$

Gegeben sei nun eine Δ-Menge X (im Detail: die Struktur von X ist eine Liste $X = \{X_0, X_1, \ldots ;\ d_i^n\ ,\ n = 0, 1, \ldots,\ 0 {\le} i {\le} n\}$ und es gelten gewisse Beziehungen zwischen den Kompositionen der Abbildungen). Wir ordnen der Δ-Menge einen topologischen Raum $\operatorname{Real}(X)$ zu; dieser Raum wird auch als die *geometrische Realisierung* der Δ-Menge bezeichnet.

$\operatorname{Real}(X)$ wird definiert als ein Quotientenraum der disjunkten Vereinigung

$$\dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n$$

(oder was auf dasselbe hinausläuft, einer disjunkten Vereinigung von Bällen; nämlich je ein Standard-n-Simplex für jedes Element von X_n , und das für alle n). Die Äquivalenzrelation, die $\operatorname{Real}(X)$ als Quotientenraum dieser disjunkten Vereinigung spezifiziert,

$$\operatorname{Real}(X) \ = \ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n \ / \sim \ ,$$

sagt (per Definition) daß, für jedes n, gewisse $(n{-}1)$-Simplizes zu identifizieren sind mit Seiten von n-Simplizes. Nämlich für jedes $x \in X_n$ soll das durch $d_i(x)$ indizierte $(n{-}1)$-Simplex identifiziert werden mit der i-ten Seite von dem durch x indizierten n-Simplex.

Es läuft auf dasselbe hinaus, zu sagen: Für jedes n und für jeden Punkt

$$(x, t) \ \in \ X_n \times \nabla^{n-1}$$

sollen, für jedes i , die beiden Punkte

$$X_{n-1} \times \nabla^{n-1} \ \ni \ (d_i(x), t) \qquad \text{und} \qquad (x, \delta_i(t)) \ \in \ X_n \times \nabla^n$$

miteinander identifiziert werden. Es sollen andererseits aber auch nicht mehr Punkte miteinander identifiziert werden als durch diese Vorschrift (und deren Konsequenzen) erzwungen ist. Mit anderen Worten, die genannte Vorschrift *erzeugt* die Äquivalenzrelation “ $\sim$ ” in der Definition von $\operatorname{Real}(X)$.

Unsere erste Bemerkung ist die, daß wir einen geordneten affinen Simplizialkomplex aus der zugeordneten Δ-Menge rekonstruieren können (jedenfalls bis auf topologische Äquivalenz). Wir formulieren diese Bemerkung als Satz.

SATZ. *Sei K ein (endlicher) geordneter affiner Simplizialkomplex, und sei X die zugeordnete Δ-Menge. Es gibt eine Abbildung von der geometrischen Realisierung* $\mathrm{Real}(X)$ *zu dem unterliegenden topologischen Raum K, und diese Abbildung ist eine topologische Äquivalenz.*

BEWEIS. Sei $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$ das von einer geordneten Eckenmenge $(v_0, \ldots, v_n)$ aufgespannte affine n-Simplex in $\mathbb{R}^N$. Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \nabla^n & \longrightarrow & \mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n) \\ (t_0, \ldots, t_n) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} t_i \, v_i \ . \end{array}$$

Diese Abbildung ist bijektiv. Denn sie ist surjektiv nach Definition, und sie ist injektiv, weil die $v_0, \ldots, v_n$ affin unabhängig sind (nach Definition ist ein Simplex die konvexe Hülle einer affin unabhängigen Menge).

Ist $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$ ein Simplex des Simplizialkomplexes K, und $x \in X_n$ das zugeordnete Element, das dieses Simplex indiziert, dann können wir die Abbildung auch auffassen als eine Abbildung

$$\{x\} \times \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, als eine durch x indizierte Abbildung

$$f_x : \ \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Simp}(v_0(x), \ldots, v_n(x)) \ ,$$

wo, der Deutlichkeit halber, die i-te Ecke von dem Simplex x jetzt mit $v_i(x)$ bezeichnet worden ist. Die Ansammlung der Abbildungen f_x nun ist mit den Verklebevorschriften für die geometrische Realisierung $\mathrm{Real}(X)$ verträglich. Denn für jedes n, jedes $x \in X_n$ und für jedes i ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \nabla^{n-1} \arrow[r, "f_{d_i(x)}"] \arrow[d, "\delta_i"] & \mathrm{Simp}(v_0(x), \ldots, \widehat{v_i(x)}, \ldots, v_n(x)) \arrow[d] \\ \nabla^n \arrow[r, "f_x"'] & \mathrm{Simp}(v_0(x), \ldots, v_n(x)) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Folglich erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\mathrm{Real}(X) \longrightarrow \textit{unterliegender topologischer Raum von } K \ .$$

Die so erhaltene Abbildung ist bijektiv: Sie ist surjektiv, weil alle Simplizes von K in $\mathrm{Real}(X)$ wirklich benutzt worden sind. Und sie ist injektiv aus dem folgenden Grund (Definition eines Simplizialkomplexes): wenn ein Punkt aus K im Durchschnitt zweier Simplizes x und y liegt, dann liegt er schon in einem Simplex z (von im allgemeinen kleinerer Dimension), *das gemeinsame Seite von x und y ist*; die Äquivalenzrelation in der Konstruktion der geometrischen Realisierung sagt nun, daß die fraglichen drei Punkte aus den Simplizes x, z und y alle in $\mathrm{Real}(X)$ miteinander zu identifizieren sind.

Daß die Abbildung eine topologische Äquivalenz ist, folgt aus ihrer Bijektivität (nach dem Kriterium dafür, wann eine bijektive stetige Abbildung schon eine topologische Äquivalenz ist). Denn die Quelle der Abbildung, $\mathrm{Real}(X)$, ist quasikompakt (Zusammenkleben endlich vieler Simplizes) und das Ziel ist ein Hausdorff-Raum (Unterraum von $\mathbb{R}^N$). □

Bemerkung. Die Umkehrung des vorigen Satzes ist nicht richtig. Das heißt, es ist *nicht* richtig, daß jede Δ-Menge (oder auch nur jede 'endliche' Δ-Menge) auf die früher beschriebene Weise aus einem geordneten Simplizialkomplex erhalten werden könnte. Hier ist ein einfaches Beispiel. Es beruht auf der Tatsache, daß jedes 1-Simplex in einem Simplizialkomplex mit zwei verschiedenen 0-Simplizes inzident ist; daß aber das Analogon davon in einer Δ-Menge nicht zu gelten braucht.

Wir nehmen für X_0 eine 1-elementige Menge; für X_1 auch; und für X_n, $n \geq 2$, die leere Menge. Aus diesen Daten kann man auf genau eine (und im übrigen sehr banale) Weise eine Δ-Menge machen: die beiden Abbildungen $d_0 : X_1 \to X_0$ und $d_1 : X_1 \to X_0$ tun beide das, was sie nicht lassen können (jede von ihnen bildet den Punkt in X_1 auf den Punkt in X_0 ab).

Die geometrische Realisierung dieser Δ-Menge entsteht aus der disjunkten Vereiningung $\nabla^0 \dot\cup \nabla^1$, indem man zwei Identifikationen durchführt; nämlich ∇^0 muß auf die eine Weise mit einer 'Seite' von ∇^1 identifiziert werden (nämlich mit Hilfe von d_0), und auf die andere Weise auch (mit d_1). Im Klartext, man muß die beiden Endpunkte von ∇^1 und den Punkt ∇^0 alle drei miteinander identifizieren. In diesem Fall ist die geometrische Realisierung also die 1-Sphäre S^1, und eine Struktur als CW-Komplex (mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle) wird gleich mitgeliefert: die 0-Zelle kommt von ∇^0 und die 1-Zelle (oder vielmehr ihr Abschluß) kommt von ∇^1. □

Aufgrund des Beispiels könnte man auf die Idee kommen, zu glauben, daß eine Δ-Menge, wenn sie schon nicht zu einem Simplizialkomplex gehört, so doch zumindest als geometrische Realisierung immer einen CW-Komplex haben sollte; und das vielleicht auch noch auf kanonische Weise. Diese Idee ist tatsächlich richtig, und wir wollen uns ihr als nächstes zuwenden. Wir müssen einige Betrachtungen vorwegschicken, die die Eindeutigkeit der Darstellung von Punkten aus $\mathrm{Real}(X)$ betreffen.

Für die zusammengesetzten Abbildungen

$$\delta_i\, \delta_j : \quad \nabla^{n-2} \xrightarrow{\delta_j} \nabla^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \nabla^n$$

gilt (umgekehrte Reihenfolge wie für die d's !)

$$\delta_i\, \delta_j \;=\; \delta_j\, \delta_{i-1} \ , \quad \text{wenn } \ j < i \ ,$$

denn beide Seiten bezeichnen die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{n-2} & \longrightarrow & \nabla^n \\ (t_0, \ldots, t_{n-2}) & \longmapsto & (t_0, \ldots, t_{j-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{0}, t_j, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0}, \ldots, t_{n-2}) \end{array}$$

Ferner gilt, daß jeder Punkt aus ∇^n eine *kanonische* Darstellung der Form

$$\delta_{i_m}\,\delta_{i_{m-1}}\,\ldots\,\delta_{i_1}\,(\,t_0\,,\,\ldots\,,\,t_{n-m}\,)$$
$$(\quad = \quad \delta_{i_m}\,(\,\delta_{i_{m-1}}\,(\ \ldots\ \ \delta_{i_1}\,(\,t_0\,,\,\ldots\,,\,t_{n-m}\,)\ \ldots\ )\,)\quad)$$

hat, wo die $t_0\,,\,\ldots\,,\,t_{n-m}$ alle von 0 verschieden sind, und wo $i_m > i_{m-1} > \ldots > i_1$. Denn sei ein Punkt aus ∇^n als Tupel $(u_0, \ldots, u_n)$ gegeben. Man bekommt die Zahl m als die Anzahl der Nullen unter den u's, die Indizes $i_1, \ldots, i_m$ sind die Stellen dieser Nullen (in aufsteigender Reihenfolge genommen)

$$(\,\ldots, \underset{\substack{| \\ i_1}}{0}, \ldots, \underset{\substack{| \\ i_2}}{0}, \ldots,\ \ldots,\ \ldots, \underset{\substack{| \\ i_m}}{0}, \ldots\,)$$

und die restlichen u's (d.h., die von 0 verschiedenen) liefern die t's.

Satz. *Jeder Punkt aus* $\mathrm{Real}(X)$ *hat einen Repräsentanten*

$$(x,t) \ \in \ X_n \times \nabla^n$$

mit kleinst-möglichem n. *Dieser Repräsentant ist eindeutig bestimmt. Jeder andere Repräsentant ist von der Form* (x', t'), *wo gilt*

$$t' \ = \ \delta_{i_m}\,\delta_{i_{m-1}}\,\ldots\,\delta_{i_1}(\,t\,) \quad , \qquad x \ = \ d_{i_1}\,\ldots\,d_{i_{m-1}}\,d_{i_m}(\,x'\,) \ .$$

Außerdem ist letztere Darstellung eindeutig, wenn vorausgesetzt wird, daß die i*'s in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet sind,* $i_1 < \cdots < i_{m-1} < i_m$.

Beweis. Sei $(x,t) \in X_n \times \nabla^n$ ein Repräsentant, und $t = (t_0, \ldots, t_n)$. Wenn unter den t_i eine oder mehrere Nullen vorkommen, können wir einen äquivalenten Repräsentanten mit kleinerem n finden: z.B. wenn $t_0 = 0$, dann ist $t = \delta_0(\tilde{t})$, wo $\tilde{t}$ das Tupel mit dem weggelassenen t_0 bezeichnet, und deshalb $(\,x,t\,) = (\,x, \delta_0(\tilde{t})\,) \sim (\,d_0(x), \tilde{t}\,)$. Wir können also annehmen, daß unter den t_i keine Nullen vorkommen. Wir werden zeigen, daß dies (x,t) dann schon der kanonische Repräsentant mit dem kleinst-möglichen n ist.

Wenn $x = d_{i_1} \ldots d_{i_m}(x')$ dann haben wir einen neuen Repräsentanten

$$\begin{aligned} (x,t) \ = \ (\,d_{i_1} \ldots d_{i_m}(x')\,,\,t\,) \ &\sim \ (\,d_{i_2} \ldots d_{i_m}(x')\,,\,\delta_{i_1}(t)\,) \\ &\sim \ \ \ldots \\ &\sim \ (\,x'\,,\,\delta_{i_m} \ldots \delta_{i_1}(t)\,) \ \ =: \ (x', t') \ . \end{aligned}$$

Wir prüfen nach, daß *jede* Äquivalenz zu (x,t) in diese Form gebracht werden kann.

Die hier zu diskutierende Äquivalenzrelation sieht so aus. Es ist (x,t) äquivalent zu (x'',t'') dann, und nur dann, wenn es eine Kette gibt,

$$(x,t) \;=\; (x_1,t^1)\;,\;\;(x_2,t^2)\quad\ldots\ldots\quad(x_{j-1}\,,\,t^{j-1})\;,\;\;(x_j,t^j)\;=\;(x'',t'')\;,$$

so daß für jedes n zwischen 1 und $j{-}1$ *entweder* ein i_n existiert mit

$$x_n \;=\; d_{i_n}(x_{n+1}) \quad \text{und} \quad t^{n+1} \;=\; \delta_{i_n}(t^n)$$

oder eben ein i_n mit

$$x_{n+1} \;=\; d_{i_n}(x_n) \quad \text{und} \quad t^n \;=\; \delta_{i_n}(t^{n+1})\;.$$

Per Induktion über die Länge einer solchen Kette dürfen wir annehmen, daß der Satz für Ketten kleinerer Länge schon bewiesen ist, insbesondere also schon bewiesen für

$$(x',t') \;=\; (x_{j-1}\,,\,t^{j-1})\;.$$

Der Induktionsschritt wird fertig sein, wenn wir aufgrund dieser Voraussetzung den Satz für

$$(x'',t'') \;=\; (x_j,t^j)$$

beweisen können. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. $x' = d_k(x'')$ und $t'' = \delta_k(t')$ (für geeignetes k). Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$x \;=\; d_{i_1}\ldots d_{i_m}(x') \quad \text{und} \quad t' \;=\; \delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t)\;.$$

Die Darstellung $t'' = \delta_k\,\delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t)$ nun läßt sich wieder in die Form fallender Indizes bringen (fallend von links nach rechts) wegen der Identitäten $\delta_i\,\delta_j \;=\; \delta_j\,\delta_{i-1}$, wenn $j < i$. Dieser Prozeß bringt gleichzeitig die Darstellung $x = d_{i_1}\ldots d_{i_m}d_k(x'')$ in die Form aufsteigender Indizes; dabei haben wir benutzt, daß $d_j\,d_i \;=\; d_{i-1}\,d_j$ für $j < i$ (die vorausgesetzten Identitäten in der Struktur einer Δ-Menge).

2. Fall. $x'' = d_k(x')$ und $t' = \delta_k(t'')$. Nach unserer Voraussetzung über t kommen in der Darstellung von $t' = \delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t)$ als Tupel keine Nullen vor, außer an den Stellen $i_1,\ldots,i_m$. Deshalb ist notwendigerweise k eine von diesen Stellen. Sei $k = i_\ell$. Es ist dann

$$\delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1} \;=\; \delta_k\,\delta_{j_{m-1}}\,\delta_{j_{m-2}}\ldots\delta_{j_1}$$

wo

$$j_{p-1} \;=\; \begin{cases} i_p & \text{wenn } p<\ell \\ i_p - 1 & \text{wenn } p>\ell\;. \end{cases}$$

Wie im ersten Fall ist dieses Umschreiben auch für die d's eine erlaubte Operation; es führt auf

$$t'' \;=\; \delta_{j_{m-1}}\ldots\delta_{j_1}(t) \quad \text{und} \quad x \;=\; d_{j_1}\ldots d_{j_{m-1}}(x'')\;.$$

Die Existenz der behaupteten Darstellung ist nun geklärt. Die Eindeutigkeit wurde schon vorher behandelt (kanonische Darstellung von Punkten in ∇^n). Nämlich durch t'' einerseits und die Beziehung $t'' \;=\; \delta_{j_{m-1}}\ldots\delta_{j_1}(t)$ andererseits sind sowohl t als auch die Indizes $i_1,\ldots,i_m$ eindeutig bestimmt — vorausgesetzt, daß in der Darstellung von t als Tupel keine Nullen vorkommen und daß die Indizes in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet sind. $\square$

Als *m-Skelett* einer Δ-Menge X wollen wir die Δ-Menge X^m bezeichnen mit

$$(X^m)_n \;=\; \begin{cases} X_n & \text{wenn } n \le m \\ \emptyset & \text{wenn } n > m \end{cases}$$

wobei die Strukturabbildungen von X übernommen werden.

Satz. *Der Raum* $\mathrm{Real}(X)$ *ist ein CW-Komplex, mit Skelettfiltrierung*

$$\emptyset = \mathrm{Real}(X^{-1}) \;\subset\; \mathrm{Real}(X^0) \;\subset\; \dots \;\subset\; \mathrm{Real}(X^m) \;\subset\; \dots \;\subset\; \mathrm{Real}(X)\ .$$

Beweis. Als topologischer Raum ist ∇^n äquivalent zu D^n, und der Rand $\partial\nabla^n$ ist gegeben durch die Vereinigung der eigentlichen Seiten oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Vereinigung der $(n{-}1)$-dimensionalen Seiten

$$\partial\nabla^n \;=\; \bigcup_i \;\delta_i(\nabla^{n-1})\ .$$

Wir behaupten, daß, für $x \in X_n$, die Äquivalenzrelation eine Anhefte-Abbildung

$$\{x\} \times \partial\nabla^n \;\longrightarrow\; \mathrm{Real}(X^{n-1})$$

induziert. Um dies einzusehen, wird es genügen, die Einschränkungen der Anhefte-Abbildung auf diejenigen Teile von $\partial\nabla^n$ zu beschreiben, die durch die $(n{-}1)$-dimensionalen Seiten gegeben sind; und dann nachzuprüfen, daß diese Teil-Abbildungen auf den Durchschnitten ihrer Definitionsbereiche, d.h., auf den Teilen

$$\delta_i(\nabla^{n-1}) \cap \delta_j(\nabla^{n-1}) \;=\; \delta_i\,\delta_j(\nabla^{n-2}) \;=\; \delta_j\,\delta_{i-1}(\nabla^{n-2}) \qquad (\text{wenn } j < i)\ ,$$

übereinstimmen.

Wenn $t' \in \delta_i(\nabla^{n-1})$ und, etwa, $t' = \delta_i(t)$, so wird das Bild von (x,t') unter der Anhefte-Abbildung *definiert* als derjenige Punkt in $\mathrm{Real}(X^{n-1})$, der durch $(d_i(x),t)$ repräsentiert ist.

Die so definierte Abbildung ist (offensichtlich) stetig auf jedem der Unterräume $\delta_i(\nabla^{n-1})$. Da es sich um *abgeschlossene* Unterräume handelt, werden wir wissen, daß die Abbildung auf ganz $\partial\nabla^n$ stetig ist, sobald wir wissen, daß sie überhaupt wohldefiniert ist.

Nun ist die Abbildung definiert über die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X)$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation. Wäre sie nicht wohldefiniert, so würde das bedeuten, daß es zwei Punkte aus $\partial\nabla^n$ gäbe, die denselben Punkt aus $\mathrm{Real}(X)$, aber zwei verschiedene Punkte aus $\mathrm{Real}(X^{n-1})$ definierten. Das hieße, daß die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X)$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation gröber wäre als die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X^{n-1})$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation auf

$$X_0 \times \nabla^0 \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; X_{n-1} \times \nabla^{n-1}\ .$$

Das ist aber nicht der Fall: Sind (x,t) und (x',t') zwei Punkte hieraus, die in $\mathrm{Real}(X)$ äquivalent sind, dann läßt sich (nach dem vorigen Satz) die Relation zwischen diesen beiden Punkten schon beschreiben unter ausschließlicher Verwendung von Abbildungen d_i^k (bzw. δ_i^k) mit $k \le n{-}1$ (denn nur solche Abbildungen werden benutzt, wenn man die beiden Punkte zu dem minimalen Repräsentanten in Beziehung setzt). Es folgt auch noch, daß die Abbildung $\mathrm{Real}(X^{n-1}) \to \mathrm{Real}(X^n)$ injektiv ist.

Unter erneuter Benutzung der Tatsache, daß die Anhefte-Abbildung über die Äquivalenzrelation definiert ist, erhalten wir eine Abbildung

$$\mathrm{Real}(X^{n-1}) \ \cup_{X_n \times \partial\nabla^n} \ X_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ \mathrm{Real}(X^n) \ .$$

Sobald wir wissen, daß diese Abbildung bijektiv ist, werden wir auch wissen, daß sie eine topologische Äquivalenz ist (denn beide Räume sind Quotientenräume von ein- und demselben Raum, nämlich von $X_0 \times \nabla^0 \ \dot\cup \ \ldots \ \dot\cup \ X_n \times \nabla^n$). Daß die Abbildung surjektiv ist, ist klar. Für die Injektivität müssen wir noch zwei Fälle betrachten:

Sei $(x', t') \in X_n \times \nabla^n$ äquivalent zu einem Punkt aus $\mathrm{Real}(X^{n-1})$. Sei (x, t) der minimale Repräsentant dieses Punktes, dann ist (nach dem vorigen Satz)

$$t' = \delta_{i_p} \ldots \delta_{i_1}(t)$$

mit $p \geq 1$, weil $(x, t) \neq (x', t')$. Also ist t' ein Randpunkt von ∇^n .

Seien $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$, $(x_i, t_i) \in X_n \times \nabla^n$, und seien t_1 und t_2 keine Randpunkte von ∇^n . Dann sind beide Punkte Repräsentanten kleinster Dimension in ihrer Äquivalenzklasse, nach dem vorigen Satz sind sie also sogar gleich.

Wir fassen zusammen: $\mathrm{Real}(X)$ ist Quotientenraum einer disjunkten Vereinigung von Bällen, nämlich von $\dot\bigcup_n \ X_n \times \nabla^n$. $\mathrm{Real}(X^m)$ ist der Bildraum der Bälle der Dimension $\leq m$. Die Äquivalenzrelation läßt sich sukzessive beschreiben über Anhefte-Abbildungen für m-Bälle an $\mathrm{Real}(X^{m-1})$.

Letzteres ist aber eine der Charakterisierungen, die wir kennengelernt haben für einen CW-Komplex, mit Skelettfiltrierung gegeben durch die $\mathrm{Real}(X^m)$. $\square$

Es ist plausibel (und auch richtig), daß es CW-Komplexe gibt, die nicht konstruierbar sind als die geometrische Realisierung einer Δ-Menge (z.B. hefte man eine 2-Zelle an S^1 an mit Hilfe einer "wilden" Anhefte-Abbildung). Andererseits, bei den Räumen, die als eine solche geometrische Realisierung entstehen, haben wir auch mehr Struktur als nur die eines CW-Komplexes: Die Anhefte-Abbildungen sind in einer ganz bestimmten (und finiten) Weise gegeben, über die kombinatorische Seiten-Zuordnung einerseits und über die Standard-Abbildungen zwischen den Standard-Simplizes andererseits.

Wir stellen uns eine Δ-Menge vor als einen *kombinatorisch-definierten CW-Komplex*.

Singulärer Komplex

Der *singuläre Komplex* eines topologischen Raumes ist leicht zu definieren (das machen wir jetzt gleich), aber es ist nicht so leicht, sich die außerordentliche Nützlichkeit der Konstruktion klarzumachen (die Herleitung der entsprechenden Sätze wird uns eine Weile beschäftigen). Man kann die Konstruktion des singulären Komplexes auch zum Anlaß nehmen, sich ein wenig zu erschrecken. Denn sie führt auf die Betrachtung sehr großer Mengen, selbst wenn man nur an recht einfachen topologischen Räumen interessiert ist.

Bezeichne, wie früher, ∇^n das Standard-n-Simplex. Sei Y ein topologischer Raum. Der *singuläre Komplex von* Y ist definiert als die Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$, wo

$$\mathrm{S}(Y)_n \;=\; \textit{Menge der stetigen Abbildungen } \nabla^n \longrightarrow Y \ ,$$

und wo die Strukturabbildungen $d_i : S(Y)_n \longrightarrow \mathrm{S}(Y)_{n-1}$ in naheliegender Weise über die Standard-Inklusionen der Standard-Simplizes, $\delta_i : \nabla^{n-1} \longrightarrow \nabla^n$, erklärt sind. Nämlich, wenn

$$f \in \mathrm{S}(Y)_n \ , \qquad f : \nabla^n \longrightarrow Y \ ,$$

dann ist $d_i(f) \in \mathrm{S}(Y)_{n-1}$ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$f\,\delta_i \ : \qquad \nabla^{n-1} \xrightarrow{\ \delta_i\ } \nabla^n \xrightarrow{\ f\ } Y \ .$$

Die verlangten Identitäten zwischen den Kompositionen der d_i sind hier nun einfache Folgerungen aus den analogen Identitäten für die Kompositionen der δ_i. Nämlich wenn $f \in \mathrm{S}(Y)_n$, wenn $n \geq 2$ und $j < i$, dann ist

$$d_j\,d_i(f) \;=\; d_j(f\,\delta_i) \;=\; f\,\delta_i\,\delta_j \;=\; f\,\delta_j\,\delta_{i-1} \;=\; d_{i-1}(f\,\delta_j) \;=\; d_{i-1}d_j(f) \ .$$

Was die Homologiegruppen einer Δ-Menge sind, das wissen wir schon. Deshalb können wir jetzt auch Homologiegruppen für topologische Räume erklären.

Definition. Die *singulären Homologiegruppen* eines topologischen Raumes Y sind definiert als die Homologiegruppen der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$.

Um mit der Definition etwas anfangen zu können (zum Beispiel für Berechnungen), benötigt man einige Sätze allgemeiner Art, also eine "Theorie". Die Herleitung dieser Sätze wird uns eine Weile beschäftigen.

Selbst im Falle von ganz einfachen topologischen Räumen Y (man denke z.B. an ein Intervall) werden die an der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$ beteiligten Mengen i.a. sehr groß sein. $\mathrm{S}(Y)_0$ etwa ist die *unterliegende Menge* von Y, und $\mathrm{S}(Y)_1$ kann man identifizieren mit der *Menge aller Wege* in Y. Die Konstruktion ist also ziemlich unanschaulich. Allerdings kann der Nachteil der Unanschaulichkeit zu einem gewissen Grade durch Gewöhnung behoben werden. Als ersten Schritt dazu überlegen wir uns, daß es eine Beziehung gibt zwischen dem Raum Y einerseits und der geometrischen Realisierung der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$ andererseits.

Satz. *Es gibt eine natürliche Abbildung* ("*Evaluation*")

$$\mathrm{ev} \ : \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \longrightarrow Y \ .$$

Bemerkung. Daß die Evaluation als eine 'natürliche' Abbildung bezeichnet wurde, hat eine ganz bestimmte technische Bedeutung. Nämlich sowohl die Konstruktion des singulären Komplexes eines topologischen Raumes als auch die der geometrischen Realisieung einer Δ-Menge sind *funktorielle* Konstruktionen. Wenn also $Y \to Y'$ eine Abbildung von topologischen Räumen ist, so induziert diese erstens eine Abbildung von Δ-Mengen, $\mathrm{S}(Y) \to \mathrm{S}(Y')$, und zweitens diese wieder eine Abbildung von Räumen, $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y'))$. Die besagte 'Natürlichkeit' ist nun die Aussage, daß das resultierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) & \xrightarrow{\ \mathrm{ev}\ } & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y')) & \xrightarrow{\ \mathrm{ev}\ } & Y' \end{array}$$

tatsächlich *kommutativ* ist.

Beweis des Satzes. Das ist fast eine Trivialität. Die geometrische Realisierung ist ja definiert als

$$\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \quad = \quad \dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(Y)_n \times \nabla^n \ / \sim \ ,$$

deshalb genügt es, eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(Y)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ Y$$

anzugeben, die mit der Äquivalenzrelation verträglich ist. Es läuft auf dasselbe hinaus, für jedes n und für jedes $f \in \mathrm{S}(Y)_n$ eine Abbildung $g : \{f\} \times \nabla^n \longrightarrow Y$ anzugeben, oder besser

$$g_f : \ \nabla^n \ \longrightarrow \ Y \ ;$$

dabei muß für $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$ gelten, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{n-1} & \xrightarrow{\ \delta_i\ } & \nabla^n \\ {\scriptstyle g_{d_i(f)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g_f} \\ Y & \xrightarrow{\ =\ } & Y \end{array}$$

kommutiert. Alle diese Daten haben wir aber nach Definition von $\mathrm{S}(Y)$. Wir nehmen nämlich einfach $g_f = f$. Die Kommutativität des Diagramms ist dann erfüllt nach Definition dessen, was die Abbildung $d_i(f)$ ist. □

Natürlich kann man nicht erwarten, daß die Abbildung $\mathrm{ev}: \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to Y$ immer eine Homotopieäquivalenz ist. $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y))$ ist ja, wie wir wissen, ein CW-Komplex. Wenn ev überhaupt eine Chance haben soll, eine Homotopieäquivalenz zu sein, so muß notwendigerweise gelten, daß der Raum Y zumindest *den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat*.

Diese Bedingung ist z.B. nicht erfüllt für den Unterraum $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, oder für den Abschluß vom Graphen von $t \longmapsto \sin \frac{1}{t}$ (letzterer Raum ist das Standard-Beispiel für "zusammenhängend, aber nicht weg-zusammenhängend").

Erfreulicherweise ist die genannte notwendige Bedingung aber auch hinreichend (und es wird eines unserer Ziele sein, dies auch irgendwann einzusehen):

Inoffizielle Mitteilung. Wenn Y ein CW-Komplex ist (eventuell auch nur bis auf Homotopie), dann ist die Abbildung $\mathrm{ev}: \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to Y$ eine Homotopieäquivalenz.

Beispiel. Bezeichne pt. den topologischen Raum, der nur aus einem einzigen Punkt besteht. Für jedes n hat $\mathrm{S}(\mathrm{pt.})_n$ offenbar genau ein Element. Folglich ist $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(\mathrm{pt.}))$ ein *CW* Komplex, der in jeder Dimension genau eine Zelle hat. Nach der gerade gemachten Mitteilung ist dieser CW-Komplex *zusammenziehbar* (homotopieäquivalent zum ein-punktigen Raum). Diese Tatsache direkt einzusehen, ist nicht ganz leicht. □

Es gibt mehrere Gründe, noch eine Variante vom Begriff der "Δ-Menge" zu betrachten; das wird unser nächstes Thema sein. Einer der Gründe ist, daß man mit den Δ-Mengen als "kombinatorisch definierten CW-Komplexen" einige Dinge einfach nicht in dem Umfang machen kann, wie man das möchte; etwa "Quotienten-Räume" konstruieren.

Sei zum Beispiel der 2-Ball aufgefaßt als die geometrische Realisierung der Δ-Menge 'Dreieck' (drei 0-Simplizes, drei 1-Simplizes und ein 2-Simplex). Durch Kollabieren des Randes möchte man die 2-Sphäre als Quotientenraum davon konstruieren. Es gibt nur eine Δ-Menge, die als Resultat einer solchen Konstruktion in Frage käme. Sie hat jeweils ein Simplex in den Dimensionen 0, 1 und 2 (weil man die drei 0-Simplizes zu einem einzigen 0-Simplex identifizieren müßte und die drei 1-Simplizes zu einem einzigen 1-Simplex). Die geometrische Realisierung der fraglichen Δ-Menge ist aber nicht die 2-Sphäre; das wird plausibel, wenn man die Euler'schen Charakteristiken vergleicht.

Bei der nun zu betrachtenden Variante besteht die zusätzliche Raffinesse darin, daß dem Anschein nach irrelevante Daten, nämlich sogenannte *ausgeartete* Simplizes, in die Buchführung ausdrücklich mit aufgenommen werden. Naturgemäß wird die Buchführung dadurch etwas komplizierter.

Für die Zwecke der Buchführung führen wir eine Kategorie Δ ein. Die *Objekte* von Δ sind die geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, $[2]$, ...,

$$[n] \;=\; (0 < 1 < \cdots < n) \;,$$

und die *Morphismen* in Δ sind die (schwach) monotonen Abbildungen zwischen diesen geordneten Mengen.

Im Detail, ein Morphismus $\alpha : [m] \to [n]$ ist eine Abbildung von $[m]$ zu $[n]$ mit der Eigenschaft: wenn $i \leq j$ dann ist $\alpha(i) \leq \alpha(j)$. Oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$i < j \qquad \text{impliziert} \qquad \alpha(i) \leq \alpha(j) \;,$$

aber nicht notwendigerweise $\alpha(i) < \alpha(j)$.

Die folgende Interpretation ist möglicherweise hilfreich. Die Kategorie Δ kann aufgefaßt werden als eine Kodifizierung der *Standard-Abbildungen zwischen Standard-Simplizes*. Nämlich man kann $[m]$ identifizieren mit der geordneten Menge der Ecken von dem Standard-Simplex ∇^m; und ähnlich auch $[n]$ mit der geordneten Menge der Ecken von ∇^n. Eine *Standard-Abbildung von* ∇^m *zu* ∇^n nun bildet (nach Definition) Ecken auf Ecken ab und respektiert die Anordnung auf der Eckenmenge; sie induziert also eine Abbildung von $[m]$ zu $[n]$ im obigen Sinne. Im übrigen ist eine Standard-Abbildung $\nabla^m \to \nabla^n$ auch eine *affine Abbildung*, sie ist deshalb durch ihr Verhalten auf den Ecken bereits festgelegt.

Derselbe Sachverhalt, etwas formaler umschrieben, sieht so aus. Einer Abbildung

$$\alpha : \; [m] \;\longrightarrow\; [n]$$

wird zugeordnet eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\alpha_* : \; \nabla^m \;\longrightarrow\; \nabla^n \;;$$

nämlich gerade die, die auf den Ecken das vorgeschriebene Verhalten hat (die i-te Ecke geht auf die $\alpha(i)$-te Ecke) und die ansonsten gegeben ist durch lineare Fortsetzung

$$\sum_i \, t_i \, v_i \;\longmapsto\; \sum_i \, t_i \, w_{\alpha(i)}$$

(wobei $v_i \;=\; i$-ter Basisvektor in $\mathbb{R}^{m+1}$, $w_{\alpha(i)} \;=\; \alpha(i)$-ter Basisvektor in $\mathbb{R}^{n+1}$) .

(Man kann das auch so ausdrücken: die beschriebene Zuordnung ist ein “kovarianter Funktor von der Kategorie Δ in die Kategorie der topologischen Räume”.)

Die angesprochene “Buchführung” mit Hilfe der Kategorie Δ hat den Sinn, daß man sich mit ihrer Hilfe Dinge merken kann, *ohne* das Gedächtnis zu belasten. Wir illustrieren das an der Definition von Δ-Mengen.

Dazu notieren wir, daß es in der Kategorie Δ für jedes i, $0 \leq i \leq n$, eine Abbildung

$$\delta_i : \; [n{-}1] \longrightarrow [n] \; ,$$

gibt, die *injektiv* ist und deren Bild den Punkt $i \in [n]$ *nicht* enthält; offenbar gibt es auch *nur* eine solche Abbildung. In suggestiver Notation handelt es sich um die Abbildung

$$(\, 0 < \cdots < n{-}1 \,) \;\longrightarrow\; (\, 0 < \cdots < i{-}1 < \widehat{\;i\;} < i{+}1 < \cdots < n \,)$$

wo eben “ $\widehat{\;i\;}$ ” bedeuten soll, daß i *nicht* im Bild der Abbildung ist.

Für die Zusammensetzung solcher Abbildungen,

$$\delta_i \, \delta_j \; : \qquad [n{-}2] \xrightarrow{\;\delta_j\;} [n{-}1] \xrightarrow{\;\delta_i\;} [n] \; ,$$

gilt die uns schon bekannte Identität

$$(*) \qquad\qquad \delta_i \, \delta_j \;=\; \delta_j \, \delta_{i-1} \; , \quad \text{wenn} \;\; j < i \; .$$

Lemma. (i) *Jede injektive Abbildung* $[m] \longrightarrow [n]$ *in* Δ *läßt sich schreiben als Komposition von Abbildungen* δ_i .

(ii) *Mit Hilfe der Relationen* $(*)$ *läßt sich diese Komposition in die Form*

$$\delta_{i_p} \, \delta_{i_{p-1}} \; \ldots\ldots \; \delta_{i_2} \, \delta_{i_1}$$

bringen, mit $i_1 < i_2 < \; \ldots \; < i_{p-1} < i_p$ (und $p \,=\, n{-}m$).

(iii) *Letztere Darstellung ist eindeutig.*

Beweis. (i) und (ii) sind klar. Zu (iii) genügt es, zu bemerken, daß sich jede injektive Abbildung $\delta : \; [m] \longrightarrow [n]$ veranschaulichen läßt als

$$(\, 0 < \cdots < m \,) \;\longrightarrow\; (\, \ldots\widehat{\;}\ldots\widehat{\;}\ldots\widehat{\;}\ldots \,) \qquad (\, n{-}m \;\; \text{Lücken})$$

und die $i_1, i_2, \ldots,$ sind dann gerade die Stellen dieser Lücken. □

Bemerkung. Es bezeichne Inj-Δ die Unterkategorie von Δ, deren Morphismen die *injektiven* Abbildungen sind (die Objekte sind dieselben wie in Δ auch). Folgende beiden Begriffe bezeichnen dann ein- und dasselbe Ding:

(i) Eine Δ-Menge.

(ii) Ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Inj-Δ in die Kategorie der Mengen.

Denn die Daten eines solchen kontravarianten Funktors X besagen, daß jedem Objekt $[n]$ eine Menge $X[n]$ (oder, kurz, X_n) zugeordnet ist und jeder Abbildung $\delta : [m] \to [n]$ in Inj-Δ eine Abbildung von Mengen (Gegenrichtung !) $\delta^* : X_n \to X_m$. Wenn man diese Daten darauf beschränkt, nur von den $d_i \,=\, \delta_i^*$ und deren Vertauschungsrelationen zu reden, so hat man eine Δ-Menge. Umgekehrt kann man auch aus einer Δ-Menge einen solchen kontravarianten Funktor (re-) konstruieren, wegen dem gerade angeführten Lemma.

Zurück zu der Kategorie Δ . Es gibt darin, für jedes i , $0 \le i \le n$, eine Abbildung

$$\sigma_i : \ [n{+}1] \longrightarrow [n] \ ,$$

die *surjektiv* ist und unter der die beiden Punkte i und $i{+}1$ denselben Bildpunkt (nämlich $i \in [n]$) haben. Offenbar gibt es auch *nur* eine solche Abbildung; in suggestiver Notation,

$$(0 < \cdots < \underline{i < i{+}1} < \cdots < n{+}1) \ \longrightarrow \ (0 < \cdots < i < \cdots < n) \ .$$

Jede surjektive Abbildung in Δ läßt sich schreiben als Komposition von Abbildungen dieser Art. Es gibt Relationen zwischen Zusammensetzungen der σ 's , nämlich

$$\sigma_{i-1}\, \sigma_j \ = \ \sigma_j\, \sigma_i \ , \quad \text{wenn } \ j < i \ ,$$

und es gibt Relationen für die Zusammensetzung von einem δ_i mit einem σ_j ,

$$\sigma_i\, \delta_i \ = \ \mathrm{Id}_{[n]} \ = \ \sigma_i\, \delta_{i+1} \ , \qquad \begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{\delta_i} & [n{+}1] \\ {\scriptstyle \delta_{i+1}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \sigma_i} \\ [n{+}1] & \xrightarrow{\sigma_i} & [n] \end{array}$$

(erst eine Lücke machen bei i oder bei $i{+}1$ und danach i und $i{+}1$ auf dasselbe abbilden; das tut gar nichts), sowie zwei Fälle für $j \ne i \, , i{+}1$,

$$\sigma_i\, \delta_j \ = \ \delta_j\, \sigma_{i-1} \ , \quad \text{wenn } \ j < i \ , \qquad \begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{\delta_j} & [n{+}1] \\ {\scriptstyle \sigma_{i-1}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \sigma_i} \\ [n{-}1] & \xrightarrow{\delta_j} & [n] \end{array}$$

(Lücke vor der Verdopplung)

und

$$\sigma_i\, \delta_j \ = \ \delta_{j-1}\, \sigma_i \ , \quad \text{wenn } \ j > i{+}1 \ , \qquad \begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{\delta_j} & [n{+}1] \\ {\scriptstyle \sigma_i} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \sigma_i} \\ [n{-}1] & \xrightarrow{\delta_{j-1}} & [n] \end{array}$$

(Verdopplung vor der Lücke)

und diese Relationen insgesamt sind *vollständig* in einem Sinne, wie es das obige Lemma für die injektiven Abbildungen präzisiert hat.

Es ist aber vollkommen überflüssig, sich solche Einzelheiten zu merken, denn was immer man davon braucht, kann man rekonstruieren, sobald man nur weiß, was es mit der Kategorie Δ auf sich hat (was ja nicht so schwer zu behalten ist).

Wichtig ist auch die folgende (triviale) Tatsache. *Jeder Morphismus in* Δ *läßt sich schreiben als eine Surjektion gefolgt von einer Injektion*; das heißt, als

$$\alpha \ = \ \delta\, \sigma \qquad (\ \sigma \text{ surjektiv} \ , \quad \delta \text{ injektiv} \ ) \, ;$$

und diese Darstellung ist eindeutig.

DEFINITION. Eine *simpliziale Menge* ist ein kontravarianter Funktor X von der Kategorie Δ in die Kategorie der Mengen.

Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß jedem $[n]$ eine Menge $X[n]$ (oder, kurz, X_n) zugeordnet ist; und jeder Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ eine Abbildung von Mengen (Gegenrichtung !)

$$X(\alpha): \ X_n \longrightarrow X_m \ .$$

Dabei ist verlangt, daß die Zuordnung $\alpha \mapsto X(\alpha)$ mit *Komposition* verträglich ist, d.h., wenn

$$\beta\,\alpha \ : \quad [m] \xrightarrow{\ \alpha\ } [n] \xrightarrow{\ \beta\ } [p] \ ,$$

dann ist $X(\beta\,\alpha)$ gleich der zusammengesetzten Abbildung

$$X(\alpha)\,X(\beta) \ : \qquad X_p \xrightarrow{\ X(\beta)\ } X_n \xrightarrow{\ X(\alpha)\ } X_m$$

(und, natürlich, wenn ι eine identische Abbildung ist, dann ist auch $X(\iota)$ eine identische Abbildung).

Statt $X(\alpha)$ wollen wir kürzer auch schreiben α^* (Stern oben für: Zuordnung dreht die Pfeile um).

Wir verwenden folgende Sprache. Die Abbildungen δ^*, für *injektives* δ, heißen die *Randabbildungen* der simplizialen Menge X. Es handelt sich dabei um die δ_i^* (die wir wie früher mit d_i bezeichnen wollen) und deren Kompositionen.

Die Abbildungen σ^*, für surjektives σ, heißen die *Ausartungs-Abbildungen*. (Auch wenn dies ein wenig seltsam klingen mag, so ist die identische Abbildung an dieser Stelle nicht ausgeschlossen.)

Die Elemente der Menge X_n heißen die *n-Simplizes*. Ein n-Simplex heißt *ausgeartet*, wenn es im Bild einer nicht-identischen Ausartungs-Abbildung σ^* liegt (oder was auf dasselbe hinausläuft, wenn es im Bild einer der speziellen Ausartungs-Abbildungen $\sigma_i^* : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ liegt).

BEISPIEL. Der singuläre Komplex $\mathrm{S}(Y)$ eines topologischen Raumes Y ist nicht nur eine Δ-Menge, sondern auch eine simpliziale Menge. Nämlich für $\alpha : [m] \to [n]$ ist die zugeordnete Abbildung $\alpha^* : \mathrm{S}(Y)_n \to \mathrm{S}(Y)_m$ definiert als die Komposition mit der durch α beschriebenen Standard-Abbildung $\alpha_* : \nabla^m \to \nabla^n$,

$$(\ f : \nabla^n \longrightarrow Y\ ) \quad \xmapsto{\quad \alpha^* \quad} \quad (\ f\,\alpha_* \ : \quad \nabla^m \xrightarrow{\ \alpha_*\ } \nabla^n \xrightarrow{\ f\ } Y\ ) \ .$$

Wenn wir früher den singulären Komplex als Δ-Menge aufgefaßt haben, so lag das daran, daß wir andere Struktur-Abbildungen als die Rand-Abbildungen damals nicht beachtet haben.

Natürlich kann man ganz allgemein einer simplizialen Menge eine Δ-Menge dadurch zuordnen, daß man alle anderen Struktur-Abbildungen außer den Rand-Abbildungen einfach vergißt.

Wenn man weiß, was *ausgeartete Simplizes* sind, so hat man auch die Möglichkeit, diese systematisch zu ignorieren; oder besser: herauszukürzen. Demgemäß hat man für simpliziale Mengen nun Varianten der Konstruktion von Homologie einerseits und von geometrischer Realisierung andererseits zur Verfügung. Diese Varianten wollen wir zur Kenntnis nehmnen.

(1) *Konstruktion der Homologie.* Sei X simpliziale Menge, A abelsche Gruppe. Dann wissen wir schon (weil X per Vergessen von Struktur eine Δ-Menge ist), daß wir die Homologiegruppen $H_*(X;A)$ definieren können. Nämlich zunächst konstruieren wir einen sogenannten *Kettenkomplex*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X;A) \xrightarrow{d=d^n} C_{n-1}(X;A) \xrightarrow{d} C_{n-2}(X;A) \longrightarrow \cdots \quad (\text{mit } dd=0\ )$$

wo $C_n(X;A) = A[X_n]$, $d = \sum_i (-1)^i d_i$; die *n-te Homologiegruppe von X mit Koeffizienten in A* ist dann definiert als $H_n(X;A) = \operatorname{Kern}(d^n) / \operatorname{Bild}(d^{n+1})$.

Die Elemente von $C_n(X;A)$ sind, per Definition, die *n-Ketten*, d.h. die formalen Summen $a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$, $a_j \in A$, $x_j \in X_n$ (modulo einer gewissen Äquivalenzrelation). Wir wollen eine Kette $\sum a_j x_j$ nun als *ausgeartet* bezeichnen, wenn sämtliche der x_j ausgeartet sind. Die ausgearteten Ketten bilden eine Untergruppe $C'_n(X;A)$. Die Quotientengruppe

$$\overline{C}_n(X;A) \ := \ C_n(X;A) \,/\, C'_n(X;A)$$

heißt die *reduzierte* (oder *normalisierte*) n-te Kettengruppe der simplizialen Menge X .

Wir nehmen zur Kenntnis (im Moment ohne Beweis, als inoffizielle Mitteilung), daß die $\overline{C}_n(X;A)$ wieder einen Kettenkomplex bilden, und daß die daraus erhaltenen Homologiegruppen *dieselben* sind wie vorher. □

(2) Die *geometrische Realisierung einer simplizialen Menge* X . Diese ist definiert als der Quotientenraum

$$|X| \ = \ \dot{\bigcup}_{n\geq 0} X_n \times \nabla^n \ / \ \sim$$

wo die Äquivalenzrelation " $\sim$ " nicht nur die Rand-Abbildungen benutzt (wie bei der geometrischen Realisierung einer Δ-Menge), sondern zusätzlich auch noch die Ausartungs-Abbildungen. Die Äquivalenzrelation ist nämlich erzeugt von der Vorschrift: Für jedes $\alpha : [m] \to [n]$ aus Δ , für jedes $t \in \nabla^m$ und jedes $x \in X_n$, sollen die Bildpunkte von (x,t) unter den beiden Abbildungen

$$X_m \times \nabla^m \xleftarrow{\alpha^* \times \mathrm{Id}} X_n \times \nabla^m \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \alpha_*} X_n \times \nabla^n$$

miteinander identifiziert werden. Das heißt, es soll sein

$$X_m \times \nabla^m \ni (\,\alpha^*(x)\,,\,t\,) \ \sim \ (\,x\,,\,\alpha_*(t)\,) \in X_n \times \nabla^n \ .$$

Die Definition ergibt, daß $|X|$ auch ein Quotientenraum von $\operatorname{Real}(X)$ ist (geometrische Realisierung von X als Δ-Menge). Die Quotientenabbildung $\operatorname{Real}(X) \to |X|$ kann aufgefaßt werden als nachträgliches "Kollabieren" derjenigen Zellen, die den ausgearteten Simplizes entsprechen.

Als Variation des entsprechenden Lemmas über Δ-Mengen hat man:

LEMMA. (i) Jeder Punkt aus $|X|$ hat einen Repräsentanten $(x,t) \in X_d \times \nabla^d$ der Art, daß d möglichst klein ist. Dieser Repräsentant ist eindeutig bestimmt.
(ii) Ist $(x'',t'') \in \dot{\bigcup}_n X_n \times \nabla^n$ äquivalent zu (x,t), dann gibt es einen eindeutig bestimmten weiteren Repräsentanten (x',t'), wo t' kein Randpunkt ist (d.h., die Darstellung von t' als Tupel enthält keine Nullen), und es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen σ und δ aus Δ, wo σ surjektiv ist und δ injektiv, mit

$$x' = \sigma^*(x) \ , \quad t = \sigma_*(t') \ ; \qquad\qquad x' = \delta^*(x'') \ , \quad t'' = \delta_*(t') \ .$$

Ebenfalls hat man als Variante des entsprechenden Satzes über Δ-Mengen:

SATZ. $|X|$ ist ein CW-Komplex. Das n-Skelett ist gleich dem Bild von

$$X_0 \times \nabla^0 \ \dot{\cup} \ \ldots \ \dot{\cup} \ X_n \times \nabla^n \ .$$

Die n-Zellen sind in $1:1$ Beziehung zu den *nicht-ausgearteten* n-Simplizes von X.

BEWEIS. Übungen □

Im Beweis des obigen Lemmas wird folgender einfacher aber wichtiger Struktursatz über simpliziale Mengen gebraucht.

SATZ. *Sei x ein m-Simplex der simplizialen Menge X. Dann ist x Ausartung eines eindeutig bestimmten nicht ausgearteten Simplexes y, und zwar auf genau eine Weise. D.h., es gibt ein nicht-ausgeartetes $y \in X_n$ und ein surjektives $\sigma : [m] \to [n]$ mit $\sigma^*(y) = x$, und das Paar (y,σ) ist eindeutig bestimmt.*

BEMERKUNG. Wenn x nicht-ausgeartet ist, dann ist die Ausartungs-Abbildung σ natürlich eine identische Abbildung.

BEWEIS DES SATZES. Existenz von (y,σ) ist klar. Angenommen, (y',σ') ist ein weiteres solches Paar, $\sigma' : [m] \to [n']$. Die Abbildung σ hat einen Schnitt, d.h. eine Abbildung (notwendigerweise injektiv) $\delta : [n] \to [m]$ mit $\sigma\delta = \mathrm{Id}_{[n]}$. Es ist dann

$$y = \delta^* \sigma^* (y) = \delta^* (x) = \delta^* \sigma'^* (y') = \overline{\sigma}^* \overline{\delta}^* (y') \ ,$$

wobei die letzte dieser Gleichungen deshalb gilt, weil sich jede Abbildung in der Kategorie Δ, also auch $\sigma'\delta$, in der Form $\overline{\delta}\,\overline{\sigma}$ (eine Surjektion gefolgt von einer Injektion) darstellen läßt.

Aber y ist nicht-ausgeartet, also ist $\overline{\sigma} = \mathrm{Id}$ und $y = \overline{\delta}^* (y')$. Insbesondere haben wir deshalb $n \leq n'$. Auf die gleiche Weise folgt auch $n' \leq n$. Folglich gilt $n = n'$. $\overline{\delta}$ ist somit ein *injektiver Endomorphismus* von $[n]$ und daher die Identität. Folglich ist $y = y'$. Wir haben außerdem nun auch noch gezeigt, daß jeder Schnitt δ von σ automatisch auch ein Schnitt von σ' ist (d.h., $\sigma\delta = \mathrm{Id} \implies \sigma'\delta = \mathrm{Id}$), und umgekehrt (aus Symmetriegründen). Daraus folgt aber $\sigma = \sigma'$. □

Es ist i.a. nicht möglich, aus einer simplizialen Menge eine Δ-Menge dadurch zu machen, daß man die ausgearteten Simplizes einfach wegläßt. Denn wenn man zu einem nicht-ausgearteten Simplex ein Randsimplex nimmt, dann kann letzteres sehr wohl ausgeartet sein. (*Beispiel*: Im singulären Komplex der n-Sphäre betrachte man ein n-Simplex, das der Identifizierung $\nabla^n/_{\partial\nabla^n} \approx S^n$ entspricht.)

Man kann allerdings umgekehrt vorgehen. Man kann einer Δ-Menge Y immer eine simpliziale Menge X zuordnen derart, daß die nicht-ausgearteten Simplizes von X eine Δ-Menge bilden, und zwar gerade Y. Das geht auf die nächstliegende Weise: Als n-Simplizes von X nimmt man die Paare

$$(y \, , \, \sigma)$$

wo $\sigma : [n] \to [m]$ die surjektiven Abbildungen mit Quelle $[n]$ durchläuft; und y die Elemente von Y_m (m variabel). Um nun die Wirkung der Abbildung

$$\alpha^* : X_n \longrightarrow X_{n'}$$

auf (y, σ) zu erklären, wo $\alpha : [n'] \to [n]$, schreibt man die zusammengesetzte Abbildung

$$[n'] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\sigma} [m]$$

in die kanonische Form um (Surjektion gefolgt von Injektion),

$$[n'] \xrightarrow{\overline{\sigma}} [\overline{n}] \xrightarrow{\overline{\delta}} [m] \ ,$$

und mit den so erhaltenen $\overline{\delta}$ und $\overline{\sigma}$ definiert man dann

$$\alpha^*(y \, , \, \sigma) \ := \ (\overline{\delta}^*(y) \, , \, \overline{\sigma}) \ .$$

Diese Regel ist mit der Komposition der α's verträglich (also 'funktoriell', wie in der Definition von simplizialen Mengen verlangt). Denn ist $\alpha' : [n''] \to [n']$, dann sieht man, daß $(\alpha\alpha')^* (y, \sigma) = \alpha'^* \alpha^* (y, \sigma)$ wegen des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
{[n'']} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"'] & {[n']} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\overline{\sigma}"] & {[n]} \arrow[d, "\sigma"] \\
{[\widetilde{n}]} \arrow[r, "\widetilde{\delta}"'] & {[\overline{n}]} \arrow[r, "\overline{\delta}"'] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von $\sigma\,\alpha\,\alpha'$ als $\widehat{\delta}\ \widetilde{\sigma}$ (Surjektion gefolgt von Injektion), wo $\widehat{\delta} = \overline{\delta}\ \widetilde{\delta}$.

Speziell sagt die Regel auch, wenn ρ eine surjektive Abbildung, also ρ^* eine Ausartungs-Abbildung ist, dann ist

$$\rho^*(\,y\,,\,\sigma\,) \;=\; (\,y\,,\,\sigma\rho\,)\ .$$

Die nicht-ausgearteten n-Simplizes von X sind also genau die Paare

$$(\,y\,,\,\mathrm{Id}_{[n]}\,)$$

m.a.W. die n-Simplizes von Y. Und ist $\delta : [n'] \to [n]$ eine Rand-Abbildung, dann ist

$$\delta^*(\,y\,,\,\mathrm{Id}_{[n]}\,) \;=\; (\,\delta^*(y)\,,\,\mathrm{Id}_{[n']}\,)\ ,$$

Y ist also tatsächlich eine Unter-Δ-Menge von X.

Wir nennen X *die von der* Δ*-Menge* Y *erzeugte simpliziale Menge.*

Satz. *Sei* Y *eine* Δ*-Menge, sei* X *die von* Y *erzeugte simpliziale Menge. Es ist*

$$|X| \;\cong\; \mathrm{Real}(Y)\ .$$

Beweis. Nach Definition

$$\begin{aligned}
|X| \;&=\; \dot{\bigcup}_n \quad X_n \times \nabla^n \;/\; \sim \\
&=\; \dot{\bigcup}_n \;\Big(\dot{\bigcup}_{\sigma:\,[n]\twoheadrightarrow[m]} Y_m \times \nabla^n \ ,\quad \sigma \text{ und } [m] \text{ variabel} \Big) \Big/ \;\sim \\
&=\; \dot{\bigcup}_m \;\Big(\dot{\bigcup}_{\sigma:\,[n]\twoheadrightarrow[m]} Y_m \times \nabla^n \ ,\quad \sigma \text{ und } [n] \text{ variabel} \Big) \Big/ \;\sim
\end{aligned}$$

Nun sagt der von der Ausartungs-Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$ gelieferte Beitrag zur Äquivalenzrelation " $\sim$ " gerade, daß für jedes $y \in Y_m$ und jedes $t \in \nabla^n$,

$$(\,(\,y\,,\,\sigma)\,,\,t\,) \;=\; (\,\sigma^*(\,y\,,\,\mathrm{Id}_{[m]}\,)\,,\,t\,) \;\;\sim\;\; (\,(\,y\,,\,\mathrm{Id}_{[m]}\,)\,,\,\sigma_*(t)\,)\ ,$$

d.h. die von σ indizierte Kopie des Raumes $Y_m \times \nabla^n$ muß identifiziert werden mit $Y_m \times \nabla^m$ vermöge der Abbildung induziert von $\sigma_* : \nabla^n \to \nabla^m$. Also ist $|X|$ ein Quotientenraum

$$\dot{\bigcup}_m \;\{\,\mathrm{Id}_{[m]}\,\} \times Y_m \times \nabla^m \;/\; \sim\ .$$

Aber die verbliebenen Simplizes $(\,y\,,\,\mathrm{Id}\,)$ sind sämtlich nicht-ausgeartet, die Strukturabbildungen zwischen ihnen sind daher notwendigerweise Rand-Abbildungen. Es folgt, daß die induzierte Äquivalenzrelation " $\sim$ " nicht gröber ist als die zur Definition von $\mathrm{Real}(Y)$ verwendete. □

Beispiel. Sei K ein geordneter Simplizialkomplex. Das heißt (wie früher auch), daß K als Teilmenge eines euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ gegeben ist und daß zusätzlich gewisse weitere Daten spezifiziert sind (K ist dargestellt als Vereinigung affiner Simplizes, die sich nur in bestimmter Weise treffen dürfen; die Eckenmenge von jedem Simplex ist mit einer Ordnung versehen, und diese Ordnungen sind kompatibel).

Zu dem geordneten Simplizialkomplex gehört eine Δ-Menge Y. Einem m-Simplex y von Y entspricht eine Abbildung $\nabla^m \to K$, nämlich die kanonische injektive Abbildung, die das Standard-m-Simplex ∇^m identifiziert mit dem von y indizierten

Baustein von K. Einem n-Simplex der von Y erzeugten simplizialen Menge X entspricht nun ebenfalls eine Abbildung $\nabla^n \to K$. Nämlich dem Simplex (y, σ), wo $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [m]$, entspricht die Abbildung

$$\nabla^n \xrightarrow{\sigma_*} \nabla^m \xrightarrow{y} K .$$

Wir können also die simpliziale Menge X identifizieren mit einem Unterkomplex von dem singulären Komplex $\mathrm{S}(K)$. $\square$

Beispiel. Sei, speziell, $K = \nabla^k$ der geordnete Simplizialkomplex, der aus dem Standard-Simplex der Dimension k und seinen Seiten besteht. Die m-dimensionalen Seiten sind in $1{:}1$ Beziehung zu den injektiven Abbildungen

$$\delta : \ [m] \longrightarrow [k] \quad ,$$

die Beziehung ist gegeben durch

$$\textit{Seite} \longmapsto \textit{Menge ihrer Ecken.}$$

Wenn wir zu der zugehörigen simplizialen Menge übergehen, so entsprechen die n-Simplizes darin nun, allgemein, den Abbildungen

$$\alpha : [n] \longrightarrow [k] .$$

Nämlich zu der Abbildung α gehört das “affine singuläre Simplex”

$$\alpha_* : \nabla^n \longrightarrow \nabla^k .$$

Es stellt sich heraus, daß man diese spezielle simpliziale Menge auch noch einfacher definieren kann, und zwar auf rein kombinatorische Weise:

Definition. Die simpliziale Menge *Standard-k-Simplex*, Notation Δ^k, ist gegeben durch

$$(\Delta^k)_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n], [k])$$

(die Menge der Abbildungen in Δ von $[n]$ nach $[k]$), und, für $\alpha : [n'] \to [n]$ in Δ, ist die induzierte Abbildung $\alpha^* : (\Delta^k)_n \to (\Delta^k)_{n'}$ gegeben durch Komposition,

$$\alpha^*(\ \beta : [n] \longrightarrow [k]\ ) \ := \qquad \beta\alpha : \ [n'] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\beta} [k] .$$

Der Simplizialkomplex “k-Simplex” hat einen Unterkomplex “Rand”, der gegeben ist durch die Vereinigung der eigentlichen Seiten. Dem entspricht hier eine Unter-simpliziale-Menge von Δ^k, die wir als den *Rand* von Δ^k bezeichnen, Notation $\partial\Delta^k$. Die Simplizes in $\partial\Delta^k$ sind gerade die Simplizes $[n] \to [k]$, die “über eine eigentliche Seite faktorisieren”, (d.h. über eine der Abbildungen $\delta_i : [k-1] \longrightarrow [k]$). Oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$(\partial\Delta^k)_n = \{\, \alpha : [n] \to [k] \mid \alpha \textit{ nicht } \text{surjektiv} \,\} .$$

Wie bei Räumen, so möchten wir auch hier nun eine "k-Sphäre" konstruieren, indem wir den 'Quotienten' von Δ^k nach $\partial\Delta^k$ bildet. Es ist nicht schwer, dem einen Sinn zu geben. Wir benötigen dafür (wie für andere Dinge auch) noch eine allgemeine Konstruktion:

Definition. Eine *Äquivalenzrelation auf einer simplizialen Menge* X bedeutet:

(i) eine Äquivalenzrelation auf jeder der Mengen X_n ,

(ii) wobei diese verträglich sind mit den Strukturabbildungen; d.h. wenn $x, x' \in X_n$ und $\alpha : [n'] \to [n]$, dann: $x \backsim x'$ in $X_n \implies \alpha^*(x) \backsim \alpha^*(x')$ in $X_{n'}$.

In dieser Situation können wir eine neue simpliziale Menge bilden,

$$(X/_{\backsim})_n \;:=\; X_n/_{\backsim} \qquad (+\ \textit{induzierte Strukturabbildungen}\,) .$$

Die Äquivalenzrelation " $\backsim$ " auf X induziert nun eine Äquivalenzrelation auf

$$\dot{\bigcup}_n \; X_n \times \nabla^n$$

und damit dann auch auf der geometrischen Realisierung $|X|$.

Satz. $\quad | \, X/_{\backsim} | \;\cong\; | \, X \, | /_{\backsim}$.

Beweis. Die beiden Äquivalenzrelationen " $\backsim$ ", sowie " $\sim$ " (aus der Konstruktion der geometrischen Realisierung), erzeugen zusammen eine Äquivalenzrelation " $\sim \vee \backsim$ ". Es ist dann

$$\begin{aligned} |X|/_{\backsim} \;&\cong\; \big(\dot{\bigcup}_n \; X_n \times \nabla^n \;/_{\sim} \big) \;/_{\backsim} \\ &\cong\; \quad \dot{\bigcup}_n \; X_n \times \nabla^n \;/_{\,\sim \vee \backsim} \\ &\cong\; \big(\dot{\bigcup}_n \; X_n \times \nabla^n \;/_{\backsim} \big) \;/_{\sim} \\ &\cong\; \quad | \, X/_{\backsim} | \; . \end{aligned}$$

□

Korollar. Ist X' Unter-simpliziale-Menge in X , dann können wir eine simpliziale Menge "Kollabieren von X' zu einem Punkt" bilden,

$$(\, X/X' \,)_n \;:=\; X_n/X'_n \qquad (+\ \textit{induzierte Strukturabbildungen}\,) .$$

Und es ist $| \, X/X' \, | \;\cong\; |X| \, / \, |X'|$.

Beispiel (*Konstruktion einer k-Sphäre*). $\quad \$^k \;:=\; \Delta^k/\partial\Delta^k \quad$ (wenn $k \geq 1$).

In Δ^k gibt es ein nicht-ausgeartetes Simplex, das nicht in $\partial\Delta^k$ liegt, nämlich $\mathrm{Id} : [k] \to [k]$. Alle anderen nicht-ausgearteten Simplizes liegen in $\partial\Delta^k$. Unter der Quotientenbildung gehen sie also nach $\partial\Delta^k / \partial\Delta^k \;\cong\; \Delta^0$ und werden demgemäß ausgeartete Simplizes, sofern ihre Dimension > 0 ist. In $\$^k$ gibt es deshalb nur zwei nicht-ausgeartete Simplizes, nämlich jeweils eines in den Dimensionen 0 und k . Es ist

$$| \, \$^k \, | \;\cong\; |\Delta^k| \, / \, |\partial\Delta^k| \;\cong\; \nabla^k/\partial\nabla^k \;\cong\; S^k \; .$$

Die resultierende Zellenstruktur der k-Sphäre folglich hat eine 0-Zelle und eine k-Zelle.

Es ist manchmal nützlich zu wissen, daß für simpliziale Mengen ein Analogon des *Zellenaufbaus* für CW-Komplexe existiert. Die Rolle des n-Balls (Modell für n-Zellen) wird dabei übernommen von der simplizialen Menge *Standard-n-Simplex*, Δ^n . Wir überlegen uns zunächst, daß zu jedem Simplex einer simplizialen Menge eine *repräsentierende Abbildung* gehört.

SATZ. *Sei X eine simpliziale Menge, $x \in X_n$ ein n-Simplex. Es gibt eine Abbildung von simplizialen Mengen*

$$\overline{x} : \ \Delta^n \ \longrightarrow \ X$$

mit der Eigenschaft

$$x \ = \ \textit{Bild des nicht-ausgearteten } n\textit{-Simplexes von } \Delta^n \ ;$$

diese Abbildung $\overline{x}$ ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Das ist fast eine Trivialität, wenn man es nur richtig hinschreibt. Für Δ^n haben wir nämlich die kanonische Beschreibung

$$(\Delta^n)_m \ = \ \mathrm{Hom}_\Delta(\, [m]\, , [n]\,)$$

wobei das nicht-ausgeartete n-Simplex von Δ^n dem Element

$$(\,\mathrm{Id}\colon\ [n] \to [n]\,) \ \in \ \mathrm{Hom}_\Delta(\, [n]\, , [n]\,)$$

entspricht. Wir definieren, $\overline{x}(\,\mathrm{Id} : [n] \to [n]\,) \ := \ x$. Die hypothetische Abbildung $\overline{x}$ ist hierdurch eindeutig bestimmt, wegen

$$\overline{x}(\,\alpha\colon\ [m] \to [n]\,) \ = \ \overline{x}(\,\alpha^*(\mathrm{Id}\colon\ [n] \to [n]\,)\,) \ = \ \alpha^*(\,\overline{x}(\,\mathrm{Id}\colon\ [n] \to [n]\,)\,) \ = \ \alpha^*(x)$$

(wobei die erste Gleichheit nach Definition der simplizialen Struktur von Δ^n besteht; und die zweite aufgrund der Tatsache, daß $\overline{x}$ eine Abbildung von simplizialen Mengen sein soll).

Wir können nun umgekehrt diese Formel auch als *Definition* von $\overline{x}$ nehmen: $\overline{x}$ ist dann eine Abbildung von simplizialen Mengen; der Test dafür, für $\beta\colon\ [\ell] \to [m]$, ist

$$\begin{aligned} \overline{x}(\,\beta^*(\,\alpha\colon\ [m] \to [n]\,)\,) \ &= \ \overline{x}(\,[\ell] \xrightarrow{\alpha\beta} [n]\,) \ = \ (\alpha\beta)^*(x) \\ &= \ \beta^*(\,\alpha^*(x)\,) \ = \ \beta^*(\,\overline{x}(\,\alpha\colon\ [m] \to [n]\,)\,) \ , \end{aligned}$$

m.a.W., das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\Delta^n)_m \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "\beta^*"'] & X_m \arrow[d, "\beta^*"] \\ (\Delta^n)_\ell \arrow[r, "\overline{x}"] & X_\ell \end{tikzcd}$$

kommutiert, wie verlangt. □

Die Abbildung $\overline{x}$ heißt auch die *repräsentierende Abbildung* von x .

Satz. *Die simpliziale Menge* X *ist isomorph* (in kanonischer Weise) *zu*

$$\dot{\bigcup}_n \; X_n \times \Delta^n \; /_\sim \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation erzeugt wird von der Vorschrift, daß für jedes $\gamma\colon [n] \to [p]$ *die Bilder der beiden Abbildungen*

$$X_n \times \Delta^n \xleftarrow{\gamma^* \times \mathrm{Id}} X_p \times \Delta^n \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \gamma_*} X_p \times \Delta^p$$

zu identifizieren sind; mit anderen Worten: für jedes y in X_p, für jede Dimension m und für jedes z in $(\Delta^n)_m$, ist

$$X_n \times (\Delta^n)_m \ni (\gamma^*(y), z) \sim (y, \gamma_*(z)) \in X_p \times (\Delta^p)_m$$

(hierbei ist $\gamma_* : \Delta^n \to \Delta^p$ die Abbildung von simplizialen Mengen, die definiert ist durch $\gamma_*(\alpha : [m] \to [n]) := \gamma\alpha$).

Beweis. Zunächst ist " $\sim$ " tatsächlich eine Äquivalenzrelation von simplizialen Mengen; denn sei $\beta : [\ell] \to [m]$ in Δ, und seien (y, m, z) und γ wie oben, dann ist

$$\beta^*(\gamma^*(y), z) = (\gamma^*(y), \beta^*(z)) \sim (y, \gamma_*\beta^*(z)) = (y, \beta^*\gamma_*(z)) = \beta^*(y, \gamma_*(z)) .$$

Die repräsentierenden Abbildungen für die n-Simplizes kann man zusammenfassen zu einer Abbildung

$$X_n \times \Delta^n \longrightarrow X \ ;$$

auf den m-Simplizes ist diese Abbildung gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} X_n \times \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n]) & \longrightarrow & X_m \\ (x, \alpha\colon [m] \to [n]) & \longmapsto & \alpha^*(x) \ . \end{array}$$

Durch weiteres Zusammenfassen all dieser Abbildungen erhalten wir eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \; X_n \times \Delta^n \longrightarrow X \ .$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv (wenn $x \in X_n$, dann ist $x = \overline{x}(\mathrm{Id}_{[n]})$).

Wir zeigen nun: (i) die Abbildung ist mit der Äquivalenzrelation verträglich; und (ii) nach Übergang zu Äquivalenzklassen wird die Abbildung ein Isomorphismus.

Zu (i). Sei γ wie oben. Sei auch (y, m, z) wie oben, $y \in X_p$, $z \in (\Delta^n)_m$,

$$z = (\alpha\colon [m] \to [n]) \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n]) \ .$$

Dann (nach Definition der repräsentierenden Abbildung von $\gamma^*(y)$)

$$(\gamma^*(y), z) \longmapsto \alpha^*(\gamma^*(y))$$

und andererseits

$$(y, \gamma_*(z)) = (y, [m] \xrightarrow{\gamma\alpha} [p]) \longmapsto (\gamma\alpha)^*(y) \ ,$$

was dasselbe ist (weil $(\gamma\alpha)^* = \alpha^* \circ \gamma^*$).

Zu (ii). Sei $x \in X_n$ und sei $(x\,,\,\alpha\colon [m] \to [n]\,)$ ein m-Simplex von $\dot{\bigcup} X_n \times \Delta^n$.

Ist α nicht surjektiv, etwa

$$\alpha \,=\, \gamma\,\alpha' \;:\qquad [m] \xrightarrow{\;\alpha'\;} [q] \xrightarrow{\;\gamma\;} [n]$$

(wo γ injektiv ist, aber nicht bijektiv), dann ist

$$(x,\alpha) \,=\, (\,x\,,\,\gamma_*(\alpha')\,) \;\sim\; (\,\gamma^*(x)\,,\,\alpha'\,)\;,$$

wo $\gamma^*(x) \in X_q$ und $q < n$ (ein einfacherer Repräsentant !).

Ist andererseits x ausgeartet, etwa $x = \delta^*(x')$ (wo $\delta\colon [n] \to [k]$ surjektiv ist, aber nicht bijektiv), dann ist

$$(x,\alpha) \,=\, (\,\delta^*(x')\,,\,\alpha\,) \;\sim\; (\,x'\,,\,\delta_*(\alpha)\,)$$

wo $x' \in X_k$ und $k < n$ (wieder ein einfacherer Repräsentant).

Es folgt, daß jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten (x,α) hat, mit

$$x \;\textit{nicht-ausgeartet}\;, \qquad \alpha \;\textit{surjektiv}\;.$$

Dieser Repräsentant ist aber eindeutig bestimmt. Denn das Bildsimplex $\alpha^*(x)$ von X bestimmt, wie wir wissen, in eindeutiger Weise das nicht-ausgeartete Simplex x und die Ausartungs-Abbildung α .

Wir haben gezeigt, daß die resultierende Abbildung auf den Äquivalenzklassen,

$$\dot{\bigcup}_n\; X_n \times \Delta^n \,/_{\sim} \;\longrightarrow\; X\;,$$

bijektiv ist. Aber eine bijektive Abbildung von simplizialen Mengen ist automatisch schon ein Isomorphismus (es ist automatisch so, daß die Umkehrabbildung mit den simplizialen Strukturabbildungen verträglich ist). □

Bemerkung. Geometrische Realisierung ist verträglich mit disjunkter Vereinigung und auch mit dem Übergang zu Äquivalenzklassen. Deshalb

$$|X| \;\cong\; |\;\dot{\bigcup}_n\; X_n \times \Delta^n \,/_{\sim}\;| \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\; X_n \times |\Delta^n| \,/_{\sim} \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\; X_n \times \nabla^n \,/_{\sim}\;.$$

Der Isomorphismus

$$X \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\; X_n \times \Delta^n \,/_{\sim}$$

ist so etwas wie das “kombinatorische Modell für die geometrische Realisierung”. □

Auch für simpliziale Mengen kann man eine *Skelett-Filtrierung* definieren.

Definition. Das n-*Skelett* von X ist definiert als die simpliziale Menge $\mathrm{Skel}_n(X)$ (eine Unter-simpliziale-Menge von X), deren k-Simplizes gegeben sind durch

$$\mathrm{Skel}_n(X)_k \;:=\; \{\, x \in X_k \;\mid\; x \text{ ist Ausartung von einem Simplex der Dimension } \le n \,\}\,.$$

Satz. *Es ist*

$$\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \;\cong\; \mathrm{Skel}_n(X)$$

wo J_n *die Menge der nicht-ausgearteten* n*-Simplizes bezeichnet.*

Beweis. Man hat eine Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot{\cup}\, J_n{\times}\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$. Auf dem Teil $\mathrm{Skel}(X)_{n-1}$ ist die Abbildung durch die Inklusion gegeben, und auf dem Teil $J_n \times \Delta^n$ durch die charakteristischen Abbildungen für die nicht-ausgearteten n-Simplizes.

Die Abbildung ist surjektiv. Denn wenn ein k-Simplex von $\mathrm{Skel}_n(X)$ nicht in $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$ liegt, dann muß es Ausartung von einem nicht-ausgearteten Simplex der Dimension n sein; es liegt dann im Bild von $J_n \times \Delta^n$.

Wir erklären eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot{\cup}\, J_n{\times}\Delta^n$ dadurch, daß wir für jedes Simplex aus der Unter-simplizialen-Menge $J_n{\times}\partial\Delta^n$ dessen Bild unter der Inklusion von $J_n{\times}\partial\Delta^n$ in $J_n{\times}\Delta^n$ zu äquivalent erklären mit dem Bild unter der Abbildung (Einschränkung der charakteristischen Abbildungen) $J_n \times \partial\Delta^n \to \mathrm{Skel}_{n-1}(X)$.

Die Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot{\cup}\, J_n \times\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$ ist mit der Äquivalenzrelation verträglich, sie faktorisiert deshalb über die Quotienten-simpliziale-Menge und definiert somit eine Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n{\times}\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$. Als Faktorisierung einer surjektiven Abbildung ist letztere Abbildung ebenfalls surjektiv.

Die Abbildung ist auch injektiv. Denn wenn ein Simplex in $J_n \times \Delta^n$ Dimension $\leq n{-}1$ hat, oder Ausartung von einem Simplex dieser Art ist, dann liegt es in $\partial\Delta^n$ und ist deshalb schon mit einem Simplex in $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$ durch die Äquivalenzrelation identifiert worden. Wenn andererseits ein Simplex von $J_n \times \Delta^n$ nicht in der Unter-simplizialen-Menge $\partial\Delta^n$ liegt, dann hat es in $\mathrm{Skel}_n(X)$ sicherlich nicht dasselbe Bild wie irgendein Simplex aus $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$, wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von Simplizes von X in der Form "Ausartung eines nicht-ausgearteten Simplexes".

Die Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$ ist also bijektiv und, wie früher schon festgestellt, deshalb ein Isomorphismus. □

Die Verträglichkeit von geometrischer Realisierung mit Äquivalenzrelationen ergibt

Korollar. *Sei* J_n *die Menge der nicht-ausgearteten* n*-Simplizes. Es ist*

$$|\,\mathrm{Skel}_{n-1}(X)\,| \;\cup_{J_n \times \partial\nabla^n} J_n \times \nabla^n \;\cong\; |\,\mathrm{Skel}_n(X)\,| \, .$$ □

Korollar. $|X|$ *ist CW-Komplex, mit* n*-Skelett* $|\,\mathrm{Skel}_n(X)\,|$.

Letzteres folgt, weil die simpliziale Menge X Quotient von der disjunkten Vereinigung

$$\mathrm{Skel}_0(X) \;\dot{\cup}\; \mathrm{Skel}_1(X) \;\dot{\cup}\; \mathrm{Skel}_2(X) \;\dot{\cup}\; \ldots$$

ist bezüglich der Äquivalenzrelation, die $\mathrm{Skel}_n(X)$ mit einer Unter-simplizialen-Menge von $\mathrm{Skel}_{n+1}(X)$ identifiziert, für alle n . Wegen der Verträglichkeit von geometrischer Realisierung mit Äquivalenzrelationen folgt, daß $|X|$ Quotientenraum von

$$|\,\mathrm{Skel}_0(X)\,| \;\dot{\cup}\; |\,\mathrm{Skel}_1(X)\,| \;\dot{\cup}\; |\,\mathrm{Skel}_2(X)\,| \;\dot{\cup}\; \ldots$$

bezüglich der entsprechenden Äquivalenzrelation ist. □

Homotopie (bei simplizialen Mengen)

Es geht darum, den Homotopiebegriff über die Konstruktionen

$$\text{top. Raum} \xmapsto{\text{sing. Komplex}} \text{simpliziale Menge} \xmapsto{\text{geom. Realisierung}} \text{top. Raum}$$

zu verfolgen und, später auch,

$$\text{simpliziale Menge} \longmapsto \text{Kettenkomplex, Homologie} .$$

Eine *Homotopie von Abbildungen topologischer Räume* ist, nach Definition, selbst eine Abbildung, nämlich

$$F : \ V \times [0,1] \longrightarrow W \ ,$$

wenn V und W die beteiligten topologischen Räume bezeichnen. Durch Übergang zu den singulären Komplexen erhalten wir hieraus eine Abbildung von simplizialen Mengen

$$\mathrm{S}(F) \ : \ \mathrm{S}(V \times [0,1]\,) \ \longrightarrow \ \mathrm{S}(W) \ .$$

Nun ist aber

$$\mathrm{S}(V \times [0,1]\,) \ \cong \ \mathrm{S}(V) \times \mathrm{S}(\,[0,1]\,)$$

(eine Abbildung von ∇^n in den Produktraum $V \times [0,1]$ ist dasselbe wie ein Paar von Abbildungen $\nabla^n \to V$ und $\nabla^n \to [0,1]$). Und die unerfreulich große simpliziale Menge $\mathrm{S}(\,[0,1]\,)$ enthält eine viel schönere kleinere, nämlich Δ^1 . Dies ist die Unter-simpliziale-Menge des “affinen singulären Komplexes”; vermöge der Identifikation $[0,1] \ \cong \ \nabla^1$ kann die Inklusion beschrieben werden als

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}(\nabla^1) \\ (\,\alpha\colon\ [n] \to [1]\,) & \longmapsto & (\,\alpha_*\colon\ \nabla^n \to \nabla^1\,) \ . \end{array}$$

Aus der Homotopie F und der obigen Abbildung $\mathrm{S}(F)$ erhalten wir also per Komposition eine Abbildung $\mathrm{S}(V) \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(W)$,

$$\mathrm{S}(V) \times \Delta^1 \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{S}(V) \times \mathrm{S}(\nabla^1) \xrightarrow{\approx} \mathrm{S}(V \times [0,1]\,) \xrightarrow{\mathrm{S}(F)} \mathrm{S}(W) \ .$$

Hierbei haben wir den Begriff des *Produktes* von simplizialen Mengen verwendet: das Produkt von X und X' ist, nach Definition, die simpliziale Menge

$$[n] \ \longmapsto \ (\,X \times X'\,)_n \ := \ X_n \times X'_n \ ,$$

wo die simplizialen Strukturabbildungen komponentenweise operieren.

Der Übergang von topologischen Räumen zu simplizialen Mengen vermöge von

$$X \longmapsto \mathrm{S}(X)$$

wird also "Homotopie" respektieren, wenn wir die folgende Definition zugrunde legen.

DEFINITION. Seien X und Y simpliziale Mengen. Eine *Homotopie von Abbildungen von X nach Y* soll eine Abbildung von simplizialen Mengen sein,

$$G: \ X \times \Delta^1 \longrightarrow Y \ .$$

Und zwar ist G eine *Homotopie von* $g_0 : X \to Y$ *zu* $g_1 : X \to Y$, wo g_i die zusammengesetzte Abbildung

$$X \ \cong \ X \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \times j_i} X \times \Delta^1 \xrightarrow{\quad G \quad} Y$$

bezeichnet, und $j_i : \Delta^0 \to \Delta^1$ die beiden Inklusionen.

BEMERKUNG. Homotopie in diesem Sinne ist i.a. *keine* Äquivalenzrelation: die Relation "es gibt eine Homotopie von g_0 zu g_1" braucht weder symmetrisch noch transitiv zu sein (vgl. Übungen). □

Unter der geometrischen Realisierung geht dieser Homotopiebegriff in den üblichen über, d.h. eine Abbildung $X \times \Delta^1 \longrightarrow Y$ induziert eine Abbildung $|X| \times |\Delta^1| \longrightarrow |Y|$. Das ist ein ganz und gar nicht-trivialer Sachverhalt, er beruht auf dem folgenden Satz.

SATZ. *Für jede simpliziale Menge X ist die natürliche Abbildung*

$$|\, X \times \Delta^1 \,| \ \longrightarrow \ |X| \times |\Delta^1|$$

eine topologische Äquivalenz.

Die in dem Satz genannte Abbildung hat dabei die folgende Beschreibung. Sie entspricht einem Paar von Abbildungen $|\, X \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |X|$ und $|\, X \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |\Delta^1|$. Diese beiden Abbildungen sind, nach Definition, gegeben durch die geometrische Realisierung der ersten Projektion, $X \times \Delta^1 \to X$, und die geometrische Realisierung der zweiten Projektion, $X \times \Delta^1 \to \Delta^1$.

Zum Beweis des Satzes muß ein spezieller Fall gesondert nachgerechnet werden, dessen Beweis wir auf später verschieben.

LEMMA. *Die natürliche Abbildung* $|\, \Delta^n \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |\Delta^n| \times |\Delta^1|$ *ist eine topologische Äquivalenz.*

BEWEIS DES SATZES. Wir benutzen die oben erhaltene Isomorphie

$$X \ \cong \ \dot{\bigcup}_n \, X_n \times \Delta^n \, / \sim$$

sowie die Tatsache, daß die geometrische Realisierung verträglich ist mit

- disjunkter Vereinigung
- Übergang zu Quotienten (–räumen).

Es ist

$$
\begin{array}{lcl}
 & \big|\, X \times \Delta^1 \,\big| & \cong \; \big|\, \big(\, \dot{\bigcup}_n \, X_n \times \Delta^n \,/\sim \big) \times \Delta^1 \,\big| \\
\text{(induzierte Äquivalenzrelation)} & & \cong \; \big|\, \big(\, \dot{\bigcup}_n \, (X_n \times \Delta^n \times \Delta^1)\,\big) /\sim \,\big| \\
\text{(Kompatibilität mit disj. Verein. und Quot.)} & & \cong \; \dot{\bigcup}_n \, X_n \times |\, \Delta^n \times \Delta^1 \,| \,/\sim \\
\text{(Lemma)} & & \cong \; \dot{\bigcup}_n \, X_n \times |\Delta^n| \times |\Delta^1| \,/\sim \\
\text{(}|\Delta^1|\text{ kompakt)} & & \cong \; \big(\, \dot{\bigcup}_n \, X_n \times |\Delta^n| /\sim \big) \times |\Delta^1| \\
 & & \cong \; |X| \times |\Delta^1| \; .
\end{array}
$$

Zu zeigen ist noch, daß der aus dieser Kette durch Zusammensetzen resultierende Isomorphismus durch die natürliche Abbildung gegeben ist, wie behauptet. Nun ist aber jeder der obigen Isomorphismen verträglich mit der Projektion zu $|X|$, deshalb haben wir ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
|\, X \times \Delta^1 \,| \arrow[r, "\text{konstruierter Isomorphismus}"] \arrow[d] & |X| \times |\Delta^1| \arrow[d] \\
|X| \arrow[r, "="] & |X|
\end{tikzcd}
$$

wo die vertikalen Pfeile von der ersten Projektion induziert sind.

Ähnlich haben wir auch ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
|\, X \times \Delta^1 \,| \arrow[r, "\text{konstruierter Isomorphismus}"] \arrow[d] & |X| \times |\Delta^1| \arrow[d] \\
|\Delta^1| \arrow[r, "="] & |\Delta^1|
\end{tikzcd}
$$

wo die vertikalen Pfeile von der zweiten Projektion induziert sind.

Durch die Kombination dieser beiden Diagramme erhalten wir nun ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
|\, X \times \Delta^1 \,| \arrow[r, "\text{konstruierter Isomorphismus}"] \arrow[d] & |X| \times |\Delta^1| \arrow[d] \\
|X| \times |\Delta^1| \arrow[r, "="] & |X| \times |\Delta^1|
\end{tikzcd}
$$

in dem der rechte vertikale Pfeil als seine Komponenten die beiden Projektionen hat. Der rechte vertikale Pfeil ist also die identische Abbildung auf $|X| \times |\Delta^1|$. Es folgt, daß der konstruierte Isomorphismus (der obere waagerechte Pfeil) gleich der durch den linken vertikalen Pfeil gegebenen Abbildung ist; also gleich der natürlichen Abbildung, wie gewünscht. $\square$

Zusatz S. 97

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\, X \times \Delta^1 \,| & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X| \times |\Delta^1| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |X| & \xrightarrow{=} & |X| \end{array}$$

kann man, etwas formaler, bekommen indem man die eingangs benutzte Kette von Umformungen noch einmal hinschreibt; wobei aber Δ^1 durch Δ^0 ersetzt ist:

$$\begin{aligned} |\, X \times \Delta^0 \,| \quad & \cong \quad \left|\, \left(\dot{\bigcup}_n X_n \times \Delta^n / \sim \right) \times \Delta^0 \,\right| \\ & \cong \quad \left|\, \left(\dot{\bigcup}_n (X_n \times \Delta^n \times \Delta^0) \right) / \sim \,\right| \\ & \cong \quad \dot{\bigcup}_n X_n \times |\, \Delta^n \times \Delta^0 \,| \;/ \sim \\ & \cong \quad \dot{\bigcup}_n X_n \times |\Delta^n| \times |\Delta^0| \;/ \sim \\ & \cong \quad \left(\dot{\bigcup}_n X_n \times |\Delta^n| / \sim \right) \times |\Delta^0| \\ & \cong \quad |X| \times |\Delta^0| \;. \end{aligned}$$

— was natürlich nichts anderes ist als eine Folge von Beschreibungen von $|X|$ selbst. Die Abbildung $\Delta^1 \to \Delta^0$ gibt dann die (vertikale) Abbildung

$$|\, X \times \Delta^1 \,| \to |\, X \times \Delta^0 \,| = |X| \qquad \text{bzw.} \qquad |X| \times |\Delta^1| \to |X| \times |\Delta^0| = |X| \;.$$

Ähnlich kann man auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\, X \times \Delta^1 \,| & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X| \times |\Delta^1| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\Delta^1| & \xrightarrow{=} & |\Delta^1| \end{array}$$

in solcher Weise interpretieren. Man schreibt die obige Kette von Umformungen noch einmal hin für den Fall $X' = \Delta^0$; und benutzt dann die Abbildung $X \to \Delta^0$.

Beweis des Lemmas. Um einzusehen, daß $|\Delta^n \times \Delta^1| \xrightarrow{\approx} |\Delta^n| \times |\Delta^1|$, werden wir das 'Prisma' $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ in Simplizes zerlegen (das heißt, als Simplizialkomplex darstellen) und anschließend uns dann davon überzeugen, daß die simpliziale Menge $\Delta^n \times \Delta^1$ in ganz ähnlicher Weise in simpliziale Mengen vom Typ "Standard-Simplex" zerlegt werden kann.

Für die Diskussion von Simplizialkomplexen begeben wir uns in einen euklidischen Raum. Wir identifizieren also $|\Delta^n|$ mit einem Simplex in $\mathbb{R}^n$ und $|\Delta^1|$ mit dem Einheitsintervall in $\mathbb{R}^1$. Das Produkt $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ wird dadurch zu einem Prisma in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$.

Im einzelnen seien dazu $v_0, v_1, \ldots, v_n$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $(v_0, 0), \ldots, (v_n, 0)$ und $(v_0, 1), \ldots, (v_n, 1)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ seien abkürzend mit $v'_0, \ldots, v'_n$ und $v''_0, \ldots, v''_n$ bezeichnet. Für jedes i, wo $0 \leq i \leq n$, ist es nun richtig, daß

$$v'_0, \ldots, v'_i, v''_i, \ldots, v''_n$$

affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ sind, so daß also

$$S_i \ := \ \mathrm{Simp}(v'_0, \ldots, v'_i, v''_i, \ldots, v''_n)$$

ein affines Simplex der Dimension $n{+}1$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ ist. Dieses Simplex ist enthalten in dem uns interessierenden Produktraum

$$P \ := \ \mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n) \times [0,1] \ ,$$

denn der Produktraum ist konvex, er enthält die Punkte $v'_0, \ldots, v'_i, v''_i, \ldots, v''_n$, und er enthält damit auch deren konvexe Hülle.

Wir werden uns nun davon überzeugen, daß die Simplizes S_i, $0 \leq i \leq n$, eine Darstellung von P als Simplizialkomplex geben. Dazu werden wir nachprüfen, daß die Vereinigung der S_i das ganze Prisma P ist und daß die S_i die Durchschnittsbedingung erfüllen (der Durchschnitt von je zweien ist gemeinsame Seite von beiden); tatsächlich werden wir sehen, daß, für $i < j$, der Durchschnitt von S_i und S_j dasjenige Simplex ist, das von der Eckenmenge $v'_0, \ldots, v'_i, v''_j, \ldots, v''_n$ aufgespannt wird.

Dies sagt insbesondere auch, S_i und S_{i+1} treffen sich in einem n-Simplex (nämlich dem von $v'_0, \ldots, v'_i, v''_{i+1}, \ldots, v''_n$ aufgespannten), und dieses n-Simplex ist die Seite mit der Nummer $i{+}1$ sowohl von S_i als auch von S_{i+1} (Weglassen von v''_i, beziehungsweise von v'_{i+1}).

Wir benutzen eine andere Darstellung von Punkten in einem Simplex. Nämlich zusätzlich zu der Darstellung der Punkte aus $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$ in baryzentrischen Koordinaten,

$$\{ \ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \in \mathbb{R}^n \ \mid \ t_i \geq 0 \ , \ \textstyle\sum t_i = 1 \ \} \ ,$$

haben wir auch eine Darstellung in Form einer aufsteigenden Folge

$$0 = a_0 \ \leq \ a_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ a_n \ \leq \ a_{n+1} = 1 \ .$$

Die Beziehung ist, daß

$$a_{i+1} \ = \ t_0 + \cdots + t_i$$

und, demgemäß,

$$t_0 \;=\; a_1 - a_0 \;,\quad t_1 \;=\; a_2 - a_1 \;,\quad \ldots\ldots \;,\quad t_n \;=\; a_{n+1} - a_n \;\;.$$

Für die Punkte aus $|\Delta^{n+1}|$ haben wir die analoge Darstellung als Folgen

$$0 = b_0 \;\le\; b_1 \;\le\; \cdots \;\le\; b_{n+1} \;\le\; b_{n+2} = 1 \;\;.$$

Die i-te Ecke von $|\Delta^{n+1}|$, für $0 \le i \le n{+}1$, entspricht dabei der Folge

$$0 \le \cdots \le 0 \;\le\; 1 \le \cdots \le 1$$

mit $i+1$ Nullen und $n{-}i+1$ Einsen.

Wenn wir also, für $0 \le i \le n$, eine Abbildung $f_i : \; |\Delta^{n+1}| \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ definieren,

$$\begin{aligned} 0 = b_0 \;\le\; b_1 \;\le\; \cdots \;\le\; b_{n+1} \;\le\; b_{n+2} = 1 \quad &\longmapsto \\ &(b_1{-}b_0)\, v_0' + \cdots + (b_{i+1}{-}b_i)\, v_i' \;+\; (b_{i+2}{-}b_{i+1})\, v_i'' + \cdots + (b_{n+2}{-}b_{n+1})\, v_n'' \;, \end{aligned}$$

so gehen die Ecken von $|\Delta^{n+1}|$ unter der Abbildung gerade auf die Ecken von dem Simplex S_i. Das Simplex S_i ist also gleich dem Bild der Abbildung f_i.

Etwas mißbräuchlich wollen wir weiter f_i für diese Abbildung schreiben, wenn wir sie, andererseits, auffassen als eine Abbildung in den durch das Prisma gegebenen Unterraum. Die Abbildung hat dann die Beschreibung[1]

$$f_i : \; |\Delta^{n+1}| \;\longrightarrow\; \mathrm{Simp}(v_0 \,, \ldots , v_n) \times [0,1]$$

$$\begin{aligned} 0 = b_0 \;\le\; b_1 \;\le\; \cdots \;\le\; b_{n+1} \;\le\; b_{n+2} = 1 \quad &\longmapsto \\ &\big(\; 0 = b_0 \le \cdots \le b_i \;\le\; b_{i+2} \le \cdots \;\le\; b_{n+2} = 1 \;\;,\quad 1 - b_{i+1} \;\big) \;\;. \end{aligned}$$

Man sieht auf diese Weise, daß das ganze Prisma im Bild der Abbildungen f_i ist (genauer: es ist enthalten in der Vereinigung der Bilder der f_i). Denn sei (x,t) gegeben,

$$(\,x\,,\,t\,) \quad=\quad (\; 0 = a_0 \;\le\; a_1 \;\le\; \cdots \;\le\; a_n \;\le\; a_{n+1} = 1 \;\;,\quad t\;) \;\;.$$

Es gibt dann ein i so daß $a_i \le 1{-}t \le a_{i+1}$, und (x,t) ist nun das Bild von

$$0 = b_0 \;\le\; b_1 \;\le\; \cdots \;\le\; b_{n+1} \;\le\; b_{n+2} = 1$$

unter der Abbildung f_i, wo

$$b_j \quad=\quad \begin{cases} a_j & j \le i \\ 1{-}t & j = i{+}1 \\ a_{j-1} & j \ge i{+}2 \;. \end{cases}$$

Das Einsortieren von $1{-}t$ in die Folge der a's geht allerdings nicht in allen Fällen auf eindeutige Weise. Wenn nämlich $1{-}t \;=\; a_{i+1}$, dann kann $1{-}t$ sowohl vor als auch

[1] Denn die folgende Formel sagt z.B., daß diese Abbildung, gefolgt von der ersten Projektion, die j–te Ecke auf die j–te Ecke abbildet, wenn $j \le i$; aber die j–te Ecke auf die $(j-1)$–te, wenn $j > i$. Das charakterisiert die Abbildung $\mathrm{pr}_1 \circ f_i$. Ähnlich auch mit der zweiten Projektion.

nach a_{i+1} einsortiert werden. Die zugehörige Folge der b's hat dann die Eigenschaft, daß

$$b_{i+1} = b_{i+2} \ .$$

Diese Eigenschaft charakterisiert die Punkte der $(i+1)$-ten Seite. Es resultiert, daß der Durchschnitt von S_i und S_{i+1} ein Simplex ist, und zwar die $(i+1)$-te Seite von beiden.

Allgemeiner gilt auch, aus demselben Grund, daß der Durchschnitt von S_i und S_j, für $i < j$, ein Simplex ist; nämlich diejenige Seite, die nicht die Ecken mit den Nummern $i+1$ bis j enthält. Die Punkte darin entsprechen den Folgen der b's mit $b_{i+1} = \cdots = b_{j+1}$.

Wir haben erhalten, daß der Produktraum $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ ein Simplizialkomplex ist; und zwar haben wir, schematisch, eine Beschreibung als Verklebekonstruktion

$$\nabla^{n+1} \cup_{\nabla^n} \nabla^{n+1} \cup_{\nabla^n} \cdots \cup_{\nabla^n} \nabla^{n+1}$$

mit $n+1$ Simplizes ∇^{n+1}, numeriert von 0 bis n. Dabei sind die beiden Simplizes mit den Nummern i und $i+1$ (wo $0 \leq i$ und $i+1 \leq n$) entlang ihrer $(i+1)$-ten Seiten miteinander verklebt.

Der ersten Projektion $|\Delta^n| \times |\Delta^1| \longrightarrow |\Delta^n|$ entspricht die Abbildung auf dem verklebten Raum, die auf dem Simplex mit der Nummer i gegeben ist durch die Ausartungsabbildung $\nabla^{n+1} \to \nabla^n$, bei der (im Bild) die Ecke mit der Nummer i zweimal getroffen wird. In der Beschreibung von Punkten durch aufsteigende Folgen entspricht dies der Abbildung, die aus der Folge

$$0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1$$

den Term b_{i+1} wegläßt.

Der zweiten Projektion $|\Delta^n| \times |\Delta^1| \longrightarrow |\Delta^1|$ entspricht, analog, eine Abbildung auf dem verklebten Raum, die auf jedem der Simplizes eine bestimmte Ausartungsabbildung $\nabla^{n+1} \to \nabla^1$ ist. Nämlich von dem Simplex mit der Nummer i werden die Ecken mit den Nummern 0 bis i alle auf die Ecke mit der Nummer 0 in ∇^1 abgebildet; und die restlichen auf die Ecke mit der Nummer 1.

Es bleibt, die analoge Analyse von dem Produkt von simplizialen Mengen, $\Delta^n \times \Delta^1$, zu machen. Das ist, seltsamerweise, leichter. Der Trick ist, daß man diese simpliziale Menge als den “affinen singulären Komplex” von $\nabla^n \times \nabla^1$ auffassen kann und daß man die “affinen singulären Simplizes” wieder über Ordnungsrelationen beschreiben kann.

Es soll, wie früher auch, $[n]$ die geordnete Menge $\{\, 0 < \cdots < n \,\}$ bezeichnen. Wir wollen *geordnete Mengen* jetzt als einen Spezialfall von *partiell geordneten Mengen* auffassen. Das heißt, es gelten die üblichen Regeln

$$a \leq b \, , \ b \leq c \implies a \leq c \quad \text{und} \quad a \leq b \, , \ b \leq a \iff a = b \ ,$$

aber es muß nicht für je zwei Elemente immer eine Relation bestehen.

Das Produkt $[n] \times [1]$ ist keine geordnete Menge mehr, es ist aber immer noch eine partiell geordnete Menge; nämlich die partiell geordnete Menge der Paare

$$(i,j) \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \quad 0 \leq j \leq 1 \ ,$$

mit der Anordnung

$$(i,j) \ \leq \ (i',j') \quad \Longleftrightarrow \quad i \ \leq \ i' \text{ und } j \ \leq \ j' \ .$$

Einer ordnungserhaltenden Abbildung $[k] \longrightarrow [n] \times [1]$ entspricht nun eine Folge

$$(i_0,j_0) \ \leq \ (i_1,j_1) \ \leq \ \ldots \ \leq \ (i_k,j_k)$$

oder, was offenbar dasselbe ist, ein Paar von Folgen

$$i_0 \ \leq \ i_1 \ \leq \ \ldots \ \leq \ i_k \quad , \quad j_0 \ \leq \ j_1 \ \leq \ \ldots \ \leq \ j_k \ ;$$

mit anderen Worten: ein Paar von Abbildungen $[k] \to [n]$ und $[k] \to [1]$.

Wenn wir also mit "$\mathrm{Hom}_{\mathit{Ord}}$" die Menge der ordnungserhaltenden Abbildungen bezeichnen, so haben wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathit{Ord}}(\,[k]\,,\,[n] \times [1]\,) \ \xrightarrow{\ \approx\ } \ (\Delta^n)_k \times (\Delta^1)_k \ = \ (\Delta^n \times \Delta^1)_k \ .$$

Der Isomorphismus ist verträglich mit *Rand*-Abbildungen (Weglassen von Termen) und *Ausartungs*-Abbildungen (Mehrfach-Nennung von Termen). Die simpliziale Menge $\Delta^n \times \Delta^1$ haben wir also nun vollkommen beschrieben mit Hilfe von partiell geordneten Mengen.

Die gewünschte Beziehung zu simplizialen Mengen vom Typ "Standard-Simplex" werden wir über die Betrachtung von *total geordneten Teilmengen* von $[n] \times [1]$ bekommen; das heißt, solchen Teilmengen, wo für jedes Paar von Elementen die Ordnungsrelation definiert ist (anders gesagt, wenn a und b Elemente sind, dann ist es entweder richtig, daß $a \leq b$ oder daß $b \leq a$).

Sei M eine Teilmenge in $[n] \times [1]$. Wenn M ein Element $(i,1)$ enthält, dann sind alle *größeren* Elemente in M ebenfalls von der Art $(i',1)$. Wenn umgekehrt M ein Element $(i,0)$ enthält, dann sind alle *kleineren* Elemente in M auch von der Art $(i',0)$. Wenn also M eine total geordnete Teilmenge in $[n] \times [1]$ ist, so folgt, daß M schon ganz enthalten ist in einer Teilmenge der Art

$$(\,0\,,\,0\,) \ < \ \ldots \ < \ (\,i\,,\,0\,) \ < \ (\,i\,,\,1\,) \ < \ \ldots \ < \ (\,n\,,\,1\,) \ .$$

Wir werden diese Teilmenge auffassen als das Bild von $[n{+}1]$ bezüglich einer injektiven Abbildung $g_i : [n{+}1] \longrightarrow [n] \times [1]$.

Wenn nun M sowohl im Bild von g_i liegt als auch im Bild von $g_{i'}$, wo $i < i'$, dann ist M notwendigerweise enthalten in der Teilmenge

$$(\,0\,,\,0\,) \ < \ \ldots \ < \ (\,i\,,\,0\,) \ < \ (\,i'\,,\,1\,) \ < \ \ldots \ < \ (\,n\,,\,1\,) \ .$$

Insbesondere liegt M in dem Fall schon im Bild der Inklusion $g_i\,\delta_{i+1} = g_{i+1}\,\delta_{i+1}$,

$$g_i\,\delta_{i+1} : \quad [n] \ \xrightarrow{\ \delta_{i+1}\ } \ [n{+}1] \ \xrightarrow{\ g_i\ } \ [n] \times [1] \ .$$

Die von der Abbildung g_i induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{Ord}(\,[k]\,,\,[n{+}1]\,) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ord}(\,[k]\,,\,[n]\times[1]\,)\ ,$$

ist injektiv und ist, für variables k, mit Rand- und Ausartungs-Abbildungen verträglich. Wir haben also eine Inklusion

$$g_{i*}:\ \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n\times\Delta^1\ .$$

Wegen der Identitäten $g_i\,\delta_{i+1} = g_{i+1}\,\delta_{i+1}$ setzen diese Inklusionen sich zusammen zu einer Abbildung auf der 'zusammengeklebten' simplizialen Menge

$$\Delta^{n+1}\cup_{\Delta^n}\Delta^{n+1}\cup_{\Delta^n}\ \dots\ \cup_{\Delta^n}\Delta^{n+1}\ ,$$

das heißt, derjenigen simplizialen Menge, die aus der disjunkten Vereinigung von $n{+}1$ Exemplaren Δ^{n+1}, numeriert von 0 bis n, dadurch entsteht, daß für jedes Paar $(\,i\,,i{+}1\,)$ (wo $0\le i$ und $i{+}1\le n$) die beiden Unter-simplizialen-Mengen $\delta_{i+1}(\Delta^n)$ in den durch i und $i{+}1$ numerierten Exemplaren Δ^{n+1} zu identifizieren sind.

Nun ist es so, daß jede Abbildung $[k]\longrightarrow[n]\times[1]$ faktorisiert als eine Surjektion, gefolgt von einer Injektion; und zwar in eindeutiger Weise. Deshalb überträgt sich das oben über Teilmengen gesagte auch auf Abbildungen. Das Resultat ist, daß die Abbildung

$$\Delta^{n+1}\cup_{\Delta^n}\Delta^{n+1}\cup_{\Delta^n}\ \dots\ \cup_{\Delta^n}\Delta^{n+1}\ \longrightarrow\ \Delta^n\times\Delta^1$$

sowohl surjektiv als auch injektiv, also ein Isomorphismus ist.

Geometrische Realisierung ergibt einen weiteren Isomorphismus

$$|\Delta^{n+1}|\cup_{|\Delta^n|}\ \dots\ \cup_{|\Delta^n|}|\Delta^{n+1}|\ \approx\ |\,\Delta^{n+1}\cup_{\Delta^n}\ \dots\ \cup_{\Delta^n}\Delta^{n+1}\,|\ \longrightarrow\ |\Delta^n\times\Delta^1|\ .$$

Seine Zusammensetzung mit dem früher konstruierten Isomorphismus

$$\nabla^{n+1}\cup_{\nabla^n}\cdots\cup_{\nabla^n}\nabla^{n+1}\ \longrightarrow\ |\Delta^n|\times|\Delta^1|$$

liefert nun den Isomorphismus $|\Delta^n\times\Delta^1|\approx|\Delta^n|\times|\Delta^1|$, den das Lemma behauptet.

Der Isomorphismus ist mit den Projektionen zu $|\Delta^n|$ und $|\Delta^1|$ verträglich. Denn was z.B. die erste Projektion angeht, so wurde früher festgestellt, daß die zusammengesetzte Abbildung

$$|\Delta^{n+1}|\ \xrightarrow{\ i-\text{te Inklusion}\ }\ |\Delta^n|\times|\Delta^1|\ \xrightarrow{\ \text{erste Projektion}\ }\ |\Delta^n|$$

diejenige Standard-Abbildung ist, bei der die i-te Ecke im Bild zweimal getroffen wird. Bei dem nun konstruierten Isomorphismus von simplizialen Mengen hat die zusammengesetzte Abbildung

$$\Delta^{n+1}\ \xrightarrow{\ i-\text{te Inklusion}\ }\ \Delta^n\times\Delta^1\ \xrightarrow{\ \text{erste Projektion}\ }\ \Delta^n$$

offenbar dieselbe Beschreibung.

Der Beweis des Lemmas (und auch der des Satzes) ist damit abgeschlossen. $\square$

Homotopie (bei Kettenkomplexen)

Sei A eine abelsche Gruppe (die "Koeffizienten"-Gruppe). Der Übergang von einer simplizialen Menge X zum "Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in A" ist, nach Definition, die folgende Konstruktion. Der simplizialen Menge X ist zugeordnet die Folge der abelschen Gruppen

$$A[X_n] \ := \ \left\{ \ \sum a_i\, x_i \ \middle| \ x_i \in X_n\,, \ a_i \in A \ \right\} \qquad \big(\text{endliche Summen (bis auf eine Äq.rel.)}\big)$$

mit den "Rand"-Homomorphismen ∂_n (oder, kurz, ∂)

$$\begin{aligned} \partial : \ \ A[X_n] &\longrightarrow A[X_{n-1}] \\ \textstyle\sum_k \ a_k\, x_k &\longmapsto \textstyle\sum_k \ \sum_i \ (-1)^i \ a_k \ d_i(x_k) \end{aligned}$$

Eine Homotopie für Abbildungen von simplizialen Mengen, von X nach Y, ist ihrerseits definiert als eine Abbildung von (anderen) simplizialen Mengen, nämlich als eine Abbildung $F : X \times \Delta^1 \longrightarrow Y$. Sie induziert damit eine Abbildung von Kettenkomplexen, nämlich die Abbildung, die in der Dimension n gegeben ist durch

$$F_n : \ A[\,(X \times \Delta^1)_n\,] \ = \ A[\,X_n \times (\Delta^1)_n\,] \ \longrightarrow \ A[Y_n]$$

(lineare Fortsetzung der Abbildung F).

Wir erwarten, daß wir in dieser Situation die Abbildung F_* wieder als *Homotopie* interpretieren können (was immer das heißen mag), und zwar als eine Homotopie zwischen den beiden Abbildungen $(f_0)_*$ und $(f_1)_*$

$$(f_i)_* : \ \ A[X] \cong A[X \times \Delta^0] \xrightarrow{\ \mathrm{Id}_X \times \iota_i\ } A[X \times \Delta^1] \ \longrightarrow \ A[Y] \ ,$$

wo $\iota_i : \Delta^0 \to \Delta^1$ die beiden Inklusionen bezeichnet.

Behauptung. *Es gibt in dieser Situation eine Folge von Abbildungen*

$$(P_F)_n \ : \ A[X_n] \ \longrightarrow \ A[Y_{n+1}]$$

so daß

$$\partial\,(P_F)_n \ = \ (-1)\ (P_F)_{n-1}\,\partial \ + \ (f_1)_n \ - \ (f_0)_n \ .$$

Bemerkung. Der Buchstabe P steht für *Prisma*. Der Rand von einem Prisma besteht aus den drei Teilen *Deckel*, *Seite*, *Boden*. Diese drei Teile entsprechen (in dieser Reihenfolge) den Einträgen f_1, $P_F\,\partial$, f_0 in der Formel.

Beweis der Behauptung. Für jedes n-Simplex $x \in X_n$ haben wir eine Folge von $(n+1)$-Simplizes in $X_{n+1} \times (\Delta^1)_{n+1}$, nämlich

$$(s_i(x)\,,\,\alpha_i)\;, \quad i = 0\,, \ldots, \,n\;,$$

wo $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_\Delta(\,[n+1]\,,\,[1]\,)$ diejenige Abbildung bezeichnet, bei der i und $i+1$ verschiedene Werte annehmen, d.h.

$$(\,\alpha_i(0), \ldots, \alpha_i(i)\,,\,\alpha_i(i+1), \ldots, \alpha_i(n+1)\,) \quad = \quad (0, \ldots, 0\,,\,1, \ldots, 1)\;.$$

(Diese Simplizes sind die Bilder der nicht-ausgearteten $(n+1)$-Simplizes von $\Delta^n \times \Delta^1$ unter der Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \to X \times \Delta^1$, die von $\overline{x} : \Delta^n \to X$, der charakteristischen Abbildung des n-Simplexes x, induziert ist.)

Für später merken wir an, daß ein Rand $d_j(\alpha_i)$ wieder vom Typ α_i ist, wenn $j \geq i+1$; sonst aber vom Typ α_{i-1}. Allerdings sind zwei extreme Fälle von dieser Beschreibung ein wenig auszunehmen; man hat nämlich

$$d_0(\alpha_0)\;(=\alpha_{-1}\,) \;=\; (1, \ldots, 1)\;,\quad d_{n+1}(\alpha_n) \;=\; (0, \ldots, 0)\;.$$

Wir *definieren* jetzt

$$(P_F)_n(\,x\,) \;:=\; \sum_{i=0}^{n} \;(-1)^i\; F_{n+1}(\,s_i(x)\,,\,\alpha_i\,)\;.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial\,(P_F)_n(\,x\,) \quad &= \quad \sum_j\,(-1)^j\,d_j\,\sum_i\,(-1)^i\;F_{n+1}(\,s_i(x)\,,\,\alpha_i\,) \\ &= \quad \sum_{j<i} \;+\; \sum_{j>i+1} \;+\; \sum_{j=i} \;+\; \sum_{j=i+1}\;. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von $d_j\,F_{n+1} \;=\; F_n\,d_j$ (F ist Abbildung von simplizialen Mengen) und unter Benutzung der Identitäten

$$\begin{aligned} d_j\,s_i \;&=\; s_{i-1}\,d_j \quad \text{wenn} \quad j < i\,, \\ d_j\,s_i \;&=\; s_i\,d_{j-1} \quad \text{wenn} \quad j > i+1 \quad \text{und} \\ d_i\,s_i \;&=\; d_{i+1}\,s_i \;=\; \mathrm{Id}\;, \end{aligned}$$

können wir dies nun schreiben als die Summe der beiden Terme

$$\sum_{j<i}\,(-1)^{j+i}\,F_n(\,s_{i-1}\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_{i-1}\,) \quad + \quad \sum_{j>i+1}(-1)^{j+i}\,F_n(\,s_i\,d_{j-1}(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,)$$

und

$$\sum_i (-1)^{i+i}\,F_n(\,x\,,\,\alpha_{i-1}\,) \quad + \quad \sum_i (-1)^{i+i+1}\,F_n(\,x\,,\,\alpha_i\,)$$
$$\Big(\;=\; F_n(\,x\,,\,\alpha_{-1}\,) - F_n(\,x\,,\,\alpha_n\,) \;\Big)\,.$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
(P_F)_{n-1}\,\partial(\,x\,) \;&=\; \sum_i\,(-1)^i\,\sum_j\,(-1)^j\,F_n(\,s_i\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,) \\
&=\; \sum_{j\le i} \;+\; \sum_{j\ge i+1} \\
(\,i{+}1 \text{ statt } i\,) \qquad &=\; \sum_{j<i}\,(-1)^{j+i+1}\,F_n(s_{i-1}\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_{i-1}\,) \\
(\,j{+}1 \text{ statt } j\,) \qquad &\quad +\; \sum_{j>i+1}\,(-1)^{j+i+1}\,F_n(s_i\,d_{j-1}(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,)\ .
\end{aligned}
$$

Der Vergleich dieser Formeln ergibt

$$
\begin{aligned}
\partial\,(P_F)_n(x) \,+\, (P_F)_{n-1}\,\partial(x) \;&=\; F_n(\,x\,,\,\alpha_{-1}\,) \,-\, F_n(\,x\,,\,\alpha_n\,) \\
&=\; (f_1)_n(x) \,-\, (f_0)_n(x)\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Den soeben nachgerechneten Sachverhalt nimmt man zum Anlaß für die folgende Definition.

Definition. Seien $C = (\,\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\,\partial\,)$ und $C' = (\,\{C'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\,\partial\,)$ zwei Kettenkomplexe. Sei $f_0 : C \to C'$ eine Abbildung von Kettenkomplexen (d.h. $f_0\,\partial = \partial\,f_0$), und sei $f_1 : C \to C'$ eine weitere. Eine *Homotopie* von f_0 zu f_1 besteht aus einer Folge von Abbildungen

$$D_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$$

derart, daß mit den zusammengesetzten Abbildungen

$$\partial\,D_n\, :\quad C_n \xrightarrow{\;D_n\;} C'_{n+1} \xrightarrow{\;\partial\;} C'_n$$

und

$$D_{n-1}\,\partial\, :\quad C_n \xrightarrow{\;\partial\;} C_{n-1} \xrightarrow{\;D_{n-1}\;} C'_n$$

die Beziehung gilt,

$$\partial\,D_n \,+\, D_{n-1}\,\partial \;=\; (f_1)_n \,-\, (f_0)_n\ ,$$

für alle n. □

Die obige Rechnung können wir jetzt so formulieren:

Satz. *Der Übergang von simplizialen Mengen zu Kettenkomplexen respektiert Homotopie von Abbildungen.* □

Wie zu erwarten, ist der Homotopiebegriff für Kettenkomplexe so gemacht, daß gilt:

Satz. *Seien* $f_0 : C \to C'$ *und* $f_1 : C \to C'$ *Abbildungen von Kettenkomplexen. Es gebe eine Homotopie* $D = \{D_n\}$ *von* f_0 *zu* f_1 *. Die von* f_0 *und* f_1 *in der Homologie induzierten Abbildungen* $(f_0)_* : H_*(C) \to H_*(C')$ *und* $(f_1)_* : H_*(C) \to H_*(C')$ *sind dann zueinander gleich.*

Beweis. Sei

$$[x] \ \in \ H_n(C) \ = \ \text{Kern}(\, C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1}) \ / \ \text{Bild}(C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n) \ ,$$

wo $x \in \text{Kern}(\, C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1})$ einen Repräsentanten von $[x]$ bezeichnet. Es ist dann $(f_0)_*[x] \ = \ [\,(f_0)_n(x)\,]$ (das ist die Definition; man prüft nach, daß diese Definition unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten x ist) und ähnlich auch mit f_1. Nach Voraussetzung gilt andererseits

$$(f_1)_n(x) \ - \ (f_0)_n(x) \ \ = \ \ D_{n-1}\,\partial(x) \ + \ \partial\, D_n(x) \ .$$

Nun ist $D_{n-1}\,\partial(x) \ = \ 0$, weil $x \in \text{Ker}(C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1})$, deshalb

$$(f_1)_n(x) \ - \ (f_0)_n(x) \ = \ \partial\, D_n(x) \ \in \ \text{Bild}(\, C'_{n+1} \xrightarrow{\partial} C'_n) \ .$$

Es folgt, daß $[\,f_1(x)\,] - [\,f_0(x)\,] \ = \ [\,f_1(x) - f_0(x)\,] \ = \ 0$, deshalb $(f_1)_*[x] \ = \ (f_0)_*[x]$, wie behauptet. $\square$

Korollar. *Eine Homotopie-Äquivalenz von topologischen Räumen induziert Isomorphismen der (singulären) Homologiegruppen.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz. Sei g ein Homotopie-Inverses zu f. Eine Homotopie von $g\,f$ zu Id_X induziert eine Homotopie von Abbildungen von simplizialen Mengen,

$$\text{von} \quad \text{S}(g)\,\text{S}(f) \quad \text{zu} \quad \text{Id}_{\text{S}(X)} \ \ ,$$

und damit auch eine Homotopie der induzierten Abbildungen von Kettenkomplexen,

$$\text{von} \quad A[\,\text{S}(g)\,]\,A[\,\text{S}(f)\,] \quad \text{zu} \quad \text{Id}_{A[\,\text{S}(X)\,]} \ \ ,$$

wo A die zugrundegelegte abelsche Koeffizientengruppe ist. Es folgt,

$$g_* f_* \ = \ \text{Id}_{H_*(X;A)} \ .$$

Ähnlich folgt auch, daß $f_* g_* \ = \ \text{Id}_{H_*(Y;A)}$. Also ist f_* ein Isomorphismus, mit Inversem g_*. $\square$

Kleine Simplizes

Wichtiges Hilfsmittel ist ein Satz, den wir jetzt formulieren wollen. Er besagt, daß man, ohne einen wesentlichen Fehler zu machen, den singulären Komplex eines topologischen Raumes häufig durch eine kleinere simpliziale Menge ersetzen kann, die der jeweiligen Situation besser angemessen ist.

Sei X ein topologischer Raum. Sei $O = \{O_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X. Wir verlangen nicht, daß die Mengen O_i offen sind. Wir sind vielmehr zufrieden mit der etwas schwächeren Voraussetzung, daß das System der offenen Mengen $\{\mathring{O}_i\}_{i \in I}$ immer noch eine Überdeckung von X ist (wo $\mathring{O}_i$ den offenen Kern von O_i bezeichnet). Eine solche Überdeckung nennen wir *zulässig*.

Ein singuläres Simplex $f : \nabla^n \longrightarrow X$ heiße *klein bezüglich* O, wenn es mindestens ein $i \in I$ gibt, so daß das Bild $f(\nabla^n)$ ganz in O_i enthalten ist. Offenbar ist jeder Rand eines kleinen Simplexes wieder klein, und jede Ausartung ebenfalls. Die bezüglich O kleinen Simplizes bilden also eine Unter-simpliziale-Menge des singulären Komplexes $\mathrm{S}(X)$, die wir mit $\mathrm{S}_O(X)$ bezeichnen wollen.

Satz (Satz über kleine Simplizes). *Sei* $O = \{O_i\}_{i \in I}$ *eine zulässige Überdeckung von dem Raum* X. *Die Inklusion* $\mathrm{S}_O(X) \to \mathrm{S}(X)$ *induziert*

- *Isomorphismen der Homologiegruppen,*
- *Homotopieäquivalenz der geometrischen Realisierung,* $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$.

Den Beweis verschieben wir auf später. Zunächst befassen wir uns mit Folgerungen des Satzes.

Satz. *Sei* X *ein topologischer Raum, der topologisch äquivalent ist zu einem endlichen CW-Komplex. Die natürliche Abbildung*

$$|\,\mathrm{S}(X)\,| \longrightarrow X$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Wenn X ein Punkt ist, dann ist $\mathrm{S}(X)$ die simpliziale Menge Δ^0 und daher $|\mathrm{S}(X)|$ ebenfalls ein Punkt. Etwas allgemeiner, wenn X eine disjunkte Vereinigung von Punkten ist, dann ist $\mathrm{S}(X)$ die entsprechende disjunkte Vereinigung von simplizialen Mengen Δ^0, und wieder ist $|\mathrm{S}(X)| \longrightarrow X$ eine topologische Äquivalenz.

Im allgemeinen Fall sei nun der topologische Raum X auf irgendeine Weise mit der Struktur eines endlichen CW-Komplexes versehen, dessen Dimension sei n. Wir gehen induktiv vor und nehmen als Induktionsvoraussetzung an, daß der Satz für endliche CW-Komplexe der Dimension $< n$ bereits bewiesen ist.

Um die gleichzeitige Behandlung mehrerer Zellen zu vermeiden, machen wir die weitere Induktionsannahme, daß der Satz auch schon für n-dimensionale CW-Komplexe bewiesen ist, sofern diese nur weniger n-Zellen haben als X selbst.

Wir schreiben $X = X' \cup_{S^{n-1}} D^n$ (Anheften der "letzten" n-Zelle). Nach der Induktionsvoraussetzung sind dann

$$|\,\mathrm{S}(X')\,| \longrightarrow X' \quad \text{und} \quad |\,\mathrm{S}(S^{n-1})\,| \longrightarrow S^{n-1}$$

Homotopieäquivalenzen. Diese nutzen wir dadurch aus, daß wir eine geeignete Überdeckung von X wählen.

Seien die Mengen U' und V' definiert als

$$U' = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \|x\| \le \tfrac{2}{3} \right\} \quad \text{und} \quad V' = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \|x\| \ge \tfrac{1}{3} \right\}$$

und U und V in $X' \cup_{S^{n-1}} D^n$ als

$$U = \mathrm{Bild}(U') \ , \quad V = X' \cup \mathrm{Bild}(V') \ .$$

Die offenen Kerne von U und V bilden dann noch eine Überdeckung von $X' \cup_{S^{n-1}} D^n$, also ist das Paar $\{U, V\}$ eine zulässige Überdeckung von X. Es ist

$$U \cap V \approx U' \cap V' \approx S^{n-1} \times \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] .$$

Die Inklusion $S^{n-1} \times \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] \longrightarrow \tfrac{2}{3} D^n$ hat die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft; deshalb hat $U \cap V \to U$ sie auch.

Behauptung. *Die Abbildungen*

$$|\,\mathrm{S}(U)\,| \longrightarrow U \ , \quad |\,\mathrm{S}(V)\,| \longrightarrow V \ , \quad |\,\mathrm{S}(U \cap V)\,| \longrightarrow U \cap V$$

sind sämtlich Homotopieäquivalenzen.

Beweis. Das folgt aus der Induktionsvoraussetzung, den Homotopieäquivalenzen

$$U \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt.} \ , \quad X' \xrightarrow{\sim} V \ , \quad U \cap V \xrightarrow{\sim} S^{n-1} \ ,$$

dem Lemma. *Der Funktor* $Y \longmapsto |\mathrm{S}(Y)|$ *respektiert Homotopieäquivalenzen.*

(Beweis. Sowohl $Y \longmapsto \mathrm{S}(Y)$ als auch $\mathrm{S}(Y) \longmapsto |\mathrm{S}(Y)|$ respektieren Homotopie von Abbildungen.),

und den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} |\,\mathrm{S}(X')\,| & \xrightarrow{\sim} & X' \\ \sim\big\downarrow & & \big\downarrow\sim \\ |\,\mathrm{S}(V)\,| & \longrightarrow & V \end{array} \quad , \quad \text{etc.}$$

□

Wir wenden jetzt das sogenannte *Klebe-Lemma* an.

Klebe-Lemma. *Sei*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' & A' \arrow[l] \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Abbildungen topologischer Räume. Es gelte

(i) Die Abbildungen $A \rightarrowtail X$ und $A' \rightarrowtail X'$ sind abgeschlossene Inklusionen mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft.

(ii) Die vertikalen Pfeile sind Homotopieäquivalenzen.

Dann gilt, daß die induzierte Abbildung der verklebten Räume

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

— Den Beweis des Klebelemmas verschieben wir auf später (siehe Anhang).

Die Inklusion $U \cap V \longrightarrow U$ hat die HEE, und die Inklusion $|\,\mathrm{S}(U\cap V)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(U)\,|$ hat sie auch, weil sie eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen ist. Wir können also das Klebe-Lemma auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} |\,\mathrm{S}(U)\,| \arrow[d] & |\,\mathrm{S}(U\cap V)\,| \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & |\,\mathrm{S}(V)\,| \arrow[d] \\ U & U\cap V \arrow[l] \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

anwenden, und schließen, daß

$$|\,\mathrm{S}(U)\,| \cup_{|\mathrm{S}(U\cap V)|} |\,\mathrm{S}(V)\,| \longrightarrow U \cup_{U\cap V} V \;\cong\; X$$

eine Homotopieäquivalenz ist.

Wenn wir nun mit O die Überdeckung $\{U\,,V\}$ von X bezeichnen, dann gilt offensichtlich

$$\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V) \;\cong\; \mathrm{S}_O(X)$$

(ein Simplex ist klein, wenn es entweder in U oder in V liegt, und es kann auch in beiden liegen), also nach dem "Satz über kleine Simplizes"

$$|\,\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V)\,| \xrightarrow{\sim} |\,\mathrm{S}(X)\,|\;.$$

Mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} |\,\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V)\,| \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & |\,\mathrm{S}(X)\,| \arrow[d] \\ |\,\mathrm{S}(U)\,| \cup_{|\mathrm{S}(U\cap V)|} |\,\mathrm{S}(V)\,| \arrow[r, "\sim"] & X \end{tikzcd}$$

folgt jetzt, daß $|\,\mathrm{S}(X)\,| \longrightarrow X$ Homotopieäquivalenz ist. $\square$

Korollar. *Der Raum Y habe den Homotopietyp von einem CW-Komplex. Die Abbildung $|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Weil $Y \longmapsto |\,\mathrm{S}(Y)\,|$ Homotopieäquivalenzen respektiert, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß Y selbst ein CW-Komplex ist. Da $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$ ohnehin ein CW-Komplex ist, genügt es also (nach dem Whitehead-Satz), zu zeigen, daß die Abbildung $|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow Y$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert (zu vorgegebenem Basispunkt in $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$).

(i) *Die Abbildung $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow \pi_n Y$ ist surjektiv.* Denn sei $f : S^n \to Y$ ein Repräsentant. Wegen der Kompaktheit von S^n liegt das Bild von f in einem *endlichen* Unterkomplex Y_0 von Y. Nach dem vorigen Satz ist die Abbildung

$$\pi_n|\,\mathrm{S}(Y_0)\,| \longrightarrow \pi_n\, Y_0$$

ein Isomorphismus. Es folgt, daß $[f]$ im Bild von $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,|$ liegt.

(ii) *Die Abbildung $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow \pi_n\, Y$ ist injektiv.* Denn sei $g : S^n \to |\mathrm{S}(Y)|$ Repräsentant eines Elements, und sei $h : S^n \times [0,1] \to Y$ eine Nullhomotopie seines Bildes. Zunächst liegt das Bild von g in einem endlichen Unterkomplex Z von $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$. Wegen der Kompaktheit von Z und von $S^n \times [0,1]$ gibt es dann weiter einen endlichen Unterkomplex Y_1 von Y, der sowohl das Bild von Z als auch das Bild der Abbildung h enthält. Weil $\mathrm{Bild}(Z) \subset Y_1$ ist $Z \subset |\,\mathrm{S}(Y_1)\,|$, d.h. g kann aufgefaßt werden als eine Abbildung $S^n \to |\mathrm{S}(Y_1)|$. Nach dem vorigen Satz ist $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y_1)\,| \to \pi_n\, Y_1$ ein Isomorphismus. Nach Konstruktion ist $[g]$ im Kern dieser Abbildung, also trivial, und folglich somit auch trivial in $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,|$. $\square$

Relative Homologiegruppen

Um die Folgerungen des *Satzes über kleine Simplizes* für die Homologie herzuleiten, brauchen wir noch ein bißchen mehr Maschinerie. Sei nämlich X' Unterraum von X. Es gibt dann *relative Homologiegruppen* $H_n(X,X';A)$ (wo A eine abelsche Gruppe bezeichnet, die Koeffizientengruppe für die Homologie). Wir werden sehen, daß wir diese relativen Homologiegruppen auffassen können als ein Maß dafür, wie weit die Abbildungen $H_n(X';A) \longrightarrow H_n(X;A)$ davon abweichen, Isomorphismen zu sein. Technisch läuft das auf ähnliches hinaus, wie wir es von den Homotopiegruppen her schon kennen. Nämlich es gibt eine lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H_n(X';A) \longrightarrow H_n(X;A) \longrightarrow H_n(X,X';A) \longrightarrow H_{n-1}(X';A) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Es bezeichne C den singulären Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in A, und C' denjenigen von X'. Weil X' Unterraum von X ist, ist (offensichtlich) C' Unterkomplex von C.

Ein Element von $H_n(X;A)$ ist eine Äquivalenzklasse $[x]$, wo x eine n-Kette ist (d.h. ein Element von C_n) mit der Bedingung, daß der Rand trivial ist (d.h., es ist $\partial x = 0$).

In Analogie zu der Situation bei den relativen Homotopiegruppen werden wir erwarten, daß ein Element von $H_n(X,X';A)$ repräsentiert sein soll von einem $x \in C_n$, dessen Rand nicht unbedingt trivial ist, dessen Rand aber jedenfalls in C'_{n-1} liegt. Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß das von x repräsentierte Element $\overline{x}$ in der Quotientengruppe

$$\overline{C}_n \;=\; C_n/C'_n$$

trivialen Rand hat! (Hier ist, implizit, auch behauptet, daß die Quotientengruppen $\overline{C}_n$ ihrerseits einen Kettenkomplex bilden.)

Das motiviert (zu einem gewissen Grad) die folgende Definition.

Definition. Sei X topologischer Raum, X' Unterraum von X. Seien C und C' wie oben. Die *relativen Homologiegruppen* $H_*(X,X';A)$ sind definiert als die Homologiegruppen des Quotientenkomplexes, $\overline{C} = C/C'$,

$$H_n(X,X';A) \;:=\; \operatorname{Ker}(\overline{C}_n \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{C}_{n-1}) \;/\; \operatorname{Bild}(\overline{C}_{n+1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{C}_n) \;.$$

Die Situation ist hier also insofern einfacher als bei den relativen Homotopiegruppen, als die relativen Homologiegruppen wieder definiert werden können als die Homologiegruppen von einem ganz normalen Kettenkomplex, nämlich eben $\overline{C}$. Andererseits wird man in dieser Situation im allgemeinen nicht erwarten können, daß $\overline{C}$ selbst der singuläre Kettenkomplex eines topologischen Raumes wäre.

Die schon erwähnte Tatsache über die lange exakte Folge der Homologiegruppen läßt sich nun einfacher, und allgemeiner, so ausdrücken:

Satz. *Sei C ein Kettenkomplex, C' Unterkomplex, und $\overline{C} = C/C'$ der Quotient. Es gibt natürliche "Rand"-Abbildungen*

$$H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') ,$$

und die lange Folge

$$\cdots \longrightarrow H_n(C') \xrightarrow{j} H_n(C) \xrightarrow{q} H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(C') \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow H_0(\overline{C}) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Wir bezeichnen die Rand-Abbildungen in C und C' beide mit ∂, und die von $\overline{C}$ mit $\overline{\partial}$. Wir konstruieren zunächst die Abbildung

$$H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') .$$

Sei $[\overline{x}] \in H_n(\overline{C})$, sei $\overline{x} \in \overline{C}_n$ davon ein Repräsentant. Sei $x \in C_n$ ein Repräsentant von $\overline{x}$. Dann ist

$$\overline{\partial(x)} = \overline{\partial}(\overline{x}) = 0 ,$$

folglich

$$\partial(x) \in C'_{n-1} .$$

Es ist ∂x *geschlossen* in C', denn sein Rand kann ebensogut in C berechnet werden, $\partial(\partial x) = (\partial\partial)x = 0$ (weil eben C' Unterkomplex von C ist — natürlich sagt diese Sache, im allgemeinen, *nicht*, daß ∂x auch Rand in C' wäre). Das Bild von $[\overline{x}]$ in $H_{n-1}(C')$ wird nun *definiert* als die von ∂x repräsentierte Klasse $[\partial x]$,

$$\delta([\overline{x}]) := [\partial x] .$$

Das ist *wohldefiniert*, denn:

(i) Hat x_1 die Eigenschaft, daß $\overline{x}_1 = \overline{x}$, dann ist $[\partial x_1] = [\partial x]$ in $H_{n-1}(C')$, weil dann $\partial x - \partial x_1 = \partial(x - x_1)$ sogar Rand in C' ist (denn $x - x_1 \in C'_n$, weil $\overline{x - x_1} = 0$).

(ii) Die Konstruktion hängt auch nicht ab von der Auswahl des Repräsentanten $\overline{x}$ von $[\overline{x}]$. Denn ist $\overline{x}_0$ ein weiterer Repräsentant, dann gibt es ein $\overline{y} \in \overline{C}_{n+1}$ mit $\overline{x}_0 - \overline{x} = \overline{\partial}\,\overline{y}$. Folglich, wenn y ein Repräsentant von $\overline{y}$ ist, dann ist $\overline{\partial y} = \overline{\partial}\,\overline{y}$, d.h., es ist ∂y Repräsentant von $\overline{x}_0 - \overline{x}$. Deshalb $\delta([\overline{x}_0] - [\overline{x}]) = \delta([\overline{x}_0 - \overline{x}]) = [\partial(\partial y)] = 0$.

Wir kommen nun zum Nachweis der Exaktheit der langen Folge der Homologiegruppen.

Exaktheit an der Stelle $H_{n-1}(C')$. Sei $[z] \in H_{n-1}(C')$.

Wenn $[z] \in \mathrm{Bild}(\delta)$, dann ist (nach Definition von δ) $[z] = [\partial x]$ für ein $x \in C_n$. Folglich $j[z] = [\partial x] = 0$ in $H_{n-1}(C)$.

Umgekehrt, wenn $j[z] = 0$ in $H_{n-1}(C)$, dann gibt es $x \in C_n$ mit $\partial x = z$. Nach Definition von δ ist dann $[z] = \delta[\overline{x}]$, wo $\overline{x}$ das Bild von x in $\overline{C}_n$ bezeichnet (dies funktioniert, weil $\overline{\partial}\,\overline{x} = \overline{\partial x} = \overline{z} = 0$ ist).

Exaktheit an der Stelle $H_n(\overline{C})$. Sei $[\overline{x}] \in H_n(\overline{C})$.

Wenn $[\overline{x}] \in \mathrm{Bild}(q)$, etwa $[\overline{x}] = q[x]$, wo $\partial x = 0$, dann ist $\delta[\overline{x}] = [\partial x] = [0] = 0$.

Umgekehrt gelte $\delta[\overline{x}] = 0$. Nach Definition der Abbildung δ bedeutet dies: Sei $\overline{x}$ Repräsentant von $[\overline{x}]$, und x Repräsentant von $\overline{x}$, dann gibt es ein $z \in C'_n$ mit $\partial z = \partial x$. Da $x - z$ nun ebenfalls Repräsentant von $\overline{x}$ ist, und da $\partial(x-z) = 0$, folgt dann $[\overline{x}] = q[x-z]$.

Exaktheit an der Stelle $H_n(C)$. Sei $[x] \in H_n(C)$.

Wenn $[x] \in \mathrm{Bild}(j)$, etwa $[x] = [z]$, wo $z \in C'_n$, dann ist $q[x] = [\overline{x}] = [\overline{z}] = [0] = 0$.

Umgekehrt gelte $q[x] = [\overline{x}] = 0$ in $H_n(\overline{C})$, d.h., es gibt $\overline{y} \in \overline{C}_{n+1}$ mit $\overline{x} = \overline{\partial}\overline{y}$. Sei y Repräsentant von $\overline{y}$. Dann ist $[x] = [x - \partial y]$ und $\overline{x - \partial y} = 0$, d.h. $x - \partial y \in C'_n$. Folglich $[x] = [x - \partial y] \in \mathrm{Bild}(j)$. □

Korollar. Sei C Kettenkomplex, C' Unterkomplex, und $\overline{C} = C/C'$ der Quotient; sei ebenso D Kettenkomplex, $D' \subset D$ und $\overline{D} = D/D'$. Sei $C \to D$ eine Abbildung von Kettenkomplexen mit $C' \to D'$, und sei $\overline{C} \to \overline{D}$ die induzierte Abbildung der Quotientenkomplexe. *Wenn zwei der Abbildungen $C \to D$, $C' \to D'$ und $\overline{C} \to \overline{D}$ Isomorphismen in der Homologie induzieren, dann auch die dritte Abbildung.*

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo die beiden Abbildungen $C' \to D'$ und $C \to D$ Isomorphismen in der Homologie induzieren.

Aus den langen exakten Folgen für $C' \to C \to \overline{C}$ und $D \to D \to \overline{D}$, zusammen mit den Abbildungen zwischen den Kettenkomplexen, bekommt man ein Diagramm, von dem das folgende Diagramm ein Teil ist,

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(C') & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(\overline{C}) & \longrightarrow & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(C) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_n(D') & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(\overline{D}) & \longrightarrow & H_{n-1}(D') & \longrightarrow & H_{n-1}(D)
\end{array}$$

Dieses Diagramm ist *kommutativ*: Die Behauptung ist klar (oder?) für das erste, zweite und vierte Teilquadrat. Für das dritte Teilquadrat muß man sich anhand eines

Nachprüfens der Definition der Abbildung δ von dieser Tatsache überzeugen; diese Nachprüfung lassen wir hier weg — schwer ist sie nicht.

Aufgrund der Hypothese, daß $C' \to D'$ und $C \to D$ Isomorphismen in der Homologie induzieren, können wir das Fünferlemma anwenden. Das Fünferlemma ergibt, daß auch die Abbildung $H_n(\overline{C}) \to H_n(\overline{D})$ ein Isomorphismus ist.

Die anderen beiden Fälle des Korollars gehen analog. □

Mit Hilfe der relativen Homologiegruppen können wir den wichtigen *Ausschneidungs-Satz* nun formulieren.

SATZ. *Sei X topologischer Raum, $X' \subset X$. Sei Y ein Unterraum von X' , so daß gilt* $\overline{Y} \subset \mathring{X}'$ (der Abschluß von Y ist enthalten im offenen Kern von X'). *Dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung der relativen Homologiegruppen*

$$H_n(X - Y,\ X' - Y) \ \longrightarrow\ H_n(X, X')$$

ein Isomorphismus, für alle n (und für beliebige Koeffizienten).

BEWEIS. Wir zeigen, daß diese Homologiegruppen aus ein- und demselben Kettenkomplex berechnet werden können. Dazu ersetzen wir zunächst den Kettenkomplex von X durch einen kleineren, mit Hilfe des Satzes über kleine Simplizes. Sei nämlich O die Überdeckung von X , bestehend aus X' und $X'' := X - Y$. Wegen der Voraussetzung $\overline{Y} \subset \mathring{X}'$ ist diese Überdeckung *zulässig* in dem Sinn, daß auch $\{\mathring{X}', \mathring{X}''\}$ noch Überdeckung von X ist. Also, wenn $C_O(X)$ und $C(X)$ die Kettenkomplexe der simplizialen Mengen $\mathrm{S}_O(X)$ und $\mathrm{S}(X)$ (mit Koeffizienten in einer vorgegebenen abelschen Gruppe A) bezeichnen, dann induziert nach dem Satz über kleine Simplizes die Inklusion

$$C_O(X) \ \longrightarrow\ C(X)$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen. Nach dem vorstehenden Korollar induziert damit auch

$$C_O(X) \,/\, C(X') \ \longrightarrow\ C(X) \,/\, C(X')$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen, d.h., die $H_n(X, X')$ berechnen sich aus dem Kettenkomplex $C_O(X) \,/\, C(X')$.

Andererseits berechnet sich $H_n(X{-}Y, X'{-}Y) = H_n(X'', X'' \cap X')$ aus dem Kettenkomplex $C(X'') \,/\, C(X'' \cap X')$. Der Satz folgt daher mit:

BEHAUPTUNG. *Die natürliche Abbildung*

$$C(X'') \,/\, C(X'' \cap X') \ \longrightarrow\ C_O(X) \,/\, C(X')$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Nach Definition von $C_O(X)$ sind die erzeugenden Simplizes diejenigen, welche entweder in X'' liegen oder in X' (oder eventuell auch in beiden). Die ersteren werden getroffen, die letzteren sind systematisch zu vernachlässigen (Quotientenbildung nach dem Unterkomplex $C(X')$), die Abbildung ist also surjektiv. Andererseits ist die Abbildung auch injektiv, denn erstens ist $C(X'') \to C_O(X)$ injektiv, und zweitens, wenn eine Kette aus $C(X'')$ in $C_O(X)$ zu vernachlässigen ist, dann liegt sie in $C(X')$, also insgesamt in $C(X'') \cap C(X') \ = \ C(X'' \cap X')$. □

Mit Hilfe der bereitgestellten Hilfsmittel kann man viele Homologiegruppen direkt ausrechnen.

Zur Erinnerung. Sei X topologischer Raum, und $X' \subset X$. Sei ähnlich $Y' \subset Y$. Sei $X \to Y$ eine Abbildung mit $X' \to Y'$. Dann gilt (als Konsequenz aus dem Fünferlemma): Wenn zwei der Abbildungen

$$H_*(X') \to H_*(Y') \ , \quad H_*(X) \to H_*(Y) \ , \quad H_*(X,X') \to H_*(Y,Y')$$

(Koeffizienten in A) Isomorphismen sind, dann auch die dritte. Speziell ist dies sicher der Fall, wenn $X' \to Y'$ und $X \to Y$ Homotopieäquivalenzen sind. Wir bezeichnen dies als die *Homotopie-Eigenschaft*.

Als nächstes notieren wir eine relativ triviale Reduktion des Berechnungsproblems für Homologiegruppen: Wenn ein Raum eine disjunkte Vereinigung ist, dann kann man seine Homologie in sehr direkter Weise beschreiben durch die Homologie der Komponenten; nämlich als die direkte Summe der Homologie der Komponenten. Einzelheiten sind durch die folgende Bemerkung gegeben.

Bemerkung. Sei X topologischer Raum, seien $\{X_j\}_{j\in J}$ die Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X (oder etwas allgemeiner: $X = \bigcup_j X_j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ wenn $i \neq j$, und jedes X_j ist Vereinigung von Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X). Dann gilt

$$\bigoplus\nolimits_{j\in J} \ H_n(X_j;A) \ \xrightarrow{\approx} \ H_n(X;A)$$

für alle n und alle abelschen Koeffizientengruppen A; dabei bezeichnet "$\bigoplus$" die direkte Summe. Ebenso, wenn $X' \subset X$, dann ist auch

$$\bigoplus\nolimits_{j\in J} \ H_n(X_j, X_j \cap X';A) \ \xrightarrow{\approx} \ H_n(X,X';A) \ .$$

Beweis. Ein Simplex ist weg-zusammenhängend, deshalb liegt jedes singuläre Simplex ganz in einer Weg-Zusammenhangs-Komponente. Also ist

$$S(X) \ \cong \ \dot{\bigcup}\nolimits_{j\in J} S(X_j) \ .$$

Deshalb gilt für die Kettenkomplexe (mit Koeffizienten in A)

$$C(X) \ \cong \ \bigoplus\nolimits_{j\in J} C(X_j) \ \ ,$$

und für die Homologiegruppen,

$$\begin{aligned}
H_n(X) \;&=\; \mathrm{Ker}\big(\textstyle\bigoplus_j C_n(X_j) \to \bigoplus_j C_{n-1}(X_j)\big) \,/\, \mathrm{Bild}\big(\bigoplus_j C_{n+1}(X_j) \to \bigoplus_j C_n(X_j)\big) \\
&\cong\; \textstyle\bigoplus_j \mathrm{Ker}\big(\, C_n(X_j) \to C_{n-1}(X_j)\,\big) \,/\, \bigoplus_j \mathrm{Bild}\big(\, C_{n+1}(X_j) \to C_n(X_j)\,\big) \\
&\cong\; \textstyle\bigoplus_j \; \big(\, \mathrm{Ker}(\dots) \,/\, \mathrm{Bild}(\dots)\big) \\
&=\; \textstyle\bigoplus_j \; H_n(X_j) \; .
\end{aligned}$$

Speziell, weil

$$H_n(\,\mathrm{pt.}\,;\; A) \;\cong\; \begin{cases} A & , \quad n=0 \\ 0 & , \quad n>0 \end{cases}$$

folgt

$$H_n(S^0;A) \;=\; H_n(\,\mathrm{pt.} \,\dot\cup\, \mathrm{pt.}\,;\; A) \;\cong\; \begin{cases} A \oplus A & , \quad n=0 \\ 0 & , \quad n>0 \; . \end{cases}$$

Als nächstes haben wir die folgende einfache Berechnung.

SATZ. *Seien* X_j , $j \in J$, *die Weg-Zusammenhangs-Komponenten von* X . *Es ist*

$$H_0(X;A) \;\cong\; \textstyle\bigoplus_j \, H_0(X_j\,;\; A) \;\cong\; \bigoplus_{j\in J} A \;\cong\; A[J] \; .$$

BEWEIS. Es ist noch zu zeigen: Wenn Y weg-zusammenhängend ist, dann ist $H_0(Y;A) \cong A$. Das ist aber klar, denn die Erzeugenden (über A) von $C_0(Y;A)$ sind die Punkte $y \in Y$. Zu je zwei Punkten y_0, y_1 gibt es einen Weg, der sie verbindet; das davon repräsentierte Element in $C_1(Y;A)$ hat als Rand die Differenz $y_0 - y_1$, deshalb ist $[y_0 - y_1] = 0$; das heißt $[y_0] = [y_1]$. $H_0(Y;A)$ ist also ein Quotient von A . Dieser Quotient ist A selbst. Denn dies ist richtig im Fall $Y = \mathrm{pt.}$, und deshalb auch allgemein, weil pt. ein Retrakt von jedem nicht-leeren Raum Y ist. □

SATZ. *Sei* $m > 0$ *und* $n > 0$. *Es ist*

$$H_n(S^m;A) \;\cong\; H_n(D^m,\, S^{m-1}\,;\; A) \;\cong\; \begin{cases} A & , \quad n=m \\ 0 & , \quad n \neq m \; . \end{cases}$$

BEWEIS. Wir fassen D^m als Unterraum von S^m auf, und zwar als die südliche Halbkugel. Bezeichne x den Nordpol und y den Südpol. Die Homotopieäquivalenzen $S^{m-1} \longrightarrow S^m - \{x,y\}$ und $D^m \longrightarrow S^m - \{x\}$ induzieren einen Isomorphismus (wir lassen die abelsche Gruppe A in der Notation fort)

$$H_n(D^m, S^{m-1}) \;\xrightarrow{\;\approx\;}\; H_n(S^m - \{x\}\,,\, S^m - \{x,y\}\,) \; ,$$

und der Ausschneidungssatz gibt einen weiteren Isomorphismus

$$H_n(S^m - \{x\}\,,\, S^m - \{x,y\}) \;\xrightarrow{\;\approx\;}\; H_n(S^m\,,\, S^m - \{y\}\,) \; .$$

Ferner gilt

$$H_n(S^m\,,\, S^m - \{y\}) \xleftarrow{\approx} H_n(S^m, \{x\})\ .$$

Die lange exakte Folge für das Paar $\{x\} \subset S^m$ ist

$$\cdots \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_n(\{x\})} \to H_n(S^m) \to H_n(S^m, \{x\}) \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_{n-1}(\{x\})} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_1(\{x\})} \to H_1(S^m) \to H_1(S^m, \{x\}) \to H_0(\{x\}) \to H_0(S^m) \to 0 \quad .$$

Also ist $H_n(S^m) \to H_n(S^m, \{x\})$ ein Isomorphismus für $n \geq 2$, und jedenfalls injektiv für $n = 1$. Es ist aber auch surjektiv für $n = 1$, da $H_0(\{x\}) \to H_0(S^m)$ injektiv ist.

Aus dem Isomorphismus $H_n(S^m) \cong H_n(D^m, S^{m-1})$ für $m, n > 0$ erhalten wir induktiv eine Berechnung über die lange exakte Folge für das Paar $S^{m-1} \subset D^m$,

$$\cdots \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_n(D^m)} \to H_n(D^m, S^{m-1}) \to H_{n-1}(S^{m-1}) \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_{n-1}(D^m)} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_1(D^m)} \to H_1(D^m, S^{m-1}) \to H_0(S^{m-1}) \to H_0(D^m)$$

Nämlich,

$$\begin{aligned} H_1(D^m, S^{m-1}) &\cong \operatorname{Ker}(\,H_0(S^{m-1}) \to H_0(D^m)\,) \\ &\cong \begin{cases} \operatorname{Ker}(A \xrightarrow{\approx} A) = 0 & , \quad \text{wenn} \quad m \geq 2 \\ \operatorname{Ker}(A \oplus A \to A) \;\cong\; A & , \quad \text{wenn} \quad m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(wo $A \oplus A \to A$ die Abbildung $a \oplus a' \longrightarrow a + a'$ bezeichnet) und, für $n \geq 2$,

$$H_n(D^m, S^{m-1}) \;\cong\; H_{n-1}(S^{m-1})\ . \qquad \square$$

Korollar (Satz von der topologischen Invarianz der Dimension). *Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei U topologisch äquivalent zu V. Dann ist $m = n$.*

Beweis. Sei $u \in U$, sei v sein Bildpunkt unter einer topologischen Äquivalenz. Dann

$$H_j(U, U - u) \;\approx\; H_j(V, V - v)\ , \ \text{für alle}\ \ j\ .$$

Nach dem Ausschneidungssatz ist ersteres isomorph zu

$$H_j(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - u) \;\cong\; H_j(D^m, S^{m-1})\ ;$$

und letzteres entsprechend, mit n statt m. Nach dem Satz folgt $m = n$. $\square$

Zelluläre Homologie

Die Berechnung der Homologie eines Simplizialkomplexes über den simplizialen Kettenkomplex hat eine Version für CW-Komplexe. Die Verallgemeinerung ist gegeben durch den sogenannten *zellulären Kettenkomplex.*

SATZ. *Sei* X *ein CW-Komplex. Bezeichne* J_n *die Indexmenge für die* n*-Zellen. Die Homologie von* X (mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A) *ist berechenbar aus einem Kettenkomplex, dessen* n*-te Kettengruppe zu* $A[J_n]$ *isomorph ist.*

KOROLLAR. *Sei* X *endlicher CW-Komplex. Die Wechselsumme*

$$\chi(X) \;=\; \sum (-1)^n \#(J_n)$$

ist eine Invariante des Homotopietyps (und insbesondere eine topologische Invariante).

BEWEIS. Wenn man für A einen Körper nimmt, dann liefert eine bekannte Rechnung

$$\chi(X) \;=\; \sum (-1)^n \dim H_n(X;A) \; .$$

Die $H_n(X;A)$ sind alle Homotopie-invariant; also auch dieser Ausdruck. □

In manchen Fällen liefert der Satz sogar eine Berechnung der Homologie, ohne daß man auch nur den Randoperator ausrechnen müßte. Denn es kommt vor, daß der Randoperator aus banalen Gründen null ist (wenn nämlich entweder Quelle oder Ziel der Abbildung jeweils trivial sind).

BEISPIELE. 1) Ist X CW-Komplex mit Zellen nur in geraden Dimensionen, so folgt

$$H_n(X;A) \;\cong\; A[J_n] \; .$$

Dieser Sachverhalt liegt zum Beispiel vor bei $\mathbb{C}P^n$, dem *komplexen projektiven Raum,* $\mathbb{C}P^n \;\cong\; (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})\,/\,\mathbb{C}^*$. Wie wir ohne Beweis anführen wollen, so hat dieser Raum eine Zellenstruktur mit genau einer Zelle in jeder geraden Dimension von 0 bis $2n$.

2) Die m-dimensionale Sphäre S^m hat eine Struktur als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer m-Zelle,

$$\#(J_n) \;=\; \begin{cases} 1\,, & n=0,\ m \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für $m \geq 2$ folgt also wieder auf die besonders schnelle Art,

$$H_n(S^m;A) \;\cong\; \begin{cases} A\,, & n=0,\, m \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Was den Beweis des Satzes angeht, so haben wir als erstes das Problem, den zellulären Kettenkomplex überhaupt zu *definieren*. Insbesondere müssen wir sagen, was der Randoperator in dem zellulären Kettenkomplex sein soll. In dem (Spezial-) Fall von Simplizialkomplexen genügte seinerzeit die Angabe einer einfachen Formel. Hier werden wir aber auch für die Definition schon Maschinerie heranziehen müssen.

Als Hilfsmittel brauchen wir eine Variante der langen exakten Folge eines Paares von Räumen. Es handelt sich dabei um die lange exakte Folge eines *Tripels*, die jetzt beschrieben werden soll. Unter einem Tripel wird dabei eine Folge von Räumen und Inklusionen verstanden, $Y'' \subset Y' \subset Y$.

Die Inklusion von Raumpaaren $(Y', Y'') \subset (Y, Y'')$ gibt eine induzierte Abbildung in der Homologie, $H_n(Y', Y'') \to H_n(Y, Y'')$. Und die Inklusion von Raumpaaren $(Y, Y'') \subset (Y, Y')$ gibt ebenfalls eine induzierte Abbildung, $H_n(Y, Y'') \to H_n(Y, Y')$. Schließlich definieren wir noch eine *Rand*-Abbildung $H_n(Y, Y') \to H_{n-1}(Y', Y'')$ als die zusammengesetzte Abbildung (eine Rand- und eine Inklusions-Abbildung)

$$H_n(Y, Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y', Y'')$$

(hier, wie auch im folgenden, unterdrücken wir die Koeffizientengruppe in der Notation).

Bemerkung. *Sei $Y'' \subset Y' \subset Y$ ein Tripel von Räumen. Die Folge*

$$\longrightarrow H_n(Y', Y'') \longrightarrow H_n(Y, Y'') \longrightarrow H_n(Y, Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y', Y'') \longrightarrow$$

ist exakt.

Beweis. Bezeichne C den singulären Kettenkomplex von Y , seien C' und C'' entsprechend. Man bildet die (Quotienten-) Kettenkomplexe C'/C'' und C/C'' . Aus der Inklusion von Kettenkomplexen

$$C'/C'' \;\subset\; C/C''$$

bekommt man, wie üblich, eine lange exakte Folge von Homologiegruppen,

$$\longrightarrow H_n(C'/C'') \longrightarrow H_n(C/C'') \longrightarrow H_n(\,(C/C'')\,/\,(C'/C'')\,) \longrightarrow H_{n-1}(C'/C'') \longrightarrow$$

Das ist schon die behauptete Folge: die Identifikation mit den Homologiegruppen der obigen Folge ist in zwei Fällen deren Definition, im dritten Fall kommt sie daher, daß die Abbildung

$$C/C' \;\longrightarrow\; (C/C'')\,/\,(C'/C'')$$

ein Isomorphismus ist (die Abbildung ist offensichtlich surjektiv und — eigentlich auch offensichtlich — injektiv). Auch für zwei von den drei Abbildungen ist es klar, daß es sich um die richtigen handelt. Bei der dritten, der *Rand*-Abbildung

$$\delta : \; H_n(\,(C/C'')\,/\,(C'/C'')\,) \;\longrightarrow\; H_{n-1}(C'/C'') \;,$$

schauen wir genauer hin. Die Definition von δ lautete: zu $[x] \in H_n(\,(C/C'')/(C'/C'')\,)$ wähle man einen Repräsentanten $\overline{x}$, man lifte diesen zu C/C'' , (etc.). Nun kann man aber ebensogut weiterliften zu C , das “etc.” liefert dann ein Element in $H_{n-1}(C')$ (dies ist die Definition der Rand-Abbildung in der langen exakten Folge für $C' \subset C$). Das Rückgängigmachen der zusätzlichen Liftung schließlich bedeutet, daß man das erhaltene Element in $H_{n-1}(C')$ ersetzt durch sein Bild-Element in $H_{n-1}(C'/C'')$. □

Für den zellulären Kettenkomplex können wir nun die Definition angeben. Diese mag auf den ersten Blick recht verblüffend aussehen, da die 'Kettengruppen' selbst als singuläre Homologiegruppen beschrieben werden. Nämlich für den CW-Komplex X ist die n-te *zelluläre Kettengruppe* mit Koeffizienten in A definiert als

$$\widetilde{C}_n(X;A) \ := \ H_n(X^n, X^{n-1}; A)$$

(wo X^m das m-Skelett von X bezeichnet). Und die Rand-Abbildung

$$\widetilde{C}_n(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-1}(X;A)$$

ist definiert als die Rand-Abbildung in der langen exakten Folge für das Tripel $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$; das heißt, als die zusammengesetzte Abbildung

$$H_n(X^n, X^{n-1}; A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}; A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; A) \ .$$

Die verlangte Identität für Kettenkomplexe, $\widetilde{\partial}\,\widetilde{\partial} = 0$, ist gültig, weil die Komposition

$$\widetilde{C}_n(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-1}(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-2}(X;A)$$

nach ihrer Definition eine Komposition von Abbildungen ist, bei der die Teilfolge

$$H_{n-1}(X^{n-1}; A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; A) \longrightarrow H_{n-2}(X^{n-2}; A)$$

beteiligt ist. Diese Teilfolge ist aber auch Teil der langen exakten Folge für das Paar $X^{n-2} \subset X^{n-1}$. Also ist die Komposition schon dieser beiden Abbildungen gleich null.

Wir überlegen uns sogleich, daß wir, erstens, die Kettengruppen recht gut kennen und daß, zweitens, der Kettenkomplex die gewünschte Homologie hat. Die Inklusion

$$X^{n-1} \ \longrightarrow \ X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen}$$

ist eine Homotopie-Äquivalenz, deshalb

$$H_k(X^n,\, X^{n-1}) \ \cong \ H_k(\, X^n,\, X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen}\,) \ ,$$

was, nach dem Ausschneidungs-Satz, angewandt auf die offene Überdeckung von X^n,

$$\Big\{ \ \big(\, \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle(n)}\, \big) \ , \ \ \big(\ X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen}\ \big) \ \Big\} \ ,$$

wiederum isomorph ist zu

$$\begin{aligned} &H_k\big(\, \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle} \ , \ \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle} - \text{Mittelpunkt}\ \big) \\ &\cong \ \bigoplus\nolimits_{j\in J_n} H_k(\mathring{D}^n,\, \mathring{D}^n - \textit{Mittelpunkt}) \ . \end{aligned}$$

und, wieder nach der Homotopie-Eigenschaft, weiter isomorph zu

$$\bigoplus\nolimits_{j\in J_n} H_k(D^n,\, D^n - \textit{Mittelpunkt}) \ \cong \ \bigoplus\nolimits_{j\in J_n} H_k(D^n,\, S^{n-1}) \ .$$

Insbesondere ist also

$$\widetilde{C}_n(X;A) \ = \ H_n(X^n, X^{n-1}; A) \ \cong \ \bigoplus\nolimits_{j\in J_n} A \ \cong \ A[J_n]$$

und

$$H_k(X^n, X^{n-1}; A) \;=\; 0\,, \quad \text{wenn} \quad k \neq n\ .$$

Aus letzterem folgt allgemeiner

Lemma. $H_k(X^n, X^m; A) \,=\, 0\,,$ wenn $k > n$ oder $k \leq m$.

Beweis. (Induktion über $n{-}m$). Der Induktionsanfang $n{-}m = 1$ wurde gerade eben gemacht. Für den Induktionsschritt betrachtet man einen Abschnitt in der langen exakten Folge des Tripels $X^m \subset X^{n-1} \subset X^n$, nämlich

$$H_k(X^{n-1},\, X^m) \longrightarrow H_k(X^n,\, X^m) \longrightarrow H_k(X^n,\, X^{n-1}) \ .$$

Der Term links ist dann null nach Induktionsvoraussetzung, und der Term rechts ist auch null, wie wir wissen. Es folgt, daß der Term in der Mitte ebenfalls null ist. □

Anfangs- und End-Term der exakten Folge

$$H_{n+1}(X^{n+q+1}, X^{n+q}) \longrightarrow H_n(X^{n+q}) \longrightarrow H_n(X^{n+q+1}) \longrightarrow H_n(X^{n+q+1}, X^{n+q})$$

sind, nach dem Lemma, gleich null, sobald $q \geq 1$. Also hat man Isomorphismen

$$H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\;\approx\;} H_n(X^{n+2}) \xrightarrow{\;\approx\;} \cdots \xrightarrow{\;\approx\;} H_n(X^{n+q}) \xrightarrow{\;\approx\;} \cdots \ .$$

Hieraus folgt weiter, daß man auch einen Isomorphismus

$$H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\;\approx\;} H_n(X)$$

hat.

Beweis. Jedes singuläre Simplex in X liegt in einem der Skelette X^p (ein Simplex ist kompakt). Eine singuläre Kette ist eine *endliche* Summe von singulären Simplizes. Wenn also x singuläre Kette in X ist, so gibt es ein p, so daß x schon eine singuläre Kette in X^p ist. Angewandt auf einen Repräsentanten von einem Element von $H_n(X)$, zeigt dies, daß das fragliche Element im Bild von $H_n(X^p)$ liegt, für genügend großes p; nach dem obigen liegt es dann aber auch im Bild von $H_n(X^{n+1})$. Das zeigt die Surjektivität der Abbildung. Die Injektivität sieht man, seltsamerweise, genauso. Denn sei $[x']$ ein Element von $H_n(X^{n+1})$, dessen Bild in $H_n(X)$ trivial ist. Sei x' Repräsentant von $[x']$. Dann gibt es eine Kette y in X , deren Rand die Kette x' ist (wegen der vorausgesetzten Trivialität des Bildes von $[x']$). Nach der obigen Betrachtung gibt es nun ein p, so daß die Kette y schon in X^p liegt. Das heißt aber, daß x' schon Rand in X^p ist, daß also das Bild von $[x']$ in $H_n(X^p)$ schon null ist. □

Auch Anfangs- und End-Term der exakten Folge

$$H_n(X^q, X^{q-1}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^{q-1}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^q) \longrightarrow H_{n-1}(X^q, X^{q-1})$$

sind, nach dem Lemma, gleich null, sobald $q \leq n{-}2$. Also hat man Isomorphismen

$$H_n(X^{n+1}) = H_n(X^{n+1}, X^{-1}) \xrightarrow{\;\approx\;} H_n(X^{n+1}, X^0) \xrightarrow{\;\approx\;} \cdots \xrightarrow{\;\approx\;} H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \ .$$

Insgesamt hat man damit einen Isomorphismus

$$H_n(X) \;\cong\; H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \;.$$

Den Term $H_n(X^{n+1}, X^{n-2})$ können wir nun in Beziehung setzen zu der n-ten Homologiegruppe des Kettenkomplexes $\widetilde{C}$. Das geht in zwei Schritten.

Als ersten Schritt betrachten wir die lange exakte Folge der relativen Homologiegruppen für das Tripel $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$. Sie hat als Abschnitt die exakte Folge

$$H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \;.$$

Der erste Term $H_n(X^{n-1}, X^{n-2})$ in der Folge ist null (das Lemma), also schließen wir, daß der zweite Term, $H_n(X^n, X^{n-2})$, erstens Untergruppe von $H_n(X^n, X^{n-1})$ ist, und zweitens gerade gleich ist zu der uns interessierenden Untergruppe $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$,

$$H_n(X^n, X^{n-2}) \;\cong\; \operatorname{Ker}\bigl(H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \bigr) \;.$$

Als zweiten Schritt betrachten wir die lange exakte Folge der relativen Homologiegruppen für das Tripel $X^{n-2} \subset X^n \subset X^{n+1}$. Sie hat als Abschnitt die exakte Folge

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^n) \;.$$

Der zweite Term in der Folge, $H_n(X^n, X^{n-2})$, ist gleich der Untergruppe $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$ von $H_n(X^n, X^{n-1})$, wie wir gerade gesehen haben. Das macht es plausibel, daß wir, bis auf die Restriktion des Ziels, die erste Abbildung in der Folge mit der Abbildung $\widetilde{\partial}_{n+1}$ identifizieren können. Das ist auch richtig. Denn eine der Möglichkeiten, die Rand-Abbildung $H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ zu definieren, war ja, die zusammengesetzte Abbildung

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

zu nehmen. Nun ist es so, daß die zweite dieser Abbildungen auch als eine Komposition

$$H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

geschrieben werden kann. Deshalb kann $\widetilde{\partial}_{n+1}$ ebenfalls als eine Komposition

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

geschrieben werden; wo, wie wir schon wissen, die zweite Abbildung gleich der Inklusion von $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$ in $H_n(X^n, X^{n-1})$ ist.

Der letzte Term in dem obigen Abschnitt, $H_n(X^{n+1}, X^n)$, ist null (wieder das Lemma). Wir haben den Abschnitt damit identifiziert zu einer exakten Folge

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\;\widetilde{\partial}_{n+1}\;} \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n \;\longrightarrow\; H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \;\longrightarrow\; 0 \;.$$

Wir haben damit gezeigt, daß die n-te Homologie des zellulären Kettenkomplexes isomorph ist zu $H_n(X^{n+1}, X^{n-2})$ und damit auch, wie wir schon wissen, zu $H_n(X)$.

Unterteilung

Um den “Satz über kleine Simplizes” zu beweisen, brauchen wir einen Trick, der darin besteht, daß man Simplizes in systematischer Weise durch kleinere ersetzen kann. Diese Ersetzung geht durch *Unterteilung*: Aus einem einzigen Simplex werden plötzlich ganz viele, aber (und das ist gerade der Witz) jedes einzelne dieser neuen Simplizes ist ‘kleiner’ als das, von dem wir ausgegangen sind.

Es gibt viele Möglichkeiten der Unterteilung. Welche man benutzt, ist letztlich nicht wichtig, solange die Methode nur funktioniert. Wir verwenden hier die sogenannte *baryzentrische Unterteilung*, weil diese sich (relativ) am einfachsten beschreiben läßt.

In einem affinen Simplex ist der *Baryzenter* (= Schwerpunkt) definiert als das *arithmetische Mittel* der Eckenmenge. Wenn das Simplex die Ecken $v_0, \ldots, v_n$ hat, dann ist der Baryzenter also der Punkt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\, v_i \ .$$

Die *baryzentrische Unterteilung* des n-Simplexes ∇^n ist nun ein gewisser geordneter Simplizialkomplex, den wir mit U-∇^n bezeichnen wollen. Ein k-Simplex von U-∇^n ist, nach Definition, gegeben durch eine strikt aufsteigende Folge von Seiten von ∇^n, $k{+}1$ an der Zahl. Das k-Simplex hat als Ecken die Baryzenter der fraglichen Seiten.

BEISPIELE. Wir bezeichnen die Ecken von ∇^n mit den Ziffern von 0 bis n, und wir bezeichnen eine Seite von ∇^n durch die Angabe derjenigen Ecken, die sie enthält.

1) U-∇^1 hat drei 0-Simplizes $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$ (die Baryzenter der beiden 0-dimensionalen Seiten und der einen 1-dimensionalen Seite) und zwei 1-Simplizes $\{0\} \subset \{0,1\}$ und $\{1\} \subset \{0,1\}$.

2) U-∇^2 hat sieben 0-Simplizes, zwölf 1-Simplizes und sechs 2-Simplizes. Beispielsweise sind $\{0\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$ und $\{1\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$ zwei von den 2-Simplizes, und diese beiden haben als gemeinsame Seite das 1-Simplex $\{0,1\} \subset \{0,1,2\}$.

Die explizite Benennung der Dinge ist etwas aufwendig. Als Alternative geben wir deshalb auch eine (weniger explizite) induktive Beschreibung. Dabei wird die folgende Konstruktion benutzt.

Sei K ein geordneter Simplizialkomplex. Ihm zugeordnet ist ein neuer geordneter Simplizialkomplex cK, der *Kegel über K mit Kegelpunkt c*. Dieser hat, nach Definition, die folgende Beschreibung. cK enthält K und den Kegelpunkt c. Die übrigen Simplizes von cK sind in 1:1 Beziehung zu den Simplizes von K. Und zwar, zu einem Simplex x von K, von der Dimension n, enthält cK ein Simplex cx von der Dimension $n{+}1$. Wenn x die Ecken $v_0, \dots, v_n$ hat, so hat cx die Ecken $v_0, \dots, v_n$ und c (in dieser Reihenfolge — die neue Ecke, c, ist die mit der höchsten Nummer). Die simpliziale Struktur ist so, daß $d_i(c\,x) = c\,d_i(x)$, für $0 \le i \le n$, während $d_{n+1}(c\,x) = x$.

Wir beschreiben die baryzentrische Unterteilung mit Hilfe der Kegel-Konstruktion. Dem Simplex ∇^n soll ein geordneter Simplizialkomplex U-∇^n zugeordnet werden, der wieder das Simplex ∇^n als unterliegenden topologischen Raum hat; und zwar soll das in der Weise geschehen, daß die Konstruktion mit Seiten-Inklusionen verträglich ist: U-∇^n soll für jede Seite von ∇^n die baryzentrische Unterteilung dieser Seite als einen Unterkomplex enthalten.

Per Induktion nehmen wir an, daß U-∇^m schon konstruiert ist für $m \le n{-}1$. Dann setzen sich die Unterteilungen der Randseiten von ∇^n zusammen zu einer Unterteilung des Randes, die wir mit U$\partial\nabla^n$ bezeichnen. U-∇^n wird jetzt *definiert* als $\beta\,$U$\partial\nabla^n$, der *Kegel über* U$\partial\nabla^n$ *mit Kegelpunkt* β (der Baryzenter).

Die Konstruktion beinhaltet eine kanonische Abbildung (einen Isomorphismus)

$$\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^n) \longrightarrow \nabla^n$$

denn wenn ein Simplex in U-∇^n nicht schon selbst im Rand U$\partial\nabla^n$ liegt, dann ist es entweder der Kegelpunkt (der Baryzenter) oder es ist aufgespannt von einem Simplex im Rand zusammen mit dem Baryzenter. Der erhaltene Isomorphismus ist verträglich mit Seiten-Inklusionen: das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\delta_i)"'] & \nabla^{n-1} \arrow[d, "\delta_i"] \\
\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^{n}) \arrow[r] & \nabla^{n}
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ (für $0 \le i \le n$).

Wir kommen nun zu dem *Unterteilungs*-Trick. Er besteht in der Angabe einer Abbildung

$$\mathrm{Unt}: \ \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

wo X einen topologischen Raum bezeichnet, $\mathrm{S}(X)$ dessen singulären Komplex, und $\mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X))$ schließlich die geometrische Realisierung davon im Sinne von Δ-Mengen (diejenige Version von geometrischer Realisierung, bei der nur die Rand-Abbildungen, dagegen nicht die Ausartungs-Abbildungen verwendet worden sind).

Es war $\mathrm{S}(X)_n$ definiert als die Menge der Abbildungen $f : \nabla^n \to X$, wo die Rand-Abbildung $d_i : \mathrm{S}(X)_n \to \mathrm{S}(X)_{n-1}$ dem f die zusammengesetzte Abbildung

$$\nabla^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

zuordnet (Komposition mit der Inklusion der i-ten Seite). Die Äquivalenzrelation " $\sim$ " in der Definition von

$$\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ := \ \dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \, / \sim$$

sagte, daß für jedes f und jedes i die Seite $\{f\} \times \delta_i(\nabla^{n-1})$ von $\{f\} \times \nabla^n$ zu identifizieren ist mit dem Simplex $\{d_i(f)\} \times \nabla^{n-1}$.

Jedes $f \in \mathrm{S}(X)_n$ bestimmt eine Abbildung $\overline{f} : \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$. Das ist eine etwas tautologische Konstruktion,

$$\nabla^n \ \cong \ \{f\} \times \nabla^n \ \subset \ \dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ \dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n / \sim \ = \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Mit Hilfe der baryzentrischen Unterteilung bekommen wir von dieser Konstruktion eine interessante Variante. Mit dem obigen Isomorphismus $\mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^n) \cong \nabla^n$ haben wir nämlich die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^n) \ \xrightarrow{\approx} \ \nabla^n \ \xrightarrow{f} \ X \ ,$$

und die können wir nun um-interpretieren: Durch Einschränken der Abbildung auf die diversen Simplizes in dem Simplizialkomplex U-∇^n erhalten wir ein kompatibles System singulärer Simplizes; mit anderen Worten, wir erhalten eine Abbildung von Δ-Mengen, U-$\nabla^n \to \mathrm{S}(X)$. Die geometrische Realisierung ergibt hieraus eine Abbildung

$$\overline{\overline{f}} : \ \nabla^n \cong \mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^n) \ \longrightarrow \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Die Konstruktion ist mit der Inklusion von Seiten verträglich: es ist

$$\overline{\overline{f}} \circ \delta_i \ = \ \overline{\overline{f \circ \delta_i}} \ .$$

Das liegt daran, daß U-∇^n als einen Unterkomplex die baryzentrische Unterteilung der i-ten Seite enthält. Wir könnten das auch formulieren als

$$\overline{\overline{f}} \circ \delta_i \ = \ \overline{\overline{d_i(f)}} \ ,$$

da ja $d_i(f) \ = \ f \circ \delta_i$ (nach Definition).

Die Konstruktion definiert eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

nämlich auf $\{f\} \times \nabla^n$ gerade die Abbildung $\overline{\overline{f}}$. Wie gerade notiert, ist diese Abbildung mit der Äquivalenzrelation " $\sim$ " verträglich, sie induziert deshalb eine Abbildung

$$\mathrm{Unt} : \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Die Abbildung ist *nicht* die Identität. Sie ist aber dazu homotop, wie der folgende Satz präzisiert.

SATZ. *Es gibt eine Abbildung*

$$F : \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X)) \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X))$$

mit $F \,\big|\, \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X)) \times 0 = \mathrm{Id}$ *und* $F \,\big|\, \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X)) \times 1 = \mathrm{Unt}$.

BEWEIS. Per Komposition mit der Quotienten-Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X)) \times [0,1]$$

entspricht die gesuchte Abbildung F einer Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

die mit der induzierten Äquivalenzrelation verträglich ist. Um eine solche Abbildung anzugeben, genügt es, jedem $f : \nabla^n \to X$ eine Abbildung

$$\widetilde{f} : \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \operatorname{Real}(\mathrm{S}(X))$$

zuzuordnen mit

$$\widetilde{f} \,\big|\, (\nabla^n \times 0) = \overline{f} \ , \quad \widetilde{f} \,\big|\, (\nabla^n \times 1) = \overline{\overline{f}}$$

und

$$\widetilde{f} \circ (\delta_i \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) = \widetilde{f \circ \delta_i} \ .$$

Die letzte Gleichung ist gerade die geforderte Verträglichkeit mit der induzierten Äquivalenzrelation. Die ersten beiden Gleichungen sagen, daß diese Homotopie von der identischen Abbildung (*Zusammenkleben der* $\overline{f}$) zu der Abbildung Unt (*Zusammenkleben der* $\overline{\overline{f}}$) geht.

Die Konstruktion der Abbildung $\widetilde{f}$ ist ganz ähnlich zu der von der Abbildung $\overline{\overline{f}}$. Der wesentliche Schritt besteht darin, zunächst eine geeignete Unterteilung von $\nabla^n \times [0,1]$ anzugeben; wir bezeichnen diese mit $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1])$.

Diese Unterteilung soll eine Art Interpolation sein zwischen der baryzentrischen Unterteilung einerseits und dem "Nichts-Tun" andererseits. Das heißt, wir suchen einen Simplizialkomplex, dessen unterliegender Raum das Prisma $\nabla^n \times [0,1]$ ist; wo der Deckel des Prismas, $\nabla^n \times 1$, unterteilt sein soll als die baryzentrische Unterteilung von ∇^n; wo hingegen der Boden $\nabla^n \times 0$ nicht weiter unterteilt sein soll (es soll der Simplizialkomplex sein, der nur aus dem Simplex ∇^n und seinen Seiten besteht).

Da wir ohnehin darauf Wert werden legen müssen, daß die Konstruktion mit den Seiten-Inklusionen verträglich ist, bietet sich folgendes induktive Vorgehen an.

— Über der i-ten Seite ist das Prisma $\delta_i(\nabla^{n-1}) \times [0,1]$ unterteilt als $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^{n-1} \times [0,1])$ (die Induktionsvoraussetzung sagt uns, wie).

— Der Boden $\nabla^n \times 0$ ist nicht unterteilt.

Aus den vorstehenden Spezifikationen erhält man einen Simplizialkomplex mit unterliegendem Raum $\nabla^n \times 0 \cup \partial\nabla^n \times [0,1]$. Das ganze Prisma $\nabla^n \times [0,1]$ wird jetzt trianguliert als der Kegel über diesem Simplizialkomplex, wobei der Kegelpunkt der

Baryzenter des Deckels $\nabla^n \times 1$ ist. Speziell wird der Deckel $\nabla^n \times 1$ also baryzentrisch unterteilt.

Der Rest des Arguments geht nun wie vorher auch. Wir benutzen den Isomorphismus

$$\mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \;\cong\; \nabla^n \times [0,1]$$

um eine Abbildung zu definieren

$$\mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \;\longrightarrow\; \nabla^n \times [0,1] \;\xrightarrow{\ \mathrm{pr}\ }\; \nabla^n \;\xrightarrow{\ f\ }\; X \ .$$

Durch Einschränken der Abbildung auf die diversen Simplizes in dem Simplizialkomplex $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)$ erhalten wir ein kompatibles System singulärer Simplizes. Mit anderen Worten, wir erhalten eine Abbildung von Δ-Mengen, $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,) \to \mathrm{S}(X)$. Die geometrische Realisierung ergibt hieraus die gewünschte Abbildung

$$\widetilde{f}: \ \nabla^n \times [0,1] \;\cong\; \mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \;\longrightarrow\; \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \ . \qquad \square$$

Bemerkung. Es sei $O = \{O_j\}_{j \in J}$ eine zulässige Überdeckung von dem Raum X (das heißt, das System der offenen Kerne $\{\mathring{O}_j\}_{j \in J}$ ist immer noch eine Überdeckung). Es gilt dann: Die Abbildung $\mathrm{Unt} : \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \to \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X))$ respektiert kleine Simplizes in dem Sinne, daß $\mathrm{Unt}(\mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))$. Ähnlich respektiert die Homotopie von der Identität zu der Abbildung Unt ebenfalls kleine Simplizes in dem Sinne, daß $\mathrm{Bild}(\mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X)) \times [0,1]\,) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))$. — Das ist klar, denn wenn $f : \nabla^n \to X$ klein bezüglich O ist, so heißt das, daß es ein j gibt mit $f(\nabla^n) \subset O_j$; offensichtlich gilt dann für jedes der Simplizes, die in die Definition von $\overline{\overline{f}}$ bzw. von $\widetilde{f}$ eingehen, ebenfalls, daß sein Bild ganz in O_j enthalten ist.

Daß die Unterteilungs-Abbildung Simplizes verkleinert, präzisiert nun folgender Satz.

Satz. *Sei X topologischer Raum, sei O eine zulässige Überdeckung von X. Zu jedem singulären Simplex $f : \nabla^n \to X$ existiert eine natürliche Zahl k, so daß die k-fache Wiederholung der Unterteilungs-Abbildung das Bild $\overline{f}(\nabla^n) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X))$ klein macht in dem Sinne, daß*

$$\underbrace{(\mathit{Unt} \circ \cdots \circ \mathit{Unt})}_{\longleftarrow\ k\ \longrightarrow}\ (\overline{f}(\nabla^n)) \;\subset\; \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X)) \ .$$

Beweis. Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend mit folgender Behauptung: *Sei $O' = \{f^{-1}(O_j)\}_{j \in J}$ die induzierte Überdeckung von ∇^n. Dann gibt es ein k, so daß jedes Simplex der k-fachen baryzentrischen Unterteilung von ∇^n ganz in einer Menge dieser Überdeckung enthalten ist.*

Dazu wird es genügen, zu zeigen, daß eine Zahl $a < 1$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: Sei Σ^n irgendein affines n–Simplex innerhalb von ∇^n (z.B. ∇^n selbst oder ein n–Simplex einer Unterteilung davon). Es ist dann richtig, daß jedes Simplex der baryzentrischen Unterteilung von Σ^n einen Durchmesser

$$\leq \ a \cdot (\,\mathit{Durchmesser\ von}\ \Sigma^n\,)$$

hat. — Denn per Induktion folgt ja hieraus, daß jedes Simplex der k–fachen baryzentrischen Unterteilung von ∇^n einen Durchmesser

$$\leq \ a^k \cdot (\,\textit{Durchmesser von } \nabla^n\,)$$

hat, und man braucht nun k nur noch so zu wählen, daß diese Zahl kleiner wird als die Lebesgue–Zahl der offenen Überdeckung $\{f^{-1}(\mathring{O}_j)\}_{j\in J}$ von ∇^n.

Wir werden zeigen, daß $\frac{n}{n+1}$ eine solche Zahl a ist. Zunächst ist klar, daß die maximale Distanz innerhalb von einem affinen Simplex immer von einem Paar von Ecken angenommen wird. Es wird also genügen, die maximale Distanz zweier Ecken des Unterteilungs-Simplexes zu untersuchen. Diese Ecken nun sind sämtlich Baryzenter von Seiten (inklusive der Ecken von Σ^n). Wenn beide Ecken in $\partial\Sigma^n$ liegen, so ist man per Induktion fertig, weil

$$\frac{(n-1)}{(n-1)+1} \ < \ \frac{n}{n+1} \quad .$$

Es genügt also, den Fall zu betrachten, wo eine dieser Ecken der Baryzenter von Σ^n ist. Wiederum ist nun klar, daß die maximale Distanz zum Baryzenter innerhalb Σ^n von einer Ecke von Σ^n angenommen wird. Es genügt also, die Distanz vom Baryzenter zu einer Ecke von Σ^n abzuschätzen. Seien $v_0,\ldots,v_n$ die Ecken. Sei v_{i_0} die, von der die Distanz zum Baryzenter abzuschätzen ist, dann ist

$$\begin{aligned} \| \, v_{i_0} - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i \, \| \ &= \ \| \, \frac{1}{n+1} \sum_{i\neq i_0} (v_{i_0} - v_i) \, \| \\ &\leq \ \frac{n}{n+1} \ \sup \| \, v_{i_0} - v_i \, \| \quad . \end{aligned}$$

□

Wir können nun zeigen

Satz. *Die Inklusion* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Dies ist eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen. Deshalb können wir folgendes Kriterium anwenden, das wir in Zusammenhang mit dem Whitehead-Satz kennengelernt haben (“Formulierung des Whitehead-Satzes ohne Homotopie-gruppen”): *Es genügt, zu zeigen, für jedes* m *und jede Abbildung*

$$g : \ D^m \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$$

mit $g(\partial D^m) \subset \mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *existiert eine Homotopie, relativ* ∂D^m, *zu einer Abbildung mit Bild in dem Unterkomplex* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$. Weil die Inklusion $\partial D^m \to D^m$ die HEE hat, können wir das Kriterium noch ein bißchen abschwächen. Nämlich *es genügt, eine Homotopie zu finden von* g *zu einer Abbildung mit Bild in* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *derart, daß die auf* ∂D^m *eingeschränkte Homotopie ganz in dem Unterraum* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *verläuft.*

Eine solche Homotopie erhalten wir aus dem vorstehenden Satz. Nämlich $g(D^m)$ ist kompakt und ist deshalb enthalten in einem *endlichen Unterkomplex* des CW-Komplexes $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$; das heißt, es ist enthalten in der Vereinigung der Bilder von *endlich vielen* singulären Simplizes in $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$, etwa $f_0, \ldots, f_p$. Nach dem vorstehenden Satz existiert deshalb eine Zahl

$$k \;=\; \max_{0 \le i \le p} k(f_i)$$

so daß

$$\mathrm{Unt}^k(g(D^m)) \;\subset\; \mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \;.$$

Die Homotopie von Unt^k zur identischen Abbildung hat die Eigenschaft, daß ihre Einschränkung auf $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ ganz in $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ verläuft. Sie induziert deshalb eine Homotopie der gewünschten Art von g. □

Bemerkung. Eigentlich ist dieser Satz nicht genau das, was wir wollen. Wir möchten nämlich wissen, daß die Inklusion $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$ eine Homotopieäquivalenz ist. Das vorstehende Argument läßt sich auf diesen Fall nicht übertragen, weil die baryzentrische Unterteilung *nicht* mit den Ausartungs-Abbildungen verträglich ist (im Gegensatz zu ihrer Verträglichkeit mit Rand-Abbildungen). Wir behelfen uns bei dieser Kalamität mit einem indirekten Vorgehen. Wir werden nämlich später zeigen: Für jede simpliziale Menge Y ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Real}(Y) \to |\,Y\,|$ eine Homotopieäquivalenz. Wenn wir dieses Resultat mit dem obigen Satz kombinieren, werden wir wissen, daß in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \arrow[d, "\simeq"] \\
|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \arrow[r] & |\,\mathrm{S}(X)\,|
\end{tikzcd}$$

drei der Pfeile Homotopieäquivalenzen sind (wie angedeutet), und daß somit die restliche Abbildung, $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$, ebenfalls eine Homotopieäquivalenz sein muß. □

Ketten-Unterteilung

Sei X ein topologischer Raum, $\mathrm{S}(X)$ sein singulärer Komplex, und $C(X)$ der singuläre Kettenkomplex (mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A),

$$C(X)_n \ := \ A[\mathrm{S}(X)_n] \ .$$

(Per linearer Fortsetzung sind die Rand-Abbildungen d_i zu $A[\mathrm{S}(X)_n] \to A[\mathrm{S}(X)_{n-1}]$ erweitert; der Rand-Operator ∂ ist definiert als die Wechselsumme $\partial = \sum (-1)^i \, d_i$.)

Die neulich diskutierte *baryzentrische Unterteilung* ordnet einem singulären Simplex $f : \nabla^n \to X$ andere singuläre Simplizes derselben Dimension zu, nämlich solche, wo die Abbildung sich schreiben läßt als eine Komposition

$$\nabla^n \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(\text{U-}\nabla^n) \ \cong \ \nabla^n \xrightarrow{f} X \ ,$$

wobei "Inkl." die Inklusionsabbildung von einem der Simplizes in dem Simplizialkomplex $\text{U-}\nabla^n$ (baryzentrische Unterteilung) bezeichnet.

Satz. *Es gibt eine Unterteilungs-Abbildung* $u : C(X) \longrightarrow C(X)$ *und eine Kettenhomotopie* D *von der identischen Abbildung zu der Abbildung* u ,

$$\partial D + D \partial \ = \ \mathrm{Id} - u \ , \quad D : C(X)_n \longrightarrow C(X)_{n+1} \ , \quad n = 0, 1, \dots \ ,$$

wobei folgendes gilt: Sei $x = (f : \nabla^n \to X\,)$ *ein erzeugendes Simplex in* $C(X)_n$ *. Dann ist* $u(x) \ = \ \sum \pm g_i$ *, wo* g_i *die endlich vielen Simplizes*

$$\nabla^n \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(U\text{-}\nabla^n) \ \cong \ \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

durchläuft. Ähnlich auch $D(x) \ = \ \sum \pm h_j$ *, wo* h_j *die endlich vielen Simplizes*

$$\nabla^{n+1} \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(\widetilde{U}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \ \cong \ \nabla^n \times [0,1] \xrightarrow{\text{pr}} \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

durchläuft.

Dabei ist $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)$ der ebenfalls neulich diskutierte Simplizialkomplex (eine Unterteilung von $\nabla^n \times [0,1]$), der zwischen der baryzentrischen Unterteilung von ∇^n einerseits und der "Unterteilung Nichts-Tun" andererseits interpoliert.

Beweis des Satzes. Die Konstruktion erfolgt induktiv; nämlich per Induktion über die Dimension n . Das induktive Vorgehen enthebt uns, teilweise, der Notwendigkeit, die Dinge im Detail benennen zu müssen; insbesondere, die vorkommenden Vorzeichen wirklich alle hinzuschreiben.

Es sei also induktiv angenommen, daß u und D auf den Ketten bis zur Dimension $n{-}1$ schon konstruiert sind und daß sie die beschriebenen Eigenschaften haben. Unter dieser Voraussetzung werden wir u und D nun für n-Ketten konstruieren.

Wegen der Linearität der Abbildungen wird es genügen, die Werte der Abbildungen u und D auf einem erzeugenden Simplex $(f : \nabla^n \to X)$ anzugeben; und in diesem Fall die behaupteten Identitäten dann auch nachzuprüfen.

Eine weitere Vereinfachung kommt dadurch zustande, daß wir die *Natürlichkeit* der Abbildungen u und D ausnutzen. Diese besagt (wie üblich), wenn $q : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen ist, dann sind die entstehenden Diagramme

$$
\begin{array}{ccccccc}
C(X)_n & \xrightarrow{u} & C(X)_n & \qquad & C(X)_n & \xrightarrow{D} & C(X)_{n+1} \\
\big\downarrow{\scriptstyle q_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle q_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle q_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle q_*} \\
C(Y)_n & \xrightarrow{u} & C(Y)_n & & C(Y)_n & \xrightarrow{D} & C(Y)_{n+1}
\end{array}
$$

kommutativ. Nachträglich verschärfen wir die Aussage des Satzes nun so, daß sie die Natürlichkeit beinhaltet; diese ist somit auch Teil unserer Induktionsvoraussetzung, und die Konstruktion im Induktionsschritt wird so sein, daß sie die Natürlichkeit mitliefert.

Das erzeugende Simplex $(f : \nabla^n \to X)$ (auf dessen Behandlung wir uns ja schon zurückgezogen haben) liegt im Bild der Abbildung

$$f_* : C(\nabla^n) \longrightarrow C(X) \ ,$$

es ist das Bild des singulären Simplexes in $C(\nabla^n)_n$, das gegeben ist durch die identische Abbildung, $\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n$.

Es wird deshalb nun genügen, die Werte der Abbildungen u und D *für dieses eine Simplex* $(\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n)$ anzugeben. Denn per Natürlichkeit (die wir jetzt *fordern*) erzwingt das den Wert

$$u(f : \nabla^n \to X) \ = \ f_*(u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \ ;$$

und die Natürlichkeit, allgemein, ist eine automatische Konsequenz: für $q : X \to Y$ ist

$$
\begin{aligned}
q_*(u(f : \nabla^n \to X)) \ &= \ q_* f_*(u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \\
&= \ u(q\,f : \nabla^n \to Y) \\
&= \ u(q_*(f : \nabla^n \to X)) \ .
\end{aligned}
$$

Für D argumentiert man entsprechend. Und schließlich wird auch (wiederum wegen der Natürlichkeit) die Beziehung $D\partial + \partial D \ = \ \mathrm{Id} - u$ schon ganz allgemein gelten, sobald sie in dem einen Fall von dem singulären Simplex $\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n$ etabliert ist.

Innerhalb von einem euklidischen Raum, und speziell deshalb auch innerhalb von dem Standard-Simplex ∇^n , ist es sinnvoll, von einem *affinen singulären Simplex* zu reden. Affine singuläre Simplizes sind leicht zu beschreiben: man braucht nur anzugeben, was die Bilder der Ecken sind. Mit ihrer Hilfe werden wir die Abbildungen u und D in dem relevanten Spezialfall jetzt angeben.

Seien $w_0, \dots, w_m \in \nabla^n$. Wir schreiben $(w_0, \dots, w_m)$ für das affine singuläre Simplex $\sigma : \nabla^m \to \nabla^n$ mit $\sigma(v_i) = w_i$, wo v_i die i-te Ecke von ∇^m bezeichnet. Es ist z.B. in dieser Notation

$$\partial(w_0, \dots, w_m) \ = \ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \ (w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_m) \ ,$$

wo, wie sonst auch, die Notation " $\widehat{w_i}$ " bedeutet, daß w_i weggelassen sein soll. Bezeichne β den Baryzenter von ∇^n . Wenn $C'(\nabla^n)$ den Unterkomplex der affinen singulären Simplizes in $C(\nabla^n)$ bezeichnet, so können wir, in jeder Dimension m , eine Abbildung

$$\beta : \ C'(\nabla^n)_m \ \longrightarrow \ C'(\nabla^n)_{m+1}$$

definieren ("Kegel mit Kegelpunkt β ") durch lineare Fortsetzung, ausgehend von

$$(w_0, \dots, w_m) \ \overset{\beta}{\longmapsto} \ (w_0, \dots, w_m, \beta) \ .$$

Es ist dann

$$\partial\beta \ = \ \beta\partial \ + \ (-1)^{m+1} \, \mathrm{Id}$$

wegen

$$\begin{aligned} &\sum_i \ (-1)^i \ (w_0, \dots, \widehat{\ \ }, \dots, w_m, \beta) \qquad \text{(Lücke an der } i\text{-ten Stelle)} \\ &= \ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \, (w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_m, \beta) \ + \ (-1)^{m+1} \, (w_0, \dots, w_m) \ . \end{aligned}$$

Wir *definieren* nun

$$u(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \ := \ (-1)^n \, \beta(u \, \partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,)$$

und

$$D(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \ := \ (-1)^{n+1} \, \beta(\, \mathrm{Id}_{\nabla^n} - D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,) \ .$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung handelt es sich bei $u(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))$ um eine Linearkombination (mit Vorzeichen) der $u(\delta_i(\nabla^{n-1}))$, und jedes von diesen wiederum ist eine Linearkombination (wieder mit Vorzeichen) der $(n{-}1)$-Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von ∇^{n-1} . Deshalb ist $u(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))$, bis auf geeignete Vorzeichen, gerade die Summe der $(n{-}1)$-Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von $\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. Es folgt deshalb aus der Definition, daß $u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$, bis auf geeignete Vorzeichen, die Summe der n-Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von ∇^n ist.

Ähnlich klärt man auch, was es mit $D(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ auf sich hat.

Wie oben festgestellt, ist

$$\partial\beta(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \ = \ (-1)^{n+1}(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \ + \ \beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$$

und

$$\partial\beta(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;=\; (-1)^{n+1}(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \,+\, \beta\partial(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;.$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}\partial D(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;&=\; (-1)^{n+1}\partial\beta(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, (-1)^{n+1}\partial\beta(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))\\ &=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,+\, (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, (-1)^{n+1}\beta\partial D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\end{aligned}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\partial D + D\partial)(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,+\, (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, (-1)^{n+1}\beta\partial D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt nun (da $\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ kleinere Dimension hat)

$$\partial D(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;=\; (\mathrm{Id} - u - D\partial)\;(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))\;.$$

Es folgt, daß $(\partial D + D\partial)(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ gegeben ist durch

$$(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,+\, (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, (-1)^{n+1}\beta\,(\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, u\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, D\partial\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\,)$$

oder, was nach Kürzen dasselbe ist,

$$(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,+\, (-1)^{n+1}\beta u\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,-\, u(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.$$

Das heißt, wir haben die Beziehung $\partial D + D\partial \,=\, \mathrm{Id} - u$ für das spezielle Simplex (Id_{∇^n}) nun nachgeprüft — wie wir zu tun hatten.

Nachzuweisen ist auch, daß u eine Kettenabbildung ist, $\partial\, u = u\,\partial$. Wieder genügt es hier, diesen Nachweis für den ganz speziellen Fall der Kette (Id_{∇^n}) zu erbringen. Die obige Beziehung zwischen ∂ und β, angewandt auf die Definition von u, liefert

$$\begin{aligned}\partial u(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;&=\; (-1)^n\,\partial\,\beta\,u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\\ &=\; (-1)^n\,\beta\,\partial\,u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \,+\, (-1)^n(-1)^{(n-1)+1}u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.\end{aligned}$$

Der zweite Term im letzten Ausdruck ist das, was wir wollen, $u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. Der erste Term ist null; denn nach Induktionsvoraussetzung ist u schon Kettenabbildung in der Dimension $n{-}1$, der Term ist also gleich $\beta\,u\,\partial\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. □

Sei nun O eine zulässige Überdeckung von X. Bezeichne $C_O(X)$ den Unterkomplex der bezüglich O kleinen Simplizes in $C(X)$; also $C_O(X)_n \;=\; A[\mathrm{S}_O(X)_n]$.

Satz. *Zu jeder Kette $z \in C(X)$, existiert eine natürliche Zahl k mit $u^k(z) \in C_O(X)$.*

Beweis. z ist endliche Linearkombination von singulären Simplizes, etwa

$$z \;=\; \sum a_i\,x_i\,, \quad x_i \in \mathrm{S}(X)_n \;.$$

Für ein singuläres Simplex x ist $u^\ell(x)$ die Summe (mit geeigneten Vorzeichen) von den n-Simplizes in der ℓ-fachen baryzentrischen Unterteilung von x. Zu x_i existiert deshalb eine Zahl k_i mit

$$u^{k_i}(x_i) \in \mathrm{S}_O(X) \;.$$

Wir nehmen $k = \max\; k_i$. □

Satz. *Die Inklusion* $C_O(X) \to C(X)$ *induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Beweis. Wir haben eine Kettenhomotopie D von der identischen Abbildung zu der Unterteilungs-Abbildung u konstruiert. Hieraus erhalten wir eine Kettenhomotopie $D^{(k)}$ von der identischen Abbildung zu der k-fachen Iteration u^k. Denn es ist

$$\mathrm{Id} - u^k \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} u^i\,(\mathrm{Id} - u) \;=\; \sum u^i\,(D\partial + \partial D) \;=\; \sum\,(u^i\,D\,\partial + \partial\,u^i\,D)\ ,$$

deshalb ist $D^{(k)} := \sum_{i=0}^{k-1} u^i\,D$ eine Kettenhomotopie von der Identität zu u^k,

$$\partial D^{(k)} + D^{(k)}\partial \;=\; \mathrm{Id} - u^k\ .$$

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $H_n(C_O(X)) \to H_n(C(X))$ erstens surjektiv und zweitens injektiv ist.

(i) Sei $[z] \in H_n(C(X))$. Sei z eine repräsentierende Kette von $[z]$; die Kette z ist ein Zykel, $\partial(z) = 0$. Wie oben gesehen, existiert für die Kette z nun eine Zahl k mit

$$u^k(z) \in C_O(X)_n\ .$$

Es ist dann $[z] = [u^k(z)]$. Denn die Differenz der Zykel z und $u^k(z)$ ist ein Rand,

$$z - u^k(z) \;=\; (\partial D^{(k)} + D^{(k)}\partial)\,(z) \;=\; \partial D^{(k)}(z)\ .$$

(ii) Sei $[z] \in H_n(C_O(X))$. Wenn das Bild von $[z]$ in $H_n(C(X))$ gleich null ist, so existiert ein $y \in C(X)_{n+1}$ mit $\partial y = z$. In dieser Situation können wir, wie oben gesehen, ein ℓ finden, so daß $u^\ell(y) \in C_O(X)_{n+1}$. Es ist dann

$$z - \partial(u^\ell(y)) \;=\; \partial(y - u^\ell(y)) \;=\; \partial(D^{(\ell)}\partial + \partial D^{(\ell)})(y) \;=\; \partial D^{(\ell)}\partial(y) \;=\; \partial D^{(\ell)}(z)\ .$$

Also

$$z \;=\; \partial\,D^{(\ell)}(z) \;+\; \partial\,u^\ell(y)\ .$$

Auf der rechten Seite ist nun der Term $u^\ell(y)$ *klein*, nach Konstruktion. Der Term $D^{(\ell)}(z)$ ist klein, weil die Abbildungen D und u kleine Ketten respektieren, und somit die Abbildung $D^{(\ell)}$ ebenfalls. Wir haben also eingesehen, daß z der Rand von einer *kleinen* Kette ist. Folglich ist das von z in $H_n(C_O(X))$ repräsentierte Element gleich null. $\square$

Vergleich von Realisierungen

Sei Y simpliziale Menge. Es gibt zwei Möglichkeiten der geometrischen Realisierung:
— *ohne* Berücksichtigung von Ausartungen, $\mathrm{Real}(Y)$, und
— *mit* Berücksichtigung von Ausartungen, $|Y|$.

SATZ. *Die kanonische Abbildung* $\mathrm{Real}(Y) \longrightarrow |Y|$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Dies ist insofern für uns interessant, als es eine bisher offen gelassene Lücke füllt, nämlich

SATZ. *Sei* X *topologischer Raum, und* O *zulässige Überdeckung. Die Inklusion*

$$|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,(\mathrm{S}(X)\,)\,|$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

BEWEIS. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ |\,\mathrm{S}_O(X)\,| & \longrightarrow & |\,\mathrm{S}(X)\,| \end{array}$$

in dem die vertikalen Pfeile nach dem obigen Satz Homotopieäquivalenzen sind, und wir wissen schon, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \to \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ eine Homotopieäquivalenz ist. □

Um den Satz über die Abbildung $\mathrm{Real}(Y) \to |Y|$ zu beweisen, betrachten wir drei Fälle in wachsender Allgemeinheit.

1) *Der Spezialfall* $Y = \Delta^n$ *(= Standard-n-Simplex).*

2) *Der Spezialfall eines endlich-dimensionalen* Y *(wir sagen:* Y *hat Dimension* $\leq n$, *wenn jedes Simplex der Dimension* $> n$ *ausgeartet ist).*

3) *Der allgemeine Fall.*

Wir behandeln diese Fälle in umgekehrter Reihenfolge in der Weise, daß wir zuerst den 3. Fall auf den 2. zurückführen, dann den 2. auf den 1.; zum Schluß behandeln wir den ersten Fall.

Reduktion von Fall 3 auf Fall 2. Bezeichne $\mathrm{Skel}_n(Y)$ die Unter-simpliziale-Menge *n-Skelett* von Y (ein Simplex von Y ist in $\mathrm{Skel}_n(Y)$ genau dann, wenn es Ausartung eines Simplexes der Dimension $\leq n$ ist).

Lemma. *Wenn* $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \xrightarrow{\simeq} |\mathrm{Skel}_n(Y)|$ *für alle* n, *dann* $\mathrm{Real}(Y) \xrightarrow{\simeq} |Y|$.

Das ist ein Spezialfall von der folgenden Bemerkung.

Bemerkung. Seien V und W CW-Komplexe mit $V = \bigcup_n V_n$, $W = \bigcup_n W_n$, wobei $V_0 \subset V_1 \subset \dots$, $W_0 \subset W_1 \subset \dots$, und wo V_n und W_n jeweils Unterkomplexe (nicht notwendig Skelette) sind. Sei $V \to W$ eine zelluläre Abbildung mit $V_n \to W_n$. Wenn $V_n \xrightarrow{\simeq} W_n$ für alle n, dann ist auch $V \to W$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Bezeichne Z den Abbildungs-Zylinder der Abbildung $V \to W$; dies ist ein CW-Komplex (da die Abbildung $V \to W$ als zellulär vorausgesetzt wurde). Bezeichne Z_n den Abbildungs-Zylinder der Abbildung $V_n \to W_n$; dies ist ein Unterkomplex von Z, die Z_n bilden eine aufsteigende Folge von Unterkomplexen, und ihre Vereinigung ist ganz Z.

Aufgrund der Hypothese wissen wir, daß jede der Inklusionen $V_n \to Z_n$ eine Homotopieäquivalenz ist. Wir wollen zeigen, daß die Inklusion $V \to Z$ ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

Wir benutzen: Eine Inklusion $X \to X'$ von CW-Komplexen ist Homotopieäquivalenz genau dann, wenn für jedes m und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

eine Homotopie, relativ ∂D^m, von f zu einer Abbildung mit Bild in X existiert. Sei

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

ein solches Diagramm. Nun ist $f(D^m)$ kompakt und daher, wie wir wissen, schon enthalten in einem endlichen Unterkomplex von Z. Da Z die Vereinigung der aufsteigenden Folge von CW-Komplexen Z_n ist, folgt, daß ein k existiert mit $f(D^m) \subset Z_k$. Wir haben deshalb ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & V_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & Z_k \end{array}$$

und die gewünschte Deformation von f existiert nach der Voraussetzung, daß $V_k \to Z_k$ eine Homotopieäquivalenz ist. $\square$

Reduktion von Fall 2 auf Fall 1. Diese ist gegeben durch

Lemma. *Wenn* $\mathrm{Real}(\Delta^m) \xrightarrow{\simeq} |\Delta^m|$ *für alle* m, *dann* $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \xrightarrow{\simeq} |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ *für alle* n.

Beweis (durch Induktion nach n). Es ist

$$\mathrm{Skel}_n(Y) \;\cong\; \mathrm{Skel}_{n-1}(Y) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \;,$$

wo J_n die Indexmenge für die nicht-ausgearteten n-Simplizes von Y^n bezeichnet. Nun ist sowohl $\mathrm{Real}(\dots)$ als auch $|\dots|$ verträglich mit Verklebung; d.h., es ist

$$\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \;\cong\; \mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)) \cup_{\mathrm{Real}(J_n \times \partial\Delta^n)} \mathrm{Real}(J_n \times \Delta^n)$$

und ähnlich für $|\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$. Das zeigt, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \to |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ die Abbildung der verklebten Räume ist, die gegeben ist durch das Verklebediagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)) \arrow[d] & \mathrm{Real}(J_n \times \partial\Delta^n) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Real}(J_n \times \Delta^n) \arrow[d] \\
|\,\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)\,| & |\,J_n \times \partial\Delta^n\,| \arrow[l] \arrow[r] & |\,J_n \times \Delta^n\,|
\end{tikzcd}$$

Um einzusehen, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \to |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ Homotopieäquivalenz ist, genügt es demnach (wegen des Klebelemmas) sich zu überlegen, daß die drei vertikalen Pfeile in dem Diagramm Homotopieäquivalenzen sind.

Für den linken und den mittleren Pfeil gilt dies nach Induktionsvoraussetzung, weil $\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)$ und $\partial\Delta^n$ die Dimension $\leq n{-}1$ haben (also gleich ihrem $(n{-}1)$-Skelett sind). Den rechten Pfeil betreffend merken wir an, daß sowohl $\mathrm{Real}(\dots)$ als auch $|\dots|$ mit disjunkten Vereinigungen verträglich sind. Deshalb ist der rechte Pfeil disjunkte Vereinigung von Abbildungen $\mathrm{Real}(\Delta^n) \to |\Delta^n|$, und die sind ja, nach der Voraussetzung dieses Falles, ebenfalls Homotopieäquivalenzen. □

Behandlung von Fall 1. Um zu zeigen, daß $\mathrm{Real}(\Delta^n) \to |\Delta^n|$ Homotopieäquivalenz ist, genügt es, zu zeigen, daß beide Räume zusammenziehbar sind (d.h., den Homotopietyp von einem Punkt haben).

Lemma. $|\Delta^n| \simeq \mathrm{pt}$.
Beweis. $|\Delta^n| \cong \nabla^n$.

Lemma. $\mathrm{Real}(\Delta^n) \simeq \mathrm{pt}$.

Beweis. Dies ist etwas komplizierter. Es ist z.B. *nicht* richtig, daß $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ein Punkt wäre; $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ist im Gegenteil ein recht großer CW-Komplex (es gibt je eine Zelle in jeder Dimension). Im Fall von $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ist es noch möglich, den Homotopietyp gewissermaßen “auszurechnen” (dies war Gegenstand einiger Übungsaufgaben), im allgemeinen Fall ist dies Verfahren aber nicht sehr praktikabel. Wir benutzen stattdessen den folgenden Satz.

Satz. *Sei Z eine Δ-Menge. Hinreichend dafür, daß* $\mathrm{Real}(Z) \simeq \mathrm{pt.}$, *ist folgendes:*

Kriterium. *Es gibt eine Folge von Abbildungen* $H_m : Z_m \to Z_{m+1}$ *mit*

$$d_i\, H_m \;=\; H_{m-1}\, d_i \;,\quad \text{für}\quad 0 \le i \le m \;,\quad \text{und}\quad d_{m+1}\, H_m \;=\; \mathrm{Id}_{Z_m} \;,$$

und es gibt eine Ecke $\widehat{z} \in Z_0$, *so daß für alle* m *und alle* $z \in Z_m$ *gilt*

$$\widehat{z} \;=\; (d_0)^{m+1}\, H_m(z) \quad (=\ \text{letzte Ecke von}\ H_m(z)\,)\ .$$

Beweis. Wir zeigen, es gibt eine Homotopie

$$F:\ \mathrm{Real}(Z) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(Z)$$

von der identischen Abbildung auf $\mathrm{Real}(Z)$ zu der konstanten Abbildung mit Wert $\widehat{z}$. Nach der Definition von $\mathrm{Real}(Z)$,

$$\mathrm{Real}(Z) \;=\; \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \,/ \sim\ ,$$

genügt es, zu zeigen, es gibt eine Abbildung

$$\overline{F}:\ \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1] \;\longrightarrow\; \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m\ ,$$

die mit der induzierten Äquivalenzrelation verträglich ist, und die gewisse weitere Eigenschaften hat. Die Abbildung $\overline{F}$ wird definiert als die disjunkte Vereinigung von Abbildungen

$$\overline{F}_m:\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1] \;\longrightarrow\; Z_{m+1} \times \nabla^{m+1}\ ,$$

und zwar ist die Abbildung der Indexmenge $Z_m \to Z_{m+1}$ gegeben durch die Abbildung H_m des Kriteriums, und im übrigen ist

$$h_m:\ \nabla^m \times [0,1] \longrightarrow \nabla^{m+1}$$

eine (kanonische) Abbildung mit

$$\begin{aligned} h_m \,|\, \nabla^m \times 0 \;&=\; \delta_{m+1} && \text{(Seiteninklusion, die die letzte Ecke meidet)} \\ h_m \,|\, \nabla^m \times 1 \;&=\; (\delta_0)^{m+1}\,(\nabla^0) && \text{(konstante Abbildung in die letzte Ecke)}\,; \end{aligned}$$

wobei diese Abbildung eindeutig festgelegt ist durch die Forderung, daß sie linear ist auf jedem der Simplizes der kanonischen Simplizialzerlegung von $\nabla^m \times [0,1]$. Für variables m sind die Abbildungen h_m verträglich mit Seiten-Inklusionen, es gilt nämlich

$$h_m \circ (\delta_i \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \;=\; \delta_i \circ h_{m-1}\ ,\quad \text{für}\ \ 0 \le i \le m\ .$$

Zusammen mit der vorausgesetzten Beziehung $d_i\, H_m \;=\; H_{m-1}\, d_i$ (für $0 \le i \le m$) gibt das die geforderte Verträglichkeit der Abbildung $\overline{F}$ mit der induzierten Äquivalenzrelation. Denn sei $z \in Z_m$, $x \in \nabla^{m-1}$ und $t \in [0,1]$. Die Äquivalenzrelation auf $\dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1]$ sagt, daß

$$(\, d_i(z)\,,\, x\,,\, t\,) \quad\sim\quad (\, z\,,\, \delta_i(x)\,,\, t\,)\ ,$$

wir müssen also nachprüfen, daß auch die Bilder dieser beiden unter der Abbildung $\overline{F}$ zueinander äquivalent sind. Das ist aber der Fall: diese Bilder sind gegeben durch

$$(H_{m-1}(d_i(z)) \, , \; h_{m-1}(x,t)) \;\; = \;\; (d_i(H_m(z)) \, , \; h_{m-1}(x,t))$$

einerseits und

$$(H_m(z) \, , \, h_m(\delta_i(x),t)) \;\; = \;\; (H_m(z) \, , \, \delta_i(h_{m-1}(x,t)))$$

andererseits. $\overline{F}$ induziert also eine Homotopie F, wie gewünscht. Die Homotopie F geht von der identischen Abbildung, wegen

$$z \times \nabla^m \times 0 \;\longrightarrow\; H_m(z) \times \delta_{m+1}(\nabla^m) \;\sim\; d_{m+1} H_m(z) \times \nabla^m \quad (= \; z \times \nabla^m) \, ,$$

zur konstanten Abbildung mit Wert $\widehat{z}$, wegen

$$z \times \nabla^m \times 1 \;\longrightarrow\; H_m(z) \times (\delta_0)^{m+1}(\nabla^0) \;\sim\; (d_0)^{m+1} H_m(z) \times \nabla^0 \quad (= \; \widehat{z} \times \nabla^0) \, .$$

□

Aufgrund dieses Satzes ist $\mathrm{Real}(\Delta^n) \;\simeq\;$ pt. , denn

Behauptung. Δ^n *erfüllt das Kriterium.*

Beweis. Die Ecken von Δ^n sind $0, 1, \ldots, n \in (\Delta^n)_0$. Als $\widehat{z}$ nehmen wir die letzte Ecke, n . Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} H_m : \; \mathrm{Hom}_\Delta([m] \, , [n]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Delta([m{+}1] \, , [n]) \\ (f : [m] \to [n]) & \longmapsto & (f' : [m{+}1] \to [n]) \end{array}$$

ist definiert als

$$f'(i) \; = \; f(i) \; , \quad \text{für } i \leq m \; , \quad \text{und} \quad f'(m{+}1) \; = \; n \; .$$

Daß das System $\{H_m\}$ die geforderten Bedingungen erfüllt, ist klar. □

Anhang: Klebelemma

Es soll das Klebelemma bewiesen werden. Es gibt dazu verschiedene Methoden. Wir gehen hier so vor, daß wir eine bestimmte Beziehung benutzen (der folgende Satz) zwischen *Homotopieäquivalenzen* einerseits und *Deformationsretrakten* andererseits.

Ein "Deformationsretrakt" (oder, wie es manchmal auch in der Literatur heißt, "starker Deformationsretrakt") soll hier das folgende bedeuten. Sei X Unterraum von X'. Wir sagen, X ist *Deformationsretrakt* von X', wenn es eine Homotopie, *relativ zu* X, gibt, von der identischen Abbildung auf X' zu einer Abbildung von X' nach X (letztere Abbildung ist dabei notwendigerweise eine Retraktion).

Etwas detaillierter (und formaler) läuft dies auf das folgende hinaus. Bezeichne $i : X \to X'$ die Inklusionsabbildung. X ist Deformationsretrakt von X', wenn eine Abbildung $r : X' \to X$ existiert, mit $r \circ i = \mathrm{Id}_X$, und wenn ferner eine Homotopie zwischen der Abbildung $i \circ r$ und der identischen Abbildung auf X' existiert, wobei diese Homotopie auf dem Unterraum X konstant sein soll.

Unter dem Abbildungszylinder $Z(f)$ einer Abbildung $f : X \to Y$ soll, wie üblich, der Raum

$$Z(f) \ = \ X \times [0,1] \ \cup_{X \times 1} Y \ .$$

verstanden werden.

Satz. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $Z(f)$ ihr Abbildungszylinder. Es gilt:

(i) *Die Inklusion* $X \to Z(f)$ *hat die* HEE (*Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft*).

(ii) *Wenn* $f : X \to Y$ *Homotopieäquivalenz ist, dann ist* X *Deformationsretrakt von dem Abbildungszylinder* $Z(f)$ (*und*, natürlich, *umgekehrt*).

Den Beweis geben wir später. Wir benötigen auch einige einfache Tatsachen, die wir jetzt als Bemerkungen formulieren.

Bemerkung (1). *Sei* A *Deformationsretrakt von* X. *Sei* $A \to B$ *eine Abbildung. Dann ist* B *Deformationsretrakt von* $X \cup_A B$.

Beweis. Wir nehmen die induzierte Deformation

$$(X \cup_A B) \times I \ \cong \ X \times I \ \cup_{A \times I} \ B \times I \longrightarrow X \cup_A B$$

wo zur Abkürzung $I = [0,1]$. $\square$

Bemerkung (2). *Sei A abgeschlossener Unterraum von X, sei $A \to B$ eine Abbildung. Wenn $A \to X$ die HEE hat, dann auch die Inklusion $B \to B \cup_A X$.*

Beweis. Wie wir uns früher überlegt haben, so ist die HEE von $A \to X$ äquivalent dazu, daß eine Retraktion

$$X \times I \longrightarrow A \times I \cup_{A \times 0} X \times 0$$

existiert. Wir nehmen die induzierte Retraktion

$$\begin{aligned}
&(B \cup_A X) \times I \\
&\cong B \times I \cup_{A \times I} X \times I \longrightarrow B \times I \cup_{A \times I} (A \times I \cup_{A \times 0} X \times 0) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong B \times I \cup_{A \times 0} X \times 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong B \times I \cup_{B \times 0} (B \cup_A X) \times 0 \ .
\end{aligned}$$ □

Bemerkung (3). *Sei A abgeschlossen in X. Wenn $A \to X$ die HEE hat, dann ist $A \times I \cup_{A \times 0} X \times 0$ Deformationsretrakt von $X \times I$.*

Beweis. Sei $\rho : X \times I \to A \times I \cup_{A \times 0} X \times 0$ eine Retraktion. Indem wir ρ als Abbildung nach $X \times I$ auffassen, können wir schreiben $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. In Abhängigkeit von dem Parameter $t \in [0,1]$ definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}
R_t : \ X \times I &\longrightarrow X \times I \\
(\, x \,,\, s \,) &\longmapsto (\, \rho_1(x, st) \,,\, (1{-}t)s + t \cdot \rho_2(x,s) \,) \ .
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
R_0(x,s) &= (\rho_1(x,0)\,, s) = (x,s) \ , \\
R_1(x,s) &= (\rho_1(x,s)\,, \rho_2(x,s)\,) = \rho(x,s) \ , \\
R_t(x,0) &= (\rho_1(x,0)\,, t\ \rho_2(x,0)\,) = (x,0) \ ,
\end{aligned}$$

und, für $a \in A$,

$$R_t(a,s) = (\rho_1(a,st)\,, (1{-}t)s + t\,\rho_2(a,s)\,) = (a, (1{-}t)s + ts) = (a,s) \ .$$

Diese Beziehungen zeigen, daß $t \mapsto R_t$, $t \in [0,1]$, eine Deformationsretraktion von $X \times I$ in den Unterraum $A \times I \cup_{A \times 0} X \times 0$ ist. □

Ein Spezialfall des Klebelemmas. *Sei $A \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit der HEE. Sei $\alpha : A \to A'$ eine Homotopieäquivalenz. Die induzierte Abbildung*

$$\chi : \ X \longrightarrow A' \cup_A X$$

ist ebenfalls eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Inklusion von X in den Abbildungszylinder $Z(\chi)$ eine Homotopieäquivalenz ist. Es ist

$$\begin{aligned} Z(\chi) &= X \times I \cup_{X\times 1} A' \cup_A X \\ &\cong (X \times I \cup_{X\times 1} X) \cup_A A' \cong X \times I \cup_{A\times 1} A' \\ &\cong X \times I \cup_{A\times I} A \times I \cup_{A\times 1} A' \\ &\cong X \times I \cup_{A\times I} Z(\alpha) \quad . \end{aligned}$$

Nach Bemerkung (3) ist $A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$ Deformationsretrakt von $X \times I$. Mit Bemerkung (1) folgt daher, daß

$$X \times 0 \cup_{A\times 0} Z(\alpha) \cong (X \times 0 \cup_{A\times 0} A \times I) \cup_{A\times I} Z(\alpha)$$

Deformationsretrakt ist von

$$X \times I \cup_{A\times I} Z(\alpha) \cong Z(\chi) \; .$$

Nach dem oben angegebenen Satz ist $A \times 0$ Deformationsretrakt von $Z(\alpha)$. Erneute Anwendung von Bemerkung (1) ergibt daher, daß $X \times 0$ Deformationsretrakt ist von $X \times 0 \cup_{A\times 0} Z(\alpha)$. Es folgt, daß $X \times 0$ Deformationsretrakt ist von $Z(\chi)$, und der Spezialfall des Klebelemmas ist beweisen. □

Der allgemeine Fall des Klebelemmas. *Seien $A \to X$ und $A' \to X'$ abgeschlossene Inklusionen mit der HEE. Sei*

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & A & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y' & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, in dem alle vertikalen Pfeile Homotopieäquivalenzen sind. Die induzierte Abbildung

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Nach Bemerkung (2) hat die Abbildung $Y \to Y \cup_A X$ die HEE. Nach dem Spezialfall ist also

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_Y (Y \cup_A X) \cong Y' \cup_A X$$

eine Homotopieäquivalenz, und es genügt deshalb, zu zeigen, daß die Abbildung

$$(*) \qquad Y' \cup_A X \cong Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

Nun ist $A' \cup_A X \longrightarrow X'$ eine Homotopieäquivalenz, denn nach dem Spezialfall ist die Inklusion $X \to A' \cup_A X$ Homotopieäquivalenz, und $X \to X'$ ist ja Homotopieäquivalenz nach Voraussetzung. Hätten wir zusätzlich vorausgesetzt, daß auch die Abbildung $A' \to Y'$ die HEE hat, so würde also nun folgen (wieder nach dem Spezialfall), daß auch die Abbildung (*) eine Homotopieäquivalenz ist, und wir wären fertig.

Da wir dies aber nicht vorausgesetzt haben, brauchen wir noch einen kleinen Trick. Nämlich wir definieren Y'' als den Abbildungszylinder der Abbildung $A' \to Y'$. Dann hat die Inklusion $A' \to Y''$ die HEE (wie im obigen Satz behauptet), deshalb ist nach dem Spezialfall wieder

$$Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y'' \cup_{A'} X'$$

eine Homotopieäquivalenz. Andererseits können wir diese Abbildung vergleichen mit der Abbildung (*) oben,

$$Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} X' \ .$$

Nämlich, mit der Abbildung $Y'' \to Y'$, und aufgrund der Tatsache, daß die Komposition von $A' \to Y''$ mit $Y'' \to Y'$ gleich der Abbildung $A' \to Y'$ ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) & \longrightarrow & Y'' \cup_{A'} X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) & \longrightarrow & Y' \cup_{A'} X' \ . \end{array}$$

Von der oberen horizontalen Abbildung in dem Diagramm wissen wir, daß sie eine Homotopieäquivalenz ist, und von der unteren horizontalen Abbildung wollen wir es wissen. Es wird also genügen, zu sehen, daß die beiden vertikalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind. Das wissen wir aber eigentlich auch schon: die Abbildungen $A' \to X'$ und $A' \to A' \cup_A X$ haben die HEE und die Abbildung $Y'' \to Y'$ ist eine Homotopieäquivalenz. Nach dem Spezialfall ist es deshalb richtig, daß die Abbildungen

$$Y'' \cup_{A'} X' \longrightarrow Y' \cup_{A'} X' \quad \text{und} \quad Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X)$$

Homotopieäquivalenzen sind. □

Als Teil des obigen Satzes, und auch als zusätzliches Hilfsmittel, müssen wir zeigen, daß gewisse Inklusionen die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft haben. Wir erledigen das in einer eher ineffizienten Weise, durch direktes Hinschreiben der Dinge (mit Formeln).

Hilfssatz. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $Z(f)$ ihr Abbildungszylinder. Die beiden Inklusionen $X \longrightarrow Z(f)$ und*

$$Z(f) \times 0 \ \cup_{X \times 0} \ X \times [0,1] \ \cup_{X \times 1} \ Z(f) \times 1 \longrightarrow Z(f) \times [0,1]$$

haben die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft.

Beweis. Die Inklusion $X \to Z(f)$ hat dann (und nur dann) die HEE, wenn eine Retraktion

$$Z(f) \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1] \ \cup_{X \times 0} \ Z(f)$$

existiert. Um eine solche Retraktion anzugeben, genügt es, eine Retraktion

$$X \times I \times [0,1] \;\; \dot\cup \;\; Y \times [0,1] \;\cong\; (X \times I \;\dot\cup\; Y) \times [0,1] \;\longrightarrow\; X \times [0,1] \cup_{X \times 0} X \times I \;\;\dot\cup\;\; Y$$

anzugeben, die mit der Quotienten-Abbildung

$$X \times I \;\;\dot\cup\;\; Y \;\longrightarrow\; X \times I \cup_{X \times 1} Y \;=\; Z(f)$$

verträglich ist. Hier ist ein Beispiel für eine solche Retraktion: Auf dem ersten Summanden der disjunkten Vereinigung nehmen wir die Abbildung

$$X \times [0,1] \times [0,1] \;\longrightarrow\; X \times 0 \times [0,1] \cup_{X \times 0 \times 0} X \times [0,1] \times 0$$

die induziert ist von einer Retraktion des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ in seinen Unterraum $[0,1] \times 0 \cup 0 \times [0,1]$ (die Vereinigung der linken und der unteren Kante): die Retraktion des Quadrats ist gegeben durch die Projektion entlang einem Geradenbüschel durch den Punkt $(1,2)$ (ein Punkt oberhalb der rechten Kante des Quadrats). In Koordinaten ausgedrückt, ist die Retraktion gegeben durch $(x,s,t) \mapsto (x,s',t')$, wo

$$\frac{s'-1}{s-1} \;=\; \frac{t'-2}{t-2}$$

und wo s' und t' so zu bestimmen sind, daß eines von ihnen 0 ist und das andere nicht negativ. Explizit hingeschrieben bedeutet dies

$$(x,s,t) \;\longmapsto\; \begin{cases} (\,x\,,\,0\,,\,\frac{t-2s}{1-s}\,) & \text{wenn } \; 2\,s \le t \\ (\,x\,,\,\frac{2s-t}{2-t}\,,\,0\,) & \text{wenn } \; 2\,s \ge t \;. \end{cases}$$

Für $s = 1$ reduziert sich die Abbildung auf die Projektion $X \times [0,1] \to X \times 0$, sie ist also bezüglich der Verklebeabbildung $f \times \mathrm{Id} : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ verträglich mit der Retraktion $Y \times [0,1] \to Y \times 0$, die (wie wir jetzt festsetzen) ebenfalls durch die Projektion gegeben sein soll. — Soweit zur ersten Abbildung.

Was die zweite Abbildung angeht, so ist zu zeigen, daß es eine Retraktion gibt von dem Raum $Z(f) \times [0,1] \times [0,1]$ in seinen Unterraum

$$Z(f) \times [0,1] \times 0 \;\cup_{(\,\dots)\times 0}\; \big(Z(f) \times 0 \cup_{X \times 0} X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Z(f) \times 1\big) \times [0,1] \;.$$

Hierfür genügt es, eine Retraktion von

$$X \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

in den Unterraum

$$X \times [0,1] \times [0,1] \times 0 \;\cup\; X \times [0,1] \times 0 \times [0,1] \;\cup\; X \times 0 \times [0,1] \times [0,1] \\ \cup\; X \times [0,1] \times 1 \times [0,1]$$

zu finden, sowie eine Retraktion von

$$Y \times [0,1] \times [0,1]$$

in den Unterraum

$$Y \times [0,1] \times 0 \;\cup\; Y \times 0 \times [0,1] \;\cup\; Y \times 1 \times [0,1]$$

derart, daß diese beiden Retraktionen verträglich sind bezüglich der Verklebeabbildung

$$X \times 1 \times ([0,1] \times [0,1]) \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}} Y \times ([0,1] \times [0,1]) \ .$$

Ähnlich wie im vorigen Fall wird die Retraktion auf $X \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ auch hier wieder beschrieben durch eine Selbstabbildung des Kubus $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, die durch Projektion entlang einem Geradenbüschel gegeben ist; nämlich das Geradenbüschel durch den Punkt $(1 \, , \, \frac{1}{2} \, , \, 2)$. In Koordinaten ausgedrückt, ist die Retraktion gegeben durch

$$(x, s, t, u) \longmapsto (x, s', t', u')$$

wo

$$\frac{s'-1}{s-1} = \frac{t'-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}} = \frac{u'-2}{u-2}$$

und wo (s', t', u') so zu bestimmen sind, daß alle drei zwischen 0 und 1 liegen, und so daß mindestens eine der vier folgenden Gleichungen erfüllt ist

$$s' = 0, \quad t' = 0, \quad t' = 1 \quad \text{oder} \quad u' = 0 \ .$$

Explizit hingeschrieben bedeutet dies

$$(s \, , \, t \, , \, u) \longmapsto \begin{cases} (0 \, , \, \frac{2t-s}{2-2s} \, , \, \frac{u-2s}{1-s}) & \text{wenn} \quad 2t \geq s \, , \ u \geq 2s \\ (\frac{2t-s}{2t-1} \, , \, 0 \, , \, \frac{4t-u}{2t-1}) & \text{wenn} \quad 2t \leq s \, , \ u \geq 4t \\ (\frac{s-2(1-t)}{2t-1} \, , \, 1 \, , \, \frac{u-4(1-t)}{2t-1}) & \text{wenn} \quad s \geq 2(1-t) \, , \ u \geq 4(1-t) \\ (\frac{2s-u}{2-u} \, , \, \frac{4t-u}{4-2u} \, , \, 0) & \text{wenn} \quad 2s \geq u \, , \ u \leq 4t \ . \end{cases}$$

Die Äquivalenzrelation nun involviert diejenigen Punkte von $X \times$ Kubus , wo die Koordinate s den Wert $s = 1$ annimmt. Die Retraktion wird deshalb kompatibel sein zu der Retraktion auf $Y \times [0,1] \times [0,1]$, wenn wir letztere durch die obigen Formeln definieren, aber spezialisiert auf den Wert $s = 1$. Die in den Formeln verfügbaren Koordinaten t und u werden demgemäß dann die beiden Intervall-Koordinaten in $Y \times [0,1] \times [0,1]$ bezeichnen. □

Wir kommen zum Beweis des Satzes. Der erste Teil wurde im Hilfssatz gerade gezeigt. Wir müssen noch zeigen

Satz. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist Homotopieäquivalenz genau dann, wenn X Deformationsretrakt des Abbildungszylinders $Z(f)$ ist.*

Beweis. Y ist Deformationsretrakt von $Z(f)$, die Deformationsretraktion ist induziert von derjenigen von $[0,1]$ zu $\{1\}$. Insbesondere ist die kanonische Projektion

$$p : \, Z(f) \longrightarrow Y$$

eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $j : X \to Z(f)$ die kanonische Inklusion. Dann ist $p\,j = f$. Folglich ist f genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn j es ist.

Es bleibt noch zu zeigen: Wenn j Homotopieäquivalenz ist, dann ist $X \cong j(X)$ sogar Deformationsretrakt von $Z(f)$. Wir zeigen dies in drei Schritten, die wir jetzt als Behauptungen formulieren.

Behauptung 1. *Die Inklusion j hat eine Links-Inverse* $r\colon Z(f) \to X$. Mit anderen Worten, *X ist Retrakt von $Z(f)$, mit Retraktion r.*

Beweis. Sei $g : Y \to X$ eine Homotopie-Inverse zu f, also

$$g\,f \;\simeq_F\; \mathrm{Id}_X \qquad , \qquad f\,g \;\simeq_G\; \mathrm{Id}_Y \ .$$

Da die Abbildung

$$F:\, X \times I \longrightarrow X$$

die Eigenschaft hat, daß $F\,|\,X \times 1 \;=\; g\,f$, existiert eine Faktorisierung r; also eine Abbildung $r:\, Z(f) \to X$, die das folgende Diagramm kommutativ macht,

$$\begin{array}{ccc}
X \times [0,1] \;\;\dot\cup\;\; Y & \xrightarrow{\;F\;\dot\cup\;g\;} & X \\
\big\downarrow & & \big\uparrow r \\
X \times [0,1] \;\cup_{X\times 1}\; Y & = = = & Z(f) \ .
\end{array}$$

r ist eine Retraktion, da $F\,|\,X \times 0 = \mathrm{Id}_X$.

Behauptung 2. *Diese Retraktion ist Homotopie-Inverse zu der Inklusion j.*

Beweis. Da $r\,j = \mathrm{Id}_X$, ist nur zu zeigen, daß $j\,r \simeq \mathrm{Id}_{Z(f)}$. Wie oben angemerkt, ist Y Deformationsretrakt von $Z(f)$, genauer, wenn $i : Y \to Z(f)$ die Inklusion bezeichnet und $p : Z(f) \to Y$ die Projektion, dann ist

$$i\,p \;\simeq\; \mathrm{Id}_{Z(f)} \ .$$

Es folgt

$$j\,r \;\simeq\; (i\,p)\,(j\,r) \;\simeq\; (i\,p)\,(j\,r)\,(i\,p) \ .$$

Nun ist

$$p\,j\,r\,i \;=\; f\,r\,i \;=\; f\,g \ .$$

Die Homotopie $f\,g \simeq_G \mathrm{Id}$ induziert daher eine Homotopie

$$i(p\,j\,r\,i)p \;=\; i(f\,g)p \;\simeq\; i(\mathrm{Id}_Y)p \;=\; i\,p \ ,$$

und es folgt

$$j\,r \;\simeq\; i\,p\,(j\,r)\,i\,p \;\simeq\; i\,p \;\simeq\; \mathrm{Id}_{Z(f)} \ .$$

Behauptung 3. *Es gibt eine Homotopie, relativ zu $j(X)$, von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$.*

Beweis. Bezeichne

$$H:\, Z(f) \times [0,1] \longrightarrow Z(f)$$

irgendeine Homotopie von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$, eine solche wurde gerade konstruiert. Wir zeigen, daß H abgeändert werden kann zu einer Homotopie, die auf $j(X)$ konstant ist. Die Änderung von H werden wir erzielen durch eine Homotopie von H. Das geht in zwei Schritten. Zuerst wird H auf dem "relevanten Teilraum" von $Z(f) \times [0,1]$ in ganz expliziter Weise deformiert, um die gewünschte Änderung zu erreichen. Den Rest erledigt eine Anwendung der HEE.

1. Schritt. Wir definieren eine Homotopie der eingeschränkten Abbildung

$$Z(f) \times 0 \ \cup_{j(X)\times 0} \ j(X) \times [0,1] \ \cup_{j(X)\times 1} \ Z(f) \times 1 \ \xrightarrow{\ H\ } \ Z(f)$$

d.h., eine Abbildung

$$K : \ \big(Z(f) \times 0 \ \cup_{j(X)\times 0} \ j(X) \times [0,1] \ \cup_{j(X)\times 1} \ Z(f) \times 1 \big) \times [0,1] \ \longrightarrow \ Z(f) \ ,$$

durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} K(\,(z,0)\,,\,u\,) \ &= \ z \\ K(\,(j(x),t)\,,\,u\,) \ &= \ H(\,j(x)\,,\,t(1-u)\,) \\ K(\,(z,1)\,,\,u\,) \ &= \ H(\,j\,r(z)\,,\,1-u\,) \ . \end{aligned}$$

Dann ist K wohldefiniert wegen

$$K(\,(j(x),0)\,,\,u\,) \ = \ H(\,j(x)\,,\,0\,) \ = \ j(x)$$

und, weil $r\,j \ = \ \mathrm{Id}_X$,

$$K(\,(j(x),1)\,,\,u\,) \ = \ H(\,j(x)\,,\,1-u\,) \ = \ H(\,j\,r(j(x)\,)\,,\,1-u\,) \ ;$$

und K ist stetig, weil seine Einschränkung auf jeden der drei Teilräume der fraglichen abgeschlossenen Überdeckung stetig ist.

2. Schritt. Die Inklusion des Teilraumes $Z(f) \times 0 \ \cup_{j(X)\times 0} \ j(X) \times [0,1] \ \cup_{j(X)\times 1} \ Z(f) \times 1$ von $Z(f) \times [0,1]$ hat die HEE, wie in dem Hilfssatz oben gezeigt wurde. Deshalb gibt es eine Homotopie

$$K' : \ \big(Z(f) \times [0,1] \big) \times [0,1] \ \longrightarrow \ Z(f) \ ,$$

die die Homotopie K erweitert. Wir definieren jetzt die abgeänderte Homotopie

$$H' : \ Z(f) \times [0,1] \ \longrightarrow \ Z(f)$$

durch

$$H'(\,z\,,\,t\,) \ := \ K'(\,z\,,\,t\,,\,1\,) \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H'(\,z\,,\,0\,) \ &= \ K'(\,z\,,\,0\,,\,1\,) \ &&= \ K(\,(\,z\,,\,0\,)\,,\,1) \ &&= \ z \\ H'(\,z\,,\,1\,) \ &= \ K(\,(\,z\,,\,1\,)\,,\,1\,) \ &&= \ H(\,j\,r(z)\,,\,0\,) \ &&= \ j\,r\,(z) \\ H'(\,j(x)\,,\,t\,) \ &= \ K(\,(\,j(x)\,,\,t\,)\,,\,1\,) \ &&= \ H(\,j(x)\,,\,0\,) \ &&= \ j(x) \end{aligned}$$

H' ist also eine Homotopie von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$, die auf dem Unterraum $j(X)$ konstant ist. $\square$

Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie II

Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Hurewicz-Satz (2-6)

- Satz von Poincaré (2)
- Satz von Hurewicz (3)
- Satz von Whitehead (4)
- Hurewicz-Abbildung (5-6)

Homotopie-Additions-Satz (7-16)

- Abbildungs-Grad (7-8)
- Homotopie-Additions-Satz (10)
- Modifizierte Homotopiegruppen (11)

Die n-te Homotopiegruppe der n-Sphäre (17-21)

- erste Berechnung (20)
- zweite Methode (Differenzierbarkeit) (20)
- dritte Methode (Simpliziale Approximation) (21)

Beweis des Hurewicz-Satzes (22-29)

- Ein Unterkomplex des singulären Komplexes (22-24)
- Bemerkung: Adjungiertheit von "singulärem Komplex" und "geometrischer Realisierung" (25)

Variante des Beweises (Skizze) (30-33)

Faserbündel (34-36)

- Räume über B (34)
- lokale Trivialisierung (34)
- Bündel-Isomorphismus (35)
- Varianten: Vektorbündel, etc. (36)
- Schnitt (36)

Hopf-Faserung (37-40)

- Homotopiegruppen der Hopf-Faserung (37)
- Projektiver Raum (38)
- Prinzipalbündel (38)

Homotopie-Liftungs-Eigenschaft, Faserungen (41-47)

- HLE (41-42)
- Hurewicz-Faserung, Serre-Faserung (42)
- lange exakte Folge einer Faserung (42)
- HLEP (44)
- Faserbündel sind Faserungen (45)
- Vergleich verschiedener Fasern (47)

Induzierte Faserungen (48-49)
Faserprodukt (oder “Pullback”) (48)

Abbildungsräume (50-55)
Funktionen und partielle Funktionen (50)
metrische Abbildungsräume (50)
kompakt-offene Topologie (51)
Exponentialgesetz (51)

Wege-Räume, Schleifen-Räume (56-59)
Serre-Faserung von Abbildungsräumen (56)
Homotopiegruppen des Schleifenraumes (57)
Ersetzen einer Abbildung durch eine Faserung (58)
Homotopie-Faser (59)

Relative Homotopiegruppen einer Abbildung (60-63)
relative Homotopiegruppen sind die Homotopiegruppen der Homotopie-Faser (62)

CW-Approximationen, Co-Skelette (64-69)
Moore-Postnikov-Turm (68)
Eilenberg-MacLane-Räume (69; 79, 81)

Fundamentalgruppen von CW-Komplexen (70-78)
freie Gruppe (70)
Gruppen-Präsentation (71)
Fundamentalgruppe eines 1-dimensionalen CW-Komplexes (72, 77)
maximaler Baum (76)
Untergruppen freier Gruppen (76)
Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe (78)

Vorgegebene Homotopiegruppen (79-88)
Eilenberg-MacLane-Räume (79, 81)
Beispiel: $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ (79, 81)
Vorgegebene Homotopiegruppen mit vorgegebener Operation der Fundamentalgruppe (84, 88)

Mannigfaltigkeiten, Poincaré-Vermutung (89-94)
2-Mannigfaltigkeiten (89)
Homologie-Sphären (90)
Poincaré-Vermutung (92)
höher-dimensionale Poincaré-Vermutung (93)
exotische Sphären (93)
h-Kobordismen (94)

Whitehead-Gruppe (95-102)
elementare Erweiterungen, einfache Homotopie-Äquivalenz (96)
geometrische Definition der Whitehead-Gruppe (98)
algebraische Definition der Whitehead-Gruppe (102)

Algebraische Topologie II

Einführung

Es geht hier um *Homotopietheorie*. Stichworte sind:

Hurewicz-Satz
(Beziehung zwischen Homotopiegruppen und Homologiegruppen),

Faserungstheorie
(auf die Weise kommen die langen exakten Folgen von Homotopiegruppen in die Welt),

u.a.

Hurewicz-Satz

Sei X ein Raum. Wir wollen von *Homotopiegruppen* reden, also wählen wir einen Basispunkt $x_0 \in X$. Der Satz, um den es hier geht, wurde von seinem Autor, eben Hurewicz, im wesentlichen gleichzeitig mit der Definition der Homotopiegruppen publiziert. Der Satz gibt eine erste numerische Information über die Homotopiegruppen, indem er diese mit den entsprechenden *Homologiegruppen* in Beziehung setzt (die sind ja oft sehr einfach zu berechnen). Im Falle der *ersten* Homotopiegruppe (der Fundamentalgruppe) ist der Satz noch älter und stammt vom Erfinder der Fundamentalgruppe, Poincaré.

Von der n-ten Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ haben wir eine (kanonische) Abbildung in die n-te Homologiegruppe $H_n(X)$, wie wir uns in Kürze klarmachen werden; diese Abbildung wird als die *Hurewicz-Abbildung* bezeichnet. Der Hurewicz-Satz nun ist die Aussage, daß diese Abbildung in manchen Fällen ein Isomorphismus ist (oder zumindest so etwas ähnliches).

Satz (Hurewicz). *Sei X ein einfach-zusammenhängender Raum* (oder, was dasselbe ist, X ist weg-zusammenhängend und die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist trivial). *Sei $n \geq 2$ eine Zahl, und es gelte, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(X, x_0)$ für $i \leq n{-}1$ sämtlich trivial sind. Dann sind auch die entsprechenden Homologiegruppen $H_i(X)$ für $i \leq n{-}1$ sämtlich trivial, und die Abbildung*

$$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

ist ein Isomorphismus.

In dem ausgeschlossenen Fall $n = 1$ kann man eine ganz so einfache Formulierung nicht erwarten, denn $H_1(X)$ ist ja eine abelsche Gruppe, aber $\pi_1(X)$ muß durchaus nicht abelsch sein. Man wird sich also damit behelfen müssen, daß man die kanonische Faktorisierung über die abelsch gemachte Fundamentalgruppe betrachtet,

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_1(X) \ .$$

Satz (Poincaré). *Sei X ein weg-zusammenhängender Raum. Die Abbildung*

$$\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_1(X)$$

ist ein Isomorphismus.

Von großem Interesse ist auch eine Version des Satzes für *relative* (Homotopie- und Homologie-) Gruppen. Auch da ist es notwendig, einen eventuellen schädlichen Einfluß der Fundamentalgruppe zur Kenntnis zu nehmen und entsprechend dann auch in Rechnung zu stellen.

Sei nämlich A ein Unterraum von X; der Basispunkt x_0 liege in A. Wir sind an der Situation interessiert, wo A und X beide weg-zusammenhängend sind und wo beide dieselbe Fundamentalgruppe haben (d.h. wo die Abbildung $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus ist). In dem Fall ist die Menge $\pi_1(X, A; x_0)$ trivial (= ein-elementig); das wird uns der Notwendigkeit entheben, diese Menge (die ja keine Gruppe sein muß) jemals ernsthaft zu betrachten. Die erste möglicherweise nicht verschwindende relative Homotopiegruppe ist also $\pi_2(X, A; x_0)$. Dies ist, wie wir wissen, tatsächlich eine Gruppe, wenn auch eine möglicherweise nicht-abelsche; die höheren relativen Homotopiegruppen (von Nr. 3 an) sind alle abelsch.

Es ist aber nicht nur die Frage "abelsch oder nicht", die hier relevant ist. Es geht auch um die *Operation der Fundamentalgruppe*: die Fundamentalgruppe von dem Unterraum A operiert ja durch Automorphismen auf der relativen Homotopiegruppe $\pi_n(X, A; x_0)$. Andererseits ist es so (wie wir nachprüfen werden), daß die Hurewicz-Abbildung diese Operation "nicht sieht"; d.h. wenn $\alpha \in \pi_n(X, A; x_0)$ und $w \in \pi_1(A; x_0)$, dann haben α einerseits und das durch die Operation von w entstehende Element $w(\alpha)$ andererseits dasselbe Bild unter der Hurewicz-Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow H_n(X, A) .$$

Wir wollen mit $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ nun diejenige Quotientengruppe der abelsch gemachten Gruppe bezeichnen, die durch das *Trivialisieren* der Operation entsteht (tatsächlich bekommt man auch im Fall $n = 2$ automatisch schon eine *abelsche* Quotientengruppe, sobald man nur die Operation trivialisiert, 'abelsch-machen' wäre also nicht nötig; dies Detail wollen wir aber nicht verfolgen). Die Hurewicz-Abbildung faktorisiert nun als

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A; x_0)^\dagger \longrightarrow H_n(X, A) .$$

Satz (Hurewicz). *Sei A Unterraum von X, wobei A und X weg-zusammenhängend sind und $\pi_1(A; x_0) \to \pi_1(X; x_0)$ ein Isomorphismus. Sei $n \geq 2$ eine Zahl, und es gelte, daß die relativen Homotopiegruppen $\pi_i(X, A; x_0)$ für $i \leq n-1$ sämtlich trivial sind. Dann sind auch die entsprechenden Homologiegruppen $H_i(X, A)$ für $i \leq n-1$ sämtlich trivial, und die Abbildung*

$$\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \longrightarrow H_n(X, A)$$

ist ein Isomorphismus.

Wohlgemerkt, die Voraussetzung des Satzes betrifft die relativen Homotopiegruppen $\pi_i(X, A; x_0)$ selbst und nicht etwa die reduzierten Gruppen $\pi_i(X, A; x_0)^\dagger$. Das macht es plausibel, daß der Satz in dieser Form nicht besonders nützlich für Anwendungen ist. Daß man den Satz überhaupt in dieser allgemeinen Form zur Kenntnis nimmt, hat in erster Linie beweistechnische Gründe (wie wir sehen werden).

Der für die Anwendungen wichtige Fall ist der, wo die Fundamentalgruppe trivial ist. In dem Fall macht der Satz eine Aussage über die relativen Homotopiegruppen selbst, denn bei trivialer Fundamentalgruppe ist natürlich zwischen $\pi_n(X, A; x_0)$ und $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ kein Unterschied.

Es ist auf den ersten Blick überraschend, daß die böse Einschränkung der Allgemeinheit ("triviale Fundamentalgruppe") trotzdem Schlußfolgerungen im allgemeinen Fall zuläßt. Das liegt an dem Trick mit der *universellen Überlagerung*. Wir illustrieren den Trick mit einer berühmten Formulierung des Whitehead-Satzes.

Satz (Whitehead). *Seien X und Y* (weg-)*zusammenhängende CW-Komplexe. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die folgenden drei Aussagen sind zueinander äquivalent.*

(1) *f ist eine Homotopie-Äquivalenz.*

(2) *f induziert Isomorphismen der Homotopiegruppen.*

(3) *f induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen und, zweitens, einen Isomorphismus der Homologiegruppen der universellen Überlagerungen, $H_n(\tilde{X}) \to H_n(\tilde{Y})$.*

Beweis (Skizze). O.B.d.A. (Ersetzen von Y durch den Abbildungs-Zylinder der (o.B. d.A. zellulären) Abbildung f) können wir annehmen, daß die Abbildung f eine *zelluläre Inklusion* ist. Die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2) ist uns schon bekannt. Wir benutzen den Hurewicz-Satz (sowie andere uns schon bekannte Dinge) um die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) einzusehen. — Ob wir nun (2) oder (3) als gegeben ansehen, in jedem Fall ist es auf Grund unserer Annahmen richtig, daß die Abbildung f einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert.

Bei CW-Komplexen wie X und Y existieren die universellen Überlagerungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$. Auch die Räume $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ haben zueinander isomorphe Fundamentalgruppen (nämlich triviale).

Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt, sei y_0 der Bildpunkt $y_0 = f(x_0)$. Sei $\tilde{x}_0$ irgendeine Liftung von x_0 (d.h. ein Punkt in $\tilde{X}$ über x_0), und sei $\tilde{y}_0$ irgendeine Liftung von y_0. Auf Grund des allgemeinen Liftungs-Satzes wissen wir, daß eine (und auch nur eine) Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ existiert, mit $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$, so daß $\tilde{f}$ Liftung von f ist, d.h., so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutiert. Nach einer anderen Anwendung des Liftungs-Satzes wissen wir, daß die vertikalen Abbildungen Isomorphismen der Homotopiegruppen induzieren (für $n \geq 2$),

$$\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X, x_0) \quad , \quad \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(Y, y_0) \ .$$

Vergleich der langen exakten Folgen der Homotopiegruppen für die Raumpaare $(\tilde{Y}, \tilde{X})$ (Y, X) zeigt deshalb, daß sich die obige Nr. 2 übersetzt in die folgende Nr. $2'$,

$(2')$ die relativen Homotopiegruppen $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$ sind sämtlich trivial.

Wegen der langen exakten Folge der Homologiegruppen andererseits übersetzt sich die obige Nr. 3 in die folgende Nr. $3'$,

$(3')$ die relativen Homologiegruppen $H_n(\tilde{Y}, \tilde{X})$ sind sämtlich trivial.

Auf Grund des Hurewicz-Satzes nun sind die Aussagen $(2')$ und $(3')$ zueinander äquivalent. Denn wir sind im einfach-zusammenhängenden Fall. Sei k eine Zahl ≥ 2. Es gelte, daß $\pi_i(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$ trivial ist für alle $i \leq k{-}1$. Nach dem Hurewicz-Satz ist dann auch $H_i(\tilde{Y}, \tilde{X})$ trivial für alle $i \leq k{-}1$. Ferner ist $\pi_k(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$ isomorph zu $H_k(\tilde{Y}, \tilde{X})$; das heißt, $\pi_k(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$ ist genau dann trivial, wenn $H_k(\tilde{Y}, \tilde{X})$ es ist. Wir haben also ein induktives Argument. □

Was die Geschichte so faszinierend macht, ist die Tatsache, daß es nur scheinbar so ist, als sei die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht mehr da. In Wirklichkeit ist sie immer noch da — oder, wenn man so will, eine Re-Inkarnation von ihr in Form einer isomorphen Kopie; nämlich die Decktransformationenengruppe der universellen Überlagerung $\tilde{X}$. In der Situation des gerade beschriebenen Arguments sind die Homotopiegruppen $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und Homologiegruppen $H_n(\tilde{X})$ mit einer interessanten zusätzlichen Struktur versehen (die in dem obigen Argument nicht verwendet wurde, die aber oft eine wichtige Rolle spielt). Nämlich alle diese Gruppen kommen versehen mit einer Operation von $\pi_1(X, x_0)$ oder, wenn man es etwas algebraischer formulieren will, sie sind Moduln über dem Gruppenring dieser Gruppe.

Für die Beschreibung der Hurewicz-Abbildung behandeln wir zuerst den relativen Fall, wo wir also eine Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

konstruieren wollen. Die Homologie soll hier Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ haben, der abelschen Gruppe (oder dem Ring) der ganzen Zahlen. Tatsächlich werden wir etwas mehr benötigen als die Tatsache, daß $\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist. Nämlich wir benötigen zusätzlich noch die Kenntnis dessen, daß von den beiden erzeugenden Elementen das eine vor dem anderen ausgezeichnet ist (nämlich $+1$ vor -1); die Ringstruktur von $\mathbb{Z}$ ergibt das. Wir brauchen das dafür, daß wir einem singulären Simplex x nun auf ganz bestimmte Weise eine singuläre Kette zuordnen können, nämlich $1 \cdot x$.

Sei $[\alpha] \in \pi_n(X, A; x_0)$. Sei α ein Repräsentant von $[\alpha]$, also eine Abbildung des n-Balles in den Raum X, mit gewissen Eigenschaften (nämlich der Basispunkt wird in den Basispunkt abgebildet, und der ganze Rand wird in den Unterraum A abgebildet). Wir machen jetzt einen Um-Schreibe-Trick. Nämlich wir stellen fest, daß wir statt des “Standard-Balles” ebensogut auch das “Standard-Simplex” verwenden können. So gesehen, ist unser α jetzt eine Abbildung $\alpha : \nabla^n \to X$. Damit ist α auch ein singuläres n-Simplex. Aus diesem singulären Simplex verschaffen wir uns eine singuläre Kette,

$$1 \cdot \alpha \ ,$$

und das ist schon die gewünschte Konstruktion, wie wir uns jetzt überlegen. Nach Hypothese bildet ja die Abbildung α den ganzen Rand $\partial(\nabla^n)$ in den Unterraum A ab; oder, was dasselbe bedeutet, jedes der Rand-Simplizes von ∇^n wird nach A abgebildet. Deshalb ist die Kette

“ Rand von $1 \cdot \alpha$ ”

eine singuläre Kette in dem Unterraum A. Folglich ist diese Kette trivial in dem relativen Kettenkomplex. Das heißt, die Kette $1 \cdot \alpha$ ist ein *Zykel* in dem relativen Kettenkomplex. Diese Kette repräsentiert also eine Homologieklasse in $H_n(X, A)$; wir bezeichnen diese Homologieklasse mit $h(\alpha)$ (der Buchstabe "h" steht für 'Hurewicz').

Wir wollen wissen, daß die Homologieklasse $h(\alpha)$ nur von der Homotopieklasse von α abhängt. Das geht am bequemsten mit einem weiteren Umschreibe-Trick. Nämlich bezeichne ι die identische Abbildung auf ∇^n. Dann ist $h(\iota)$ ein (erzeugendes) Element von $H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n))$, und

$$h(\alpha) \;=\; \alpha_*(h(\iota)) \;,$$

wo $\alpha_* : H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n)) \to H_n(X, A)$ die von der Abbildung α induzierte Abbildung in der Homologie ist. Wir können nun darauf verweisen, daß ja die Abbildung α_* nur von der Homotopieklasse von α abhängt. Wir haben somit eine Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \;\longrightarrow\; H_n(X, A)$$

konstruiert.

Die Konstruktion der Hurewicz-Abbildung im absoluten Fall kann man gratis aus dem relativen Fall bekommen. Dazu benutzt man einfach die Isomorphismen

$$\pi_n(X, x_0) \;\approx\; \pi_n(X, \{x_0\}; x_0) \qquad \text{und} \qquad H_n(X) \;\approx\; H_n(X, \{x_0\}) \quad (\text{für } n \geq 1) \;.$$

Alternativ könnte man im absoluten Fall auch so vorgehen, daß man sich zunächst aus dem obigen ι ein Element $\tau \in H_n(S^n)$ verschafft (über eine Identifizierung von S^n mit $\nabla^n/\partial(\nabla^n)$ und den Isomorphismus $H_n(\nabla^n/\partial(\nabla^n)) \approx H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n))$, für $n \geq 1$). Danach wird für eine Klasse $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, und einen Repräsentanten α von $[\alpha]$, das Hurewicz-Bild von α dann definiert als $h(\alpha) = \alpha_*(h(\tau))$, das Bild von τ unter der Abbildung $\alpha_* : H_n(S^n) \to H_n(X)$.

Eigentlich sollten wir auch noch nachweisen, daß die Hurewicz-Abbildung *additiv* ist. Den Nachweis lassen wir hier weg, werden ihn aber später nachholen.

Bemerkung (Inoffizielle Mitteilung). Folgendes ist eine faszinierende Interpretation der Hurewicz-Abbildung. Aus einer simplizialen Menge X, $[n] \mapsto X_n$, kann man durch Linearisierung eine *simpliziale abelsche Gruppe* $\mathbb{Z}[X]$ machen, $[n] \mapsto \mathbb{Z}[X_n]$. Mit einer solchen simplizialen abelschen Gruppe kann man zwei Dinge tun. Zum einen kann man ihr einen Kettenkomplex $C.$ zuordnen und damit auch Homologiegruppen $H_*(C.)$. Zum andern ist eine simpliziale abelsche Gruppe, per Vergessen, auch eine simpliziale Menge. Deshalb hat sie eine geometrische Realisierung $|\mathbb{Z}[X]|$ und diese wiederum hat Homotopiegruppen $\pi_*|\mathbb{Z}[X]|$. Man hat nun die folgende Tatsache, deren detaillierte Erörterung hier zu weit gehen würde (sie gehört in den später zu behandelnden Rahmen der *Faserungen*). Nämlich es gibt einen *kanonischen Isomorphismus* $H_*(C.) \cong \pi_*|\mathbb{Z}[X]|$. Unter diesem Isomorphismus entspricht die Hurewicz-Abbildung der Abbildung von Homotopiegruppen $\pi_*|X| \to \pi_*|\mathbb{Z}[X]|$, die induziert ist von der (kanonischen) Inklusion von simplizialen Mengen $X \to \mathbb{Z}[X]$. Nämlich in Dimension n ist die Inklusion diejenige, die die Menge X_n identifiziert mit der Menge der Erzeugenden der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X_n]$; das heißt, das Element x geht auf das (erzeugende) Element $1 \cdot x$. □

Homotopie-Additions-Satz

Sei D^m der m-Ball und ∂D^m sein Rand (wo $m \geq 1$). Eine *Orientierung* von D^m ist die Auswahl eines erzeugenden Elementes von $H_m(D^m, \partial D^m)$. Das heißt, daß von den beiden erzeugenden Elementen in der abelschen Gruppe $H_m(D^m, \partial D^m)$ ($\approx \mathbb{Z}$) nunmehr eines als ausgezeichnet betrachtet wird.

Das Standard-m-Simplex ∇^m ist *orientiert* (d.h. mit einer Orientierung versehen); das liegt daran, daß, nach Konvention, die Menge seiner Ecken eine *angeordnete Menge* ist (wir haben das oben in etwas anderer Form zur Kenntnis genommen). Die Wahl einer Orientierung von D^m kann man interpretieren als die Auswahl einer topologischen Äquivalenz (besser: einer Homotopie-Äquivalenz von Paaren) von $(D^m, \partial D^m)$ zu $(\nabla^m, \partial \nabla^m)$. Das liegt daran, daß es, bis auf Homotopie, genau zwei solcher Homotopieäquivalenzen von $(D^m, \partial D^m)$ zu $(\nabla^m, \partial \nabla^m)$ gibt (vgl. das folgende Lemma). Nach Wahl einer Orientierung von D^m ist von diesen beiden Homotopieäquivalenzen eine ausgezeichnet; nämlich diejenige, die, in der m-ten relativen Homologie, das erzeugende Element auf das erzeugende Element abbildet (und nicht auf das negativ-inverse davon).

Das nun folgende Lemma kodifiziert eine kleine Buchführung, die wir später benötigen werden. Dabei wird eine Abbildung (von Paaren) zwischen orientierten n-Bällen als eine "Abbildung vom Grad k" bezeichnet, wenn die Orientierungsklasse in der Quelle abgebildet wird auf das k-fache Vielfache der Orientierungsklasse im Ziel. Wir sind hier interessiert an dem Fall $k = \pm 1$. Wir notieren noch, daß bei einer *Selbst*-Abbildung von $(D^m, \partial D^m)$ dieser "Abbildungs-Grad" nicht abhängt von der Auswahl der Orientierungsklasse (denn wenn man die Orientierungsklasse wechselt, dann gibt das zwei Vorzeichen; die heben sich dann weg).

Lemma (Grad-1-Lemma). *Sei $n \geq 1$. Wenn $n \geq 2$, dann gelte es als bekannt, daß $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$. Sei f eine Abbildung von $(D^n, \partial D^n)$ auf sich vom Grad ± 1. Es gibt eine Homotopie* (von Paaren) *von der Abbildung f entweder zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung, je nachdem ob der Grad gleich $+1$ oder -1 ist.*

Bemerkung. Die kurios aussehende Voraussetzung "Wenn $n \geq 2$, dann gelte es als bekannt, ... " ist uns für $n = 2$ tatsächlich bekannt (Ausrechnung der Fundamentalgruppe der 1-Sphäre). Für $n \geq 3$ gibt es eine vollkommen harmlose Erklärung für die Voraussetzung: sie ist Teil der Buchführung in einem induktiven Argument; dies wird später im einzelnen erläutert werden.

Beweis des Lemmas. Der Fall $n = 1$ ist für das folgende eine (triviale) Ausnahme, wir behandeln diesen Fall vorweg. Eine Selbst-Abbildung von $(D^1, \partial D^1)$, bei der beide

Endpunkte auf denselben Punkt gehen, ist offenbar null-homotop; was nicht sein darf. Also bildet f die Endpunkte von D^1 verschieden ab; dabei gibt es zwei Fälle: Vertauschung der Endpunkte oder keine Vertauschung. Im ersten Fall ist f homotop zu einer Spiegelung (und hat Grad -1), im zweiten Fall ist es homotop zur identischen Abbildung (und hat Grad $+1$).

Sei jetzt $n \geq 2$. Da der Raum D^n zusammenziehbar ist (d.h. homotopie-äquivalent zum ein-punktigen Raum), wird eine Abbildung von Paaren $(D^n, \partial D^n) \to (D^n, \partial D^n)$ genau dann eine Homotopie-Äquivalenz von Paaren sein, wenn die beteiligte Abbildung $\partial D^n \to \partial D^n$ ihrerseits eine Homotopie-Äquivalenz ist; und sie wird genau dann als Abbildung von Paaren homotop zur Identität bzw. zu einer Spiegelung sein, wenn das entsprechende für die Abbildung $\partial D^n \to \partial D^n$ der Fall ist.

Nun ist die Rand-Abbildung (aus der langen exakten Folge der Homologiegruppen)

$$H_n(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\partial D^n)$$

ein Isomorphismus (vorausgesetzt $n \geq 2$). Mit Hilfe des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n, \partial D^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \big\downarrow f_* & & \big\downarrow \\ H_n(D^n, \partial D^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

folgt deshalb, daß auch die eingeschränkte Abbildung $f|S^{n-1}$ einen Isomorphismus $H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ induziert; und, daß diese eingeschränkte Abbildung dasselbe Orientierungsverhalten hat wie f selbst. (Dabei ist die S^{n-1} durch Wahl einer der beiden Erzeugenden in $H_{n-1}(S^{n-1})$ mit einer Orientierungsklasse versehen; es ist nicht nötig, hierfür das Bild der Orientierungsklasse aus $H_n(D^n, \partial D^n)$ unter der Rand-Abbildung δ zu nehmen.)

Per Hypothese des Lemmas wissen wir, daß $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$. Andererseits wissen wir auch, daß $H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$ und daß die Abbildung

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{h} H_{n-1}(S^{n-1})$$

surjektiv ist (dafür genügt es zu wissen, daß das Bild ein erzeugendes Element enthält). Aber eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist automatisch schon ein Isomorphismus. Also ist h ein Isomorphismus.

Wir haben erhalten, daß die Homotopieklassen punktierter (d.h. basispunkt-erhaltender) Abbildungen der S^{n-1} auf sich schon durch das charakterisiert sind, was sie in der Homologie tun. Es folgt, daß dasselbe dann auch für Homotopieklassen *unpunkierter* Abbildungen gilt (denn wegen dem Weg-Zusammenhang kann man ja jede solche Homotopieklasse auch durch eine punktierte Abbildung repräsentieren).

Damit eine Abbildung der S^{n-1} auf sich überhaupt eine Chance haben kann, eine Homotopie-Äquivalenz zu sein, muß die induzierte Abbildung in der Homologie ein erzeugendes Element wieder auf ein erzeugendes Element abbilden. Solcher erzeugenden Elemente gibt es zwei in $H_{n-1}(S^{n-1})$, nämlich die Orientierungsklasse und deren negativ-inverses. Es gibt also, bis auf Homotopie, höchstens zwei Selbst-Abbildungen der S^{n-1}, die Homotopie-Äquivalenzen sein können (oder, was im gegenwärtigen Fall auf dasselbe hinausläuft, die Isomorphismen in der Homologie induzieren können). Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie die Orientierungsklasse entweder auf sich selbst abbilden oder auf ihre negativ-inverse. Natürlich gibt es diese beiden Homotopieklassen wirklich. Sie sind repräsentiert von der identischen Abbildung einerseits und von einer "Spiegelung" andererseits.

Die Selbst-Abbildung der S^{n-1}, die wir oben Anlaß hatten zu betrachten, hatte die Eigenschaft, daß die Orientierungsklasse aus $H_{n-1}(S^{n-1})$ entweder auf sich selbst oder auf ihre negativ-inverse abgebildet wurde, je nachdem ob der Grad der Abbildung f gleich $+1$ war oder gleich -1. Es folgt, daß diese Selbst-Abbildung entweder zur identischen Abbildung homotop ist oder zu einer Spiegelung; je nachdem welcher Fall vorliegt. Daraus folgt weiter, wie schon angemerkt, daß dann auch die Selbst-Abbildung des Paares $(D^n, \partial D^n)$ homotop ist, als Abbildung von Paaren, entweder zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung. $\square$

Die Unterscheidung zwischen *orientierungserhaltend* und *orientierungsumkehrend* kann man zu einem gewissen Grade auf eine "lokale" Situation übertragen: Seien B und C m-dimensionale Bälle, beide orientiert. Wir betrachten eine Abbildung $f : B \to C$ mit der Eigenschaft, daß f das Innere von B per topologischer Äquivalenz auf eine offene Teilmenge von C abbildet. (Der "*Satz von der topologischen Invarianz der Dimension*" sagt, daß die geforderte Eigenschaft schon aus einer schwächer aussehenden folgt; nämlich aus der Bedingung, daß die Einschränkung von f auf das Innere von B injektiv ist.)

Eine solche Abbildung hat nun entweder den *lokalen Grad* $+1$ oder den *lokalen Grad* -1. Dazu überlegen wir uns, daß man aus f einen Isomorphismus von $H_m(B, \partial B)$ zu $H_m(C, \partial C)$ bekommen kann; dieser Isomorphismus bildet das ausgezeichnete Element in $H_m(B, \partial B)$ dann auf ein erzeugendes Element in $H_m(C, \partial C)$ ab, also entweder auf das ausgezeichnete Element oder auf dessen negativ-inverses.

Um den Isomorphismus zu bekommen, wählt man einen inneren Punkt x in B, man hat dann Isomorphismen

$$H_m(B, \partial B) \xrightarrow{\approx} H_m(B, B{-}x) \xleftarrow{\approx} H_m(\mathring{B}, \mathring{B}{-}x) \xrightarrow{f_*} H_m(f(\mathring{B}), f(\mathring{B}){-}f(x))$$

(über die Inklusionen homotopie-äquivalenter Räume und die Tatsache, daß $\mathring{B} \to f(\mathring{B})$ topologische Äquivalenz ist) und auch (wegen dem Ausschneidungs-Satz)

$$H_m(f(\mathring{B}), f(\mathring{B}){-}f(x)) \longrightarrow H_m(C, C{-}f(x)) \xleftarrow{\approx} H_m(C, \partial C) \ .$$

Der Isomorphismus hängt von der Wahl von x nicht ab. Denn zu x und x' kann man einen Ball V im Innern von B finden, der x und x' enthält, und man kann dann vergleichen über einen Isomorphismus mit $H_m(\mathring{B}, \mathring{B}{-}V)$.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem Homotopie-Additions-Satz.

Satz (Homotopie-Additions-Satz). *Sei $n \geq 1$. Seien $f_i : D^n \to D^n$, $i = 1, \dots, k$, endlich viele Abbildungen, deren jede auf dem Innern von D^n eine topologische Äquivalenz induziert,*

$$\mathring{D}^n \xrightarrow{\approx} f_i(\mathring{D}^n) ,$$

und so daß die Bilder $f_i(\mathring{D}^n)$ sich paarweise nicht treffen. Sei ϵ_i (aus $\{\pm 1\}$) der lokale Grad der Abbildung f_i. Seien X und A weg-zusammenhängende Räume, A Unterraum von X; wenn $n = 1$, dann bestehe A nur aus dem Basispunkt, $A = \{x_0\}$. Sei $g : (D^n, \partial D^n) \to (X, A)$ eine Abbildung mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß der ganze Unterraum von D^n, der gegeben ist durch das Komplement der Vereinigung der $f_i(\mathring{D}^n)$, in den Unterraum A abgebildet wird. Es bestimmt dann jede der Abbildungen g und $g \circ f_i$ ein wohldefiniertes Element von $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$, und für diese Elemente gilt die Beziehung

$$[g] \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \; [g \circ f_i]$$

in $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$.

Beweis. Der Beweis geht durch eine Art Induktion nach n. Dabei behandeln wir gleichzeitig einen Spezialfall des Hurewicz-Satzes, nämlich die Behauptung, daß die Hurewicz-Abbildung im absoluten Fall, und zwar im ganz speziellen Fall einer Sphäre, ein Isomorphismus ist.

Die logische Struktur des Beweises ist dabei so. Der erste hier zu behandelnde Fall ist $n = 1$. Wenn $n > 1$, dann werden wir im Beweis die Tatsache als Hilfsmittel verwenden, daß wir $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x_0)$ schon kennen. Später, im Anschluß an den Beweis, werden wir uns überlegen, daß wir mit Hilfe des Satzes in der oben formulierten Form dann auch herausbekommen können, was die nächste Homotopiegruppe $\pi_n(S^n, x_0)$ ist.

In Vorbereitung des Arguments nehmen wir zunächst eine andere, basispunktfreie Beschreibung von $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ zur Kenntnis. Dazu definieren wir eine abelsche Gruppe $\pi_n(X, A)^\ddagger$ (ein Basispunkt wird für die Definition nicht benötigt) und zeigen anschliessend, daß $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ und $\pi_n(X, A)^\ddagger$ in Wirklichkeit dasselbe sind.

Die Konstruktion von $\pi_n(X, A)^\ddagger$ geht in vier Schritten. Im ersten Schritt versehen wir den n-Ball D^n mit einer Orientierung und betrachten die Menge der Abbildungen von Paaren, $f : (D^n, \partial D^n) \to (X, A)$. Im zweiten Schritt gehen wir zu Homotopieklassen solcher Abbildungen über. Im dritten Schritt betrachten wir die von der Menge der Homotopieklassen erzeugte abelsche Gruppe (die Koeffizientengruppe ist $\mathbb{Z}$, die Gruppe der ganzen Zahlen). Im vierten Schritt schließlich gehen wir von der so erhaltenen abelschen Gruppe zu einer Quotientengruppe über; dabei benutzen wir die von der folgenden Vorschrift erzeugte Äquivalenzrelation: es soll gelten

$$[f] \quad = \quad [f_1] + [f_2]$$

wenn die Abbildungen f_1, f_2 und f in einer bestimmten, jetzt zu beschreibenden Beziehung stehen. Die Beziehung ist diejenige, die bei der Definition der "Addition" in den Homotopiegruppen $\pi_n(\dots)$ verwendet wurde. Wir könnten die dort verwendeten Formeln übernehmen. Es geht aber auch deskriptiv: nämlich, es soll f auf einem "zusammengesetzten" Ball (linke Hälfte und rechte Hälfte) definiert sein, wobei die "Trennfläche" zwischen "links" und "rechts" ebenfalls in den Unterraum A abgebildet wird; die Abbildung f_1 ist nun die Einschränkung von f auf die "linke Hälfte", und die Abbildung f_2 ist die Einschränkung auf die "rechte Hälfte". Die Verwendung des Terms *Einschränkung* setzt (implizit) voraus, daß eine Identifizierung von D^n mit seiner "linken" bzw. "rechten" Hälfte spezifiziert ist; das geht über eine injektive Abbildung $D^n \to D^n$ der oben betrachteten Art, und zwar über eine solche vom lokalen Grad $+1$.

Lemma (Modifizierte Homotopiegruppen). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \;\cong\; \pi_n(X, A)^\ddagger \,.$$

(Dabei ist vorausgesetzt, daß X und A wegzusammenhängend sind. Es ist auch vorausgesetzt, daß $\pi_n(X, A; x_0)$ eine *Gruppe* ist. Das bedeutet, daß entweder $n \geq 2$ ist. Oder daß $n \geq 1$ ist — vorausgesetzt, daß A nur aus einem einzigen Punkt besteht.)

Beweis. Einer Abbildung $f : (D^n, \partial D^n; s_0) \to (X, A; x_0)$ kann man (durch Vergessen des Basispunktes) eine Abbildung $f : (D^n, \partial D^n) \to (X, A)$ zuordnen; das definiert, auf Repräsentantenebene, eine Abbildung von links nach rechts. Die Zuordnung ist verträglich mit "Homotopie" (weil die rechts eingebaut ist) und mit "Addition" (weil die rechts so definiert wurde). Also hat man zumindest eine Abbildung von $\pi_n(X, A; x_0)$ zu $\pi_n(X, A)^\ddagger$. Diese Abbildung ist verträglich mit "abelsch-machen" (denn rechts hat man schon eine abelsche Gruppe) und sie ist auch verträglich mit dem Herauskürzen der Operation (denn wenn über die Basispunkt-Bedingung, so wie rechts, nicht mehr Buch geführt wird, so ist die Operation eines geschlossenen Weges w auf einem Repräsentanten f, durch 'Vorschalten' des Weges w, nichts anderes als das Resultat einer Homotopie, ändert also nicht die Klasse von f rechts). Man bekommt also insgesamt eine Abbildung $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \to \pi_n(X, A)^\ddagger$.

Auch nicht viel schwieriger ist es, eine Abbildung in der anderen Richtung, von rechts nach links, zu definieren. Zunächst wird es genügen, diese Abbildung auf den erzeugenden Elementen anzugeben (die Fortsetzung ist dann automatisch, wegen der links vorhandenen abelschen-Gruppen-Struktur). Sei $[f]$ ein solches erzeugendes Element, also die Homotopieklasse einer Abbildung von Paaren, $f : (D^n, \partial D^n) \to (X, A)$. Die Abbildung f wird im allgemeinen nicht die Basispunkt-Bedingung zu erfüllen, die wir für Repräsentanten links verlangen. Wir können sie aber durch eine äquivalente (d.h. homotope) Abbildung ersetzen, die die Basispunkt-Bedingung erfüllt; das liegt einfach daran, daß ja, nach Voraussetzung, der Raum A weg-zusammenhängend ist. Als Bild von $[f]$ nehmen wir nun das von letzterer Abbildung repräsentierte Element. Als Element von $\pi_n(X, A; x_0)$ wäre dies Element möglicherweise nicht wohldefiniert (wegen der benötigten Deformation könnten zwei verschiedene Auswahlen dieser Deformation zu zwei Elementen von $\pi_n(X, A; x_0)$ führen, die nicht gleich sind, sondern die nur auseinander hervorgehen durch die Operation eines Elementes von $\pi_1(A, x_0)$). Das erhaltene Element ist aber wohldefiniert nach dem Trivialisieren der Operation; also in $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$.

Schließlich müssen wir noch nachprüfen, daß die Konstruktion kompatibel ist mit dem Übergang zur Quotienten-abelschen-Gruppe auf der rechten Seite. Das heißt, in der oben beschriebenen Situation der drei Abbildungen f_1, f_2 und f, die Anlaß gab zu der Relation $[f] = [f_1] + [f_2]$, müssen wir nachprüfen, daß die entsprechende Relation auch für die links konstruierten Bilder gilt. Das liegt aber einfach an der Möglichkeit, die benötigte Auswahl in kompatibler Weise zu machen: wenn man sich nicht dumm anstellt, so wird die benötigte Konstruktion für f ("Anhängen an den Basispunkt") so sein, daß sie gleichzeitig auch für f_1 und f_2 funktioniert; das heißt, daß die Resultate der Konstruktion dann in der Beziehung zueinander stehen, die die Komposition in $\pi_n(\dots)$ beschreibt.

Es ist klar (oder?), daß die beiden so definierten Abbildungen tatsächlich zueinander invers sind. $\square$

Nach der durch das Lemma erzielten Umformulierung, $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \;\cong\; \pi_n(X, A)^\ddagger$, ist nun sichergestellt, daß die in dem Homotopie-Additions-Satz genannten Abbildungen g und $g \circ f_i$ tatsächlich Elemente dieser abelschen Gruppe beschreiben. Es bleibt zu zeigen, daß die Relation

$$[g] \;=\; \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \; [g \circ f_i]$$

erfüllt ist. Wir zeigen das durch Induktion über die Zahl k. Der Induktions-Anfang (der Fall $k = 1$) und der Induktions-Schritt (der Fall $k > 1$) sind beide nicht-trivial. In beiden Fällen besteht die Arbeit darin, die Situation mittels geeigneter Homotopien zu vereinfachen.

Nämlich im Falle $k > 1$, also beim Induktions-Schritt, möchte man haben, daß die Bilder $f_i(D^n)$ alle "sehr klein" sind. Mit Hilfe einer "Trennwand" kann man die Gesamtheit der Bilder dann in zwei Teilfamilien zerlegen (eine Familie "links" von der Trennwand, die andere "rechts") und bekommt auf die Weise ein induktives Argument.

Im Falle $k = 1$, also beim Induktions-Anfang, möchte man hingegen haben, daß das Bild $f_1(D^n)$ "sehr groß" ist; nämlich ganz D^n. Auf die Weise wird f_1 manipulierbar.

In beiden Fällen ist es für die beabsichtigten Deformationen der f_i nötig, vorher den Bereich $g^{-1}(A)$ geeignet zu vergrößern (mit Hilfe einer Homotopie von g). So wird sichergestellt, daß die schließlichen Homotopien der f_i sämtlich aufgefaßt werden können als Homotopien von *Paaren* von Abbildungen

$$(D^n, \partial D^n) \;\longrightarrow\; (D^n, g^{-1}(A)) \; .$$

Das hat den Effekt, daß die resultierenden Homotopien der Abbildungen $g \circ f_i$ dann ebenfalls Homotopien von Abbildungen von Paaren sind, nämlich von Abbildungen $(D^n, \partial D^n) \to (X, A)$, wie es sich gehört.

Das nun folgende Lemma erledigt die vorbereitende Deformation der Abbildung g. Wir werden des öfteren auf " den Ball D^n " zu verweisen haben. Da der sozusagen zweimal vorkommt (als Quelle und als Ziel der Abbildungen f_i) ist es notwendig, der Gefahr von Mißverständnissen vorzubeugen. Dazu verwenden wir eine etwas kuriose Sprechweise: es wird von dem "Quellen-D^n" und von dem "Ziel-D^n" die Rede sein.

Lemma. *Für jedes $i = 1, \ldots, k$ sei Z_i ein vorgegebener Ball in dem Ziel-D^n, der enthalten ist im Bild $f_i(\mathring{D}^n)$. Es gibt eine Homotopie von g zu g', wobei diese Homotopie auf dem Komplement der Vereinigung der $f_i(\mathring{D}^n)$ konstant ist, so daß die Abbildung g' die Eigenschaft hat, daß sie auch noch den Unterraum $f_i(D^n) - \mathring{Z}_i$ (für jedes i) nach A abbildet.*

BEWEIS. Da man die Bilder $f_i(\mathring{D}^n)$ einzeln, und nacheinander, hernehmen kann, wird es genügen, das folgende zu zeigen: *Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sei, für dieses eine i, Z_i ein vorgegebener Ball in dem Ziel-D^n, der enthalten ist im Bild $f_i(\mathring{D}^n)$. Es gibt eine Homotopie von g zu g', wobei diese Homotopie auf dem Komplement von $f_i(\mathring{D}^n)$ konstant ist, so daß die Abbildung g' die Eigenschaft hat, daß sie auch noch den Unterraum $f_i(D^n) - \mathring{Z}_i$ (für dieses i) nach A abbildet.*

Zur Bequemlichkeit der Beschreibung benutzen wir die Tatsache, daß es zu einem vorgegebenen inneren Punkt von D^n immer eine topologische Äquivalenz von D^n auf sich gibt, die auf dem Rand von D^n die Identität ist, und die den Mittelpunkt von D^n in den vorgegebenen Punkt abbildet. Es ist deshalb keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nun annehmen, daß das Urbild $f_i^{-1}(Z_i)$ den Mittelpunkt von dem Quellen-D^n in seinem Innern enthält; und damit auch einen konzentrischen Ball, Q_i, in dem Quellen-D^n.

Für die Zwecke der Beschreibung der Homotopie fassen wir das Ziel-D^n jetzt als einen *zusammengeklebten Raum* auf. Nämlich wir stellen uns vor, daß das Quellen-D^n angeklebt ist an den Teil von dem Ziel-D^n, der durch das Komplement

$$D^n - f_i(\mathring{D}^n)$$

gegeben ist; letzteres ist ein *abgeschlossener* Unterraum von dem Ziel-D^n, und das Ankleben geschieht mit Hilfe derjenigen Anhefte-Abbildung, die gegeben ist durch die Einschränkung von f_i auf den Rand von dem Quellen-D^n. Die Homotopie ist nun leicht zu beschreiben: auf dem Komplement $D^n - f_i(\mathring{D}^n)$ tut sie nichts (d.h. dort ist sie eine konstante Homotopie), und auf dem Quellen-D^n ist sie diejenige Homotopie von der zusammengesetzten Abbildung $g \circ f_i$, die gegeben ist durch radiales Hinausschieben; nämlich das Komplement $D^n - \mathring{Q}_i$ wird in den Rand von D^n geschoben (die Homotopie zieht das Ring-Gebiet $D^n - \mathring{Q}_i$ durch eine Deformationsretraktion auf seinen äußeren Rand ∂D^n [den Rand von dem Quellen-D^n] zusammen; die Schluß-Abbildung der Homotopie induziert einen Homömorphismus von Q_i auf das Quellen-D^n).

Wohlgemerkt, die gerade beschriebene Homotopie ändert *nicht* die Abbildung f_i. Vielmehr ändert sie die Abbildung g auf dem Ziel-D^n in der Weise, daß das Komplement von $D^n - f_i(\mathring{Q}_i)$ (und damit auch das Komplement von $\mathring{Z}_i$) durch die geänderte Abbildung g' nunmehr ganz in den Unterraum A von X abgebildet werden. $\square$

Der Fall $k = 1$.

Wie auch im Beweis des Lemmas schon, so können wir ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es in dem Ziel-D^n einen konzentrischen Ball Z_1 gibt, der in dem Bild $f_1(\overset{\circ}{D^n})$ liegt. Und nach dem Lemma können wir die Abbildung g durch eine homotope Abbildung g' ersetzen mit der Eigenschaft $g'(D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \subset A$.

(Die Homotopie von g zu g' war auf dem Komplement von $f_1(\overset{\circ}{D^n})$ konstant. Die induzierte Homotopie von $g \circ f_1$ zu $g' \circ f_1$ ist deshalb auf ∂D^n konstant; deshalb darf auch $g \circ f_1$ durch $g' \circ f_1$ ersetzt werden.)

Sei Z ein kleinerer konzentrischer Ball in Z_1. Von dem Ring-Gebiet $D^n - \overset{\circ}{Z}$ gibt es eine Abbildung auf sich,

$$p : \; D^n - \overset{\circ}{Z} \;\longrightarrow\; D^n - \overset{\circ}{Z} \;,$$

die auf den Randkomponenten ∂D^n und ∂Z die Identität ist und die den Teil $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$ ganz in die Randkomponente ∂D^n abbildet (z.B. kann man $D^n - \overset{\circ}{Z}$ so mit $S^{n-1} \times [0, 1]$ identifizieren, daß $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$ auf die "rechte Hälfte" $S^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$ geht; p ist dann induziert durch eine Abbildung des Intervalls $[0, 1]$ auf sich, die die "rechte Hälfte" kollabiert). Und bei geeigneter Wahl der Abbildung p (z.B. so, wie gerade angedeutet) gibt es eine Homotopie

$$P : \; (D^n - \overset{\circ}{Z}) \times [0, 1] \;\longrightarrow\; D^n - \overset{\circ}{Z} \;,$$

zwischen p und der identischen Abbildung von $D^n - \overset{\circ}{Z}$, wobei die Homotopie auf den Randkomponenten ∂D^n und ∂Z konstant ist, und wo die Homotopie auch noch die für uns wichtige Eigenschaft hat, daß

$$(*) \qquad P(\, (D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \times [0, 1] \,) \;\subset\; D^n - \overset{\circ}{Z}_1 \;.$$

Sei die Abbildung $q : D^n \to D^n$ definiert als die "offensichtliche" Fortsetzung von p (Fortsetzung mit der identischen Abbildung auf Z), und sei ebenso auch die Homotopie Q definiert als die "offensichtliche" Fortsetzung von P (Fortsetzung mit der konstanten Homotopie auf Z).

Sei die Abbildung ${f_1}'$ definiert als

$${f_1}' \;:=\; q \circ f_1 \;.$$

Die Homotopie Q induziert eine Homotopie von f_1 zu ${f_1}'$, die nicht auf ∂D^n konstant zu sein braucht. Wegen der Bedingung $(*)$ ist sie aber zumindest eine Homotopie von Abbildungen von Paaren:

$$(D^n, \partial D^n) \;\longrightarrow\; (D^n \,,\, D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \;.$$

Folglich, da $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$ durch g' ganz nach A abgebildet wird, ist die resultierende Homotopie von $g' \circ f_1$ zu $g' \circ {f_1}'$ ebenfalls eine Homotopie von Abbildungen von Paaren:

$$(D^n, \partial D^n) \;\longrightarrow\; (X, A) \;.$$

Wir dürfen also $g' \circ f_1$ durch $g' \circ {f_1}'$ ersetzen.

Behauptung. *Die Abbildung* ${f_1}' : (D^n, \partial D^n) \to (D^n, \partial D^n)$ *ist homotop, als Abbildung von Paaren, zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung, je nachdem ob der lokale Grad von* f_1 *gleich* $+1$ *oder gleich* -1 *ist.*

Mit der Behauptung ist die Behandlung des Falles $k = 1$ abgeschlossen. Denn im Falle des lokalen Grades $+1$ folgt $[g' \circ {f_1}'] = [g']$, und im Falle des lokalen Grades -1 folgt $[g' \circ {f_1}'] = -[g']$, da das Vorschalten einer Spiegelung den Übergang zum negativ-inversen repräsentiert.

Beweis der Behauptung. Sei $x \in D^n$ innerer Punkt. Die Orientierungsklasse in $H_n(D^n, \partial D^n)$ ergibt eine ebensolche in (der isomorphen Gruppe) $H_n(D^n, D^n - x)$. Die Voraussetzung des lokalen Grades ± 1 besagt (insbesondere), daß f_1 eine Abbildung von Paaren induziert, $(D^n, D^n - x) \to (D^n, D^n - f_1(x))$ und weiter auch einen Isomorphismus in der relativen Homologie, wobei die Orientierungsklasse auf die Orientierungsklasse, bzw. auf deren negativ-inverse abgebildet wird. Sei x nun so gewählt, daß $f_1(x)$ ein innerer Punkt von Z_1 ist. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n, D^n - x) & \xleftarrow{\approx} & H_n(D^n, \partial D^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(D^n, D^n - f_1(x)) & \xleftarrow{\approx} & H_n(D^n, D^n - \mathring{Z}_1) \end{array}$$

wo die horizontalen Pfeile von Inklusionen induziert sind und die vertikalen Pfeile von der Abbildung f_1. Also ist auch der rechte vertikale Pfeil, $f_{1*} : H_n(D^n, \partial D^n) \to H_n(D^n, D^n - \mathring{Z}_1)$, ein Isomorphismus; und zwar vom selben Orientierungsverhalten wie der linke vertikale Pfeil (wobei wir die Orientierungsklasse in $H_n(D^n, D^n - \mathring{Z}_1)$ durch Transport entlang dem unteren horizontalen Pfeil bekommen haben). Nun sind aber f_1 und ${f_1}'$ homotop als Abbildungen von Paaren $(D^n, \partial D^n) \to (D^n, D^n - \mathring{Z}_1)$. Also ist auch ${f_1}'_* : H_n(D^n, \partial D^n) \to H_n(D^n, D^n - \mathring{Z}_1)$ ein Isomorphismus, wieder mit demselben Orientierungsverhalten; deshalb ${f_1}'_* : H_n(D^n, \partial D^n) \to H_n(D^n, \partial D^n)$ ebenfalls. Wir sind nun fertig mit einer Anwendung von dem "Grad-1-Lemma". □

Der Fall $k > 1$.

Behauptung. *In jedem der Bilder* $f_i(\mathring{D}^n)$ *sei ein Punkt* u_i *gegeben und zu jedem der* u_i *eine Umgebung* U_i *in dem Ziel-*D^n. *Es gibt eine* (hier zulässige) *Homotopie der Abbildungen* g *und* f_i *zu Abbildungen* g' *und* f_i' *derart, daß, für jedes* i, *das Bild* $f_i'(D^n)$ *enthalten ist in* U_i.

Aus der Behauptung erhalten wir den Induktions-Schritt für eine Induktion über k auf die folgende Weise. Wir wählen eine Zerlegung von dem Ziel-D^n in eine "linke Hälfte" und eine "rechte Hälfte". Wenn dann g_1 die Einschränkung von g auf die "linke Hälfte" bezeichnet, und entsprechend auch g_2 diejenige auf die "rechte", so gilt nach Definition der Addition in $\pi_n(X, A)^\ddagger$,

$$[g] = [g_1] + [g_2] ,$$

vorausgesetzt, daß die Trennfläche zwischen "links" und "rechts" durch die Abbildung g ganz in den Unterraum A von X abgebildet wurde.

Auf diesem Hintergrund nun wählen wir irgendeine Zerlegung in "links" und "rechts", wie gerade beschrieben (aber zunächst noch ohne auf die Abbildung g zu achten), und wir wählen in jedem der Bilder $f_i(\mathring{D}^n)$ irgendeinen Punkt u_i. Die erste Bedingung dabei ist, daß jeder der Punkte u_i entweder im Innern der "linken Hälfte" liegen soll oder aber im Innern der "rechten Hälfte". Die zweite Bedingung ist, daß sowohl "links" als auch "rechts" jeweils mindestens einer der Punkte liegen soll. Es ist klar (oder?), daß man eine Trennung in "links" und "rechts" so finden kann, daß das geht.

Als nächstes wählen wir für jeden der Punkte u_i eine Umgebung U_i in $f_i(\mathring{D}^n)$. Und zwar soll U_i ganz innerhalb der "linken Hälfte" liegen, wenn u_i dort liegt; bzw. ganz innerhalb der "rechten Hälfte", wenn u_i dort liegt.

Wir machen nun diejenige Modifikation, deren Existenz durch die Behauptung gesichert ist. Für die modifizierten Abbildungen g'_1, g'_2 und g' ist die oben angesprochene Voraussetzung nun erfüllt: die Abbildung g' bildet die "Trennwand" ganz nach A ab. Es ist also

$$[g'] \;=\; [g'_1] + [g'_2] \;.$$

Andererseits können wir aber auch die Induktionsvoraussetzung über k nun sowohl auf die "linke Hälfte" als auch auf die "rechte Hälfte" anwenden. Folglich gilt in $\pi_n(X, A)^{\ddagger}$,

$$[g'_1] \;=\; \sum_{i \in I_1} \epsilon_i \; [g' \circ f'_i] \qquad \text{und} \qquad [g'_2] \;=\; \sum_{i \in I_2} \epsilon_i \; [g' \circ f'_i] \;,$$

wo I_1 die Indexmenge der "links" liegenden Punkte u_i bezeichnet; und I_2 entsprechend die der "rechts" liegenden.

Der Induktions-Schritt ist damit fertig; bis auf den noch nachzutragenden:

Beweis der Behauptung. Zur Bequemlichkeit der Beschreibung dürfen wir annehmen, daß, für jedes i, der Punkt u_i das Bild von dem Mittelpunkt des Quellen-D^n unter der Abbildung f_i ist. Sei Q_i eine konzentrische-Ball-Umgebung von dem Mittelpunkt in dem Quellen-D^n, die enthalten ist in ${f_i}^{-1}(U_i)$. Nach dem obigen Lemma können wir, nach einer Modifikation von g zu g', annehmen, daß das Komplement der Vereinigung der $f_i(\mathring{Q}_i)$ durch g' ganz nach A abgebildet wird; für jedes i wird insbesondere deshalb $D^n - \mathring{Q}_i$ durch f_i nach ${g'}^{-1}(A)$ abgebildet.

Wir ändern jetzt f_i durch das Vorschalten einer Homotopie von Abbildungen von dem Quellen-D^n in sich. Die vorzuschaltende Homotopie kontrahiert das Quellen-D^n auf den Ball Q_i. Wenn die Homotopie in der nächstliegenden Weise ausgeführt wird, dann hat sie zwei Eigenschaften, die wir verlangen; nämlich einmal soll die Deformation von ∂D^n nur durch das Ring-Gebiet $D^n - \mathring{Q}_i$ erfolgen, und zum andern soll die End-Abbildung der Homotopie ein Homöomorphismus von D^n auf Q_i sein. Die beschriebene Homotopie gibt die gewünschte Modifikation von f_i zu f'_i. $\square$

Die n-te Homotopiegruppe der n-Sphäre.

Beim Beweis des Homotopie-Additions-Satzes in der Dimension n haben wir als Hilfsmittel die Ausrechnung $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$ benutzt (was wir für $n-1 = 1$ schon wußten, für $n-1 \geq 2$ aber noch nicht). Damit der Beweis des Homotopie-Additions-Satzes vollständig ist, müssen wir also z.B. noch zeigen, daß die Aussage des Satzes in der Dimension n umgekehrt nun benutzt werden kann für die Herleitung dessen, daß auch $\pi_n(S^n, s_0) \approx \mathbb{Z}$ richtig ist. Das soll jetzt gemacht werden.

Tatsächlich ist das, was wir jetzt machen wollen, eigentlich überflüssig. Denn die Berechnung $\pi_n(S^n, s_0) \approx \mathbb{Z}$ folgt ja auch aus dem Hurewicz-Satz in der Dimension n (den wir in Kürze aus dem Homotopie-Additions-Satz in der Dimension n herleiten werden). Der "überflüssige" Beweis ist aber etwas direkter.

Für den gegenwärtigen Beweis werden wir den Teil dieser Aussage als schon bekannt voraussetzen, der besagt, daß $\mathbb{Z}$ sozusagen eine *untere Schranke* für die Gruppe ist. Das folgt aus der Kenntnis dessen, daß der Hurewicz-Homomorphismus überhaupt existiert und aus der (schon beschriebenen) Tatsache, daß die Abbildung

$$\pi_n(S^n, \{s_0\}; s_0) \longrightarrow H_n(S^n, \{s_0\}) \approx \mathbb{Z}$$

surjektiv ist: die Kollaps-Abbildung $(D^n, \partial D^n) \to (S^n, \{s_0\})$ repräsentiert ein Element links, und dies Element geht (vermöge einer Identifizierung $D^n \approx \nabla^n$) auf ein Element rechts, das die rechte Gruppe erzeugt.

Wir müssen hier also nur noch nachweisen, daß $\mathbb{Z}$ auch eine *obere Schranke* für die Gruppe ist. Dazu werden wir zeigen, daß es in der Gruppe ein Element gibt (es ist das eben beschriebene), das die Gruppe *erzeugt*; d.h. jedes andere Element ist ein Vielfaches von diesem einen. — Es ist plausibel, daß der Homotopie-Additions-Satz für die Herleitung dieser Art von Aussage ein nützliches Hilfsmittel sein wird.

Für Raumpaare wie $(S^n, \{s_0\})$ (oder auch $(D^n, \partial D^n)$ wenn $n \geq 2$) ist kein Unterschied zwischen $\pi_n(X, A; x_0)$ und $\pi_n(X, A)^{\ddagger}$. Wenn wir also ein Element dieser Gruppe repräsentieren wollen, so ist die Buchführung über den Basispunkt nicht nötig. Wir betrachten einen solchen Repräsentanten

$$f: \ (D^n, \partial D^n) \to (S^n, \{s_0\}) \ .$$

Unser Ziel wird es sein, diesen Repräsentanten in geeigneter Weise zu vereinfachen. Dazu gibt es mehrere Methoden, und wir werden auch mehrere von diesen Methoden beschreiben, bzw. skizzieren.

1. Methode. Wir knüpfen an den Beweis des Zelluläre-Approximation-Satzes an oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, den Beweis dessen, daß $\pi_k(S^n, \{s_0\}) = 0$ für $k < n$.

Wir wählen eine Überdeckung von S^n durch zwei geeignete offene Mengen U und V; nämlich die etwas vergrösserte südliche Halbkugel einerseits und die etwas vergrösserte nördliche Halbkugel andererseits. Es sind also U und V beide zusammenziehbar, und ihr Durchschnitt ist homotopie-äquivalent zu S^{n-1}; den Punkt s_0 stellen wir uns vor als den Mittelpunkt von U.

Unterteilungen sind bequemer für einen Würfel zu beschreiben als für eine Kugel. Deshalb ersetzen wir D^n durch den n-dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Unser Repräsentant ist also nun eine Abbildung

$$f: \ ([0,1]^n, \mathrm{Rand}) \longrightarrow (S^n, \{s_0\}) .$$

Nach dem Lebesgue'schen Überdeckungs-Satz gibt es eine Unterteilung von $[0,1]^n$ in n-dimensionale Teilwürfel gleicher Größe, so daß jeder von diesen Teilwürfeln entweder ganz nach U abgebildet wird oder ganz nach V (oder, natürlich, eventuell sogar in den Durchschnitt dieser beiden).

Wir ändern nun f ab durch ein induktives Verfahren, bei dem wir der Reihe nach sämtliche bei der Unterteilung beteiligten Würfel betrachten; also nicht nur die in der Dimension n, sondern auch die in den Dimensionen 0, 1, 2, und so weiter. Ein solcher Würfel heiße "schlecht", wenn er durch die Abbildung f *nicht* in den Unterraum U abgebildet wird. Unser Ziel bei der Abänderung wird es sein, möglichst keine schlechten Würfel zu haben; jedenfalls keine solchen der Dimension $< n$.

Dazu betrachten wir einen schlechten Würfel kleinster Dimension. Wenn diese Dimension gleich n ist, dann tun wir nichts; die Dimension sei also gleich k, wo $k < n$. Der Würfel heiße W. Die Situation ist nun so, daß W entweder ganz nach U abgebildet wird oder ganz nach V; andererseits ("schlecht") aber auch nicht ganz nach U. Also wird W ganz nach V abgebildet.

Sei W' ein Würfel im Rand von W. Dann hat W' kleinere Dimension als W und ist folglich *nicht* schlecht; W' wird also durch f ganz nach U abgebildet. Andererseits, als Teilmenge von W, wird W' auch ganz nach V abgebildet. W' wird also in den Durchschnitt $U \cap V$ abgebildet. Wir schließen, daß der ganze Rand ∂W in den Durchschnitt $U \cap V$ abgebildet wird.

Nun ist $k < n$, und wir wissen, daß jede Abbildung

$$(D^k, \partial D^k) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$$

durch eine auf ∂D^k konstante Homotopie ganz in den Unterraum ∂D^n deformiert werden kann. Bis auf Homotopie liegt diese Situation hier vor. Also schließen wir, daß es eine auf ∂W konstante Homotopie gibt von der eingeschränkten Abbildung

$$(W, \partial W) \longrightarrow (V, U \cap V)$$

zu einer Abbildung in den Unterraum $U \cap V$.

Wir machen die gerade beschriebene Modifikation nun für alle schlechten Würfel der Dimension k. Das gibt die gewünschte Modifikation von der Abbildung f insoweit, als das k-Skelett betroffen ist. Bevor wir nächste Dimension in Angriff nehmen können, müssen wir zunächst die eben ausgeführte partielle Homotopie erweitern. Das machen wir durch eine weitere Induktion.

Sei $\overline{W}$ ein Würfel der Dimension $k{+}1$, der den Würfel W im Rand enthält (oder einen anderen von den k-Würfeln, auf denen die Abbildung gerade modifiziert wurde). Dann ist auch $\overline{W}$ ein "schlechter" Würfel, da er ja einen solchen im Rande enthält, $\overline{W}$ wird also ganz in den Unterraum V abgebildet. Um die Homotopie auf $\overline{W}$ zu erweitern, wird es also genügen, die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für das Paar $(\overline{W}, \partial\overline{W})$ zu zitieren, angewandt auf die Abbildung

$$(\overline{W}, \partial\overline{W}) \longrightarrow V \ ,$$

und wenn wir das in dieser Weise tun, dann wird sich an der Eigenschaft nichts ändern, daß eben $\overline{W}$ ganz nach V abgebildet wird.

Wir machen diese Modifikation mit allen Würfeln der Dimension $k{+}1$, danach mit denen der Dimension $k{+}2$, und so weiter, bis n. Danach können wir dann die oben beschriebene Modifikation für die $(k{+}1)$-Würfel in Angriff nehmen, falls auch $k{+}1 < n$. Und so weiter.

Schließlich haben wir erreicht, daß es keine schlechten Würfel der Dimension $< n$ mehr gibt; d.h. daß das ganze $(n{-}1)$-Skelett von unserem unterteilten Würfel W nun in den Unterraum U abgebildet wird. Dabei ist es bis zum Schluß immer noch richtig, daß jeder von den n-dimensionalen Teilwürfeln entweder ganz nach U abgebildet wird oder ganz nach V.

Wir können den Homotopie-Additions-Satz nun auf das von der so modifizierten Abbildung repräsentierte Element von $\pi_n(S^n, \{s_0\})^\ddagger \approx \pi_n(S^n, U)^\ddagger$ anwenden. Der Satz sagt uns, daß dieses Element eine Summe von anderen ist; nämlich von denjenigen Elementen, deren jedes repräsentiert ist (bis eventuell auf einen Faktor -1) von der Einschränkung der Abbildung auf einen der "schlechten" n-Würfel.

Es wird nun genügen, von *diesen* Elementen nachzuweisen, daß jedes von ihnen ein Vielfaches von dem Standard-Element ist; denn dann folgt das natürlich auch für die Summe.

Sei W_0 einer der "schlechten" n-Würfel. Aus der obigen Herleitung ergibt sich, und das ist der Punkt von der ganzen Argumentation, daß die Abbildung von $(W_0, \partial W_0)$ nach (S^n, U) faktorisiert über eine Abbildung

$$(W_0, \partial W_0) \longrightarrow (V, U{\cap}V) \ .$$

Nun ist aber V zusammenziehbar, und $U \cap V$ ist homotopie-äquivalent zu S^{n-1}. Über die lange exakte Folge der Homotopiegruppen sehen wir also, daß $\pi_n(V,\, U{\cap}V)^\ddagger$ isomorph zu $\pi_{n-1}(S^{n-1}, \{s_0\})^\ddagger$ ist; was, wie wir schon wissen, $\approx \mathbb{Z}$ ist (und auch erzeugt vom Bild des "Standard-Elements" in $\pi_n(V,\, U{\cap}V)^\ddagger$). Wir sind damit fertig. □

Die beiden anderen jetzt zu skizzierenden Methoden machen nicht eine derart "individuelle" Betrachtung wie die erste Methode. Vielmehr werden Sätze allgemeiner Art zitiert um zusätzliche Struktur ins Spiel zu bringen (simpliziale Struktur bzw. Differenzierbarkeit). Danach geht es jeweils ganz schnell (mit einem kleinen Trick).

2. Methode. (Skizze: *Differenzierbarkeit*). Wenn von Abbildungen

$$f: \ (D^n, \partial D^n) \ \longrightarrow \ (S^n, \{s_0\})$$

die Rede ist, dann kann man sich daran erinnern, daß die beteiligten Räume ja nicht nur *topologische Räume* sind, sondern sogar auch *differenzierbare Mannigfaltigkeiten*. Es ist also sinnvoll, hier von *differenzierbaren Abbildungen* zu reden. Man kann sich deshalb fragen, was es für einen Unterschied machen würde, wenn man grundsätzlich auf Differenzierbarkeit bestehen würde. Das heißt, bei einem Repräsentanten, wie dem obigen f, würde man darauf bestehen, daß es sich um eine differenzierbare Abbildung handelt; und bei den Homotopien zwischen Repräsentanten würde man ebenfalls auf Differenzierbarkeit bestehen. Die Frage nach dem Unterschied nun läßt sich ganz lapidar beantworten: es würde überhaupt keinen Unterschied machen.

Das liegt daran, daß man stetige Abbildungen systematisch durch differenzierbare Abbildungen approximieren kann. Das ist ein nicht-trivialer Sachverhalt, wenn auch vielleicht nicht sehr überraschend. Die technische Durchführung ist, grob gesprochen, so geregelt, daß man zunächst das Approximationsproblem "lokal" behandelt. Dafür zuständig ist der Satz von Stone-Weierstraß. Dieser Satz macht eine Aussage darüber, wie man stetige Funktionen auf einem kompakten Teilgebiet des $\mathbb{R}^n$ approximieren kann durch Funktionen aus einer (geeigneten) vorgegebenen Algebra von Funktionen; z.B. differenzierbare Funktionen. Nachdem der lokale Fall dann abgehandelt ist, braucht man nur noch zu klären, wie man lokale Verbesserungen "zusammenkleben" kann (das Stichwort dazu ist: *Partition der Eins*).

Es sei nun angenommen, daß das obige f eine differenzierbare Abbildung ist (oder, etwas technischer und genauer: eine C^∞-Abbildung). Wir sind dann berechtigt, den Satz von Sard zu zitieren. Der Satz sagt, daß die singulären Werte von f das Maß 0 haben, daß insbesondere deshalb die regulären Werte von f überall dicht sind. Dabei wird $y \in S^n$ als *regulärer Wert* bezeichnet, wenn sein Urbild $f^{-1}(y)$ nur "reguläre Punkte" enthält; und als *singulärer Wert*, wenn das Urbild $f^{-1}(y)$ mindestens einen "singulären Punkt" enthält. Ein Punkt x heißt dabei *regulärer* Punkt, wenn erstens x innerer Punkt von D^n ist und wenn zweitens die *abgeleitete Funktion* f'_x, die Vektorraum-Abbildung

$$f'_x: \ (\text{Tangentialraum an } x) \ \longrightarrow \ (\text{Tangentialraum an } f(x)) \ ,$$

surjektiv ist. Der Punkt heißt *singulärer* Punkt im andern Fall (d.h. wenn er Randpunkt ist oder wenn die abgeleitete Funktion *nicht* surjektiv ist).

Im vorliegenden Fall haben die Tangentialräume bei x und bei $f(x)$ dieselbe Dimension, nämlich n; wenn f'_x surjektiv ist, so ist es deshalb schon ein Isomorphismus. Also sagt der Implizite-Funktionen-Satz (oder sein Spezialfall, der Inverse-Funktionen-Satz), daß an einem regulären Punkt x die Abbildung f ein *lokaler Diffeomorphismus* ist; d.h. es gibt eine offene Umgebung $U(x)$, so daß die eingeschränkte Abbildung

$$f \,|\, U(x): \ U(x) \ \longrightarrow \ f(U(x))$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei nun y ein regulärer Wert. Dann sind in dem Urbild $f^{-1}(y)$ *nur endlich viele* Punkte. Denn andernfalls (Kompaktheit von D^n) hätten diese Punkte einen Häufungspunkt; der müsste dann selbst in dem Urbild liegen, könnte andererseits aber kein regulärer Punkt sein (denn bei einem lokalen Diffeomorphismus kann diese Häufungspunkt-Situation nicht vorliegen).

Es folgt, daß der reguläre Punkt y eine Umgebung $V(y)$ hat, so daß das Urbild $f^{-1}(V(y))$ aus endlich vielen Teilen besteht, deren jeder per Diffeomorphismus auf $V(y)$ abgebildet wird.

Wir ersetzen $V(y)$ durch eine kleinere Ball-Umgebung und sind dann sofort in der Situation, wo wir den Homotopie-Additions-Satz und das Grad-1-Lemma anwenden können. $\square$

3. METHODE. (Skizze: *Simpliziale Approximation*). Man kann S^n und D^n als Simplizialkomplexe auffassen (oder, technischer und genauer: für S^n wählt man eine feste topologische Äquivalenz zu einem endlichen Simplizialkomplex; und für D^n auch).

Nun sind Simplizialkomplex sehr starr: es gibt nur wenige Abbildungen zwischen zwei solchen, die *simpliziale Abbildungen* sind (d.h. es wird jedes Simplex in ein Simplex abgebildet; dabei gehen Ecken in Ecken, und die Abbildung ist affin). Offensichtlich gibt es z.B. zwischen endlichen Simplizialkomplexen auch nur endlich viele simpliziale Abbildungen. Man hat also im allgemeinen gar keine Chance, jede stetige Abbildung durch eine homotope simpliziale Abbildung zu ersetzen; jedenfalls dann, wenn man darauf Wert legt, immer dieselbe simpliziale Struktur zu verwenden.

Diese Kalamität verschwindet aber, wenn man die simpliziale Struktur für verhandelbar erklärt (zumindest für ein bißchen). Und zwar muß man in systematischer Weise zulassen, daß ein Simplizialkomplex ersetzt werden darf durch eine *Unterteilung* davon. Eine Abbildung zwischen Simplizialkomplexen wird nun als *semi-linear* bezeichnet, wenn zwar nicht die Abbildung selbst simplizial ist; wenn aber Unterteilungen von Quelle und Ziel existieren, so daß zumindest die Abbildung der unterteilten Komplexe dann simplizial ist. Es ist hierfür auch die Bezeichnung PL-Abbildung gebräuchlich (die Vorsilbe "PL" kommt her von "piecewise linear").

Der *Satz über Simpliziale Approximation* sagt, daß jede stetige Abbildung zwischen endlichen Simplizialkomplexen ersetzt werden kann durch eine homotope PL-Abbildung. (Es gibt auch eine vernünftige relative Version von dieser Aussage.)

Wenn wir nun von der Abbildung $f : (D^n, \partial D^n) \to (S^n, \{s_0\})$ annehmen dürfen, daß sie *semilinear* ist, so sind wir wieder ganz schnell fertig: wir nehmen ein höchstdimensionales (also n-dimensionales) Simplex in S^n (und zwar von der Unterteilungs-simplizialen-Struktur). Dieses Simplex hat dann (natürlich) nur endlich viele Urbilder, und *für jedes von diesen wird das Innere per topologischer Äquivalenz abgebildet*.

Die Schlußbemerkung ist (fast) dieselbe wie beim vorigen mal. $\square$

Beweis des Hurewicz-Satzes.

Bezeichne ∇^n das geometrische *Standard-Simplex*,

$$\nabla^n \quad = \quad \left\{ \, (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; t_i \geq 0 \;, \; \sum t_i = 1 \, \right\} .$$

Für einen Raum X war der *singuläre Komplex* $\mathrm{S}(X)$ definiert als die simpliziale Menge

$$\mathrm{S}(X) : \; \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\mathrm{Mengen}) \quad , \quad [n] \longmapsto \mathrm{S}(X)_n \quad ,$$

wo $\mathrm{S}(X)_n$ die Menge der Abbildungen

$$\mathrm{S}(X)_n \quad = \quad \left\{ \, f : \nabla^n \longrightarrow X \;\middle|\; f \text{ stetig} \, \right\}$$

bezeichnet.

Definition. Sei A Unterraum von X, sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Die Unter-simpliziale-Menge $\mathrm{S}(X, A; k)$ von $\mathrm{S}(X)$ ist definiert durch

$$\mathrm{S}(X, A; k)_n \quad = \quad \left\{ \, f : \nabla^n \longrightarrow X \;\middle|\; f(\mathrm{Sk}_k(\nabla^n)) \subset A \, \right\}$$

wo $\mathrm{Sk}_k(\nabla^n)$ das *k-Skelett* von ∇^n bezeichnet; das heißt, die Vereinigung aller derjenigen Seiten von ∇^n, deren Dimension $\leq k$ ist.

Lemma. *Wenn die Inklusion $A \to X$ k-zusammenhängend ist, dann ist* $\mathrm{S}(X, A; k)$ *Deformationsretrakt von* $\mathrm{S}(X)$. (Das heißt, es gibt eine simpliziale Homotopie von der identischen Abbildung auf $\mathrm{S}(X)$ zu einer Retraktion von $\mathrm{S}(X)$ zu $\mathrm{S}(X, A; k)$, wobei die Homotopie auf $\mathrm{S}(X, A; k)$ konstant ist.)

Bemerkung. Bei CW-Komplexen gilt davon auch die Umkehrung: Wenn $\mathrm{S}(X, A; k)$ Deformationsretrakt von $\mathrm{S}(X)$ ist, dann ist die Inklusion $A \to X$ k-zusammenhängend. Das folgt z.B. aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xleftarrow{\simeq} & |\mathrm{S}(A)| & \xleftarrow{=} & |\mathrm{S}(A)| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
X & \xleftarrow{\simeq} & |\mathrm{S}(X)| & \longleftarrow & |\mathrm{S}(X, A; k)|
\end{array}$$

wo, wie wir (für CW-Komplexe) wissen, die beiden mit "$\simeq$" bezeichneten Abbildungen Homotopie-Äquivalenzen sind; und der rechte untere Pfeil auch (nach der gerade gemachten Hypothese). Denn wenn $|\mathrm{S}(X, A; k)|$ als CW-Komplex relativ zu $|\mathrm{S}(A)|$ betrachtet wird, so gibt es (offensichtlich) keine Zellen der Dimension $\leq k$. Solche Zellen würden ja denjenigen Simplizes (genauer: nicht-ausgearteten Simplizes) der Dimension $\leq k$ entsprechen, die *nicht* in $\mathrm{S}(A)$ liegen, und davon gibt es in $\mathrm{S}(X, A; k)$ keine. $\square$

Beweis des Lemmas. Bezeichne Δ^m die simpliziale Menge *Standard-m-Simplex*. Die gesuchte Homotopie ist eine Abbildung von simplizialen Mengen,

$$\mathrm{S}(X) \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(X) \ ,$$

die die folgende Bedingung erfüllt ("Homotopie von der Identität zu ... "). Wenn '0' und '1' die beiden Exemplare Δ^0 in Δ^1 bezeichnen, so soll gelten, daß die Einschränkung der Abbildung auf $\mathrm{S}(X)\times 0$ die "Identität" (kanonische Identifizierung) sein soll; und die Einschränkung der Abbildung auf $\mathrm{S}(X)\times 1$ eine Abbildung nach $\mathrm{S}(X,A,k)$, deren Einschränkung auf $\mathrm{S}(X,A,k)\times 1$ die "Identität" (kanonische Identifizierung) ist.

Die simpliziale Menge $\mathrm{S}(X)$ kann (wie jede andere simpliziale Menge auch) erhalten werden durch Zusammenkleben von simplizialen Mengen des Typs *Standard-n-Simplex*,

$$\mathrm{S}(X) \ = \ \bigcup\nolimits_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \Delta^n \ / \ \sim \ .$$

Deshalb können wir die gesuchte Homotopie auch auffassen als eine Abbildung

$$\bigcup\nolimits_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \Delta^n \times \Delta^1 \ \longrightarrow \ \mathrm{S}(X) \ ,$$

die eine Bedingung erfüllt (s. oben) und die mit der induzierten Äquivalenzrelation kompatibel ist. Anders formuliert, wir suchen für jedes n und für jedes Element f in $\mathrm{S}(X)_n$ eine Abbildung

$$\phi_f : \ \Delta^n \times \Delta^1 \ \longrightarrow \ \mathrm{S}(X) \ ,$$

die für das erzeugende n-Simplex ι von Δ^n die Werte

$$\phi_f(\iota \times 0) \ = \ f \qquad \text{und} \qquad \phi_f(\iota \times 1) \ \in \ \mathrm{S}(X,A,k)_n$$

annimmt (und[1] $\phi_f \ = \ \overline{f} \circ \mathrm{pr}_1$, wenn $f \in \mathrm{S}(X,A,k)_n$), und wo die Gesamtheit dieser Abbildungen mit den von $\mathrm{S}(X)$ herkommenden Struktur-Abbildungen kompatibel ist.

Nun entspricht eine Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(X)$ in kanonischer Weise einer Abbildung $\nabla^n \times \nabla^1 \to X$. In der nachfolgenden Bemerkung wird dazu eine allgemeine Begründung gegeben; hier ist eine andere, auf den speziellen Fall zugeschnittene (vgl. die frühere Diskussion zum Thema "geometrische Realisierung von $\Delta^n \times \Delta^1$"): Das Prisma $\nabla^n \times \nabla^1$ hat eine Struktur als geordneter Simplizialkomplex, die der Zerlegung von $\Delta^n \times \Delta^1$ in simpliziale Mengen vom Typ *Standard-Simplex* entspricht. Deshalb induziert eine Abbildung $\nabla^n \times \nabla^1 \to X$ ein kompatibles System singulärer Simplizes in X, was wiederum einer Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(X)$ entspricht.

Wir haben damit folgende Umformulierung. Wir suchen für jedes n und für jedes Element f in $\mathrm{S}(X)_n$ eine Abbildung

$$\psi_f : \ \nabla^n \times \nabla^1 \ \longrightarrow \ X \ ,$$

mit den Einschränkungen

$$\psi_f \,|\, (\nabla^n \times 0) \ = \ f \qquad \text{und} \qquad \psi_f \,|\, (\nabla^n \times 1) \ \in \ \mathrm{S}(X,A,k)_n$$

(und auch $\psi_f \ = \ f \circ \mathrm{pr}_1$, wenn $f \in \mathrm{S}(X,A,k)_n$), und so daß die Gesamtheit dieser Abbildungen mit den von $\mathrm{S}(X)$ herkommenden Struktur-Abbildungen kompatibel ist.

[1] hier bezeichnet $\overline{f} : \Delta^n \to \mathrm{S}(X)$ die charakteristische Abbildung von dem Simplex f

Wir konstruieren das System von Abbildungen durch Induktion über n; der Induktionsanfang ist der (triviale) Fall $n = -1$. Was die Kompatibilitätsbedingungen angeht, so wird es genügen, auf die Kompatibilität mit den *Rand-Abbildungen* einerseits und die Kompatibilität mit den *Ausartungs-Abbildungen* andererseits zu achten; das liegt daran, daß ja jede Struktur-Abbildung als die Komposition von einer Rand- und einer Ausartungs-Abbildung geschrieben werden kann.

Sei $f \in \mathrm{S}(X)_n$. Wenn f ausgeartet ist, dann existiert ein nicht-ausgeartetes singuläres Simplex $f' : \nabla^{n'} \to X$ und es existiert ein "Ausartungs-Operator", d.h. eine (surjektive) Abbildung $\sigma : [n] \to [n']$, so daß $f = \sigma^*(f')$; oder, was dasselbe bedeutet, f ist die Komposition

$$f : \quad \nabla^n \xrightarrow{\sigma_*} \nabla^{n'} \xrightarrow{f'} X \ ;$$

ferner sind sowohl σ als auch f' durch f eindeutig bestimmt. Wir *definieren* nun in dieser Situation ψ_f als die Komposition

$$\psi_f : \quad \nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{\sigma_* \times \mathrm{Id}} \nabla^{n'} \times \nabla^1 \xrightarrow{\psi_{f'}} X \ .$$

Die geforderte Kompatibilität mit Ausartungen ist dann automatisch erfüllt, soweit f und irgendein anderes Simplex von kleinerer Dimension betroffen sind.

Sei nun f nicht-ausgeartet. Die Kompatibilität mit den Rand-Abbildungen und die anderen Bedingungen auch (soweit sie f betreffen) können wir umformulieren in die folgenden drei Vorgaben an die Abbildung ψ_f.

" Die Homotopie startet bei der Identität " bedeutet, die eingeschränkte Abbildung $\psi_f \,|\, (\nabla^n \times 0)$ ist gleich f.

Die " Kompatibilität mit Rand-Abbildungen " bedeutet, daß ψ_f über dem ganzen Rand $\partial\nabla^n$ vorgegeben ist; d.h. die eingeschränkte Abbildung $\psi_f \,|\, (\partial\nabla^n \times \nabla^1)$ ist vorgegeben.

" Die Homotopie endet in $\mathrm{S}(X, A, k)$ " bedeutet für $n > k$ gar nichts. Denn für $n > k$ ist das k-Skelett von ∇^n schon ganz in dem Rand $\partial\nabla^n$ enthalten. Deshalb ist die diesbezügliche Bedingung schon durch die induktiven Vorgaben (zusammen mit der Kompatibilität mit den Rand-Abbildungen) gewährleistet. In dem Fall wird es also genügen, ψ_f als eine Komposition

$$\nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{r} \nabla^n \times 0 \ \cup \ \partial\nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{v} X$$

zu definieren, wo r eine Retraktions-Abbildung bezeichnet und wo v die durch die anderen Vorgaben fixierte Abbildung ist.

Im Falle $n \leq k$ dagegen bedeutet die letzte Bedingung, daß die eingeschränkte Abbildung $\psi_f \,|\, (\nabla^n \times 1)$ eine Abbildung in den Unterraum A sein soll. Die Abbildung

$$\nabla^n \times 0 \ \cup \ \partial\nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{v} X$$

können wir interpretieren als eine "Test"-Abbildung $(D^n, \partial D^n) \to (X, A)$ für die Frage, ob (oder ob nicht) die Inklusion $A \to X$ k-zusammenhängend ist (wegen $n \leq k$). Wegen des vorausgesetzten k-Zusammenhangs geht der Test erfolgreich; was bedeutet, daß ψ_f existiert. $\square$

Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde benutzt, daß einer Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(X)$ in kanonischer Weise eine Abbildung $\nabla^n \times \nabla^1 \to X$ entspricht. Da $\nabla^n \times \nabla^1$ isomorph ist zu der geometrischen Realisierung $|\Delta^n \times \Delta^1|$, folgt diese Aussage auch aus dem folgenden Sachverhalt. Sei X ein topologischer Raum, sei W eine simpliziale Menge. Einer Abbildung $W \to \mathrm{S}(X)$ entspricht dann, in kanonischer Weise, eine Abbildung $|W| \to X$. Anders gesagt, es gibt einen ganz bestimmten Isomorphismus von Mengen,

$$\mathrm{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(\,W\,,\,\mathrm{S}(X)\,) \quad \approx \quad \mathrm{Hom}_{(\text{top.Räume})}(\,|W|\,,\,X\,)\;.$$

Dieser Isomorphismus hat zudem noch die Eigenschaft, daß er *natürlich* ist; d.h. das aus einer Abbildung $w : W \to W'$ resultierende Quadrat von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(\,W\,,\,\mathrm{S}(X)\,) & \xrightarrow{\;\approx\;} & \mathrm{Hom}_{(\text{top.Räume})}(\,|W|\,,\,X\,) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle w^*} & & \Big\uparrow{\scriptstyle |w|^*} \\
\mathrm{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(\,W'\,,\,\mathrm{S}(X)\,) & \xrightarrow{\;\approx\;} & \mathrm{Hom}_{(\text{top.Räume})}(\,|W'|\,,\,X\,)
\end{array}$$

ist *kommutativ*; und ähnlich auch für eine Abbildung $x : X \to X'$.

Man sagt für diesen wichtigen Sachverhalt auch, daß die beiden Funktoren

$$(\,\text{s. Mengen}) \xrightarrow{\;|\,\dots\,|\;} (\,\text{top. Räume}\,)$$

und

$$(\,\text{s. Mengen}\,) \xleftarrow{\;\mathrm{S}(\,\dots\,)\;} (\,\text{top. Räume}\,)$$

zueinander *adjungierte Funktoren* sind. Etwas pedantischer (und auch korrekter; der Sachverhalt ist ja nicht symmetrisch), kann man noch die Vokabeln “links” und “rechts” hier einbauen (sie beziehen sich auf die Stellung in “$\mathrm{Hom}(-,-)$”). Man sagt also dann, $|\dots|$ *ist links-adjungiert zu* $\mathrm{S}(\dots)$; und $\mathrm{S}(\dots)$ *ist rechts-adjungiert zu* $|\dots|$.

Um den Adjunktions-Isomorphismus zu bekommen, kann man z.B. so vorgehen, daß man die früher diskutierte *Evaluations-Abbildung*, $\mathrm{ev} : |\mathrm{S}(X)| \to X$, verwendet. Man definiert nämlich eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(\,W\,,\,\mathrm{S}(X)\,) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\text{top.Räume})}(\,|W|\,,\,X\,)$$

dadurch, daß man der Abbildung $f : W \to \mathrm{S}(X)$ die zusammengesetzte Abbildung

$$|W| \xrightarrow{\;|f|\;} |\mathrm{S}(X)| \xrightarrow{\;\mathrm{ev}\;} X$$

zuordnet. Man muß dann noch ein paar Dinge nachprüfen; was wir hier aber nicht tun wollen. $\square$

Lemma. *Wenn die Inklusion $A \to X$ k-zusammenhängend ist, dann sind die relativen Homologiegruppen $H_*(X,A)$ dieselben wie die des Kettenkomplexes* (Unterkomplex des relativen Kettenkomplexes)

$$n \quad \longmapsto \quad \mathbb{Z}[\mathrm{S}(X,A,k)_n] \;/\; \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A)_n]\;.$$

Beweis. Das ist eine Konsequenz aus dem vorigen Lemma. Denn nach diesem ist die Inklusion von simplizialen Mengen

$$([n] \mapsto \mathrm{S}(X,A,k)_n) \longrightarrow ([n] \mapsto \mathrm{S}(X)_n)$$

eine simpliziale Homotopie-Äquivalenz, induziert deshalb eine Ketten-Homotopie-Äquivalenz und folglich auch Isomorphismen der Homologiegruppen. Es folgt, daß in dem Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{S}(X,A,k).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{S}(X,A,k).] \,/\, \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A).] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{S}(X).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{S}(X).] \,/\, \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A).] \end{array}$$

zwei der vertikalen Pfeile (nämlich links und in der Mitte) Isomorphismen auf der Homologie sind. Wegen der langen exakten Folge der Homologiegruppen für die obere, bzw. die untere Zeile, und wegen dem Fünfer-Lemma, folgt nun, daß auch der rechte vertikale Pfeil Isomorphismen auf der Homologie induziert. □

Satz. *Seien X und A weg-zusammenhängende Räume, wo A Unterraum von X ist. Die Inklusion von A in X sei $(m-1)$-zusammenhängend. Dann ist die Abbildung*

$$\pi_m(X,A)^{\ddagger} \longrightarrow H_m(X,A)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Bezeichne $E_m(X,A)$ die abelsche Gruppe, die erzeugt ist von den Abbildungen von Raumpaaren, $f\colon (D^m, \partial D^m) \to (X,A)$.

Von dieser abelschen Gruppe ist $\pi_m(X,A)^{\ddagger}$ ein Quotient. Bezeichne E' den Kern der Quotienten-Abbildung. Es ergibt sich aus der Definition von $\pi_m(X,A)^{\ddagger}$, daß E' diejenige Untergruppe ist, die von den folgenden beiden Typen von Elementen erzeugt wird: Wenn f und f' homotop sind (per Homotopie von Paaren), dann ist $[f]-[f']$ in E'; und in der "Summen"-Situation (diskutiert bei der Definition von $\pi_m(X,A)^{\ddagger}$) ist das Element $[f]-[f_1]-[f_2]$ in E'.

Wenn wir andererseits uns D^m mit dem Standard-Simplex ∇^m identifiziert denken, so ist ein f der obigen Art dasselbe wie ein singuläres m-Simplex in X, das allerdings die zusätzliche Eigenschaft hat, daß der Rand ganz in A liegt; mit anderen Worten, es handelt sich um ein Element der Menge $\mathrm{S}(X,A;m-1)_m$. Auf diese Weise wird $E_m(X,A)$ also identifiziert mit der durch Linearisierung erhaltenen Gruppe $\mathbb{Z}[\mathrm{S}(X,A;m-1)_m]$. Diese Gruppe nun hat als Quotient die m-te Kettengruppe von dem Kettenkomplex

$$\mathbb{Z}[\mathrm{S}(X,A,m-1).] \,/\, \mathbb{Z}[\mathrm{S}(A).] \;.$$

Diese m-Kettengruppe besteht (offenbar) nur aus Zykeln, hat also ihrerseits als Quotient die m-te Homologiegruppe von dem Kettenkomplex (von der wir nach dem vorigen Lemma wissen, daß sie dasselbe wie $H_m(X,A)$ ist). Bezeichne E'' den Kern der Quotienten-Abbildung. Nach der gerade gegebenen Herleitung wissen wir, daß E'' diejenige Untergruppe ist, die von den folgenden beiden Typen von Elementen erzeugt wird: Wenn das Bild von f ganz in A liegt, dann ist $[f] \in E''$; und wenn $\tilde{f}$ ein Element von $\mathrm{S}(X, A, m{-}1)_{m+1}$ ist, dann ist der Rand von $\tilde{f}$,

$$\sum_i \; (-1)^i \; d_i(\tilde{f}) \; ,$$

ebenfalls in E''.

Der Satz wird bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß diese beiden als Kerne von Quotienten-Abbildungen auftretenden Gruppen in Wirklichkeit zueinander *gleich* sind,

$$E' \;\stackrel{!}{=\!=}\; E'' \; ;$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, sobald wir die folgenden beiden Behauptungen nachgewiesen haben.

[Behauptung 1 läuft dabei darauf hinaus, zu zeigen, daß $\pi_m(X, A)^{\ddagger} \to H_m(X, A)$ eine wohldefinierte Abbildung ist; oder, was dasselbe bedeutet, daß die Hurewicz-Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus von abelschen Gruppen ist — die Additivität davon hatten wir bisher ja noch nicht gezeigt.]

Behauptung 1. *Die Elemente von E' sind trivial in $E_m(X, A) \,/\, E''$* $(\approx\; H_m(X, A)\,)$.

Behauptung 2. *Die Elemente von E'' sind trivial in $E_m(X, A) \,/\, E'$* $(\approx\; \pi_m(X, A)^{\ddagger})$.

Beweis von Behauptung 1. Es genügt, den Nachweis für erzeugende Elemente zu führen. Einmal, wenn f homotop zu f' ist, dann ist zu zeigen, daß $[f] - [f'] = 0$ ist in der Quotientengruppe $H_m(X, A)$; oder, was dasselbe bedeutet, $[f] = [f']$. Dies wurde aber schon gezeigt im Anschluß an die Definition der Hurewicz-Abbildung.

Zum andern ist zu zeigen, daß in der "Summen"-Situation gilt $[f] - [f_1] - [f_2] = 0$ in der Quotientengruppe oder, äquivalent dazu, $[f] = [f_1] + [f_2]$. Das wurde noch nicht gezeigt und soll jetzt nachgeholt werden.

Es gibt einen *universellen Fall*: einen (einzigen) speziellen Fall, auf dessen Behandlung wir uns zurückziehen können. Dazu betrachten wir einen m-dimensionalen Würfel W zusammen mit einer Unterteilung von W in zwei Teile W_1 und W_2 ("linke Hälfte" und "rechte Hälfte"). Es ist also W die Vereinigung dieser beiden Teile, und der Durchschnitt von W_1 und W_2 ist ein Würfel der Dimension $m{-}1$, der im Rand von beiden liegt. Sei U der Unterraum von W, der gegeben ist durch die Vereinigung der Ränder von W_1 und W_2. Das Paar (W, U) ist unser universeller Fall, wie wir sogleich nachprüfen werden.

Sei nämlich der Ball D^m mit einer Orientierung versehen. Wir wählen eine Identifizierung $w \colon D^m \xrightarrow{\approx} W$. Wir wählen zusätzlich auch Identifizierungen $w_1 \colon D^m \to W_1$ und $w_2 \colon D^m \to W_2$, und zwar machen wir das so, daß die Inklusionen von W_1 und W_2 in W beide den lokalen Grad $+1$ haben. Die angesprochene *Universalität* des Paares (W, U) bedeutet das folgende. In der "Summen"-Situation für ein Tripel von Abbildungen, $(\,f\,,\, f_1\,,\, f_2\,)$, gibt es eine Abbildung

$$F \,:\; (W, U) \;\longrightarrow\; (X, A)$$

so daß bis auf Homotopie (Homotopie von Abbildungen von Paaren) gilt

$$f \;=\; F\circ w \quad , \quad f_1 \;=\; F\circ w_1 \quad , \quad f_2 \;=\; F\circ w_2 \;.$$

Es wird deshalb genügen, zu zeigen, daß $[w] \;=\; [w_1]+[w_2]$ in $H_m(W,U)$ gilt. Denn das impliziert, per Transport entlang der Abbildung $F_* : H_m(W,U) \to H_m(X,A)$, dann auch die gewünschte Beziehung $[f] \;=\; [f_1]+[f_2]$

Wir benötigen die Kenntnis dessen, daß es eine direkte-Summen-Zerlegung gibt,

$$H_m(W,U) \;\approx\; H_m(W_1,\partial W_1) \oplus H_m(W_2,\partial W_2) \;.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies einzusehen. Z.B. folgt es aus der Tatsache, daß die Homologie von einem relativen CW-Komplex aus dem zellulären Kettenkomplex berechnet werden kann: $H_m(W,U)$ ist die freie abelsche Gruppe auf zwei Erzeugenden, und die Erzeugenden entsprechen den beiden Zellen, kommen insbesondere also her von $H_m(W_1,\partial W_1)$ und von $H_m(W_2,\partial W_2)$.

Wegen der direkte-Summen-Zerlegung ist das Element $[w]$ eine Summe

$$[w] \;=\; \alpha_1\,[w_1]+\alpha_2\,[w_2] \;.$$

Wir müssen uns davon überzeugen, daß die Koeffizienten α_1 und α_2 beide $=1$ sind. Wir behandeln den Fall von α_1. Der Fall von α_2 geht genauso.

Die Inklusionen $W_1 \to W$ und $\partial W_1 \to \partial W_1 \cup W_2$ sind Homotopie-Äquivalenzen. Deshalb ist die Abbildung $H_m(W_1,\partial W_1) \to H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$ ein Isomorphismus. D.h. die zusammengesetzte Abbildung $H_m(W_1,\partial W_1) \to H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$ in dem Diagramm

$$H_m(W_1,\partial W_1) \longrightarrow H_m(W,U) \longrightarrow H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$$

ist ein Isomorphismus. Die zusammengesetzte Abbildung

$$H_m(W_2,\partial W_2) \longrightarrow H_m(W,U) \longrightarrow H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$$

andererseits ist trivial (offensichtlich; denn sie faktorisiert über $H_m(W_2,W_2)$). Es folgt, daß die Abbildung $H_m(W,U) \to H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$ die Projektion auf den Summanden $H_m(W_1,\partial W_1)$ von $H_m(W,U)$ ist. Das Bild von $[w]$ in $H_m(W,\,\partial W_1 \cup W_2)$ ist also $\alpha_1\,[w_1]$. Nun sind die Abbildungen w und w_1 aber homotop, als Abbildungen von Paaren, wenn man sie als Abbildungen $(D^m,\;\partial D^m) \to (W,\;\partial W_1 \cup W_2)$ betrachtet. Deshalb ist α_1 gleich 1. □

Beweis von Behauptung 2. Wieder genügt es, den Nachweis für erzeugende Elemente zu führen. Zunächst ist zu zeigen, wenn das Bild von f ganz in A enthalten ist, dann ist $[f]=0$ in der Quotientengruppe $\pi_m(X,A)^{\ddagger}$; das ist aber klar: da das Bild von f in A liegt, induziert eine Kontraktion von D^m eine Homotopie von f zu einer trivialen Abbildung (und zwar eine Homotopie von Abbildungen von Paaren).

Zum andern, wenn $\tilde f$ ein Element von $\mathrm{S}(X,A,m{-}1)_{m+1}$ ist, dann ist zu zeigen, daß der Rand von $\tilde f$,

$$\sum_i \;(-1)^i\; d_i(\tilde f) \;,$$

in der Quotientengruppe $\pi_m(X,A)^\ddagger$ trivial ist. Das ist die Stelle, wo der Homotopie-Additions-Satz benötigt wird.

Um den Satz anzuwenden, ersetzen wir die m-dimensionale Randsphäre $\partial\nabla^{m+1}$ durch einen m-dimensionalen Ball B. Dieses B verschaffen wir uns durch "Aufschneiden" der Randsphäre. Besser gesagt, wir zerlegen die Randsphäre zunächst in ihre Stücke, die Randseiten $\delta_i(\nabla^m)$. Dann setzen wir diese Stücke wieder zusammen, *aber nur teilweise* (wir führen nicht alle Verklebungen aus, die wir bräuchten, um die Randsphäre zu rekonstruieren).

Die Seite $\delta_i(\nabla^m)$ ist nach Definition diejenige, die die i-te Ecke nicht enthält. Für zwei Indizes i und j (wo $i \neq j$) treffen sich die beiden Seiten in $\partial\nabla^{m+1}$ in einer gemeinsamen Seite der Dimension $m{-}1$ (es ist die, die nicht die Ecken i und j enthält).

Für die Konstruktion von B ordnen wir die Seiten $\delta_i(\nabla^m)$ in einer Reihe an, nach der Reihenfolge ihrer Indizes: erst 0, dann 1, dann 2, und so weiter. Für jedes Paar $(i,i{+}1)$ wird nun $\delta_i(\nabla^m)$ mit $\delta_{i+1}(\nabla^m)$ verklebt entlang der genannten $(m{-}1)$-dimensionalen Seite (derjenigen, die nicht die Ecken i und $i{+}1$ enthält). *Es werden sonst keine Verklebungen vorgenommen.*

Die Vereinigung der Ränder $\delta_i(\partial\nabla^m)$ gibt einen Unterraum von B, den wir mit $\mathrm{Sk}_{m-1}(B)$ bezeichnen. Er bildet ab (vermöge der Quotienten-Abbildung $B \to \partial\nabla^{m+1}$) auf den entsprechenden Unterraum $\mathrm{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$ in $\partial\nabla^{m+1}$. Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung

$$(B,\, \mathrm{Sk}_{m-1}(B)) \longrightarrow (\partial\nabla^{m+1},\, \mathrm{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})) \xrightarrow{\tilde{f}} (X,A) \ .$$

Nach Wahl einer Orientierung von B repräsentiert die resultierende Abbildung von $(B,\partial B)$ zu (X,A) ein Element von $\pi_m(X,A)^\ddagger$. Dieses Element ist 0; das kommt von der Existenz der Abbildung $\tilde{f}$ auf ∇^{m+1}. Nach dem Homotopie-Additions-Satz ist andererseits dieses Element nun tatsächlich gleich einer Summe

$$\sum_i \epsilon_i \ d_i(\tilde{f}) \ ,$$

wo jedes der ϵ_i entweder gleich $+1$ ist oder gleich -1.

Wie wir in einem Moment sehen werden, sind die Elemente tatsächlich *abwechselnd* gleich $+1$ oder -1; d.h. ϵ_i und ϵ_{i+1} sind *verschieden* (für jedes i). Das bedeutet, daß die letztere Summe nun tatsächlich (bis eventuell aufs Vorzeichen) gleich der uns interessierenden Summe $\sum(-1)^i\, d_i(\tilde{f})$ sein wird, so daß diese folglich auch $= 0$ sein muß.

Die Verschiedenheit der lokalen Grade bei den Inklusionen von $\delta_i(\nabla^m)$ und $\delta_{i+1}(\nabla^m)$ in B sieht man so. Bis auf die i-te, bzw. $(i{+}1)$-te Ecke haben diese beiden Inklusionen von ∇^m in B alle Ecken gemeinsam, *und zwar einschließlich deren Numerierung*. Andererseits liegen die i-te Ecke und die $(i{+}1)$-te Ecke zu verschiedenen Seiten von dem Durchschnitt $\delta_i(\nabla^m) \cap \delta_{i+1}(\nabla^m)$ in B. Deshalb benötigt man bei dem Vergleich der Bilder von $\delta_i(\nabla^m)$ und $\delta_{i+1}(\nabla^m)$ eine *Spiegelung*; und die gibt das Vorzeichen. $\square$

Zusatz S. 29

Die Aussage (kurz nach dem ersten Display): " Dieses Element ist 0; das kommt von der Existenz der Abbildung $\tilde{f}$ auf ∇^{m+1}. " bedarf einer Rechtfertigung. Eine solche Rechtfertigung bekommt man, sobald man weiß, daß die Abbildung

$$\big(B,\, \mathrm{Sk}_{m-1}(B)\big) \longrightarrow \big(\partial\nabla^{m+1},\, \mathrm{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})\big)$$

homotop ist (als Abbildung von Paaren) zu einer Abbildung, wo der Teil ∂B von $\mathrm{Sk}_{m-1}(B)$ auf einen einzigen Punkt geht.

Dafür genügt es zu wissen, daß die Abbildung

$$\partial B \longrightarrow \mathrm{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$$

nullhomotop ist. Das folgt aus diesem: In $\mathrm{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$ gibt es einen Unterraum T mit den Eigenschaften: Der Rand ∂B bildet nach T ab. Und T ist *zusammenziehbar* (homotopie-äquivalent zum einpunktigen Raum).

Der Unterraum T ist definiert als eine Vereinigung von $(m{-}1)$-Seiten in ∇^{m+1},

$$T \quad = \quad \bigcup_{j \,\geq\, i+2} \delta_j\big(\delta_i(\nabla^{m-1})\big) \ .$$

Das sind *alle* $(m{-}1)$-Seiten von ∇^{m+1} bis auf diejenigen, die für das Zusammenkleben von dem Ball B verwendet worden sind. Daraus ergibt sich sofort, daß der Rand ∂B nach T hinein abbildet. — Die Zusammenziehbarkeit von T ergibt sich durch eine andere Konstruktion davon.

Wenn A ein Simplizialkomplex ist und B davon ein Unterkomplex, dann sagt man, daß B aus A durch eine *Schälung* entsteht (englisch: *shelling*), wenn es genau zwei Simplizes gibt: a^d und b^{d-1} (oder kurz: a und b; der obere Index bezeichnete die Dimension), die in A, aber nicht in B vorkommen; dabei ist vorausgesetzt, daß b Seite von a ist und es ist verlangt, daß b eine *freie Seite* von dem Simplizialkomplex A ist; was (nach Definition) bedeutet, daß b in keinem andern Simplex außer a enthalten ist.

Wenn B aus A durch eine Schälung entsteht, dann ist offenbar B ein Deformationsretrakt von A (ein 'starker' Deformationsretrakt), also auch homotopie-äquivalent dazu.

Wir bekommen jetzt T auf die folgende Weise. Erst lassen wir aus der Randsphäre $\partial\nabla^{m+1}$ das m-Simplex $\delta_{m+1}(\nabla^m)$ weg. Was übrigbleibt, ist die Vereinigung der (anderen) m-Seiten:

$$\bigcup_{i \,\leq\, m} \delta_i(\nabla^m) \ .$$

Das ist ein Ball. Dieser Ball wird jetzt sukzessive heruntergeschält.

Die erste Schälung entfernt das m-Simplex $\delta_m(\nabla^m)$ und das $(m{-}1)$-Simplex

$$\delta_m\big(\delta_m(\nabla^{m-1})\big) \quad = \quad \delta_{m+1}\big(\delta_m(\nabla^{m-1})\big) \ .$$

Die nächste Schälung entfernt $\delta_{m-1}(\nabla^m)$ und $\delta_m\big(\delta_{m-1}(\nabla^{m-1})\big)$. Und so weiter.

Was schließlich übrigbleibt, das ist T.

Variante des Beweises (Skizze)

Satz. *(X,A) sei relativer CW-Komplex, die Inklusion $A \to X$ sei $(n{-}1)$-zusammenhängend. Es gibt einen relativ A homotopie-äquivalenten CW-Komplex (X',A), der keine Zellen in den Dimensionen $< n$ hat.*

Beweis. Das wurde vorher gezeigt mit Hilfe von simplizialen Mengen. Hier soll ein direktes geometrisches Argument beschrieben werden. Es beruht auf dem *Austauschtrick* (dieser stammt aus der Theorie der *Whitehead-Torsion*). Der Austauschtrick hat seinen Namen daher, daß bei seiner Verwendung die Anzahl der Zellen nicht vergrößert wird. Es werden jeweils nur die Zellen einer gewissen Dimension k "ausgetauscht" gegen Zellen einer anderen, größeren Dimension (nämlich $k{+}2$).

Wenn X keine Zellen in Dimension $< n$ hat, so ist für den Satz nichts zu tun. Andernfalls sei k definiert als die kleinste Dimension, in der es Zellen von X gibt. Es ist $0 \leq k \leq n{-}1$.

Wir werden den Fall einer einzigen k-Zelle behandeln. Der Fall mehrerer Zellen geht (fast) wörtlich genauso; man muß dann nur die k-Zellen mit Namen versehen (d.h. man muß an einige der nachfolgenden Symbole jeweils einen Index anhängen).

Sei $\chi\colon D^k \to X$ die charakteristische Abbildung einer (oder, für uns, "der") k-Zelle. Nach Voraussetzung ist das $(k{-}1)$-Skelett von X gleich dem Unterraum A. Deshalb können wir diese charakteristische Abbildung auch schreiben als eine Abbildung von Paaren,

$$\chi : \ (D^k, \partial D^k) \to (X,A) \ .$$

Nach der Voraussetzung des $(n{-}1)$-Zusammenhangs gibt es von der Abbildung χ eine Homotopie, relativ ∂D^k, zu einer Abbildung $\rho\colon D^k \to A$.

Die Existenz dieser Homotopie ist äquivalent zu der folgenden Tatsache. Es gibt eine Abbildung $\sigma\colon D^{k+1} \to X$ mit den folgenden Eigenschaften: Die Komposition

$$D^k \xrightarrow{\text{Identifizierung}} D^k_+ \xrightarrow{\ \sigma\ } X$$

ist gleich der charakteristischen Abbildung χ, und die Komposition

$$D^k \xrightarrow{\text{Identifizierung}} D^k_- \xrightarrow{\ \sigma\ } X$$

ist gleich der Abbildung ρ. Hier bezeichnet D^k_+ die "nördliche" Hemisphäre im Rand von D^{k+1}; und D^k_- die "südliche".

Wir bilden den *reduzierten* Abbildungszylinder der Abbildung σ,

$$X' \ = \ \partial D^{k+1} \cup_{\partial D^{k+1} \times [0,1]} D^{k+1} \times [0,1] \cup_{D^{k+1} \times \{1\}} X$$

(die Anhefte-Abbildung $D^{k+1} \times \{1\} \to X$ ist durch σ gegeben).

Als Abbildungszylinder (bzw. reduzierter Abbildungszylinder) ist X' homotopieäquivalent zu dem Unterraum X. Wir können also X durch X' ersetzen. Die Zellenstruktur von X' ist so: X' entsteht aus X durch das Anheften von zwei Zellen, je einer in den Dimensionen $k{+}1$ und $k{+}2$ (die beiden Zellen zusammen bilden eine "elementare Erweiterung" von X zu X').

In X' gibt es einen Unterkomplex B, der aus dem Raum A entsteht durch das Anheften von genau zwei Zellen: der ursprünglichen k-Zelle und der gerade hinzugekommenen $(k{+}1)$-Zelle. Das Anheften vermöge σ war derart, daß auch diese beiden Zellen zusammen eine "elementare Erweiterung" bilden, von A zu B. Insbesondere ist A Deformationsretrakt von B. Wir wählen eine (Deformations-) Retraktion $B \to A$.

Mit dieser Abbildung machen wir die Verklebe- (oder vielleicht besser: Kollaps-) Konstruktion

$$X_2 \ = \ X_1 \cup_B A \ .$$

Nach dem Klebe-Lemma ist die Abbildung $X_1 \to X_2$ eine Homotopieäquivalenz.

Die k-Zelle von X befand sich in B. Sie wird beim Übergang zu $X_1 \cup_B A$ daher vernichtet. Und zwar wird sie vernichtet zusammen mit der hinzugekommenen $(k{+}1)$-Zelle. Die ebenfalls hinzugekommene $(k{+}2)$-Zelle hingegen bleibt erhalten. $\square$

Satz. *Der CW-Komplex X entstehe aus dem Raum A durch Anheften von n-Zellen* (und von keinen Zellen sonst). *Es ist*

$$\pi_n(X,A)^{\ddagger} \ \xrightarrow{\approx} \ H_n(X,A) \ ,$$

und zwar ist dies die freie abelsche Gruppe, die frei erzeugt ist von den n-Zellen.

Beweis. Das folgende Argument ist eine Verallgemeinerung dessen, mit dem vorher die n-te Homotopiegruppe der n-Sphäre ausgerechnet wurde.

Wir wissen, daß $H_n(X,A)$ die gegebene Beschreibung hat (die freie abelsche Gruppe, erzeugt von den n-Zellen). Das folgt aus der Möglichkeit, die singuläre Homologie mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes zu beschreiben. Denn in unserer Situation ist der zelluläre Kettenkomplex von dem relativen CW-Komplex (X,A) ein recht banales Objekt: die n-te Kettengruppe ist die schon angesprochene freie abelsche Gruppe, und die anderen Kettengruppen sind sämtlich trivial.

Als nächstes notieren wir, daß die Abbildung $\pi_n(X,A)^{\ddagger} \to H_n(X,A)$ *surjektiv* ist. Die charakteristische Abbildung von jeder der Zellen definiert ein Element in $\pi_n(X,A)^{\ddagger}$. Per Änderung des Modells für den n-Ball können wir die charakteristische Abbildung umschreiben als eine vom n-Simplex, $\alpha\colon (\nabla^n, \partial\nabla^n) \to (X,A)$. Wie früher auch schon, so ist die singuläre Kette $1 \cdot \alpha$ nun ein *relativer Zykel*. Dieser Zykel ist im Bild der Hurewicz-Abbildung (nach deren Definition), und er repräsentiert das zu der fraglichen Zelle gehörende erzeugende Element in $H_n(X,A)$.

Die Gruppe $\pi_n(X,A)^{\ddagger}$ enthält eine zu der Gruppe $H_n(X,A)$ isomorphe Kopie, nämlich diejenige Untergruppe, die von den schon angesprochenen Elementen erzeugt wird: den Elementen, die repräsentiert sind von den Anhefte-Abbildungen der Zellen.

Sobald man nachgewiesen hat, daß diese Untergruppe schon alles ist (d.h. die ganze Gruppe), so hat man damit auch gezeigt, daß die Abbildung $\pi_n(X,A)^\ddagger \to H_n(X,A)$ injektiv ist; und folglich ein Isomorphismus.

Es bleibt also zu zeigen, daß jedes Element von $\pi_n(X,A)^\ddagger$ sich schreiben läßt als eine Summe von den spezifizierten Elementen (und von deren additiv-inversen). Der Nachweis davon ist eine leichte Modifikation dessen, was im Falle der n-Sphäre für den analogen Zweck gemacht wurde.

Sei V_i ein konzentrischer offener n-Ball in der i-ten Zelle von X. Sei U eine offene Menge in X, die A enthält und auch aus jeder der Zellen einen äußeren konzentrischen Ring. Diese Dinge seien so bestimmt, daß die Mengen V_i und U zusammen eine offene Überdeckung von X bilden; daß die Inklusion $A \to U$ eine Homotopieäquivalenz ist; und daß, für jedes i, der Durchschnitt $U \cap V_i$ ein Ring-Gebiet ist (also $\approx S^{n-1} \times (0,1)$).

Die Elemente von $\pi_n(X,A)^\ddagger$ sind, nach Definition, Äquivalenzklassen von formalen Summen von Repräsentanten $\alpha\colon (D^n, \partial D^n) \to (X,A)$. Es wird nun genügen, nur von Elementen, die von *Repräsentanten* (nicht formalen Summen von solchen) repräsentiert sind, zu zeigen, daß sie in der fraglichen Untergruppe liegen.

Sei $\alpha : (D^n, \partial D^n) \to (X,A)$ ein solcher Repräsentant. Mit einer Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes (oder auch mit einer der beiden anderen bei der Behandlung der n-Sphäre skizzierten Methoden) können wir α ersetzen durch eine homotope Abbildung, g, die die folgende Eigenschaft hat. Es gibt endlich viele Inklusionen $f_j\colon D^n \to D^n$, so daß die verschiedenen Bilder $f_j(D^n)$ sich höchstens an ihren Rändern treffen, und so daß folgendes gilt:

(i) Für jedes j hat die Abbildung $g \circ f_j$ ihr Bild ganz in einem der V_i.

(ii) Das Komplement von $\bigcup_j f_j(\mathring{D}^n)$ wird durch g ganz nach U abgebildet.

Eine Anwendung des Homotopie-Additions-Satzes in $\pi_n(X,U)^\ddagger \approx \pi_n(X,A)^\ddagger$ zeigt dann, daß die Klasse $[g]$ eine Summe ist (mit eventuellen Vorzeichen ± 1) von den Elementen $[g \circ f_j]$. Wie bei der n-Sphäre schon, so schließen wir auch hier jetzt wieder mit dem Hinweis auf die spezielle Eigenschaft, daß die letzteren Repräsentanten ja in Wirklichkeit Abbildungen

$$g \circ f_j : \ (D^n, \partial D^n) \ \longrightarrow \ (V_{i_j}, U \cap V_{i_j})$$

sind. $\square$

Satz. *Sei (X,A) ein relativer CW-Komplex ohne Zellen in den Dimensionen $< n$. Die Abbildung*

$$\pi_n(X,A)^\ddagger \xrightarrow{\ \approx\ } H_n(X,A)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sowohl für π_n als auch für H_n ist es richtig, daß die Inklusion des n-Skeletts eine *Surjektion* dieser Gruppe induziert (im Falle von π_n folgt das aus dem zellulären

Approximations-Satz; im Falle von H_n folgt es aus der Existenz des zellulären Kettenkomplexes). Wegen dem vorigen Satz wissen wir also, daß $\pi_n(X,A)^\ddagger$ und $H_n(X,A)$ beide Quotienten von ein- und derselben abelschen Gruppe sind (der freien abelschen Gruppe, erzeugt von den n-Zellen). Wegen der Existenz der Abbildung von $\pi_n(X,A)^\ddagger$ zu $H_n(X,A)$ wissen wir auch, daß $H_n(X,A)$ Quotientengruppe von $\pi_n(X,A)^\ddagger$ ist. Es bleibt nur noch zu klären, daß, umgekehrt, auch $\pi_n(X,A)^\ddagger$ Quotientengruppe von $H_n(X,A)$ ist; oder, anders gesagt, daß diejenigen Relationen, die in $H_n(X,A)$ gelten, auch in $\pi_n(X,A)^\ddagger$ erfüllt sind.

Die Theorie des zellulären Kettenkomplexes sagt, daß es in der vorliegenden Situation (keine $(n-1)$-Zellen) eine exakte Folge gibt

$$\mathbb{Z}\,[\{(n{+}1)\text{-Zellen}\}] \longrightarrow \mathbb{Z}\,[\{n\text{-Zellen}\}] \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow 0 \ ;$$

wo, wie auch sonst, $\mathbb{Z}\,[M]$ die von einer Menge M erzeugte freie abelsche Gruppe bezeichnet.

Genauer ist es so, daß für jede $(n{+}1)$-Zelle die Anhefte-Abbildung $\beta\colon S^n \to n$-Skelett ein erzeugendes Element $\iota \in H_n(S^n)$ auf ein Element $\beta_*(\iota)$ in

$$H_n(\mathrm{Sk}_n(X),A) \ \approx\ \mathbb{Z}\,[\{n\text{-Zellen}\}]$$

abbildet. Diese Bilder, für die verschiedenen Anhefte-Abbildungen, erzeugen den Kern der Abbildung $\mathbb{Z}\,[\{n\text{-Zellen}\}] \to H_n(X,A)$. Was wir zu tun haben, ist also, zu zeigen, daß solche Elemente $\beta_*(\iota)$ auch in $\pi_n(X,A)^\ddagger$ schon $=0$ sind.

Wir fassen die Sphäre S^n als das Bild einer surjektiven Abbildung $q\colon D^n \to S^n$ auf (S^n ist der Quotientenraum $D^n/\partial D^n$, und q ist die zugehörige Quotienten-Abbildung); und zwar tun wir das in der Weise, daß die Abbildung $g = \beta\circ q$ den Rand ∂D^n nach A abbildet.

Die Abbildung g unterwerfen wir nun wieder der vorbereitenden Manipulation für eine Anwendung des Homotopie-Additions-Satzes, wie im vorigen Beweis beschrieben. Die nachfolgende Anwendung des Satzes ergibt dann die Gleichheit zweier Terme in $\pi_n(\mathrm{Sk}_n(X),A)^\ddagger$, nämlich

(1) *eine Summe lokaler Terme* , (2) $[g]$ = *Klasse von* g .

Von dem zweiten Term wissen wir, daß er in $\pi_n(X,A)^\ddagger$ trivial wird: das liegt daran, daß die Abbildung β ja gerade verwendet werden soll, um eine $(n{+}1)$-Zelle anzuheften! Von dem ersten Term wissen wir andererseits, daß er das fragliche Element $\beta_*(\iota)$ beschreibt. Mit Dank an den Homotopie-Additions-Satz nehmen wir folglich zur Kenntnis, daß auch dieses Element in $\pi_n(X,A)^\ddagger$ trivial wird. □

Faserbündel

Sei B ein Raum, der *Basisraum* für das folgende. Es ist eine in der Topologie (und auch anderswo) wichtige Idee, ein *Bündel* von Räumen zu betrachten: je einen Raum F_b für jeden Punkt $b \in B$. Die Räume F_b heißen die *Fasern* des Bündels.

Zwar werden verschiedene Fasern keine Punkte gemeinsam haben. Man wird aber naturgemäß i.a. nicht daran interessiert sein, die Gesamtheit der Fasern als sozusagen unabhängig voneinander anzusehen. Der *Totalraum* des Bündels,

$$E \;=\; \bigcup_{b \in B} F_b \ ,$$

wird vielmehr ein Raum sein, der zwar als Menge die disjunkte Vereinigung der Fasern ist, als Raum i.a. aber eben *nicht*.

Zusätzlich wird man auch noch daran interessiert sein, daß die Fasern F_b mit dem Punkt b in einer "vernünftigen" Weise variieren; z.B. in "lokal trivialer Weise", wie das unten erläutert werden wird.

Wir fangen noch einmal von vorne an.

DEFINITION. Sei B ein Raum. Ein *Raum über* B ist ein Paar (E,p) bestehend aus einem Raum E und einer Abbildung von Räumen, $p: E \to B$. Der Unterraum $F_b := p^{-1}(b)$ von E wird als die *Faser von* (E,p) *über* b bezeichnet.

DEFINITION. Ein *Faserbündel über* B ist ein Raum (E,p) über B, der die folgende Bedingung der *lokalen Trivialität* erfüllt: Zu jedem Punkt $b \in B$ gibt es eine Umgebung U, so daß das Urbild $p^{-1}(U)$ isomorph ist zu dem Produktraum $U \times F_b$, und zwar mit einem *Isomorphismus* u *über* B; d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\ u\ } & U \times F_b \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U & = & U \end{array}$$

ist kommutativ (wo pr_1 die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet).

Statt "Faserbündel" ist hier auch die Bezeichnung "lokal triviales Faserbündel" gebräuchlich, um die wichtige Bedingung hervorzuheben. Die Terminologie erklärt sich im übrigen so. Ein Produktraum $B \times F$ zusammen mit der ersten Projektion $\mathrm{pr}_1 : B \times F \to B$ ist ein triviales Beispiel für ein Faserbündel und wird demgemäß auch als *das triviale Faserbündel mit Faser* F *und Basis* B bezeichnet. Die Bedingung oben sagt nun gerade, daß *lokal* jedes Faserbündel von diesem Typ ist. Die obigen Daten (Umgebung U von b und Isomorphismus u) nennt man auch eine *lokale Trivialisierung*.

Die Existenz einer lokalen Trivialisierung bei b impliziert insbesondere, daß alle Fasern in der Nähe von b zu der Faser F_b isomorph sind. Es folgt, daß zu gegebenem b_0 die Menge derjenigen b, wo F_b zu F_{b_0} isomorph ist, eine *offene* Menge bildet. Wenn also B sich nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegen läßt (m.a.W. wenn B *zusammenhängend* ist), so folgt, daß *alle* F_b zueinander isomorph sind.

Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß bei einem Faserbündel *alle* Fasern zueinander isomorph sind. Man ist dann auch berechtigt, von der *typischen Faser*, F, zu reden.

Sei (E, p, B) ein Faserbündel, bei dem alle Fasern zueinander isomorph sind; mit typischer Faser F. Es gibt dann eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B, zusammen mit einer lokalen Trivialisierung über jedem der U_i.

In Analogie zur Beschreibung einer Mannigfaltigkeit durch einen *Atlas* gibt dies Anlaß zur Beschreibung eines Faserbündels durch einen *Bündel-Atlas*.

Darunter versteht man die folgenden Daten: eine (zulässige) Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B; über jedem der U_i das triviale Bündel $U_i \times F$; und für jedes Paar von Indizes, (i, j), eine *Verklebe-Abbildung* durch einen Bündel-Isomorphismus

$$U_i \times F \;\supset\; (U_i \cap U_j) \times F \;\xrightarrow{\;\approx\;}\; (U_i \cap U_j) \times F \;\subset\; U_j \times F \;;$$

wobei man für jedes Tripel (i, j, k) noch eine naheliegende Kompatibilität dieser Bündel-Isomorphismen über dem Durchschnitt $U_i \cap U_j \cap U_k$ verlangt (nämlich von den drei zu den Paaren (i, j), (i, k), (j, k) gehörenden Bündel-Isomorphismen ist einer [in der obigen Auflistung der mittlere] das Kompositum der beiden andern).

Ein *Bündel-Isomorphismus* $(U_i \cap U_j) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$ ist ein *fasern-erhaltender* Isomorphismus, d.h. es wird verlangt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
U_i \cap U_j \times F & \xrightarrow{\;\approx\;} & U_i \cap U_j \times F \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
U_i \cap U_j & \xrightarrow{\;=\;} & U_i \cap U_j
\end{array}$$

kommutativ ist.

Moralisch gesehen, sind die Daten des Bündel-Isomorphismus dazu äquivalent, daß man für jeden Punkt $b \in U_i \cap U_j$ einen Isomorphismus $F \to F$ hat, mit der Kompatibilitätsbedingung, daß die resultierende Abbildung

$$U_i \cap U_j \;\longrightarrow\; \mathrm{Iso}(F, F)$$

stetig ist. Diese Formulierung setzt aber voraus, daß man weiß, daß $\mathrm{Iso}(F, F)$ in vernünftiger Weise ein *Raum* (nicht nur eine Menge) ist. Solche Dinge gehören zu dem Thema “Abbildungs-Räume”, das wir in Kürze diskutieren werden.

Bei der Idee des “Faserbündels” gibt es viele Varianten. Sie kommen u.a. daher, daß man sich vorstellen kann, daß die Faser des Bündels mit zusätzlicher Struktur versehen ist. Wir illustrieren das am Beispiel des $\mathbb{R}^n$.

Bei den Struktur-Abbildungen für die Bündel-Isomorphismen, $U_i \cap U_j \to \mathrm{Iso}(F,F)$, hat man nämlich die Möglichkeit, $\mathrm{Top}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, die topologischen Isomorphismen von $\mathbb{R}^n$ auf sich, durch etwas anderes (kleineres) zu ersetzen, z.B.:

— $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, Diffeomorphismen; das führt auf *differenzierbare* $\mathbb{R}^n$*-Bündel* (n.b.: die Basis B muß dafür *nicht* eine Mannigfaltigkeit sein, geschweige denn eine differenzierbare Mannigfaltigkeit; wenn sie es ist, hat man die Möglichkeit für noch eine weitere Variante);

— $\mathrm{Vekt}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, Vektorraum-Isomorphismen; das führt auf *Vektorbündel*;

— $\mathrm{Eukl}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, Euklidische-Vektorraum-Isomorphismen; das führt auf *euklidische Vektorbündel* (jede der Fasern ist nicht nur ein Vektorraum, sondern hat zusätzlich eine euklidische Struktur (ein positiv definites symmetrisches Skalarprodukt); solche Bündel werden manchmal auch als *orthogonale Bündel* bezeichnet).

Sei (E,p,B) ein Faserbündel. Unter einem *Schnitt* des Bündels versteht man eine Abbildung $s\colon B \to E$ mit der Eigenschaft, daß $p \circ s = \mathrm{Id}_B$. Mit anderen Worten, es ist verlangt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{=} & E \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

kommutiert.

Bei einem trivialen Bündel ist ein Schnitt

$$\begin{array}{ccc} B \times F & \xrightarrow{=} & B \times F \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

äquivalent zu der Angabe einer Abbildung $f : B \to F$. Denn aus dem Schnitt s bekommt man die Abbildung $f = \mathrm{pr}_2 \circ s$, und umgekehrt kann man den Schnitt aus dieser Abbildung offenbar rekonstruieren.

Insofern kann man den Begriff des Schnitts auffassen als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Abbildung.

Beispiele. (1) Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit M ist, nach Definition, ein Schnitt von dem Tangentialbündel $TM \to M$.

(2) Ein *nirgends verschwindendes Vektorfeld* auf M kann ebenfalls beschrieben werden als ein Schnitt von einem Faserbündel (nicht Vektorbündel in diesem Fall); nämlich als ein Schnitt von dem Bündel $TM \setminus M$ über M (“Tangentialbündel minus Nullschnitt”). Ein solcher Schnitt muß nicht existieren; ein Beispiel dafür ist $M = S^2$, die 2-Sphäre.

Die Hopf-Faserung

Es handelt sich dabei um ein Faserbündel mit Basis S^2, Totalraum S^3 und Faser S^1. Es war dieses Faserbündel, das seinerzeit zu der spektakulären Entdeckung geführt hat (durch H. Hopf), daß die höheren Homotopiegruppen von Sphären *nicht* trivial zu sein brauchen. Diese Tatsache sieht man am leichtesten ein über die lange exakte Folge der Homotopiegruppen einer Faserung, die wir in Kürze kennenlernen werden. Wegen dieses allgemeinen Sachverhalts hat man im vorliegenden Fall eine exakte Folge von Homotopiegruppen (die Basispunkte lassen wir in der Notation fort)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}S^2 \longrightarrow \pi_n S^1 \longrightarrow \pi_n S^3 \longrightarrow \pi_n S^2 \longrightarrow \pi_{n-1}S^1 \longrightarrow \cdots \ .$$

Nun wissen wir, daß $\pi_m S^1 = 0$ für $m > 1$. Als Spezialfall bekommen wir für $n \geq 3$ deshalb eine exakte Folge

$$0 \ = \ \pi_n S^1 \longrightarrow \pi_n S^3 \longrightarrow \pi_n S^2 \longrightarrow \pi_{n-1}S^1 \ = \ 0 \ ,$$

mithin einen Isomorphismus $\pi_n S^3 \approx \pi_n S^2$ (wenn $n \geq 3$) und insbesondere deshalb den Isomorphismus

$$\pi_3 S^2 \ \approx \ \pi_3 S^3 \ \approx \ \mathbb{Z} \ .$$

Wegen $\pi_n S^k = 0$ für $n < k$ bekommen wir als Nebenprodukt auch noch eine exakte Folge

$$0 \ = \ \pi_2 S^3 \longrightarrow \pi_2 S^2 \longrightarrow \pi_1 S^1 \longrightarrow \pi_1 S^3 \ = \ 0 \ ,$$

also einen Isomorphismus $\pi_2 S^2 \approx \pi_1 S^1$; was eine neue Art von Berechnung von $\pi_2 S^2$ bedeutet.

Was nun die Hopf-Faserung angeht, so ist es nicht eigentlich die S^2, die die Basis von dem Faserbündel ist. Vielmehr ist es ein dazu isomorpher Raum, $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, der *komplex-projektive Raum* der (komplexen!) Dimension 1.

Es ist auch nicht so, daß die Hopf-Faserung ein Einzelstück wäre. Vielmehr ist sie ein Stück in einer ganzen Serie von Hopf-Faserungen. Wir sind zwar in erster Linie an dem schon beschriebenen speziellen Fall interessiert, doch ist es übersichtlicher, wenn man zumindest einige der Dinge in ihrer allgemeinen Form zur Kenntnis nimmt. Deshalb wollen wir das auch so tun.

Es sei K ein Körper. Wir sind hier interessiert an dem Fall $K = \mathbb{C}$ (Körper der komplexen Zahlen). Auch die entsprechende Diskussion für $K = \mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen) ist von großem Interesse für die Topologie, wenn auch für uns im Moment nicht gar so sehr.

Es bezeichne K^n den *affinen n-dimensionalen Raum über K*, d.h. die Menge der n-Tupel über K. (Dabei wollen wir uns nicht daran stören, daß wir das Wort "Raum" selbst dann benutzen, wenn der Körper K, und damit auch die Menge K^n, nicht mit einer Topologie daherkommen — die Algebraischen Geometer tun das schließlich auch.)

Der *projektive Raum von K^n*, Notation $\mathbb{P}(K^n)$, ist definiert als der *Raum der Geraden in K^n*; wobei eine *Gerade* einen 1-dimensionalen Unter-Vektorraum von dem Vektorraum K^n bezeichnet. Ein 1-dimensionaler Unter-Vektorraum nun ist festgelegt durch die Angabe eines einzigen von 0 verschiedenen Elementes in K^n. Umgekehrt bestimmt der 1-dimensionale Unter-Vektorraum dieses erzeugende Element aber nur bis auf Multiplikation mit einem von 0 verschiedenenen Element von K.

Man kann also $\mathbb{P}(K^n)$, zumindest als Menge, identifizieren mit einer Menge von Äquivalenzklassen in $K^n \setminus 0$ (der ganze Vektorraum ohne den Null-Punkt). Die Äquivalenzrelation ist dabei so, wie oben beschrieben: man darf multiplizieren mit Elementen von K^*, der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente in K. Also

$$\mathbb{P}(K^n) \;=\; (\,K^n \setminus 0\,) \,\big/\, K^* \;.$$

Statt $\mathbb{P}(K^n)$ werden wir auch schreiben $K\mathbf{P}^{n-1}$.

Die alternative Schreibweise hat den folgenden vernünftigen Grund. Im Falle $K = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}^n$ eine reelle Mannigfaltigkeit der reellen Dimension n. Der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ ist, wie die unten folgende Betrachtung zeigen wird, eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension um 1 kleiner ist; also von der reellen Dimension $n{-}1$. Folglich bietet $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1}$ sich als Notation an: der reell-projektive Raum der reellen Dimension $n{-}1$.

Ähnlich auch im Falle $K = \mathbb{C}$. Es ist $\mathbb{C}^n$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexe Dimension um 1 kleiner ist; also gleich $n{-}1$. Deshalb die Notation $\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$.

Definition. Sei G eine (topologische) Gruppe, die auf einem Raum E operiert. Es sei vorausgesetzt, daß die Operation *frei* ist (d.h. für alle $x \in E$ und $g \in G$ kann $x \cdot g = x$ nur dann vorkommen, wenn g das Eins-Element der Gruppe ist). Sei B definiert als der *Raum der Bahnen* (der Quotientenraum, bestehend aus den Äquivalenzklassen, die gegeben sind durch die Operation der Gruppe). Es sei vorausgesetzt, daß die (Quotienten-) Abbildung $p: E \to B$ ein Faserbündel ist (d.h. die lokale-Trivialitäts-Bedingung erfüllt). Dann werden diese Daten (G, Aktion, E, Projektion, B) als ein *G-Prinzipalbündel* bezeichnet.

Satz. *Im Falle $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ definiert die Aktion von K^* auf $K^n \setminus 0$ ein K^*-Prinzipalbündel, mit Totalraum $K^n \setminus 0$ und Basisraum $K\mathbf{P}^{n-1}$.*

Beweis. Daß die Operation *frei* ist, ist klar. Es ist aber nicht ganz selbstverständlich, daß die lokale-Trivialitätsbedingung erfüllt ist. Wir prüfen sie nach durch explizites Hinschauen.

Dazu sei für $1 \leq i \leq n$ der Unterraum X_i in $K^n \setminus 0$ (dem Raum der n-Tupel mit dem weggelassenen Null-Tupel) definiert durch die Bedingung, daß an der i-ten Stelle des Tupels *nicht* die 0 steht. Es ist dann $K^n \setminus 0 = \bigcup_i X_i$.

Sei Y_i das Bild von X_i in B ($= K\mathbf{P}^{n-1}$). Wenn ein Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ in X_i liegt, dann ist "Division durch x_i" eine erlaubte Operation. Also kann man zu dem (bezüglich der Aktion äquivalenten) Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ übergehen, wo

$$y_k \ := \ \frac{x_k}{x_i} \quad , \quad \text{für } 1 \leq k \leq n \ .$$

Das resultierende Tupel hat an der i-ten Stelle eine 1. Die restlichen Stellen sind andererseits *eindeutig bestimmt* durch die Äquivalenzklasse von $(x_1, \ldots, x_n)$ (denn die Brüche $\frac{x_k}{x_i}$ "sehen" die Aktion von K^* nicht mehr). Man bekommt also eine Bijektion

$$\phi_i : \ Y_i \ \xrightarrow{\ \approx\ } \ K^{n-1} \ .$$

Die Bijektionen ϕ_i insgesamt, also für $1 \leq i \leq n$, ergeben einen *Atlas* für eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (reell, bzw. komplex, je nachdem ob K gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$ ist). Das erfordert eine (leichte) Nachprüfung, die wir hier weglassen.

Schließlich, wenn wir das unterdrückte x_i auch noch erinnern, das heißt mit der Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_n) \ \longmapsto \ \big(\ (y_1, \ldots, y_n) \ , \ x_i \ \big) \ ,$$

bekommen wir einen Diffeomorphismus von dem Urbild von Y_i, das heißt, von X_i, zu dem Produktraum $Y_i \times K^*$. $\square$

Sei weiterhin $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Es bezeichne $\mathbb{S}(K^n)$ die Einheits-Sphäre in K^n. Im reellen Fall ist das die Sphäre S^{n-1}. Im komplexen Fall ist es auch eine Sphäre, und zwar von der Dimension $2n{-}1$. Denn sei $z = a + b\,\mathrm{i}$ die Darstellung einer komplexen Zahl durch ihren Realteil und ihren Imaginärteil. Es ist

$$z \cdot \overline{z} \ = \ (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (a - b\,\mathrm{i}) \ = \ a^2 + b^2 \ .$$

Wenn wir also die Einheits-Sphäre

$$\mathbb{S}(\mathbb{C}^n) \ = \ \Big\{ \ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ \Big| \ ||z||^2 \underset{(\mathrm{def})}{=} z_1 \cdot \overline{z}_1 + \cdots + z_n \cdot \overline{z}_n \ = \ 1 \ \Big\}$$

in dem unterliegenden $\mathbb{R}^{2n}$ des $\mathbb{C}^n$ anschauen, so bekommen wir die Beschreibung

$$\mathbb{S}(\mathbb{C}^n) \ = \ \Big\{ \ (\,(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\,) \in \mathbb{R}^{2n} \ \Big| \ {a_1}^2 + {b_1}^2 + \cdots + {a_n}^2 + {b_n}^2 \ = \ 1 \ \Big\} \ ,$$

d.h., es handelt sich um die ganz normale Sphäre S^{2n-1}.

Bezeichne $\mathbf{G}(K)$ die Untergruppe von K^*, die aus den Zahlen vom Betrag 1 besteht; im reellen Fall also die Gruppe $\{\pm 1\}$, und im komplexen Fall die Gruppe

$$S^1 \ = \ \Big\{ \ s \in \mathbb{C} \ \Big| \ |s|^2 = s \cdot \overline{s} = 1 \ \Big\} \ .$$

Die Operation von K^* auf $K^n \setminus 0$ induziert eine Operation von $\mathbf{G}(K)$ auf $\mathbb{S}(K^n)$. Das ist klar im reellen Fall. Im komplexen Fall ist es eigentlich auch klar. Denn wenn $|s| = 1$, dann ist

$$||s\,z||^2 \ = \ s\,z_1\,\overline{s\,z_1} + \cdots + s\,z_n\,\overline{s\,z_n} \ = \ (s\,\overline{s})(z_1\,\overline{z}_1) + \cdots + (s\,\overline{s})(z_n\,\overline{z}_n) \ = \ ||z||^2 \ .$$

Satz. *Die Aktion von* $\mathbf{G}(K)$ *auf* $\mathbb{S}(K^n)$ *definiert ein* $\mathbf{G}(K)$*-Prinzipalbündel, mit Totalraum* $\mathbb{S}(K^n)$ *und Basisraum* $K\mathbf{P}^{n-1}$.

Beweis. Mit den Notationen des vorigen Beweises ist es richtig, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}(K^n) \cap X_i & \longrightarrow & Y_i \times \mathbf{G}(K) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \big(\, (y_1, \ldots, y_n) \, , \, \dfrac{x_i}{|x_i|} \, \big) \, , \end{array}$$

eine Äquivalenz ist. Die Umkehr-Abbildung ist dadurch gegeben, daß man zunächst das Tupel $({x_1}', \ldots, {x_n}')$ definiert durch ${x_k}' = y_k \cdot s \quad (= y_k \cdot \frac{x_i}{|x_i|}\,)$ und dieses Tupel in einem zweiten Schritt dann auf Länge 1 normiert.

Daß die zusammengesetzte Abbildung links die Identität ergibt, liegt daran, daß der Vektor $({x_1}', \ldots, {x_n}')$ sich von dem ursprünglichen Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ nur unterscheidet durch die Multiplikation mit einem positiven Skalaren (nämlich $\frac{1}{|x_i|}$); wenn man ihn auf Länge 1 normiert, so wird er folglich gleich $(x_1, \ldots, x_n)$.

Daß man andererseits für die zusammengesetzte Abbildung rechts die Identität bekommt, liegt daran, daß die Bildung der Brüche die vorher stattgefundene Multiplikation mit einem Skalar wieder absorbiert. □

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall $K = \mathbb{C}$ und $n = 2$. In dem Fall ist

$$\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \;\approx\; S^2 \, ,$$

die 2-Sphäre. Denn seien, wie vorher auch, X_1 und X_2 die Unterräume von $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, die definiert sind durch

$$X_1 \;=\; \big\{ \, (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \;\big|\; x_1 \neq 0 \, \big\} \;\; , \quad X_2 \;=\; \big\{ \, (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \;\big|\; x_2 \neq 0 \, \big\} \; .$$

Ihre Bilder Y_1 und Y_2 in $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ sind isomorph zu $\mathbb{C}$; Isomorphismen sind

$$\begin{array}{ccl} Y_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x_1, x_2] & \longmapsto & (1, y_2) \;=\; (\frac{x_1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}) \;\; , \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} Y_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x_1, x_2] & \longmapsto & (y_1, 1) \;=\; (\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_2}) \; . \end{array}$$

Auf dem Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ ist

$$y_2 \quad (= \tfrac{x_2}{x_1}\,) \;=\; {y_1}^{-1} \; .$$

Das heißt, es werden hier zwei Exemplare $\mathbb{C}$ zusammengeklebt, und die Verklebung erfolgt entlang $\mathbb{C} \setminus 0$, der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ minus dem Nullpunkt. Dabei ist die Verklebe-Abbildung gegeben durch den Übergang zum Inversen.

Was wir sehen, ist also die 2-Sphäre, zusammengeklebt aus

$$(S^2 \text{ minus Norpol}) \quad \text{und} \quad (S^2 \text{ minus Südpol}) \; ;$$

wobei die Verklebung eben erfolgt entlang dem Gebiet zwischen den Polen.

Homotopie-Liftungs-Eigenschaft, Faserungen

Beim Studium der *Überlagerungen* waren wir seinerzeit dazu geführt worden, eine etwas technisch aussehende Eigenschaft systematisch zu betrachten. Es handelte sich um die *Wege-Liftungs-Eigenschaft*. Das Vorliegen dieser Eigenschaft war, wie sich später herausstellte, die Grundlage für die wesentlichen Ergebnisse zu den Überlagerungen.

Überlagerungen kann man als einen speziellen Fall von Faserbündeln auffassen. Es sind nämlich gerade diejenigen Faserbündel, wo die Fasern *diskrete Räume* (d.h. mit der diskreten Topologie versehen) sind.

Insofern ist es plausibel, daß auch bei den Faserbündeln die Wege-Liftungs-Eigenschaft eine Rolle spielen wird; oder vielmehr eine Verallgemeinerung von ihr: die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft*.

Die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft gibt es in etlichen Varianten; von denen werden wir einige anschauen. Wir werden dann zur Kenntnis nehmen, daß Faserbündel die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft haben; und daß, als Folgerung davon, die *lange exakte Folge der Homotopiegruppen* existiert.

Später werden wir zur Kenntnis nehmen, daß es Dinge gibt, die nicht Faserbündel sind (oder zumindest nicht ganz), wo aber trotzdem die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft erfüllt ist (und wo folglich auch eine lange exakte Folge der Homotopiegruppen existiert). Es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, solche Dinge sozusagen ehrenhalber auch noch als "Faserungen" anzusehen. Mit anderen Worten, es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, den allgemeinen Faserungs-Begriff auf die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft zu gründen.

Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung von Räumen. Die Test-Situation für die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft besteht in der Angabe eines Raumes X und eines kommutativen (Test-) Diagramms

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\ f\ } & E \\ {\scriptstyle \text{Inkl}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{\ \Psi\ } & B \end{array}$$

Gegeben sind, mit anderen Worten, eine Abbildung $f : X \to E$ und eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung $p \circ f$; also eine Abbildung $\Psi\colon X \times [0,1] \to B$ mit $\Psi \,|\, (X \times 0) \;=\; p \circ f$.

Die HLE für die Abbildung $p\colon E \to B$ (und für den Testraum X) fordert, daß in dieser Situation eine Abbildung von links unten nach rechts oben in dem Diagramm existiert, $\Phi\colon X \times [0,1] \to E$, so daß auch das ergänzte Diagramm noch kommutativ ist.

Mit anderen Worten, gefordert ist die Existenz einer Homotopie Φ, die erstens eine Homotopie von f ist, und die zweitens eine Homotopie über Ψ ist oder, wie man auch sagt, die die Homotopie Ψ *liftet*; mit anderen Worten, gefordert ist die Existenz einer Abbildung $\Phi\colon X \times [0,1] \to E$ mit $\Phi \,|\, (X \times 0) = f$ und $\Psi = p \circ \Phi$.

Eine Variante der Test-Situation fragt nach einer *relativen* Version hiervon insofern als in dem Testraum X noch ein Unterraum A spezifiziert ist, und auf dem ist eine Liftung der Homotopie schon vorgegeben. Das Test-Diagramm ist also

$$\begin{array}{ccc} X\times\{0\} \cup A\times[0,1] & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \mathrm{Inkl}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

und gefordert ist wieder eine Ergänzung des Diagramms (eine Abbildung von unten links nach oben rechts, so daß das Diagramm kommutativ bleibt).

Definition. Die Abbildung $p : E \to B$ hat die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* (abgekürzt HLE), wenn die obige Homotopie-Liftungs-Bedingung für alle Räume X (und für alle Test-Diagramme) erfüllt ist.

Definition. Die Abbildung $p\colon E \to B$ hat die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder* (abgekürzt HLEP), wenn die Bedingung zumindest für jeden solchen Raum X erfüllt ist, der ein Polyeder (endlicher Simplizialkomplex) ist.

Definition. Die Abbildung $p : E \to B$ heißt eine *Hurewicz-Faserung*, wenn sie die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft hat. Sie heißt eine *Serre-Faserung*, wenn sie die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder hat.

Wir werden uns hier mit der Behandlung der Homotopie-Liftungs-Eigenschaft *für Polyeder* begnügen. Es gibt nicht viel wesentliches, was uns auf die Weise entgeht, und es ist mit weniger an technischen Komplikationen verbunden. Die Hauptanwendung ist folgender Satz:

Satz. *Sei $p\colon E \to B$ eine Serre-Faserung. Sei $b \in B$ und sei $x \in F = p^{-1}(b)$. Es gibt eine lange exakte Folge von Homotopiegruppen:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B,b) \longrightarrow \pi_n(F,x) \longrightarrow \pi_n(E,x) \longrightarrow \pi_n(B,b) \longrightarrow \pi_{n-1}(F,x) \longrightarrow \cdots$$

Beweis. Aufgrund des nachfolgenden Lemmas gibt, für $n \geq 1$, die Projektion p einen Isomorphismus

$$\pi_n(E,F;x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,\{b\};x) \approx \pi_n(B,x) .$$

Mit Hilfe dieses Isomorphismus läßt sich die lange exakte Folge des Paares (E,F),

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(E,F;x) \longrightarrow \pi_n(F,x) \longrightarrow \pi_n(E,x) \longrightarrow \pi_n(E,F;x) \longrightarrow \pi_{n-1}(F,x) \longrightarrow ,$$

in die von dem Satz behauptete Form umschreiben. □

Lemma. *Sei* $p\colon E \to B$ *eine Serre-Faserung. Sei* $Y \subset B$ *ein Unterraum* (z.B. $Y = \{b\}$). *Sei* $x \in p^{-1}(Y)$. *Die Projektion* p *induziert einen Isomorphismus* (für $n \geq 1$)

$$p_* : \ \pi_n(E, p^{-1}(Y); x) \xrightarrow{\ \approx\ } \pi_n(B, Y; p(x)) \ .$$

Beweis. Wir zeigen, daß die Abbildung p_* erstens surjektiv und zweitens injektiv ist.
— *Surjektivität.* Sei $[\beta] \in \pi_n(B, Y; p(x))$, sei $\beta : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (B, Y, p(x))$ davon ein Repräsentant. Per Umschreiben können wir β alternativ auch auffassen als eine Abbildung des n-Würfels $[0,1]^n$. Der Basispunkt s_0 sei in $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ enthalten. Indem wir notfalls β durch eine homotope Abbildung ersetzen (HEE der Inklusionen $[0,1]^{n-1} \times \{0\} \subset \partial\,[0,1]^n$ und $\partial\,[0,1]^n \subset [0,1]^n$) können wir annehmen, daß β eingeschränkt auf $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ die triviale Abbildung in den Basispunkt $p(x)$ ist. Diese triviale Abbildung läßt sich liften zur trivialen Abbildung von $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ in den Basispunkt x von E. Jetzt kommt der Trick: Nichts hindert uns daran, die Abbildung β als eine Homotopie aufzufassen; nämlich eine Homotopie, die bei der trivialen Abbildung von $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ startet. Diese triviale Abbildung haben wir schon geliftet. Aufgrund der ausdrücklich vorausgesetzten HLEP können wir deshalb auch die "Homotopie", d.h. die Abbildung β selbst liften. Die Liftung hat nun automatisch die Eigenschaften, die von einem Repräsentanten eines Elements von $\pi_n(E, p^{-1}(Y); x)$ verlangt werden.
— *Injektivität.* Das geht ganz ähnlich und nur ein klein wenig komplizierter. Seien $\alpha_1 : (D^n, \partial D^n, s_o) \to (E, p^{-1}(Y), x)$ und $\alpha_2 : (D^n, \partial D^n, s_o) \to (E, p^{-1}(Y), x)$ Repräsentanten von zwei Elementen von $\pi_n(E, p^{-1}(Y); x)$. Daß die beiden Elemente durch die Abbildung p_* abgebildet werden auf ein- und dasselbe Element von $\pi_n(E, Y; p(x))$, heißt, daß eine Homotopie von $p \circ \alpha_1$ zu $p \circ \alpha_2$ existiert, die gewisse Eigenschaften hat: es ist eine Homotopie von Paaren von Abbildungen, und die Homotopie ist am Basispunkt konstant. Wir ersetzen wieder D^n durch $[0,1]^n$ und schreiben die Homotopie um als eine Abbildung

$$[1,2] \times [0,1]^n \ \approx \ [1,2] \times [0,1]^{n-1} \times [0,1] \ \longrightarrow \ B \ .$$

Wir nehmen wieder an, daß der Basispunkt enthalten ist in $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$. Wie oben können wir annehmen, daß α_1 und α_2 beide die Eigenschaft haben, daß ihre Einschränkung auf $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ die triviale Abbildung in den Basispunkt x von E ist. Zusätzlich können wir auch annehmen, daß jede der Abbildungen $p \circ \alpha_t$, $t \in [1,2]$, die analoge Eigenschaft hat, daß $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ in den Basispunkt $p(x)$ von B abgebildet wird (denn das können wir erreichen durch eine Änderung der Homotopie mittels einer Deformationsretraktion von $[1,2] \times [0,1]^{n-1} \times \{0\}$ in den Unterraum

$$\{1\} \times [0,1]^{n-1} \times \{0\} \ \cup \ [1,2] \times \{s_0\} \ \cup \ \{2\} \times [0,1]^{n-1} \times \{0\}$$

und anschließendes Zitieren der HEE). Es kommt jetzt derselbe Trick wie oben auch: Die Homotopie wird um-interpretiert als eine Homotopie, die bei der trivialen Abbildung

$$[1,2] \times [0,1]^{n-1} \times \{0\} \ \longrightarrow \ \{p(x)\}$$

startet. Diese triviale Abbildung wird geliftet zur trivialen Abbildung in den Basispunkt x, und zum Schluß wird die HLEP zitiert. Dabei verwenden wir eine geeignete *relative* Version (entweder Nr. 3 oder Nr. 5 in dem nachfolgenden Satz). Die erhaltene Liftung gibt eine Homotopie zwischen α_1 und α_2; es ist also $[\alpha_1] = [\alpha_2]$. $\square$

Bevor wir die HLEP für Faserbündel nachweisen, geben wir eine Auflistung einiger äquivalenter Eigenschaften. Die Nützlichkeit davon ergibt sich z.B. daraus, daß eine der Alternativen schon in dem vorstehenden Beweis benutzt wurde.

Satz. *Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung. Es sind äquivalent*:

(1) HLEP

(2) HLE für den Testraum D^n (für alle n)

(3) HLE für D^n, relativ zu dem Unterraum ∂D^n

(4) HLE für CW-Komplex, relativ Unterkomplex

(5) HLE für Polyeder, relativ Unterpolyeder.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). D^n ist topologisch äquivalent zu einem Polyeder.

(2) $\Rightarrow$ (3). Gefragt ist nach dem Ergänzungspfeil $D^n \times [0,1] \to E$ in dem linken bzw. rechten Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0,1] & \longrightarrow & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} D^n\times\{0\} \cup \partial D^n\times[0,1] & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0,1] & \longrightarrow & B \end{array}$$

Diese beiden Aufgaben sind zueinander äquivalent. Denn es gibt eine topologische Äquivalenz von $D^n \times [0,1]$ auf sich, mit

$$D^n\times\{0\} \,\cup\, \partial D^n\times [0,1] \xrightarrow{\approx} D^n \times \{0\} \ .$$

Folglich kann man eine Aufgabe vom Typ “links” übersetzen in eine solche vom Typ “rechts”, und umgekehrt.

(3) $\Rightarrow$ (4). Wenn X aus X' durch das Anheften einer Zelle entsteht, $X = X' \cup_{\partial D^n} D^n$, so ergibt sich die HLE für X relativ zu X' aus derjenigen für D^n relativ zu ∂D^n durch “Zusammenkleben”: Man benutzt die Abbildung $D^n \to X$ (die charakteristische Abbildung der neuen Zelle) um aus der vorgegebenen Aufgabe (das rechte Teildiagramm unten) eine neue Aufgabe zu schaffen (das Diagramm, das durch das große Rechteck gegeben ist),

$$\begin{array}{ccccc} D^n\times\{0\} \cup \partial D^n\times[0,1] & \longrightarrow & X\times\{0\} \cup X'\times[0,1] & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0,1] & \longrightarrow & X \times [0,1] & \longrightarrow & B \end{array}$$

Diese Aufgabe ist lösbar, wegen (3). Die resultierende Abbildung $D^n \times [0,1] \to E$ ergibt sofort die gesuchte Abbildung $X \times [0,1] \to E$, da das linke Quadrat ein Verklebe-Diagramm ist,

$$X\times\{0\} \cup X' \times [0,1] \ \cup_{D^n\times\{0\}\,\cup\,\partial D^n\times[0,1]} \ D^n \times [0,1] \xrightarrow{\approx} X \times [0,1] \ .$$

Wenn nun X aus X' nicht durch das Anheften von einer einzigen n-Zelle entsteht, sondern durch das Anheften von mehreren, so geht es genauso. Folglich können wir endlich-dimensionale CW-Komplexe induktiv behandeln: den Induktions-Schritt haben wir gerade gemacht. — Der Rest ist eine uns vertraute Formalie (wegen der Tatsache, daß eine Abbildung von CW-Komplexen schon dann stetig ist, wenn die Einschränkungen auf die Skelette es sind).

(4) $\Rightarrow$ (5). Simplizialkomplexe sind (spezielle) CW-Komplexe.

(5) $\Rightarrow$ (1). HLEP ist der Spezialfall von (5), wo das Unterpolyeder leer ist. $\square$

Der nun folgende Satz verallgemeinert den *Wege-Liftungs-Satz* der Überlagerungs-Theorie, und zwar ist dies eine Verallgemeinerung in mehrfacher Hinsicht: Faserbündel sind allgemeiner als Überlagerungen; und es werden nicht nur Wege geliftet, sondern auch allgemeinere Homotopien.

Satz. *Sei $p\colon E \to B$ ein Faserbündel. Die Abbildung $p\colon E \to B$ hat die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Satz genügt es, die HLE für den n-Ball D^n zu zeigen (für jedes n) oder, was auf dasselbe hinausläuft, für den Würfel $[0,1]^n$. Sei also ein Test-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1]^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ [0,1]^n \times [0,1] & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

gegeben. Wenn das Faserbündel ein *triviales Bündel* wäre (was es im allgemeinen natürlich nicht sein wird), so wäre unsere Aufgabe vermutlich besonders einfach. Wir versuchen deshalb so gut als möglich, uns auf diesen Fall zurückzuziehen. Die Idee ist, die Existenz von *lokalen Trivialisierungen* zu verwenden und aus dieser Existenz dann Nutzen zu ziehen mit Hilfe des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes.

Nach Definition der Faserbündel gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von dem Basisraum B durch *Elementar-Umgebungen*; das heißt, daß über jeder der Mengen U_i eine lokale Trivialisierung des Faserbündels $p\colon E \to B$ existiert.

Wir ziehen die Überdeckung auf den $(n{+}1)$-Würfel $[0,1]^n \times [0,1]$ zurück. Das heißt, wir betrachten die Überdeckung $\{\,\Psi^{-1}(U_i)\,\}_{i\in I}$ von dem Würfel $[0,1]^n \times [0,1]$.

Der Lebesgue'sche Überdeckungs-Satz sagt, daß $[0,1]^n \times [0,1]$ so in Teilwürfel gleicher Größe unterteilt werden kann, daß jeder der Teilwürfel ganz enthalten ist in einer der Mengen $\{\,\Psi^{-1}(U_i)\,\}_{i\in I}$; oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Teilwürfel wird durch die Abbildung Ψ ganz in eine der Elementar-Umgebungen U_i abgebildet.

Die Teilwürfel denken wir uns nun geschrieben als Produkte $W \times [a,b]$, nämlich

$$\text{Teilwürfel von } [0,1]^n \quad \times \quad \text{Teilintervall von } [0,1] \ .$$

Wie üblich, so empfiehlt es sich auch hier, klein anzufangen. Das heißt, bei den Teilwürfeln von $[0,1]^n$ beginnen wir nicht unbedingt gleich mit den n-dimensionalen. Vielmehr werden wir vorher vielleicht noch solche von kleinerer Dimension behandeln wollen.

Die richtige Reihenfolge ist diese. Wenn wir das Produkt $W \times [a,b]$ behandeln wollen, so setzen wir voraus, daß vorher schon behandelt sind:

(i) alle die $W' \times [a',b']$, wo $a' < a$ (ganz gleich, von welcher Dimension W' ist) und

(ii) alle die $W'' \times [a'',b'']$, wo $a'' = a$, und wo W'' kleinere Dimension als W hat.

Offenbar ist es möglich, die Teilwürfel in dieser Weise anzuordnen.

Kommen wir nun zur Behandlung des Teilwürfels $W \times [a,b]$! Gemäß der gerade beschriebenen Vorgehensweise ist die gesuchte Abbildung Φ von $W \times [a,b]$ zu E auf einem Teil von $W \times [a,b]$ schon definiert; nämlich auf dem Teil

$$W \times \{a\} \ \cup \ \partial W \times [a,b] \ ,$$

da dieser sich zusammensetzt aus vorher schon behandelten Teilwürfeln.

Nach Herleitung gibt es eine Menge U_i aus der Überdeckung, die die Eigenschaft hat, daß $\Psi(W \times [a,b]) \subset U_i$; sei eine solche Menge ausgewählt. U_i ist eine Elementar-Umgebung: das Bündel ist darüber trivialisierbar; sei eine lokale Trivialisierung ausgewählt,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\ \approx\ } & U_i \times F_x \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U_i & \xrightarrow{\ =\ } & U_i \end{array}$$

(wo F_x die Faser über einem Punkt $x \in U_i$ bezeichnet). Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} W \times \{a\} \cup \partial W \times [a,b] & \xrightarrow{\ f\ } & p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\ \approx\ } & U_i \times F_x \\ {\scriptstyle \mathrm{Inkl}}\big\downarrow & & {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ W \times [a,b] & \xrightarrow{\ \Psi\ } & U_i & \xrightarrow{\ =\ } & U_i \end{array}$$

gibt uns nun eine Übersetzung der gesuchten Abbildung Φ von $W \times [a,b]$ zu $p^{-1}(U_i)$ in eine Abbildung Φ' von $W \times [a,b]$ zu $U_i \times F_x$.

Die Komposition $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi'$ ist eine vorgegebene Abbildung, nämlich Ψ (wegen der Bedingung, daß Φ eine Liftung von Ψ sein soll). Also kann nur über die andere Komponente,

$$\varphi : \ W \times [a,b] \ \longrightarrow \ F_x \quad , \qquad \varphi \ = \ \mathrm{pr}_2 \circ \Phi' \ ,$$

noch verfügt werden. Diese Komponente steht andererseits zur freien Verfügung soweit die eine (schon diskutierte) Bedingung betroffen ist: die Kommutativität des unteren

Dreiecks in dem zu vervollständigenden Diagramm. Das obere Dreieck in diesem Diagramm andererseits gibt eine weitere Bedingung. Nämlich die Einschränkung von φ soll durch die Abbildung f gegeben sein (genauer: durch f, gefolgt von dem Isomorphismus und von der nachfolgenden Projektion pr_2). Diese Bedingung wird aber automatisch erfüllt sein, wenn wir nun φ *definieren* als die zusammengesetzte Abbildung

$$W \times [a,b] \xrightarrow{r} W \times \{a\} \cup \partial W \times [a,b] \xrightarrow{f} p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\approx} U_i \times F_x \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F_x$$

wo $r: W \times [a,b] \to W \times \{a\} \cup \partial W \times [a,b]$ eine *Retraktion* sein soll — wir wissen, daß eine solche existiert.

Die induktive Behandlung der Teilwürfel ist damit abgeschlossen. □

Beispiel (HLEP, aber nicht Faserbündel). Sei $E = \nabla^2$, das 2-Simplex, und $B = \nabla^1$, das 1-Simplex. Sei $p: E \to B$ definiert als eine "Ausartungs-Abbildung": eine surjektive, affine und ecken-erhaltende Abbildung. Das Urbild der einen Ecke von ∇^1 ist dann ein einziger Punkt, während jeder andere Punkt von ∇^1 als Urbild ein Intervall hat. Die Abbildung $p: E \to B$ ist also sicherlich *kein* Faserbündel. Es ist andererseits aber richtig, daß diese spezielle Abbildung $p: E \to B$ die HLEP hat; der Beweis ist nicht-trivial und soll hier nicht erbracht werden. □

In dem Beispiel ist es so, daß zwei Fasern der Abbildung $p: E \to B$ immer denselben Homotopietyp haben, wenn sie auch nicht isomorph zueinander sein müssen. Der folgende Satz sagt, daß das kein Zufall ist.

Satz. *Sei $p: E \to B$ eine Abbildung. Der Raum B sei weg-zusammenhängend.*

(1) *Wenn p Hurewicz-Faserung ist* (d.h. wenn p die HLE hat), *dann sind je zwei Fasern von p zueinander homotopieäquivalent.*

(2) *Wenn p Serre-Faserung ist* (d.h. wenn p die HLEP hat), *dann sind zumindest je zwei solche Fasern zueinander homotopieäquivalent, deren jede* (nach Voraussetzung) *den Homotopietyp von einem CW-Komplex hat.*

Beweis (Skizze). Seien b_1 und b_2 zwei Punkte in B. Seien F_1 und F_2 die Fasern darüber, $F_i = p^{-1}(b_i)$. Ein Weg w von b_1 zu b_2 kann interpretiert werden als eine Homotopie, die bei der (trivialen) Abbildung $F_1 \to \{b_1\} \subset B$ startet. Die Inklusion $F_1 \to E$ gibt eine Liftung der Start-Abbildung; Zitieren der HLE gibt dann eine Liftung der Homotopie selber. Die Schluß-Abbildung in der Homotopie ist eine Abbildung $f_1: F_1 \to F_2$. Man zeigt, f_1 ist Homotopieäquivalenz, mit homotopie-inverser gegeben durch die analoge Abbildung $f_2: F_2 \to F_1$. Die Komposition $f_2 \circ f_1$ ist nämlich Liftung der Homotopie der trivialen Abbildung, die durch den zusammengesetzten Weg, erst w, dann $\overline{w}$ (der inverse Weg), gegeben ist. Der Trick ist nun, den Weg $w\,\overline{w}$ auf seinen Anfangs- und Endpunkt zusammenzuziehen. Eine Liftung der daraus resultierenden Homotopie ergibt, als ihren Endzustand (nach kürzerem Hinsehen) eine Homotopie von $f_2 \circ f_1$ zur identischen Abbildung auf F_1. — Für den Teil (2) steht die HLE nicht zur Verfügung. Man benötigt CW-Approximationen $F_i{}' \xrightarrow{\simeq} F_i$ um zumindest die HLEP zitieren zu können. □

Induzierte Faserungen

Es ist eine wichtige Tatsache, daß man eine "Faserung" (der einen oder andern Art) entlang einer Abbildung "transportieren" kann — aber Vorsicht: solcher Transport geht nur in einer Richtung, nämlich *rückwärts*; dementsprechend spricht man auch vom *Zurückziehen* einer Faserung $p\colon E \to B$ entlang einer Abbildung $\beta\colon B' \to B$.

Es ist plausibel, was man zu machen hat. Man will ja erklären, was (für die neue Faserung) die Faser indiziert durch einen Punkt $b' \in B'$ sein soll. Nun hat aber b' den Bildpunkt $b = \beta(b')$, und dieser Bildpunkt indiziert ja schon seine Faser $F_b = p^{-1}(b)$. Insofern sieht es wie ein vernünftiger Entschluß aus, daß auch b' nun diese selbe Faser F_b indizieren soll,

$$(p')^{-1}(b') \ := \ p^{-1}(\beta(b')) \ .$$

Man muß schließlich noch sagen, wie die Gesamtheit der Fasern für die neue Faserung "zusammengebaut" ist; das heißt, wie diese Gesamtheit mit einer topologischen Struktur versehen sein soll. Auch dafür gibt es eine Lösung, die einerseits die "richtige" ist und andererseits von frappierender Einfachheit. Man definiert nämlich den Totalraum für die neue Faserung als das sogenannte *Faserprodukt* (es wird oft, und nicht nur in der englischen Literatur, auch als der *Pullback* bezeichnet),

$$E' \ = \ B' \times_B E \ := \ \left\{ \ (b', e) \ \in \ B' \times E \ \middle| \ \beta(b') \ = \ p(e) \ \right\} \ .$$

Dabei ist die neue Faserprojektion definiert als diejenige Abbildung, die von der ersten Projektion, $(b', e) \mapsto b'$, induziert ist. Das resultierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} B' \times_B E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

wird auch als ein *Pullback-Diagramm* bezeichnet.

Beispiel. Sei A ein Unterraum von B, mit Inklusions-Abbildung β. Die Definition

$$A \times_B E \ = \ \left\{ \ (a, e) \ \in \ A \times E \ \middle| \ \beta(a) \ = \ p(e) \ \right\}$$

läuft in dem Fall darauf hinaus, daß $A \times_B E$ der Unterraum $p^{-1}(A)$ ist (jedenfalls bis auf kanonische Isomorphie). Die Angabe der Komponente a in dem Paar (a, e) in $A \times_B E$ ist schlicht überflüssig; denn a ist eindeutig dadurch bestimmt, daß sein Bild unter der Inklusion dasselbe sein soll wie der Bildpunkt $p(e)$. Pullback entlang einer Inklusion ist also dasselbe wie die Einschränkung auf den betreffenden Unterraum.

Satz. *Wenn $p\colon E \to B$ ein Faserbündel ist, dann auch $p'\colon E' \to B'$.*

Beweis. Nach Definition eines Faserbündels gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B derart, daß über jedem der U_i eine lokale Trivialisierung existiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times F_i \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_i \arrow[r, equal] & U_i \end{tikzcd}$$

Wir betrachten die zurückgezogene Überdeckung $\{\,\beta^{-1}(U_i)\,\}_{i\in I}$ von B'. Es wird nun genügen, zu zeigen, daß über jeder der offenen Mengen $\beta^{-1}(U_i)$ eine lokale Trivialisierung für die "zurückgezogene Faserung" $p'\colon E' \to B'$ existiert. Das folgt aber sofort aus der Tatsache, daß der Pullback eines trivialen Bündels wieder ein triviales Bündel ist: Sei $\mathrm{pr}_1\colon U \times F \to U$ triviales Bündel, sei $\beta\colon V \to U$ eine Abbildung. Der Pullback $V \times_U (U \times F)$ ist

$$\Big\{ \ (v\,,\,(u,f)\,) \in V \times (U \times F) \ \Big| \ \beta(v) = u \ \Big\}$$

was offenbar dasselbe ist wie $V \times F$ (bis auf kanonische Isomorphie). □

Satz. *Wenn $p\colon E \to B$ Hurewicz-Faserung ist, dann auch $p'\colon E' \to B'$; ähnlich mit Serre-Faserungen.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: wenn $p\colon E \to B$ die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für einen Raum X hat, dann hat $p'\colon E' \to B'$ sie auch. Es sei ein Liftungs-Problem gegeben; der linke Teil in dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Inkl}"'] & B' \times_B E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"'] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & B' \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

Nach Hypothese existiert eine Liftung in dem großen Diagramm, eine Abbildung G von $X \times [0,1]$ zu E. Man bekommt eine Abbildung

$$X \times [0,1] \ \longrightarrow \ B' \times_B E$$

als diejenige Abbildung $X \times [0,1] \ \longrightarrow \ B' \times E$, deren Komponenten die Abbildungen H und G sind: wegen der Gültigkeit von

$$\beta \circ H \ = \ p \circ G$$

landet diese Abbildung in dem Unterraum $B' \times_B E$ von $B' \times E$; und sie erfüllt auch die Bedingung, daß die beiden resultierenden Dreiecke kommutativ sind. □

Bemerkung. Der vorangegangene Beweis besteht aus nichts anderem als dem Hinweis darauf, daß die "Pullback" Konstruktion eine gewisse "universelle Eigenschaft" hat (der Pullback ist der *Inverse Limes* von einem bestimmten Diagramm).

Abbildungs-Räume

X und Z seien Mengen. Die *Menge der Abbildungen von X zu Z* soll mit

$$Z^X$$

bezeichnet werden. Es gilt das *Exponentialgesetz für Abbildungen*: wenn Y eine weitere Menge ist, so ist

$$Z^{X\times Y} \;\approx\; (Z^X)^Y \ .$$

Dies ein *natürlicher Isomorphismus*; er ist dadurch gegeben, daß man eine Funktion von zwei Variablen,

$$f : X \times Y \longrightarrow Z \ , \quad (x,y) \longmapsto f(x,y) \ ,$$

auch interpretieren kann als eine parametrisierte Familie von Funktionen von einer Variablen,

$$Y \longrightarrow Z^X \ , \ \ y \mapsto f_y \ ;$$

dabei bezeichnet f_y die partielle Funktion

$$f_y : X \to Z \ , \ \ f_y(x) = f(x,y) \ .$$

Wir sind daran interessiert, ähnliche Um-Schreibe-Tricks zur Verfügung zu haben in einer Situation, wo die beteiligten X, Y, Z nicht nur Mengen sind, sondern *Räume*. Die Angelegenheit wird dadurch nicht-trivial. Es ist erstens zu klären, auf welche Weise auch Z^X, etc., ebenfalls Räume sind. Zweitens ist es nicht selbstverständlich, daß der gewünschte natürliche Isomorphismus auch *ein Isomorphismus von Räumen* ist; d.h., daß er mit den beteiligten topologischen Strukturen verträglich ist.

Als erstes stellen wir fest, daß es eine sehr einfache Lösung des Problems gibt, wenn wir uns gestatten, ein wenig zu mogeln. Nämlich wir nehmen an, daß X, Y, Z nicht nur topologische Räume sind, sondern daß zusätzlich auch gilt: Z ist metrischer Raum, X und Y sind kompakt. In dem Fall ist auch Z^X ein metrischer Raum,

$$\mathrm{d}(g_1, g_2) \ := \ \sup_{x\in X} \mathrm{d}(\, g_1(x) \, , \, g_2(x) \,) \ ;$$

und die anderen Funktionenräume $Z^{X\times Y}$ und $(Z^X)^Y$ sind es in analoger Weise ebenfalls. Schließlich ist der Isomorphismus $Z^{X\times Y} \approx (Z^X)^Y$ auch ein *Isomorphismus von metrischen Räumen*, wegen

$$\sup_{(x,y)\,\in\, X\times Y} \mathrm{d}(\, f_1(x,y) \, , \, f_2(x,y) \,) \;=\; \sup_{y\,\in\, Y} (\, \sup_{x\,\in\, X} \mathrm{d}(\, f_1(x,y) \, , \, f_2(x,y) \,) \,) \ .$$

In unseren Anwendungen werden die zusätzlichen Voraussetzungen (X, Y kompakt, Z metrischer Raum) erfüllt sein. Der gemogelte Teil besteht darin, daß wir keineswegs darauf achten werden, wie die Metrik sich bei irgendwelchen Konstruktionen ändert; es wäre ein Akt des reinen Glaubens, anzunehmen, daß solche Änderungen der metrischen Struktur für die topologische Struktur der Funktionenräume unerheblich sind.

Eine Möglichkeit, das Problem zu vermeiden, ist, die Funktionenräume Z^X, etc., *einschließlich ihrer topologischen Struktur* zu beschreiben unter alleiniger Verwendung der topologischen Strukturen der beteiligten Räume; und dann damit zu arbeiten. Das ist auch genau das, was wir tun werden.

Dabei werden wir mit Befriedigung zur Kenntnis nehmen, daß die vorhin über die Metrik konstruierte topologische Struktur in dem da vorliegenden speziellen Fall tatsächlich die richtige war (das wird unser erster Satz sein).

Definition. (1) Seien X und Z topologische Räume. Es bezeichne Z^X die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Z.

(2) Sei K eine kompakte Teilmenge von X; sei O eine offene Teilmenge von Z. Es bezeichne $\mathrm{W}(K,O)$ die Untermenge von Z^X, die aus denjenigen Abbildungen f besteht, die die Eigenschaft haben, daß $f(K) \subset O$.

(3) Z^X sei mit der topologischen Struktur versehen, die von dem Mengensystem

$$\left\{ \mathrm{W}(K,O) \right\}_{(K \subset X \text{ kompakt}\,,\ O \subset Z \text{ offen})}$$

erzeugt ist. Mit anderen Worten, die topologische Struktur von Z^X ist so definiert, daß das genannte Mengensystem eine Sub-Basis der Topologie von Z^X ist.

(4) Die beschriebene topologische Struktur wird als die *kompakt-offene Topologie* von dem Funktionenraum Z^X bezeichnet.

Satz. *Sei X kompakt, sei Z metrischer Raum. Die metrische Topologie auf Z^X stimmt überein mit der kompakt-offenen Topologie.*

Beweis. Sei A eine Teilmenge von Z^X. Wir müssen zeigen, wenn A offen ist in der kompakt-offenen Topologie, dann auch in der metrischen Topologie; und umgekehrt.

Sei zunächst vorausgesetzt, daß A offen ist in der kompakt-offenen Topologie. Nach Definition ("Sub-Basis") heißt das, daß A eine (beliebige) Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen des Typs $\mathrm{W}(K,O)$ ist. Offenbar wird es deshalb genügen, zu zeigen, daß jede der Mengen $\mathrm{W}(K,O)$ bezüglich der metrischen Topologie eine offene Menge ist.

Sei eine kompakte Menge K in X fixiert und eine offene Menge O in Z. Sei $f \in \mathrm{W}(K,O)$. Wir haben zu zeigen, daß eine ε-Umgebung von f existiert, die noch ganz in der Menge $\mathrm{W}(K,O)$ enthalten ist. Dazu definieren wir eine Zahl ε als die Distanz von $f(K)$ zu dem Komplement von O,

$$\varepsilon \;=\; \inf_{x \in K} \mathrm{d}(f(x)\,,\, \mathrm{C}O)\ .$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathrm{C}O$ ist $\mathrm{d}(f(x)\,,\, \mathrm{C}O) > 0$ für jedes x; wegen der Kompaktheit von K ist deshalb $\varepsilon > 0$. Wenn $g \in Z^X$ die Eigenschaft hat, daß $\mathrm{d}(g,f) < \varepsilon$, dann ist insbesondere $\mathrm{d}(\,g(x), f(x)\,) < \varepsilon$ für alle $x \in K$. Folglich ist $g(x) \in O$ für alle $x \in K$; d.h. $g \in \mathrm{W}(K,O)$.

Sei umgekehrt nun vorausgesetzt, daß A eine offene Menge in der metrischen Topologie ist. Sei $f \in A$. Wir müssen zeigen, daß die Menge A eine Umgebung von f in der kompakt-offenen Topologie ist. Es wird genügen, daß wir uns von jetzt an auf ein bestimmtes f konzentrieren. Wir haben zu zeigen, daß es ein endliches System von Kompakta K_i in X gibt, $i \in I$, und ein entsprechendes System von offenen Mengen O_i in Z, derart, daß der Durchschnitt der Mengen $\mathrm{W}(K_i, O_i)$ einerseits f enthält und andererseits ganz enthalten ist in der Menge A.

Um diese Dinge zu produzieren, werden wir die Metrik benutzen. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß die ε-Kugel um f noch ganz in A enthalten ist. Wir werden die K_i und O_i so produzieren, daß der Durchschnitt der $\mathrm{W}(K_i, O_i)$ tatsächlich schon in der ε-Kugel enthalten sein wird.

Zu dem Punkt $x \in X$ betrachten wir das Urbild, unter f, von der $\frac{\varepsilon}{5}$-Kugel um $f(x)$ in Z. Dieses Urbild ist eine Umgebung von x, es enthält deshalb auch noch eine *kompakte Umgebung* K_x (wegen der uns von früher her schon bekannten Tatsache, daß ein kompakter Raum automatisch auch lokal-kompakt ist). Indem wir noch einmal die Kompaktheit von X zitieren, erhalten wir, daß die Überdeckung $\{K_x\}_{x \in X}$ eine endliche Teil-Überdeckung $\{K_i\}_{i \in I}$ hat.

Für jedes $i \in I$ wird die Menge O_i in Z jetzt definiert als die offene $\frac{\varepsilon}{5}$-Umgebung der Bildmenge $f(K_i)$. Aus der Herleitung ergibt sich, daß der *Durchmesser* von O_i (d.h. der maximale Abstand von zwei Punkten in O_i) höchstens gleich $2 \cdot \frac{\varepsilon}{5} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{5}$ ist.

Sei $g \in Z^X$ so, daß g enthalten ist in jeder der Mengen $\mathrm{W}(K_i, O_i)$. Zu $x \in X$ gibt es ein i, so daß $x \in K_i$. Da $g \in \mathrm{W}(K_i, O_i)$, ist $g(x) \in O_i$. Andererseits ist $f(x) \in O_i$ sowieso. Also haben $g(x)$ und $f(x)$ Abstand $\leq \frac{4}{5}\varepsilon$. Das gilt für alle x, also ist g enthalten in der ε-Kugel um f. □

Bemerkung. Die Kompaktheit von X war in dem vorstehenden Argument eine sehr wichtige Hypothese. Der Satz läßt sich nur dadurch auf (sagen wir, lokal-kompakte) Räume X übertragen, daß man die Behauptung ändert: Man muß die "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz" (d.h. die metrische Topologie) ersetzen durch die "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta". □

Korollar. *X und Y seien kompakt, Z sei metrisierbar* (isomorph zum unterliegenden topologischen Raum eines metrischen Raumes). *Für die Funktionenräume, mit der kompakt-offenen Topologie, gilt das Exponentialgesetz $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$.*

Beweis. Man wählt einen Isomorphismus von Z zu einem metrischen Raum; oder, was auf dasselbe hinausläuft, man wählt eine metrische Struktur für Z. Wie eingangs festgestellt, gilt (aus sehr einfachen Gründen) das Exponentialgesetz für die *metrischen* Funktionenräume, also auch für deren unterliegende topologische Räume. Nach dem Satz übersetzt sich das in das Exponentialgesetz für die Funktionenräume mit der kompakt-offenen Topologie. □

Wir werden uns noch die etwas überflüssige Mühe machen, das Exponentialgesetz auch "topologisch" zu beweisen. Dabei wird sich herausstellen, daß der Raum Z ein ganz beliebiger Raum sein darf; und daß auch für die Räume X und Y deutlich weniger benötigt wird als die Voraussetzung 'kompakt'. Der Exkurs wird uns die Gelegenheit geben, die wichtige kompakt-offene Topologie ein wenig zu studieren.

Satz. *Seien X und Z topologische Räume.*

(1) *Sei $\mathbf{B}$ eine Basis der Topologie von Z. Die Mengen $\mathrm{W}(K,O)$, $K \subset X$ kompakt, $O \in \mathbf{B}$, bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf Z^X.*

(2) *Sei $\mathbf{S}$ eine Subbasis der Topologie von Z. Die Mengen $\mathrm{W}(K,O)$, $K \subset X$ kompakt, $O \in \mathbf{S}$, bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf Z^X.*

Beweis. (1) Es ist zu zeigen, daß jede offene Menge aus Z^X oder, was auf dasselbe hinausläuft, jede Menge der Art $\mathrm{W}(K,O)$, wo $K \subset X$ kompakt und $O \subset Z$ offen, auch offen ist bezüglich der in (1) beschriebenen Subbasis. Das Argument dafür ist ähnlich zu dem im zweiten Teil des Beweises von dem vorigen Satz. Sei $f \in \mathrm{W}(K,O)$. Da O Vereinigung von Mengen aus $\mathbf{B}$ ist, kann man zu jedem $x \in K$ eine offene Basismenge $O_x \in \mathbf{B}$ finden mit $f(x) \in O_x \subset O$; und weiter dann eine kompakte Umgebung K_x von x in K derart, daß $f(K_x) \in O_x$. Von der Überdeckung $\{K_x\}_{x\in K}$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{K_x\}_{x\in I}$. Es ist dann $f \in \bigcap_{x\in I} \mathrm{W}(K_x, O_x) \subset \mathrm{W}(K,O)$. Das zeigt, daß $\mathrm{W}(K,O)$ Umgebung von f ist bezüglich der in (1) beschriebenen Topologie.

(2) Zu der gegebenen Subbasis $\mathbf{S}$ sei $\mathbf{B_S}$ die davon erzeugte Basis: eine Teilmenge $A \subset Z$ ist in $\mathbf{B_S}$ genau dann, wenn sie sich darstellen läßt als endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathbf{S}$. Nach (1) ist eine Subbasis der Topologie von Z^X gegeben durch die Mengen $\mathrm{W}(K,O)$, wo $K \subset X$ kompakt ist und $O \subset Z$ eine offene Menge aus $\mathbf{B_S}$. Wir sind nun sofort fertig mit der Bemerkung, daß $\mathrm{W}(K,O) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}(K,O_i)$, wenn $O = \bigcap_{i\in I} O_i$. □

Satz. *Seien X und Z topologische Räume. Es sei vorausgesetzt, daß X lokal-kompakt ist. Die Evaluations-Abbildung*

$$ev:\ Z^X \times X \longrightarrow Z\ ,\quad (\,f\,,\,x\,) \longmapsto f(x)\ ,$$

ist stetig.

Beweis. Sei $O \subset Z$ offen. Wir zeigen, daß jeder Punkt in dem Urbild $\mathrm{ev}^{-1}(O)$ noch eine ganze Umgebung in dem Urbild hat. Sei $(f,x) \in \mathrm{ev}^{-1}(O)$. Das bedeutet nichts weiter, als daß $f(x) \in O$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(O)$ Umgebung von x. Da X lokal-kompakt ist, enthält diese Umgebung noch eine kompakte Umgebung K von x. Damit ist $f \in \mathrm{W}(K,O)$, und $\mathrm{W}(K,O) \times K$ ist eine Umgebung von (f,x), die die gewünschte Eigenschaft

$$\mathrm{ev}(\,\mathrm{W}(K,O) \times K\,)\ \subset\ O$$

hat. □

Wir kommen nun zu dem Exponentialgesetz für Räume stetiger Abbildungen (die Abbildungsräume tragen die kompakt-offene Topologie). Seien X, Y, Z topologische Räume. Einer Abbildung $f : X \times Y \to Z$ ordnen wir ihre partiellen Funktionen zu. Dies definiert eine Abbildung

$$\Phi : \; Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y \;,$$

nämlich $f : X \times Y \to Z$ wird durch Φ abgebildet auf

$$Y \xrightarrow{\Phi(f)} Z^X \;, \quad y \longmapsto \Phi(f)(y) = f_y \;, \quad (\Phi(f)(y))(x) = f_y(x) := f(x,y) \;.$$

Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß mit f auch die Abbildung $\Phi(f) : Y \to Z^X$ eine *stetige* Abbildung ist; es ist aber richtig: Dafür genügt es, zu zeigen, daß das Urbild, unter $\Phi(f)$, von einer offenen Menge in der Subbasis auch wieder eine offene Menge sein wird. Sei $\mathrm{W}(K,O)$ eine solche offene Menge ($K \subset X$ kompakt und $O \subset Z$ offen). Sei $y \in \Phi(f)^{-1}(\mathrm{W}(K,O))$. Das heißt, daß $f(K \times \{y\}) \subset O$. Da K kompakt ist, enthält die offene Menge $f^{-1}(O)$ mit $K \times \{y\}$ auch noch $K \times U$ für eine ganze Umgebung U von y in Y. Damit ist aber $\Phi(f)(U) \subset \mathrm{W}(K,O)$. Das heißt, wir haben nachgeprüft, daß das Urbild $\Phi(f)^{-1}(\mathrm{W}(K,O))$ mit dem Punkt y auch noch die ganze Umgebung U davon enthält.

Satz. (1) *Seien X, Y, Z topologische Räume. Die Abbildung $\Phi : \; Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y$ ist stetig.*

(2) *Es sei vorausgesetzt, daß X lokal-kompakt ist. Die Abbildung Φ ist bijektiv.* (Es ist hier nicht behauptet, daß die Umkehr-Abbildung $\Psi : \; (Z^X)^Y \longrightarrow Z^{X \times Y}$ stetig ist.)

(3) *Es sei vorausgesetzt, daß X und Y Hausdorff-Räume sind, und X lokal-kompakt. Die Abbildung $\Phi : \; Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y$ ist eine topologische Äquivalenz.*

Beweis. (1) Da Z^X eine Subbasis von Mengen der Form $\mathrm{W}(K,O)$ hat (wo $K \subset X$ kompakt, $O \subset Z$ offen), hat nach dem obigen Satz der Raum $(Z^X)^Y$ eine Subbasis von Mengen der Form $\mathrm{W}(K', \mathrm{W}(K,O))$ (wo $K \subset X$ kompakt, $K' \subset Y$ kompakt, $O \subset Z$ offen). Wir wollen wissen, daß das Urbild einer solchen Menge, unter Φ, wieder eine offene Menge ist. Nun ist aber das Urbild von $\mathrm{W}(K', \mathrm{W}(K,O))$ gerade die Menge $\mathrm{W}(K \times K', O)$. Dies ist eine offene Menge in $Z^{X \times Y}$ (nämlich ein Mitglied der Subbasis), weil mit K und K' auch deren Produkt $K \times K'$ kompakt ist.

(2) Im Falle, wo X lokal-kompakt ist, haben wir oben gezeigt, daß die Evaluations-Abbildung $Z^X \times X \to Z$ stetig ist. Wir benutzen diese, um einer stetigen Abbildung $g : Y \to Z^X$ die zusammengesetzte Abbildung

$$\Psi(g) : \quad X \times Y \xrightarrow{\mathrm{Id} \times g} X \times Z^X \approx Z^X \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Z$$

zuzuordnen. Als Zusammensetzung zweier stetiger Abbildungen ist $\Psi(g)$ wieder stetig. Die so definierte Abbildung $\Psi : (Z^X)^Y \to Z^{X \times Y}$ ist invers zu der Abbildung Φ. Denn sei $f : X \times Y \to Z$. Dann ist $\Phi(f)$ die Abbildung $y \mapsto f_y$, $f_y(x) := f(x,y)$. Unter Ψ geht das auf die Komposition $(x,y) \mapsto (x, f_y) \mapsto f_y(x)$.

(3) Wir haben oben nachgeprüft (im Beweis von (1)), daß die Mengen einer Subbasis von $(Z^X)^Y$ sämtlich auch in einer Subbasis von $Z^{X\times Y}$ vorkommen (und insbesondere deshalb in $Z^{X\times Y}$ offene Mengen sind). Es handelte sich dabei um die Mengen $\mathrm{W}(K', \mathrm{W}(K,O))$ (wo $K \subset X$ kompakt, $K' \subset Y$ kompakt, $O \subset Z$ offen); oder, nach $Z^{X\times Y}$ übersetzt, die Mengen $\mathrm{W}(K\times K', O))$. Wir werden umgekehrt hier nun sofort fertig sein, sobald wir wissen, daß diese Mengen ihrerseits schon eine Subbasis von $Z^{X\times Y}$ bilden. Das sagt das folgende Lemma. □

Lemma. *Seien X und Y Hausdorff-Räume, Z ein Raum. Die Mengen* $\mathrm{W}(K\times K', O))$ (wo $K \subset X$ kompakt, $K' \subset Y$ kompakt, $O \subset Z$ offen) *bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf $Z^{X\times Y}$.*

Beweis. Sei $\mathrm{W}(L,O)$ eine der Teilmengen aus der Subbasis von $Z^{X\times Y}$ (O offene Menge in Z, und L kompakter Teilraum von $X\times Y$). Es ist zu zeigen, daß die Menge $\mathrm{W}(L,O)$ offen ist bezüglich der Topologie, die durch die in dem Lemma beschriebene Subbasis definiert ist.

Sei $f \in \mathrm{W}(L,O)$. Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{W}(L,O)$ Umgebung von f bezüglich der fraglichen Topologie ist. Zu jedem (x,y) aus L sei eine Kästchen-Umgebung $U_{x,y}\times V_{x,y}$ von (x,y) in $f^{-1}(O)$ gewählt.

Wenn L_X und L_Y die Projektionen des Raumes L auf die Faktoren X und Y bezeichnen, so sind die Räume L_X und L_Y quasi-kompakt und deshalb auch kompakt (wir benutzen hier die vorausgesetzte Hausdorff-Eigenschaft der Räume X und Y). Innerhalb von $U_{x,y}$ gibt es folglich eine kompakte Umgebung $K_{x,y}$ von x in L_X. Ebenso gibt es innerhalb von $V_{x,y}$ auch eine kompakte Umgebung $K'_{x,y}$ von y in L_Y.

Das System $\{K_{x,y}\times K'_{x,y}\}_{(x,y)\,\in\, X\times Y}$ überdeckt L. Da L kompakt ist, gibt es ein endliches Teilsystem $\{K_{x,y}\times K'_{x,y}\}_{(x,y)\,\in\, I}$, das auch noch überdeckt. Es ist nun

$$f \;\in\; \bigcap_{(x,y)\,\in\, I} \mathrm{W}(\,K_{x,y}\times K'_{x,y}\;,\,O\,) \;=\; \mathrm{W}(\,\bigcup_{(x,y)\,\in\, I} K_{x,y}\times K'_{x,y}\;,\,O\,) \;\subset\; \mathrm{W}(L,O)\;,$$

und wir sind fertig. □

Eine naheliegende "Natürlichkeits"-Eigenschaft soll noch erwähnt werden:

Bemerkung. Seien $\chi\colon X \to X'$ und $\eta\colon Y \to Y'$ stetige Abbildungen. Komposition mit diesen induziert die Abbildungen in dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y^X & \xrightarrow{\eta_*} & {Y'}^X \\ {\scriptstyle\chi^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle\chi^*}\big\uparrow \\ Y^{X'} & \xrightarrow{\eta_*} & {Y'}^{X'} \end{array}$$

Die Abbildungen in dem Diagramm sind *stetig*. Denn sei z.B. $\mathrm{W}(K,O)$ eine Basismenge in ${Y'}^X$. Dann sind $\mathrm{W}(K,\eta^{-1}(O)) \subset Y^X$ und $\mathrm{W}(\chi(K),O) \subset {Y'}^{X'}$ *Basismengen*, die da hinein abbilden (denn $\eta^{-1}(O)$ ist offen wegen der Stetigkeit von η, und $\chi(K)$ ist kompakt wegen der Stetigkeit von χ); und sie sind auch die Urbilder von $\mathrm{W}(K,O)$.

Wege-Räume, Schleifen-Räume

Die Abbildungs-Raum-Konstruktion liefert auf einfache Weise, und in großem Umfang, so etwas wie *Faserungen*; jedenfalls etwas, das für homotopie-theoretische Zwecke ebenso gut geeignet ist. Das liegt an dem folgenden Sachverhalt.

Satz. *Sei P ein Polyeder und P' darin ein Unterpolyeder. Sei X ein Raum. Die Restriktion $(f\colon P \to X) \longmapsto (f|P'\colon P' \to X)$ gibt eine Abbildung*

$$X^P \longrightarrow X^{P'} .$$

Diese Abbildung ist eine Serre-Faserung; das heißt, die Abbildung hat die HLEP (die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder).

Beweis. Daß die Abbildung $X^P \to X^{P'}$ existiert (als stetige Abbildung topologischer Räume), wissen wir: eine eben nachgeprüfte Natürlichkeits-Eigenschaft. Für die HLEP haben wir mehrere zueinander äquivalente Formulierungen zur Kenntnis genommen; eine davon ist die (absolute) Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Test-Polyeder Q. Wir betrachten ein solches Q; und ein Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} Q \times \{0\} & \longrightarrow & X^P \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Q \times [0,1] & \longrightarrow & X^{P'} \end{array}$$

Die gesuchte Abbildung $Q \times [0,1] \to X^P$ kann alternativ aufgefaßt werden als ein Punkt in dem Abbildungsraum $(X^P)^{Q\times[0,1]}$ oder auch, wegen dem Exponentialgesetz für Abbildungsräume, als ein Punkt in dem Abbildungsraum $X^{P\times Q\times[0,1]}$; das heißt, als eine Abbildung $P \times Q \times [0,1] \longrightarrow X$.

Die vorhandenen Abbildungen $Q \times \{0\} \to X^P$ und $Q \times [0,1] \to X^{P'}$ in dem Diagramm lassen sich ähnlich umschreiben in eine Abbildung $P \times Q \times \{0\} \longrightarrow X$ und eine Abbildung $P' \times Q \times [0,1] \longrightarrow X$. Wegen der vorausgesetzten Kommutativität des Diagramms haben diese beiden Abbildungen die Eigenschaft, daß sie auf dem Unterraum $P' \times Q \times \{0\}$ übereinstimmen. Die Daten in dem Diagramm können also insgesamt aufgefaßt werden als eine Abbildung von dem zusammengeklebten Raum

$$P \times Q \times \{0\} \cup_{P'\times Q\times\{0\}} P' \times Q \times [0,1] .$$

Nun ist dieser Raum *Retrakt* von dem Raum $P \times Q \times [0,1]$. Durch die Komposition mit einer Retraktion bekommen wir von dem letzteren Raum nun auch eine Abbildung nach X. Sie stimmt auf dem Unterraum mit der dort vorhandenen Abbildung überein; daraus resultiert die geforderte Kommutativität des ergänzten Test-Diagramms. □

Sei Y ein Raum. Ein *Weg* in Y bezeichnet, wie sonst auch, eine stetige Abbildung

$$w : [0,1] \longrightarrow Y .$$

Die Wege sollen nun ihrerseits als die Punkte eines Raumes angesehen werden. Dieser Raum wird naturgemäß als der *Wegeraum* von Y bezeichnet. Nach Definition handelt es sich dabei um den Abbildungsraum $Y^{[0,1]}$; er soll topologisiert sein in der Weise, die wir besprochen haben.

Wir kommen nicht umhin, mit grossem Ernst nun einige banale Dinge anzusprechen. Nämlich der Raum der Wege enthält als einen Unterraum den *Raum der konstanten Wege*; das heißt, derjenigen $w : [0,1] \to Y$, wo das Bild der Abbildung w nur ein einziger Punkt in Y ist. Es ist klar (oder ?), daß der Raum der konstanten Wege topologisch äquivalent ist zum Raum Y selbst. Wir notieren die Inklusion einfach als $Y \subset Y^{[0,1]}$ (wo also der Punkt $y \in Y$ nun steht für den konstanten Weg an y).

Satz. *Y ist Deformationsretrakt von $Y^{[0,1]}$.*

Beweis. Die Deformation ist induziert von einer Kontraktion von $[0,1]$ auf seinen Anfangspunkt. Sei nämlich $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine solche Kontraktion; die Abbildung H hat also die Eigenschaften

$$H(0,t) = 0 \text{ (für alle } t) \quad , \quad H(s,0) = s \text{ und } H(s,1) = 0 \text{ (für alle } s).$$

Die Deformation ist dann diejenige Abbildung $Y^{[0,1]} \times [0,1] \to Y^{[0,1]}$, die dem Weg $s \mapsto w(s)$ und dem Parameter t den folgenden Weg zuordnet: $s \mapsto w(\,H(s,t)\,)$.

Wenn man will, so kann man diese Konstruktion auch noch anders beschreiben. Nämlich per Exponentialgesetz entspricht die gesuchte Abbildung $Y^{[0,1]} \times [0,1] \to Y^{[0,1]}$ einer Abbildung $Y^{[0,1]} \to (Y^{[0,1]})^{[0,1]}$ oder, was wieder dasselbe ist, einer Abbildung $Y^{[0,1]} \to Y^{[0,1]\times[0,1]}$. Letztere Abbildung nun ist gegeben durch die Komposition mit der Abbildung H. □

Es sei $y_0 \in Y$ ein fest gewählter Punkt; ein "Basispunkt". Wir bezeichnen mit EY den Unterraum von $Y^{[0,1]}$ bestehend aus denjenigen Wegen, die im Basispunkt y_0 anfangen. Und mit ΩY bezeichnen wir darin den Unterraum der *Schleifen*, das heißt derjenigen Wege, die nicht nur im Basispunkt anfangen, sondern auch dort aufhören. ΩY wird als der *Schleifenraum* von Y bezeichnet. Der Raum ΩY (und damit auch der Raum EY) hat einen kanonischen Basispunkt e, nämlich die triviale Schleife.

Satz. *Der Raum EY ist zusammenziehbar auf e. Die* "Endpunkt"*-Abbildung*

$$p : EY \longrightarrow Y \quad , \quad w \longmapsto p(w) := w(1)$$

ist eine Serre-Faserung.

Korollar. *Es ist* $\pi_n(\Omega Y, e) \approx \pi_{n+1}(Y, y_0)$ *(für* $n \geq 0$*).*

Beweis des Korollars. Für eine Serre-Faserung hat man eine lange exakte Folge der Homotopiegruppen; nach dem Satz also eine lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\mathrm{E}Y, e) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(\Omega Y, e) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{E}Y, e) \longrightarrow \cdots$$

da offenbar ΩY die Faser von $\mathrm{E}Y \to Y$ über dem Basispunkt y_0 ist. Da die Homotopiegruppen von $\mathrm{E}Y$ sämtlich trivial sind (der Satz sagt, daß $\mathrm{E}Y$ zusammenziehbar ist), reduziert die lange exakte Folge sich auf Isomorphismen $\pi_{n+1}(Y, y_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(\Omega Y, e)$.

Beweis des Satzes. Die Homotopie, die jeden Weg auf seinen Anfangspunkt zusammenzieht, definiert auch eine Deformation von dem Raum $\mathrm{E}Y$. Das gibt die Zusammenziehbarkeit von $\mathrm{E}Y$.

Für die zweite Behauptung erinnern wir an die Tatsache, daß man bei Abbildungsräumen eine Serre-Faserung bekommt durch die Restriktion entlang einer Abbildung mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft. Insbesondere ist die durch die Restriktion gegebene Abbildung

$$Y^{[0,1]} \longrightarrow Y^{\{0,1\}} \cong Y \times Y$$

eine Serre-Faserung. Die Abbildung $p : \mathrm{E}Y \to Y$ nun ist die "induzierte Faserung", die man aus dieser Faserung durch Zurückziehen entlang der Inklusion

$$Y \approx \{y_0\} \times Y \longrightarrow Y \times Y$$

bekommt. Sie ist deshalb, wie wir wissen, ebenfalls eine Serre-Faserung. □

Die Konstruktion hat als Variante eine weitreichende Verallgemeinerung. Sie sieht ziemlich spektakulär aus, wenn es sich auch eigentlich nicht um eine besonders schwierige Sache handelt. Nämlich es stellt sich heraus, daß, für homotopie-theoretische Zwecke, jede(!) Abbildung durch eine Faserung ersetzt werden kann.

Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Abbildung faktorisiert als eine Homotopie-Äquivalenz, gefolgt von einer Serre-Faserung,*

$$f : \quad X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{E}(f) \xrightarrow{p} Y \ .$$

Beweis. Der Raum $\mathrm{E}(f)$ ist definiert als $X \times_Y Y^{[0,1]}$, der "Pullback" des Diagramms

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\text{anf}} Y^{[0,1]}$$

wo "anf" die "Anfangspunkt"-Abbildung bezeichnet. Die oben angegebene Deformation von $Y^{[0,1]}$, die jeden Weg auf seinen Anfangspunkt kontrahiert, hat die Eigenschaft, daß sie für die Abbildung "anf" eine *fasernweise Deformation* ist (die Homotopie bewegt Punkte nur innerhalb von Fasern). Die Deformation induziert deshalb eine Deformation von $X \times_Y Y^{[0,1]}$ in den Unterraum $(X =)\ X \times_Y Y$ (wo wieder das rechte Y für den Unterraum der konstanten Wege steht). Das gibt die Homotopie-Äquivalenz $X \to \mathrm{E}(f)$.

Die Abbildung p ist definiert über die kanonische Abbildung von $\mathrm{E}(f)$ zu $Y^{[0,1]}$, gefolgt von der "Endpunkt"-Abbildung zu Y. Daß sie eine Serre-Faserung ist, kann man z.B. so einsehen. Der Pullback des Diagramms

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}_Y} Y^{\{0,1\}} \longleftarrow Y^{[0,1]}$$

ist zu $\mathrm{E}(f)$ kanonisch isomorph (der Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung von Diagrammen, die die beiden zusätzlichen Faktoren "Y" links und in der Mitte wieder unterdrückt). Die resultierende Abbildung $\mathrm{E}(f) \to X \times Y$ ist dann eine "zurückgezogene Faserung", folglich eine Serre-Faserung, wie wir wissen. Die Komposition mit der (trivialen) Serre-Faserung $X \times Y \to Y$ ist die Abbildung p, die folglich damit auch eine Serre-Faserung ist. $\square$

Bezeichnung. Die Faser der Serre-Faserung $\mathrm{E}(f) \to Y$ am Punkt $y \in Y$ heißt die *Homotopie-Faser* der Abbildung f (über y); *Notation*: $\mathrm{HoFas}_y(f)$.

Ausgeschrieben bedeutet die Definition der Homotopie-Faser, daß diese ein "iterierter Pullback" ist,

$$\mathrm{HoFas}_y(f) \;=\; X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y\} \;,$$

oder, etwas ausführlicher bezeichnet, der inverse Limes von dem folgenden Diagramm:

$$X \xrightarrow{\;f\;} Y \xleftarrow{\;\mathrm{anf}\;} Y^{[0,1]} \xrightarrow{\;\mathrm{end}\;} Y \longleftarrow \{y\}$$

Selbst wenn X und Y CW-Komplexe sind, so ist so etwas wie eine Zellenstruktur bei der Homotopie-Faser von $f : X \to Y$ natürlich nicht in Sicht. Es ist sogar nicht einmal klar, ob die Homotopie-Faser in dem Fall überhaupt den Homotopietyp von einem CW-Komplexes haben wird. Letzteres ist aber richtig: *Wenn sowohl X als auch Y "vernünftige" Räume sind* (den Homotopietyp von CW-Komplexen haben) *und wenn $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen ihnen ist, so hat die Homotopiefaser von f* (an irgendeinem Punkt in Y) *auch wieder den Homotopietyp von einem CW-Komplex.* Wir werden uns den Luxus erlauben, den Nachweis für diesen nicht-trivialen Sachverhalt nicht zu erbringen.

Es gibt zwei Gründe, warum diese Lücke nicht gar so schwerwiegend ist. Einmal ist es immer möglich (wie wir in Kürze sehen werden), einen Raum durch einen CW-Komplex zu "approximieren".

Zum andern gibt es auch eine Variante der Faserungs-Theorie, die mit "kombinatorisch definierten CW-Komplexen" (d.h. mit simplizialen Mengen) arbeitet anstatt mit topologischen Räumen (auch das werden wir in Kürze sehen). Bei solchem Vorgehen wird ganz automatisch auch die Homotopie-Faser ein "kombinatorisch definierter CW-Komplex" sein, die Frage der Verbesserungsbedürftigkeit stellt sich also nicht einmal.

Relative Homotopiegruppen einer Abbildung

Sei $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ eine Abbildung von punktierten Räumen. Die relativen Homotopiegruppen von f sollen definiert werden *ohne* die Voraussetzung, daß f die Inklusion eines Unterraumes ist, und auch ohne den Umweg über den Abbildungszylinder. Das geht dadurch, daß man geeignete Diagramme von Abbildungen betrachtet.

Bezeichne D^n den n-Ball und S^{n-1} seine Rand-Sphäre (für $n \geq 1$). Sei $s_0 \in S^{n-1}$ ein gemeinsamer Basispunkt für die beiden. $\pi_n(f)$ wird nun definiert als eine Menge von Äquivalenzklassen: Repräsentanten sind die kommutativen Diagramme von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1},s_0) & \xrightarrow{\alpha} & (X,x_0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ (D^n,s_0) & \xrightarrow{\beta} & (Y,y_0) \end{array}$$

oder, kurz, die kompatiblen Paare von Abbildungen (α,β). Zwei Repräsentanten (α_0,β_0) und (α_1,β_1) sollen als äquivalent angesehen werden, wenn eine Homotopie zwischen ihnen existiert, also ein Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1},s_0)\times[0,1] & \longrightarrow & (X,x_0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ (D^n,s_0)\times[0,1] & \longrightarrow & (Y,y_0) \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die beiden Paare (α_0,β_0) und (α_1,β_1) resultieren durch die Einschränkung auf $(\cdots)\times\{0\}$ bzw. auf $(\cdots)\times\{1\}$.

Wenn die Abbildung f eine *Inklusion* ist, dann ist $\pi_n(f) = \pi_n(Y,X;x_0)$, die übliche relative Homotopiegruppe (bzw. -menge). Denn die Angabe der Abbildung α ist in dem Fall insofern überflüssig, als α durch die andere Abbildung β schon eindeutig bestimmt ist (wegen der Injektivität von f); das einzige, was man von α erinnern muß, ist die Bedingung, daß die entsprechende Einschränkung von β eine Abbildung in den Unterraum X ist.

Die gegebene Beschreibung hat eine Variante, die meistens vorzuziehen ist. Wir schreiben, abkürzend, $I^n = [0,1]^n$. In dem n-dimensionalen Würfel I^n sei I^{n-1} der Teilwürfel $[0,1]^{n-1}\times\{0\}$, und J sei das abgeschlossene Komplement von I^{n-1} im Rand von I^n (mit anderen Worten, J ist die Vereinigung der $2n{-}1$ anderen $(n{-}1)$-Würfel). Man hat eine topologische Äquivalenz von Paaren

$$(\, I^n/J \,,\, I^{n-1}/\partial I^{n-1}\,) \;\approx\; (D^n, S^{n-1}) \,.$$

Deshalb läuft es deshalb auf dasselbe hinaus, statt der obigen Repräsentanten nun Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & (X, x_0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ (I^n, J) & \xrightarrow{\ \beta\ } & (Y, y_0) \end{array}$$

zu betrachten; wo, entsprechend, eine Homotopie nun gegeben sein wird durch ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times [0,1] & \xrightarrow{\ \alpha\ } & (X, x_0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ (I^n, J) \times [0,1] & \xrightarrow{\ \beta\ } & (Y, y_0) \end{array}$$

Mit Hilfe der neuen Beschreibung kann man, für $n \geq 2$, eine Addition von Repräsentanten definieren durch "Nebeneinandersetzen mit halber Breite in der ersten Koordinate". Diese Addition setzt sich, wie gehabt, auf Homotopieklassen fort. Sie macht $\pi_n(f)$ zu einer Gruppe (für $n \geq 2$); für $n \geq 3$ ist diese abelsch.

Die Struktur-Abbildungen für eine erwartete "lange Folge" haben die folgende Beschreibung. Für die Abbildung $\pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(f)$ wird einem Repräsentanten $\beta : (I^n, \partial I^n) \to (Y, y_0)$ das Paar (α, β) zugeordnet wird, wo α definiert ist als die triviale Abbildung von I^{n-1} in den Basispunkt x_0. Die Rand-Abbildung $\partial \colon \pi_n(f) \to \pi_{n-1}(X, x_0)$ ist durch *Restriktion* gegeben; oder, was hier dasselbe bedeutet, von dem Paar (α, β) wird nur die Komponente α erinnert. Es resultiert eine (lange) Folge

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(f) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots \ .$$

Die Folge ist *exakt*: der Beweis dafür geht genauso wie bei der früher behandelten Folge der Homotopiegruppen eines Paares; und sie ist *natürlich*: zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{\ f\ } & (Y, y_0) \\ \varphi \big\downarrow & & \psi \big\downarrow \\ (X', x_0') & \xrightarrow{\ f'\ } & (Y', y_0') \end{array}$$

gehört eine natürliche Transformation von langen exakten Folgen; d.h. ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\ f_*\ } & \pi_n(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_n(f) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \cdots \\ \big\downarrow (\varphi,\psi)_* & & \big\downarrow \varphi_* & & \big\downarrow \psi_* & & \big\downarrow (\varphi,\psi)_* & & \\ \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f') & \xrightarrow{\ \partial\ } & \pi_n(X', x_0') & \xrightarrow{\ f'_*\ } & \pi_n(Y', y_0') & \longrightarrow & \pi_n(f') & \xrightarrow{\ \partial\ } & \cdots \end{array}$$

Sei $Z(f)$ der Abbildungszylinder der Abbildung $f \colon X \to Y$; bezeichne $j \colon X \to Z(f)$ die Inklusion und $p \colon Z(f) \to Y$ die Projektion. Wie oben schon angemerkt, können wir die relativen Homotopiegruppen des Paares $(Z(f), X)$ identifizieren mit den relativen Homotopiegruppen der Inklusionsabbildung j. Wir können sie folglich auch identifizieren mit denen der Abbildung f selbst. Das kommt von dem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & (Z(f), x_0) \arrow[d, "p"] \\
(X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

und der resultierenden Transformation von exakten Folgen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, equal] & \pi_n(Z(f), x_0) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & \pi_n(j) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \pi_{n-1}(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal] & \pi_{n-1}(Z(f), x_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f'_*"] & \pi_n(Y, y_0) \arrow[r] & \pi_n(f) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_{n-1}(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

Das Fünferlemma ist hierauf anwendbar, da die Abbildung p_* ein Isomorphismus ist. Es resultiert, daß auch die Abbildung $\pi_n(j) \to \pi_n(f)$ ein Isomorphismus ist.

Nicht nur die relativen Homotopiegruppen der Abbildung f "messen", wie weit die Abbildungen $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ davon abweichen, Isomorphismen zu sein; die Homotopiegruppen des Raumes "Homotopie-Faser von f" tun das auch. Insofern ist es plausibel, daß da ein Zusammenhang besteht. Richtig ist es auch:

Satz. *Sei* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *eine Abbildung von punktierten Räumen; sei* $\mathrm{HoFas}_{y_0}(f)$ *die Homotopie-Faser am Basispunkt,*

$$\mathrm{HoFas}_{y_0}(f) \;=\; X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y_0\}$$

(*versehen mit dem Basispunkt* $\underline{x}_0 := (x_0, \text{konst-}y_0) = (\, x_0\,,\ \text{konstanter Weg an } y_0\,)$). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus, für* $n \geq 1$,

$$\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0) \;\approx\; \pi_n(f) \ .$$

Beweis. Die Elemente von $\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0)$ sind repräsentiert von Abbildungen

$$\gamma : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (\, X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y_0\}\,,\ (x_0, \text{konst-}y_0)\,) \ .$$

Eine solche Abbildung γ entspricht einem Paar von Abbildungen

$$\alpha : (I^{n-1},\, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (X\,,\, x_0) \ , \qquad \alpha' : (I^{n-1},\, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (Y^{[0,1]}\,,\, \text{konst-}y_0)$$

mit der Nebenbedingung, daß

$$\alpha'(x)(0) \;=\; f(\,\alpha(x)\,) \quad \text{und} \quad \alpha'(x)(1) \;=\; y_0$$

für alle x aus I^{n-1} ist. α' wiederum entspricht einer Abbildung

$$\beta : (\, I^{n-1} \times [0,1]\,,\ \partial I^{n-1} \times [0,1] \cup I^{n-1} \times \{1\}\,) \longrightarrow (Y, y_0)$$

mit $\beta(x,0) \;=\; f(\,\alpha(x)\,)$. Da nun aber

$$(\,I^{n-1}{\times}[0,1]\;,\;\partial I^{n-1}{\times}[0,1]\cup I^{n-1}{\times}\{1\}\,)\quad\approx\quad(\,I^n\;,\;J\,)\;,$$

so ist dies genau ein Paar von Abbildungen (α,β), das ein Element von $\pi_n(f)$ repräsentiert.

Die erhaltene Bijektion auf den Repräsentanten ist verträglich mit Homotopie und auch verträglich mit Addition. Es gilt auch noch die folgende Natürlichkeits-Eigenschaft:

Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
(X,x_0) & \xrightarrow{\;f\;} & (Y,y_0)\\
{\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow\\
(X',x_0') & \xrightarrow{\;f'\;} & (Y',y_0')
\end{array}$$

induziert eine Abbildung

$$\mathrm{HoFas}_{y_0}(f)\;\longrightarrow\;\mathrm{HoFas}_{y_0'}(f')\;,$$

nämlich ein Punkt $(\,x\,,\,\omega:\,[0,1]\to Y\,)$ (mit den entsprechenden Bedingungen) wird abgebildet auf den Bild-Punkt $(\,\varphi(x)\,,\,\psi\circ\omega\,)$. Das resultierende Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0}(f),\underline{x}_0) & \xrightarrow{\;\approx\;} & \pi_n(f)\\
\big\downarrow & & \big\downarrow\\
\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0'}(f'),\underline{x}_0') & \xrightarrow{\;\approx\;} & \pi_n(f')
\end{array}$$

ist kommutativ. Denn die induzierten Abbildungen gehen hervor durch Komposition mit φ und ψ, dagegen entstehen die Isomorphismen $\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0}(f),\underline{x}_0)\;\approx\;\pi_n(f)$ und $\pi_{n-1}(\mathrm{HoFas}_{y_0'}(f'),\underline{x}_0')\;\approx\;\pi_n(f')$ durch Manipulation der Definitionsbereiche.

CW-Approximationen, Co-Skelette

Es soll gezeigt werden, daß es zu einem weg-zusammenhängenden Raum immer eine "CW-Approximation" gibt; das heißt, einen CW-Komplex, der so in den Raum abbildet, daß die induzierte Abbildung auf den Homotopiegruppen ein Isomorphismus ist. Es soll ferner gezeigt werden, daß eine solche CW-Approximation *eindeutig* ist (bis auf Homotopie — in einem geeigneten Sinne).

Die bemerkenswerte Sache ist, daß man die Eindeutigkeit gratis mitbekommt, wenn man nur die Existenz in einer leicht verkomplizierten (*relativen*) Version erledigt. Die gibt der folgende Satz:

Satz. *Es sei Z ein weg-zusammenhängender topologischer Raum, mit Basispunkt z_0; X ein* (nicht notwendig zusammenhängender) *CW-Komplex, mit Basispunkt x_0; und $f : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ eine Abbildung. Es existiert ein weg-zusammenhängender CW-Komplex X', der X als Unterkomplex enthält, und eine Fortsetzung der Abbildung f zu einer Abbildung $f' : (X', x_0) \to (Z, z_0)$ derart, daß die von f' auf den Homotopiegruppen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Die Idee ist, den Raum X, und gleichzeitig die Abbildung f, sukzessive zu "verbessern" durch das Anheften weiterer Zellen.

Der erste Schritt besteht darin, X weg-zusammenhängend zu machen. Dazu werden 1-Zellen angeheftet. Nämlich für jede Wegzusammenhangskomponente, die *nicht* den Basispunkt x_0 enthält, wird eine 1-Zelle angeheftet. Sie wird so angeheftet, daß sie eine 0-Zelle in der fraglichen Komponente mit dem Basispunkt x_0 verbindet. Da, nach Voraussetzung, Z ein *weg-zusammenhängender* Raum ist, gibt es keine Schwierigkeit, die Abbildung f auf die neue 1-Zelle fortzusetzen.

Als nächstes müssen weitere 1-Zellen angeheftet werden, um zu erreichen, daß die Abbildung von X zu Z auf der Fundamentalgruppe surjektiv wird. Für die Buchführung dabei ist es am besten, die *relativen Homotopiegruppen* (bzw. *-mengen*, für $n = 1$) zu betrachten. Die Buchführung gestaltet sich besonders bequem, wenn wir eine kürzlich eingeführte neue Beschreibung zur Kenntnis nehmen:

Bezeichne D^n den n-Ball und S^{n-1} seine Rand-Sphäre (für $n \geq 1$). Sei $s_0 \in S^{n-1}$ gemeinsamer Basispunkt für die beiden. $\pi_n(f)$ wird definiert als eine Menge von Äquivalenzklassen: Repräsentanten sind die kommutativen Diagramme von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc}
(S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & (X, x_0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(D^n, s_0) & \xrightarrow{\ \beta\ } & (Z, z_0)
\end{array}$$

Zwei Repräsentanten (α_1, β_1) und (α_2, β_2) werden als äquivalent angesehen, wenn eine Homotopie zwischen ihnen existiert, also ein Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
(S^{n-1}, s_0) \times [1,2] & \longrightarrow & (X, x_0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(D^n, s_0) \times [1,2] & \longrightarrow & (Z, z_0)
\end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die beiden Paare (α_1, β_1) und (α_2, β_2) resultieren durch die Einschränkung auf $(\cdots) \times \{1\}$ bzw. $(\cdots) \times \{2\}$. Die lange exakte Folge von Homotopiegruppen lautet:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Z, z_0) \longrightarrow \pi_n(f) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Wir haben noch die folgende Bemerkung: Das Paar (α, β) repräsentiert sicherlich dann das triviale Element von $\pi_n(f)$, wenn eine Abbildung $\beta' : D^n \to X$ existiert derart, daß $\beta' \mid S^{n-1} = \alpha$ und $f \circ \beta' = \beta$.

Wir fahren nun fort mit dem Beweis des Satzes. Tatsächlich fangen wir noch einmal ganz von vorne an. Wir setzen $X_0 = X$, $f_0 = f$. Induktiv werden wir eine aufsteigende Folge von CW-Komplexen $X_1, X_2, X_3, \ldots$, definieren, und von Abbildungen $f_n : X_n \to Z$, derart, daß $f_n \mid X_{n-1} = f_{n-1}$ und daß $\pi_k(f_n)$ trivial ist, für $1 \leq k \leq n$. Die Folge sei schon konstruiert bis zur Nummer $n-1$ (einschließlich), so daß also der Term mit der Nummer n jetzt zur Konstruktion ansteht.

Sei $\big\{(\alpha_i, \beta_i)\big\}_{i \in I}$ ein System von Repräsentanten von "genügend vielen" Elementen von $\pi_n(f_{n-1})$ (z.B. ein [oder mindestens ein] Repräsentant für jedes Element von $\pi_n(f_{n-1})$). Der i-te Repräsentant ist also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
(S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\ \alpha_i\ } & (X_{n-1}, x_0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(D^n, s_0) & \xrightarrow{\ \beta_i\ } & (Z, z_0)
\end{array}$$

Wir dürfen annehmen, daß $\alpha_i : S^{n-1} \to X_{n-1}$ eine Abbildung in das $(n-1)$-Skelett von X_{n-1} ist (denn nach dem zellulären Approximations-Satz könnten wir das auf jeden Fall dadurch erreichen, daß wir den Repräsentanten (α_i, β_i) durch einen homotopen Repräsentanten ersetzten).

Wir können also die α_i benutzen, um n-Zellen an X_{n-1} anzuheften. Das ergibt, nach Definition, den CW-Komplex X_n. Wir können die Abbildungen β_i benutzen, um die Abbildung $X_{n-1} \to Z$ auf die neuen Zellen, mithin also auf X_n, zu erweitern. Das ergibt, nach Definition, die Abbildung f_n.

Wenn wir ${\beta_i}' : D^n \to X_n$ definieren als die charakteristische Abbildung der i-ten Zelle, so ist ${\beta_i}' \mid S^{n-1} = \alpha_i$ und $f_{n-1} \circ {\beta_i}' = \beta_i$. Das heißt (die obige Bemerkung), daß das von (α_i, β_i) repräsentierte Element in $\pi_n(f_n)$ trivial wird. Insgesamt ist es also richtig, daß die Abbildung $\pi_n(f_{n-1}) \to \pi_n(f_n)$ triviales Bild hat (wegen unserer Verabredung, "genügend viele" Elemente zu benutzen).

Wir möchten etwas mehr wissen; nämlich, daß $\pi_k(f_n)$ trivial ist für $k = n$ (und auch für $1 \le k \le n$). Das schließen wir mit einer Anwendung des Fünferlemmas. Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_k X_{n-1} & \xrightarrow{(f_{n-1})_*} & \pi_k Z & \longrightarrow & \pi_k(f_{n-1}) & \longrightarrow & \pi_{k-1} X_{n-1} & \xrightarrow{(f_{n-1})_*} & \pi_{k-1} Z \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_k X_n & \xrightarrow{(f_n)_*} & \pi_k Z & \longrightarrow & \pi_k(f_n) & \longrightarrow & \pi_{k-1} X_n & \xrightarrow{(f_n)_*} & \pi_{k-1} Z
\end{array}$$

In dem Diagramm sind zwei der vertikalen Abbildungen identische Abbildungen (die identischen Abbildungen auf $\pi_k Z$ und $\pi_{k-1} Z$). Insbesondere ist die erste dieser Abbildungen surjektiv und die zweite ist injektiv. Für $k-1 \le n-1$ ist auch die Abbildung $\pi_{k-1} X_{n-1} \to \pi_{k-1} X_n$ surjektiv (nach dem zellulären Approximations-Satz). Das Fünferlemma ist also anwendbar, und es ergibt, daß die Abbildung $\pi_k(f_{n-1}) \to \pi_k(f_n)$ *surjektiv* ist.

Für $k < n$ nun ist $\pi_k(f_{n-1})$ trivial nach Induktionsvoraussetzung. Also ist auch $\pi_k(f_n)$ trivial. Für $k = n$ brauchen wir einen kleinen zusätzlichen Trick. Nämlich einerseits wissen wir, daß die Abbildung $\pi_n(f_{n-1}) \to \pi_n(f_n)$ surjektiv ist. Andererseits wissen wir auch (s. oben), daß die Abbildung triviales Bild hat. Wir können daraus schließen, daß auch $\pi_n(f_n)$ trivial ist.

Der CW-Komplex X' schließlich wird definiert als die Vereinigung der X_n; und die Abbildung f' als diejenige Abbildung, die die f_n als ihre Restriktionen hat. $\square$

Korollar 1. *Z sei weg-zusammenhängender topologischer Raum, mit Basispunkt z_0. Es gibt einen weg-zusammenhängenden CW-Komplex X, mit Basispunkt x_0, und eine Abbildung $(X, x_0) \to (Z, z_0)$, die Isomorphismen auf den Homotopiegruppen induziert.*

Beweis. Anwendung des Satzes auf die Abbildung $(\{x_0\}, x_0) \to (Z, z_0)$. □

Korollar 2. *Sind $(X_1, x_1) \to (Z, z_0)$ und $(X_2, x_2) \to (Z, z_0)$ zwei CW-Approximationen, so gibt es eine Homotopie-Äquivalenz $(X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$, derart, daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} (X_1, x_1) & \longrightarrow & (X_2, x_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z, z_0) & = & (Z, z_0) \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist.

Beweis. Die beiden Abbildungen $(X_1, x_1) \to (Z, z_0)$ und $(X_2, x_2) \to (Z, z_0)$ ergeben zusammen eine Abbildung auf der disjunkten Vereinigung $X_1 \dot\cup X_2$,

$$X_1 \dot\cup X_2 \longrightarrow Z$$

(wo $X_1 \dot\cup X_2$ auf irgendeine Weise mit einem Basispunkt versehen ist; z.B. mit x_1). Nach dem Satz gibt es einen CW-Komplex X', der $X_1 \dot\cup X_2$ als Unterkomplex enthält, und eine Abbildung $(X', x') \to (Z, z)$, die die obige Abbildung erweitert; wobei die neue Abbildung Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert.

Bei weg-zusammenhängenden Räumen nun hängt die Tatsache "Isomorphismen der Homotopiegruppen zu induzieren" *nicht* von der Wahl eines Basispunktes ab (d.h. diese Aussage gilt entweder für *jeden* Basispunkt oder aber für keinen einzigen).

Da $X_1 \to Z$ und $X' \to Z$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induzieren, folgt, daß auch $X_1 \to X'$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Nach dem Whitehead-Satz ist also $X_1 \to X'$ eine Homotopie-Äquivalenz.

Ähnlich ist auch $X_2 \to X'$ eine Homotopie-Äquivalenz. Sei die Abbildung $X' \to X_2$ davon eine Homotopie-Inverse. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & = & Z & = & Z \end{array}$$

ist dann das linke Teilquadrat (strikt) kommutativ, und das rechte Teilquadrat ist kommutativ bis auf Homotopie. Das äußere Rechteck in dem Diagramm ergibt das im Korollar behauptete Diagramm. (Jedenfalls bis auf das Detail mit dem Basispunkt, das man nachträglich noch über die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft [angewandt auf die Inklusion des Basispunktes] bekommen kann.) □

Wir kommen zur Behandlung der *Co-Skelette* eines Raumes. Andere hier gebräuchliche Bezeichnungen sind die *Postnikov-Zerlegung*; und der *Moore-Postnikov-Turm*.

Satz. *Sei X ein weg-zusammenhängender CW-Komplex. Für $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ gibt es einen Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes,* $\mathrm{Cosk}_n(X)$, *eine Inklusion* $i_n : X \to \mathrm{Cosk}_n(X)$ *und eine Serre-Faserung* $p_n : \mathrm{Cosk}_{n+1}(X) \to \mathrm{Cosk}_n(X)$, *so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind*:

a.) *Das Diagramm* (Moore-Postnikov-Turm)

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\| \downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{i_{n+1}} & \mathrm{Cosk}_{n+1}(X) \\
\| \downarrow & & \downarrow p_n \\
X & \xrightarrow{i_n} & \mathrm{Cosk}_n(X) \\
\| \downarrow & & \downarrow p_{n-1} \\
\vdots & & \vdots \\
\| \downarrow & & \downarrow p_1 \\
X & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{Cosk}_1(X) \\
\| \downarrow & & \downarrow p_0 \\
X & \xrightarrow{i_0} & \mathrm{Cosk}_0(X)
\end{array}$$

ist (strikt) *kommutativ*.

b.) *Die Inklusion i_n induziert Isomorphismen* $i_{n*} : \pi_k X \to \pi_k \mathrm{Cosk}_n(X)$, *für* $k \leq n$, *und es ist* $\pi_k \mathrm{Cosk}_n(X) = 0$, *für* $k > n$.

c.) *Bezeichnet F_n die Faser der Abbildung* $p_{n-1} : \mathrm{Cosk}_n(X) \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$, *so ist F_n ein* "Eilenberg-McLane-Raum" *vom Typ $K(\pi_n X, n)$. Das heißt, F_n hat eine einzige nicht-verschwindende* (genauer: möglicherweise nicht-verschwindende) *Homotopiegruppe, nämlich π_n, und diese ist isomorph zu $\pi_n X$.*

Beweis. Der Turm sei schon konstruiert bis zur Höhe $n{-}1$ (einschließlich). Wir zeigen, wie wir (induktiv) die Konstruktion bis zur Höhe n fortsetzen können; anzugeben dafür sind der Raum $\mathrm{Cosk}_n(X)$ und die Abbildungen i_n und p_{n-1}.

Die Konstruktion von $\mathrm{Cosk}_n(X)$ besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden (viele) Zellen an X angeheftet: die Homotopiegruppen in den Dimensionen $\geq n{+}1$ sollen damit zu Null gemacht werden. Der zweite Teil ruft eigentlich nur in Erinnerung, daß eine Abbildung immer faktorisiert werden kann als eine Inklusion (die gleichzeitig eine Homotopieäquivalenz ist), gefolgt von einer Faserung.

Zum Anheften der Zellen: Als erstes werden Zellen der Dimension $n+2$ angeheftet, danach Zellen der Dimension $n+3$, und so weiter.

Für das Anheften der $(n+2)$-Zellen muß man Abbildungen der S^{n+1} spezifizieren, je eine Abbildung für jede anzuheftende Zelle. Uns kommt es darauf an, $\pi_{n+1}(X, x_0)$ zu Null zu machen. Also werden wir darauf achten, *genügend viele* solcher Abbildungen zu verwenden. Eine Möglichkeit, die sicher ausreicht (wenn sie auch im allgemeinen vermutlich einen gewaltigen "Overkill" bedeuten wird) ist es, *für jedes Element* von $\pi_{n+1}(X, x_0)$ eine zelluläre Abbildung als Repräsentanten zu nehmen und mit dieser Abbildung dann eine $(n+2)$-Zelle anzuheften. Die Prozedur ergibt einen CW-Komplex X', der aus dem Unterkomplex X und den hinzugekommenen $(n+2)$-Zellen besteht. Die Inklusion $X \to X'$ induziert einen Isomorphismus auf den Homotopiegruppen in Dimension $\leq n$ (zellulärer Approximations-Satz). Andererseits ist die Inklusion die triviale Abbildung auf der $(n+1)$-ten Homotopiegruppe (das ist das, was wir durch das Anheften der "genügend vielen" $(n+2)$-Zellen erzwungen haben). Nach dem zellulären Approximations-Satz ist es auch richtig, daß die Inklusion $X \to X'$ auf der $(n+1)$-ten Homotopiegruppe *surjektiv* ist (das $(n+1)$-Skelett von X' ist dasselbe wie das von X). Es folgt, daß die $(n+1)$-te Homotopiegruppe von X' tatsächlich trivial ist.

Der Rest des Zellen-Anheftens geht genauso: An X' werden "genügend viele" $(n+3)$-Zellen angeheftet. Das ergibt einen X' als Unterkomplex enthaltenden CW-Komplex X'', der in den Dimensionen $\leq n+1$ dieselben Homotopiegruppen hat wie X', aber triviale Homotopiegruppe in Dimension $(n+2)$. Mit anderen Worten, X'' hat dieselben Homotopiegruppen wie X in den Dimensionen $\leq n$, aber triviale Homotopiegruppen in den Dimensionen $n+1$ und $n+2$. Und so weiter. Der als Vereinigung all dieser Zellen entstehende CW-Komplex heiße $\overline{X}$. Er hat triviale Homotopiegruppen in den Dimensionen $> n$.

Es gibt eine Abbildung $X' \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$, die die Abbildung $X \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$ erweitert. Das liegt daran, daß jede der Anhefte-Abbildungen $S^{n+1} \to X$, gefolgt von der Abbildung $X \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$ null-homotop ist (Trivialität von $\pi_{n+1}\mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$); also kann die Abbildung $X \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$ auf die neue Zelle erweitert werden. Mit den andern neuen Zellen ist es ähnlich. Insgesamt existiert deshalb eine Abbildung $\overline{X} \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$, die die Abbildung $X \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$ erweitert.

Die so konstruierte Abbildung $\overline{X} \to \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$ faktorisiert, wie wir wissen, als eine Inklusion, die eine Homotopie-Äquivalenz ist, $\overline{X} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Cosk}_n(X)$, gefolgt von einer Serre-Faserung, $\mathrm{Cosk}_n(X) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Cosk}_{n-1}(X)$. Die Abbildung i_n schließlich wird definiert als die Komposition $X \to \overline{X} \to \mathrm{Cosk}_n(X)$.

Teil (c) ergibt sich aus der langen exakten Folge der Faserung p_n. □

Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß die im Satz genannten Eilenberg-MacLane-Räume tatsächlich alle existieren (d.h. daß sie in der Natur wirklich alle vorkommen). In Kürze werden wir aber sehen, daß das so ist.

Fundamentalgruppen von CW-Komplexen

Für eine Gruppe ist es, wie sich herausstellt, keine Einschränkung der Allgemeinheit, als Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes wirklich vorzukommen (wir werden das in Kürze zitieren wollen im Zusammenhang mit einer Diskussion, die höhere Homotopiegruppen betrifft). Die Tatsache ist ziemlich offensichtlich, sobald geklärt ist, daß (und wie) die Fundamentalgruppe mit Hilfe der Zellenstruktur beschrieben werden kann. Das soll jetzt erläutert werden.

Dabei sind einige Begriffe der sogenannten *kombinatorischen Gruppentheorie* zu diskutieren: "Erzeugende", "Relationen", "freie Gruppe", "Gruppen-Präsentation".

Es sei M eine Menge. Man ordnet ihr auf die folgende Weise eine Gruppe $\mathrm{F}(M)$ zu, *die von M erzeugte freie Gruppe*.

Zu der Menge M nimmt man noch eine isomorphe Kopie $\overline{M}$. Ein Element $\overline{m} \in \overline{M}$ soll man sich vorstellen als das "formal-inverse" des entsprechenden Elements $m \in M$. Es sei nun $\mathrm{W}(M)$ definiert als die Menge der Worte, deren Einträge die Buchstaben aus dem Alphabet $M \dot{\cup} \overline{M}$ sind. Z.B. wenn m und n Elemente aus M sind, dann sind

$$m\,m\,\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\,n\,\overline{n}\,n\,m \qquad \text{und} \qquad n\,\overline{n}\,\overline{m}\,n\,m\,\overline{n}\,n$$

zwei solche Worte. Auf der Menge $\mathrm{W}(M)$ wird ein Kompositionsgesetz definiert durch das *Aneinanderfügen von Worten*. Die Menge wird dadurch zu einer *Halbgruppe*, die offenbar *assoziativ* ist und die auch ein *neutrales Element* hat (das leere Wort). Natürlich ist sie nicht kommutativ.

Aus der Halbgruppe macht man dadurch eine Gruppe, daß man erzwingt, daß (für jedes $m \in M$) die beiden Elemente m und $\overline{m}$ zueinander invers sind. Das heißt, daß man die Menge $\mathrm{W}(M)$ nun modulo der folgenden Äquivalenzrelation betrachtet: Wenn in einem Wort eine Silbe (ein Teilwort) $m\,\overline{m}$ vorkommt, dann darf man diese Silbe ersatzlos weglassen. Ähnlich auch, wenn eine Silbe $\overline{m}\,m$ vorkommt, dann darf man diese Silbe ersatzlos weglassen. Z.B. sind die beiden oben als Beispiele angegebenen Worte zueinander äquivalent (sie sind beide äquivalent zu $\overline{m}\,n\,m$). Nach Definition nun ist $\mathrm{F}(M)$ die Menge (d.h. Gruppe) dieser Äquivalenzklassen.

Offenbar kann man die Konstruktion von $\mathrm{F}(M)$ als einen *Funktor* auffassen, von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der Gruppen. Und offenbar ist es auch richtig, daß dieser Funktor *adjungiert* ist (genauer: links-adjungiert) zum "Vergiß-Funktor", der einer Gruppe G ihre unterliegende Menge $\mathrm{V}(G)$ zuordnet; das heißt, es gibt einen Isomorphismus der Hom-Mengen,

$$\mathrm{Hom}_{\,\mathrm{Gruppen}}(\,\mathrm{F}(M)\,,\,G\,) \quad \approx \quad \mathrm{Hom}_{\,\mathrm{Mengen}}(\,M\,,\,\mathrm{V}(G)\,)$$

und dieser Isomorphismus ist *natürlich* (mit Abbildungen verträglich).

Eine Gruppe heißt *frei*, wenn sie zu einer Gruppe der Art $\mathrm{F}(M)$ isomorph ist. Jede Gruppe G ist Quotient einer freien Gruppe (Bild einer surjektiven Abbildung von einer solchen). Z.B., wenn man keinen Wert auf Ökonomie legt, so kann man die freie Gruppe nehmen, die von den sämtlichen Elementen von G erzeugt wird. Das läßt sich auf hübsche Weise mit Hilfe der Adjunktion ausdrücken: man hat diejenige Abbildung

$$\mathrm{F}(\,\mathrm{V}(G)\,) \longrightarrow G\ ,$$

die, per Adjunktion, der identischen Abbildung auf der unterliegenden Menge $\mathrm{V}(G)$ entspricht.

Natürlich wird man gelegentlich daran interessiert sein, etwas ökonomischer vorzugehen. Man nimmt das zum Anlaß für die folgende Definition:

Definition. Ein *Erzeugenden-System* einer Gruppe G besteht aus einer Menge M und einer Abbildung $M \to \mathrm{V}(G)$, derart, daß die zugehörige Abbildung $\mathrm{F}(M) \to G$ surjektiv ist.

Wenn F eine (z.B. freie) Gruppe ist, und N eine Untergruppe, die eine *normale Untergruppe* ist (oder, was dasselbe bedeutet, ein *Normalteiler* — d.h., per Definition, daß Konjugierte von Elementen aus N wieder in N sind), so ist F/N, die Menge der Nebenklassen, wieder eine Gruppe, die sogenannte *Faktorgruppe* von F nach N.

Wenn, umgekehrt, $p\colon F \to G$ eine surjektive Gruppen-Abbildung ist, so ist der Kern von p ein Normalteiler N in F. Die Gruppe G kann dann mit Hilfe von F und N beschrieben werden (bis auf kanonische Isomorphie) als die Faktorgruppe F/N.

Ist R (für "Relationen") eine Teilmenge einer Gruppe F, so gibt es einen *kleinsten* Normalteiler in F, der die Menge R enthält; dieser wird mit $\mathrm{N}(R)$ bezeichnet, die *normale Hülle* von R.

Etwas mehr sind wir interessiert an einer Variante. Nämlich F ist nun die freie Gruppe $\mathrm{F}(M)$ auf einem Erzeugenden-System M. Und die Elemente von R sind beschrieben als Worte in den Erzeugenden und deren formal-inversen; d.h. als Worte in dem Alphabet $M \,\dot\cup\, \overline{M}$ (in der obigen Notation).

Definition. Eine *Gruppen-Präsentation* $\{M\,;\,R\}$ besteht aus:
— einer Menge M
— einer Menge R von Worten in dem Alphabet $M \,\dot\cup\, \overline{M}$.
Und zwar soll dies eine Präsentation der Gruppe $\mathrm{F}(M)/\mathrm{N}(R)$ sein.

Zum Beispiel könnte man eine Gruppe dadurch beschreiben wollen, daß man zwei Erzeugende fordert, x und y, und zwei Relationen, $x\,y^2 = y^3\,x$ und $y\,x^2 = x^3\,y$; "aber keine Relationen, die nicht durch diese beiden erzwungen sind". Eine solche Gruppe würde man hinschreiben mit Hilfe einer Gruppen-Präsentation

$$\{\ x\,,\,y\ ;\ x\,y^2\,\overline{x}\,\overline{y}^3\,,\,y\,x^2\,\overline{y}\,\overline{x}^3\ \}$$

(wo z.B. $\overline{x}^3$ eine Abkürzung für $\overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x}$ ist).

In dem Beispiel ist nicht nur die Anzahl der Erzeugenden endlich, sondern auch die Anzahl der Relationen. Für diesen Sachverhalt sagt man auch, daß es sich um eine *endliche Präsentation* handelt. (Eine Gruppe, die eine endliche Präsentation besitzt, wird im übrigen auch als eine *endlich-präsentierbare Gruppe* bezeichnet.)

Die Beschreibung von Gruppen durch Präsentationen ist nicht so effektiv, wie man das vielleicht hoffen könnte. Das liegt nicht an den mangelnden Fähigkeiten der Mathematiker. Ganz im Gegenteil sind es die Mathematiker, die das herausgefunden haben. Es ist, zum Beispiel, eine Tatsache, daß es kein Verfahren geben kann(!!), um von einer endlichen Gruppen-Präsentation herauszufinden, ob die von ihr definierte Gruppe nun die triviale Gruppe ist oder nicht.

Hier ist nicht behauptet, daß man eine bestimmte Gruppen-Präsentation kennt, bei der die Frage prinzipiell nicht geklärt werden könnte: Unmöglichkeits-Aussagen dieser Art beziehen sich auf unendliche Klassen von Beipielen. Man muß aber darauf gefaßt sein, daß auch eine einzelne einfach-aussehende Präsentation schon sehr große Mühe machen kann (die angegebene Präsentation ist übrigens dafür ein Beispiel).

Es sei M eine Menge. Wir definieren einen Raum $X(M)$ als den Quotientenraum

$$X(M) \quad = \quad M \times [0,1] \ \big/ \ M \times \{0,1\} \ .$$

Dieser Raum ist auf naheliegende Weise ein CW-Komplex: es gibt eine einzige 0-Zelle $x_0 \ = \ M \times \{0,1\} \big/ M \times \{0,1\}$, und es gibt für jedes Element m von M eine 1-Zelle; die charakteristische Abbildung dieser 1-Zelle ist induziert von der Inklusion

$$\{m\} \times [0,1] \to M \times [0,1] \ .$$

Satz. (1) *Die Fundamentalgruppe von $X(M)$ ist frei: es gibt einen Isomorphismus*

$$\mathrm{F}(M) \ \longrightarrow \ \pi_1(X(M), x_0) \ .$$

(2) *Jedes Element von $\mathrm{F}(M)$ ist repräsentiert von nur einem reduzierten Wort* (ein Wort in dem Alphabet $M \,\dot{\cup}\, \overline{M}$, in dem es kein Teilwort der Art $m\,\overline{m}$ oder $\overline{m}\,m$ gibt).

Beweis. Eine Abbildung $\mathrm{F}(M) \to \pi_1(X(M), x_0)$ bekommt man auf die folgende Weise. Zunächst wird jedem Wort in dem Alphabet $M \,\dot{\cup}\, \overline{M}$ ein geschlossener Weg in $X(M)$ zugeordnet, der im Basispunkt beginnt und auch dort endet. Wenn das Wort nur aus dem einzigen Buchstaben m besteht, so soll der zugeordnete Weg die durch m indizierte 1-Zelle genau einmal in positiver Richtung durchlaufen: der Weg ist gegeben durch die charakteristische Abbildung der 1-Zelle (die ja Anfangs- und Endpunkt des Intervalls beide in den Basispunkt abbildet). Wenn das Wort nur aus dem einzigen Buchstaben $\overline{m}$ besteht (dem “formal-inversen” von m), so soll der Weg derselbe sein, aber rückwärts durchlaufen. Im allgemeinen Fall besteht das Wort aus endlich vielen Buchstaben: die zugeordneten Wege werden dann einfach nacheinander durchlaufen. Die Zuordnung von Worten zu Wegen ist so gemacht, daß sie mit der Komposition verträglich ist. Sie ist auch mit der Äquivalenzrelation auf den Worten verträglich; jedenfalls dann, wenn man bei den Wegen zu deren Homotopieklassen übergeht. Denn wenn in einem Wort eine

Silbe der Art $m\overline{m}$ oder $\overline{m}m$ vorkommt, so bedeutet das für die Wege, daß es einen Teilweg gibt, der erst in der einen Richtung, danach dann rückwärts durchlaufen wird; bis auf Homotopie darf man ihn weglassen.

Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung $\mathrm{F}(M) \to \pi_1(X(M), x_0)$ ein Isomorphismus ist. Das ist eine Verallgemeinerung der Ausrechnung von $\pi_1(S^1, x_0)$ (inklusive der Methode). Im allgemeinen Fall ist der Beweis komplizierter, aber nicht viel.

Die Abbildung ist surjektiv. Das geht mit dem Lebesgue'schen Überdeckungs-Satz. Wir verwenden die Überdeckung von $X(M)$, die aus den offenen 1-Zellen besteht und aus einer weiteren Menge; nämlich der Umgebung U der 0-Zelle, die wir aus $X(M)$ dadurch erhalten, daß wir aus jeder der 1-Zellen das abgeschlossene mittlere Drittel weglassen. Die Menge U ist offen, und zusammenziehbar.

Ist $w\colon [0,1] \to X(M)$ ein Repräsentant eines Elements von $\pi_1(X(M), x_0)$, so gibt es eine Unterteilung von $[0,1]$ in Teilintervalle, deren jedes ganz in eine der Mengen der Überdeckung abgebildet wird. Wir bestehen hier nicht darauf, daß alle Teilintervalle die gleiche Länge haben. Das gibt uns die Möglichkeit, Trennpunkte gelegentlich wegzulassen. Nämlich, wenn einer der Trennpunkte nicht in der Menge U liegt, so ist es notwendigerweise der Fall, daß beide der angrenzenden Intervalle ganz in die offene Zelle abgebildet werden, in die auch der Trennpunkt geht. Einen solchen Trennpunkt dürfen wir also weglassen. Das heißt, wir dürfen annehmen, daß alle Trennpunkte ganz in die Menge U abgebildet werden.

Wir ersetzen jetzt den Weg w durch einen homotopen, w'. Die Homotopie ist gegeben durch eine Kontraktion der Menge U. Alle Trennpunkte werden durch w' in den Basispunkt abgebildet. w' ist also eine Komposition von ganz vielen Wegen. Die nicht-trivialen unter diesen kommen her von denjenigen Teilintervallen, die durch w *nicht* in die Menge U, und demnach ganz in eine der offenen Zellen abgebildet wurden. Unter der Deformation von w zu w' wird aus einem solchen Teilweg einer von vier Typen (bis auf Homotopie), je nachdem wie die Homotopie die Endpunkte des Teilintervalls in den Basispunkt gezogen hat. Zwei der Typen sind trivial (d.h. nullhomotop), nämlich diejenigen, wo die beiden Endpunkte zur selben Seite gezogen wurden. Die beiden andern Typen sind diejenigen, wo die fragliche Zelle genau einmal in positiver, bzw. negativer Richtung durchlaufen wird.

Die Abbildung ist injektiv. Das ist der schwierigere Teil. Im Falle der Ausrechnung von $\pi_1(S^1, x_0)$ waren wir in der Lage, den folgenden Trick zu verwenden. Für eine Abbildung $w\colon [0,1] \to S^1$ konnten wir ihre *Windungszahl* definieren durch die Betrachtung einer Liftung

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^1 \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "w"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Auf Grund von Dingen, die sich letztlich als Sätze der Überlagerungstheorie herausstellten, konnten wir sicher sein, daß homotope Wege dieselbe Windungszahl $\widetilde{w}(1) - \widetilde{w}(0)$ haben. Es resultierte, daß die durch die "Standard-Wege" gegebene Abbildung von $\mathbb{Z}$ zu $\pi_1(S^1, x_0)$ injektiv war.

Um den Trick zu übertragen, müssen wir uns auf irgendeine Weise nun eine Überlagerung von dem Raum $X(M)$ verschaffen, die die Rolle der Abbildung $p : \mathbb{R}^1 \to S^1$ übernehmen kann. Das ist nicht so hoffnungslos, wie es zunächst scheinen mag. Wir wissen ja, auf Grund von allgemeinen Sätzen der Überlagerungstheorie, daß z.B. die universelle Überlagerung eines Raumes X (vorausgesetzt, X ist "vernünftig") immer auf die folgende Weise, *nur mit Hilfe von* X, beschrieben werden kann: ein Punkt von $\widetilde{X}$ besteht aus einem Paar von Daten in X, nämlich einem Punkt dort, und einer Homotopieklasse von Wegen (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von dem Punkt zu dem Basispunkt in X.

Indem wir den Wunsch zum Vater eines Gedankens werden lassen, adaptieren wir diese Methode mit der folgenden Variante: die Wege-Daten in dem Raum $X(M)$ (d.h., mehr oder weniger, die Fundamentalgruppe) ersetzen wir durch das, was wir gerne hätten, nämlich die Elemente der freien Gruppe $\mathrm{F}(M)$. Wir schreiben also nun einen CW-Komplex mit Hilfe solcher Daten hin. Und wir hoffen, daß wir anschließend werden zeigen können, daß es sich um eine Überlagerung von $X(M)$ handelt.

Bezeichne, wie oben, $\mathrm{W}(M)$ die Menge der Worte in dem Alphabet $M \dot\cup \overline{M}$. Bezeichne $\mathrm{W}'(M)$ die Untermenge der *reduzierten* Worte; d.h. derjenigen, wo kein Teilwort der Art $m\,\overline{m}$ oder $\overline{m}\,m$ vorkommt. (Zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir noch nicht, daß jedes Element von $\mathrm{F}(M)$ einen *eindeutigen* Repräsentanten aus $\mathrm{W}'(M)$ hat. Das wird sich, als Nebenprodukt unserer Überlegungen, aber herausstellen.)

Der CW-Komplex $\widetilde{X}(M)$ wird auf die folgende Weise definiert. Die 0-Zellen sind in 1:1 Beziehung zu den reduzierten Worten $\omega \in \mathrm{W}'(M)$. Die 1-Zellen sind in 1:1 Beziehung zu den Paaren bestehend aus einem reduzierten Wort ω und einem zusätzlichen Buchstaben $\beta \in M$. Die Inzidenz ist dabei wie folgt geregelt. Die 1-Zelle (ω, β) ist inzident zu den beiden 0-Zellen ω ('Anfangspunkt' der 1-Zelle) und ω' ('Endpunkt' der 1-Zelle). Dabei ist $\omega' = \omega\,\beta$, wenn dieses Wort reduziert ist. Wenn dagegen das Wort $\omega\,\beta$ nicht reduziert ist, so läßt sich ω offenbar schreiben als $\omega = \omega''\,\overline{\beta}$. In dem Fall ist ω'' reduziert, und ω' wird definiert als ω''.

Eine Abbildung $\widetilde{X}(M) \to X(M)$ ist definiert "durch das Vergessen der $\mathrm{W}'(M)$-Daten". Jede der 0-Zellen von $\widetilde{X}(M)$ wird auf die 0-Zelle von $X(M)$ abgebildet, und die 1-Zelle mit der Nummer (ω, β) wird abgebildet auf diejenige mit der Nummer β.

Wir prüfen nach, daß es sich bei der Abbildung um eine Überlagerung handelt. Dazu nehmen wir als Elementar-Umgebungen in $X(M)$ dieselben offenen Mengen, die auch vorher schon benutzt wurden: die offenen 1-Zellen und zusätzlich die Menge U, die aus $X(M)$ dadurch entsteht, daß aus jeder der 1-Zellen das abgeschlossene mittlere Drittel weggelassen wird.

Lokale Trivialität über einer offenen Zelle von $X(M)$ ist klar: die offene Zelle mit der Nummer β hat als ihr Urbild das Produkt,

$$(\text{offene Zelle mit der Nummer } \beta) \ \times \ \mathrm{W}'(M) \ ,$$

und die Abbildung ist die erste Projektion.

Die lokale Trivialität über der Menge U ist nur wenig komplizierter. Die Menge U hat die folgende explizite Beschreibung:

$$U \ = \ M \times (\tfrac{2}{3}, 1] \ \cup_{M \times \{1\}} \ \{x_0\} \ \cup_{M \times \{0\}} \ M \times [0, \tfrac{1}{3}) \ .$$

Ihr Urbild $\widetilde{U}$ hat eine entsprechende Beschreibung als

$$\mathrm{W}'(M) \times M \times (\tfrac{2}{3}, 1] \ \cup_{\mathrm{W}'(M) \times M \times \{1\}} \ \mathrm{W}'(M) \ \cup_{\mathrm{W}'(M) \times M \times \{0\}} \ \mathrm{W}'(M) \times M \times [0, \tfrac{1}{3}) \ ,$$

wobei die beiden Verklebe-Abbildungen gegeben sind durch

$$\mathrm{W}'(M) \times M \times \{0\} \ \longrightarrow \ \mathrm{W}'(M) \quad , \quad (\omega, \beta) \ \longmapsto \ \omega$$

und

$$\mathrm{W}'(M) \times M \times \{1\} \ \longrightarrow \ \mathrm{W}'(M) \quad , \quad (\omega, \beta) \ \longmapsto \ \omega' \ ;$$

$$\text{dabei ist (wie oben)} \quad \begin{cases} \omega' = \omega\, \beta \ , & \text{wenn } \ \omega\, \beta \ \text{ reduziert ist;} \\ \omega = \omega'\, \overline{\beta} \ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Trivialisierung

$$\widetilde{U} \ \longrightarrow \ U \times \mathrm{W}'(M)$$

bekommt man nun durch Zusammenkleben der folgenden Abbildungen:

Auf dem Teil $\mathrm{W}'(M) \times M \times [0, \frac{1}{3})$ ist die Abbildung diejenige, die das Tripel (ω, β, x) abbildet auf das Paar $(\,(\beta, x)\,,\,\omega\,)$.

Auf dem Teil $\mathrm{W}'(M) \times M \times (\frac{2}{3}, 1]$ ist die Abbildung so gegeben: (ω, β, x) wird abgebildet auf das Paar $(\,(\beta, x)\,,\,\omega'\,)$. Diese Teil-Abbildung ist ebenfalls ein Isomorphismus: denn für jedes β ist es richtig, daß die Abbildung

$$\omega \ \longmapsto \ \omega'$$

ein Isomorphismus ist.

Nachdem nun geklärt ist, daß die Abbildung $\widetilde{X}(M) \to X(M)$ eine Überlagerung ist, sind wir auch in der Lage, die für Überlagerungen geltenden allgemeinen Sätze anzuwenden (da $X(M)$, als CW-Komplex, die Voraussetzung erfüllt, ein im Sinne der Überlagerungstheorie 'vernünftiger' Raum zu sein: "lokal weg-zusammenhängend", "semi-lokal einfach-zusammenhängend").

Das Urbild des Basispunktes $\{x_0\}$ ist die Menge $\mathrm{W}'(M)$. Auf dieser Menge operiert, per Wege-Liftung, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X(M), x_0)$. Per Komposition mit der Abbildung $\mathrm{F}(M) \to \pi_1(X(M), x_0)$ bekommen wir daraus eine Operation von $\mathrm{F}(M)$. Sie hat die folgende Beschreibung: Sei $\beta \in M$. Das davon in $\mathrm{F}(M)$ repräsentierte Element geht auf das Element in $\pi_1(X(M), x_0)$, das von der durch β indizierten 1-Zelle repräsentiert wird. Die Aktion ist ablesbar aus den oben angegebenen Isomorphismen. Es resultiert, daß die Aktion die obige Abbildung ist,

$$\omega \longmapsto \omega' \quad , \qquad \text{wo} \quad \begin{cases} \omega' = \omega\,\beta \ , & \text{wenn } \ \omega\,\beta \ \text{ reduziert ist;} \\ \omega = \omega'\,\overline{\beta} \ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere geht der Basispunkt $\widetilde{x}_0$ in $\widetilde{X}(M)$ (das leere Wort) durch die Aktion mit einem reduzierten Wort ω über in eben dieses reduzierte Wort ω.

Es bleibt nur noch, die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft zitieren: die fundamentale Tatsache, daß die Aktion eines geschlossenen Weges nur abhängt von seiner Homotopieklasse. Da zwei verschiedene reduzierte Worte durch ihre Operation auf dem Basispunkt $\widetilde{x}_0$ zwei verschiedene Punkte im Urbild von x_0 ergeben, sind notwendigerweise die beiden Bild-Elemente in $\pi_1(X(M), x_0)$ verschieden. Da jedes Element von $\mathrm{F}(M)$ von einem reduzierten Wort repräsentiert ist, resultiert daraus die Injektivität der Abbildung $\mathrm{F}(M) \to \pi_1(X(M), x_0)$.

Als Nebenprodukt resultiert ein Beweis für die Tatsache, daß zwei verschiedene reduzierte Worte tatsächlich auch immer zwei verschiedene Elemente der freien Gruppe $\mathrm{F}(M)$ repräsentieren. □

Sei X ein CW-Komplex. Ein *Baum* in X ist ein Unterkomplex T mit den folgenden Eigenschaften:

— T hat Dimension ≤ 1,

— T ist einfach-zusammenhängend.

Ein Baum in X heißt *maximal*, wenn er alle 0-Zellen von X enthält.

Satz. *Jeder zusammenhängende CW-Komplex X enthält einen maximalen Baum.*

Beweis. Sei T ein Baum in X. Wenn T nicht maximal ist, dann gibt es eine 0-Zelle x_1 in X, die nicht in T enthalten ist. Ein zusammenhängender CW-Komplex ist auch weg-zusammenhängend. Also gibt es einen Weg w, der x_1 mit einem Punkt in T verbindet; o.B.d.A. (zellulärer Approximations-Satz) verläuft w ganz im 1-Skelett. Sei $b \in [0,1]$ der kleinste Wert, so daß $w(b) \in T$. Sei $a \in [0,b]$ der größte Wert, so daß $w(a)$ im 0-Skelett liegt, aber nicht in T. Es ist dann $w \,\big|\, [a,b]$ ein Weg, der bei einer 0-Zelle außerhalb T anfängt, der bis zu seinem Ende ganz außerhalb T verläuft und der in T aufhört. Er hört, notwendigerweise, bei einer 0-Zelle von T auf, und er verläuft, abgesehen von seinen Endpunkten, ganz innerhalb einer einzigen 1-Zelle.

Es gibt folglich eine 1-Zelle, die zwei verschiedene 0-Zellen verbindet, von denen die eine in T liegt, die andere hingegen nicht; die 1-Zelle selbst liegt auch nicht in T. Diese beiden Zellen nun können wir zu T hinzunehmen: die 1-Zelle und die nicht in T liegende 0-Zelle, mit der sie inzident ist. Es ist klar (oder?), daß der neue Unterkomplex,

$$T_1 \ = \ T \ \textit{plus} \text{ diese beiden Zellen } ,$$

wieder ein Baum ist.

Wenn T_1 nicht ein maximaler Baum ist, können wir diesen Schritt wiederholen. Wenn X nur endlich viele 0-Zellen außerhalb T hat, dann muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen. Andernfalls können wir das Verfahren unendlich oft (d.h. induktiv) verwenden, um eine aufsteigende Folge von Bäumen zu konstruieren,

$$T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots \ .$$

Es ist klar (oder?), daß in dem Fall der Unterkomplex

$$T' \ = \ \bigcup_n T_n$$

auch wieder ein Baum ist.

Wenn T' nicht ein maximaler Baum ist, dann beginnen wir mit dem Verfahren wieder ganz von vorne: der Baum wird erst ein bißchen vergrößert, dann immer mehr, und schließlich nehmen wir wieder eine Vereinigung.

Es ist denkbar, daß das Verfahren SEHR oft wiederholt werden muß (z.B. sogar mehr als abzählbar oft). Das heißt dann *transfinite Induktion*.

In den Grundlagen der Mathematik ist eine elegante Alternative bereitgestellt, um Schlußweisen dieser Art prägnant zu formulieren. Das *Lemma von* Zorn sagt, um die Existenz eines maximalen Baumes sicherzustellen, genügt es, folgendes zu zeigen: Zu einem *total geordneten* System von Bäumen (total geordnet durch Inklusion) gibt es einen Baum, der alle die Bäume des Systems enthält. Das ist aber klar (oder?): man nimmt die Vereinigung. □

Satz. (1) *Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension ≤ 1. Die Fundamentalgruppe von X* (an irgendeinem Basispunkt) *ist eine freie Gruppe.*

(2) *Sei T ein maximaler Baum in X. Sei M die Menge derjenigen 1-Zellen von X, die nicht in dem maximalen Baum T liegen. Die Fundamentalgruppe von X ist isomorph zu der freien Gruppe* $\mathrm{F}(M)$.

Beweis. Als einfach-zusammenhängender CW-Komplex der Dimension ≤ 1 ist der maximale Baum T ein kontrahierbarer CW-Komplex. Sei $X' = X/T$ der Quotienten-CW-Komplex. Nach dem Klebelemma ist die Quotienten-Abbildung $X \to X'$ eine Homotopie-Äquivalenz, insbesondere also auch ein Isomorphismus der Fundamentalgruppe (für jeden Basispunkt in X). Der Quotienten-Komplex X' hat nur eine einzige 0-Zelle, und die Menge M' seiner 1-Zellen entspricht der Menge M derjenigen 1-Zellen von X, die nicht in T liegen. Der obige Satz ist also anwendbar; er ergibt daß $\pi_1(X', x_0')$ isomorph ist zu der freien Gruppe $\mathrm{F}(M')$. Diese wiederum ist isomorph zu der freien Gruppe $\mathrm{F}(M)$, da M und M' isomorphe Mengen sind. □

Als Abschweifung erhalten wir eine gruppentheoretische Anwendung, den *Satz von* Kurosh (der direkte, gruppentheoretische Beweis davon ist ziemlich kompliziert):

Korollar. *Sei F eine freie Gruppe, $G \subset F$ eine Untergruppe. G ist eine freie Gruppe.*

Beweis. Es gibt eine Menge M derart, daß F isomorph ist zu der von M erzeugten freien Gruppe $\mathrm{F}(M)$. F ist also auch isomorph zu der Fundamentalgruppe von $X(M)$ (dem oben diskutierten CW-Komplex mit einer 0-Zelle und der durch M indizierten Menge von 1-Zellen). Die Gruppe G ist damit isomorph zu einer Untergruppe der Fundamentalgruppe von $X(M)$. Überlagerungstheorie nun sagt, daß jede Untergruppe der Fundamentalgruppe herkommt von der Fundamentalgruppe eines geeigneten zusammenhängenden Überlagerungsraumes; das trifft insbesondere auf G zu. Der Überlagerungsraum ist wieder ein CW-Komplex der Dimension ≤ 1. Seine Fundamentalgruppe ist also, nach dem Satz, eine freie Gruppe. □

Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex, sei X^1 das 1-Skelett davon. Nach dem vorigen ist $\pi_1(X^1, x_0)$ eine freie Gruppe; sie ist isomorph zu $\mathrm{F}(M)$, wenn T einen maximalen Baum in X bezeichnet, und M das System derjenigen 1-Zellen von X, die nicht in T liegen. Zu jeder der 2-Zellen von X gehört eine Anhefte-Abbildung $S^1 \to X^1$, und damit ein Element von $\pi_1(X^1, x_0)$, das wohldefiniert ist bis auf Konjugation (oder, etwas anders gesagt, eine Konjugationsklasse in $\pi_1(X^1, x_0)$). Jede solche Konjugationsklasse hat als Repräsentanten ein Wort in dem Alphabet $M \dot{\cup} \overline{M}$ (Elemente von M und deren formal-inverse). Sei R ein System von Worten, das für jede 2-Zelle von X einen solchen Repräsentanten enthält.

Satz. $\{\mathrm{M}\,;\mathrm{R}\}$ *ist eine Gruppen-Präsentation von* $\pi_1(X, x_0)$.

Korollar. *Jede Gruppe G ist die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden CW-Komplexes.*

Beweis. Die Gruppe G hat eine Gruppen-Präsentation. Der Satz sagt, wie (und daß!) eine solche aus einer Zellenstruktur abgelesen werden kann. □

Beweis des Satzes (Skizze). Nach dem zellulären Approximations-Satz ist die Abbildung

$$\mathrm{F}(M) \;\approx\; \pi_1(X^1, x_0) \;\longrightarrow\; \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Die in R aufgelisteten Worte werden in $\pi_1(X, x_0)$ trivial: das ist das, was die anzuheftenden 2-Zellen besorgen. Was noch gemacht werden muß, ist der Nachweis, daß die resultierende Abbildung

$$\mathrm{F}(M) \big/ \mathrm{N}(R) \;\longrightarrow\; \pi_1(X, x_0)$$

nicht nur surjektiv ist, sondern auch injektiv (wo wieder $\mathrm{N}(R)$ die normale Hülle von R bezeichnet). Dazu nimmt man eine geschlossene Kurve in X^1, nimmt an, daß sie in X (folglich, nach dem zellulären Approximations-Satz, auch im 2-Skelett X^2) nullhomotop ist, und analysiert eine Null-Homotopie; d.h. eine Fortsetzung dieser Abbildung zu einer Abbildung $D^2 \to X^2$. Das geht ganz ähnlich wie der Beweis des Homotopie-Additions-Satzes in der Dimension 2, nur daß man jetzt auf Basispunkte achten muß. Die Details lassen wir weg. □

Zusatz S. 71-72

Sei G Gruppe, mit neutralem Element 1. Seien x und y Elemente von G. Es gelte

$$(1) \quad x\,y^2 \;=\; y^3\,x \qquad \textit{und} \qquad (2) \quad y\,x^2 \;=\; x^3\,y \ .$$

Dann ist $x = y = 1$.

Beweis. Wegen (2) ist $y \;=\; x^3\,y\,x^{-2}$. Einsetzen in (1) liefert

$$x\left(x^3\,y\,x^{-2}\right)^2 \;=\; \left(x^3\,y\,x^{-2}\right)^3 x \ ,$$

also

$$x^4\,y\,x\,y\,x^{-2} \;=\; x^3\,y\,x\,y\,x\,y\,x^{-1} \ ,$$

folglich

$$x\,y\,x\,y \;=\; y\,x\,y\,x\,y\,x \ ,$$

das heißt

$$(3) \qquad (x\,y)^2 \;=\; (y\,x)^3 \ .$$

Auf die gleiche Weise folgt, per Symmetrie, auch

$$(4) \qquad (y\,x)^2 \;=\; (x\,y)^3 \ .$$

Seien α und β definiert als $\alpha := x\,y$ und $\beta := y\,x$. Die Gleichungen (3) und (4) sagen dann $\alpha^2 = \beta^3$ und $\alpha^3 = \beta^2$. Es folgt

$$\beta^2 \;=\; \alpha^3 \;=\; \alpha^2\,\alpha \;=\; \beta^3\,\alpha \ ,$$

das heißt, α und β sind invers zueinander, $\beta^{-1} \;=\; \alpha$. Also auch

$$y\,x \;=\; (x\,y)^{-1} \;=\; y^{-1}\,x^{-1} \ .$$

Dies, in (2) eingesetzt, ergibt

$$x^3\,y \;=\; y\,x^2 \;=\; (y\,x)\,x \;=\; y^{-1}\,x^{-1}\,x \;=\; y^{-1} \ ,$$

also (5) $x^3 \;=\; y^{-2}$. Andererseits besagt $\beta\,\alpha \;=\; 1$ auch $1 \;=\; (yx)(xy) \;=\; y\,x^2\,y$ und folglich $x^2 \;=\; y^{-2}$. Zusammen mit (5) ergibt das

$$x^2 \;=\; y^{-2} \;=\; x^3 \ ,$$

also $x \;=\; 1$. Dies eingesetzt in die Gleichung (1) ergibt schließlich auch $y \;=\; 1$.

Vorgegebene Homotopiegruppen

Sei G eine Gruppe. Dann gibt es, wie wir gesehen haben, einen zusammenhängenden CW-Komplex (z.B. einen solchen der Dimension 2), dessen Fundamentalgruppe die vorgegebene Gruppe G ist.

Wie wir auch gesehen haben, gibt es die Möglichkeit, durch das Anheften weiterer Zellen die Homotopiegruppen in den Dimensionen 2, 3, usw. zu Null zu machen, ohne die Fundamentalgruppe noch zu ändern (die Konstruktion des 1-Co-Skeletts).

Insgesamt gibt es also zu der vorgegebenen Gruppe G einen zusammenhängenden CW-Komplex, der die Gruppe G als Fundamentalgruppe hat und dessen höhere Homotopiegruppen sämtlich trivial sind. Einen solchen Raum bezeichnet man auch als einen *Eilenberg-MacLane-Raum* zu der Gruppe G und zu der Dimension 1. Als abkürzende Notation ist die Bezeichnung $K(G;1)$ für einen solchen Raum gebräuchlich; also

$$\pi_i K(G;1) \quad = \quad \begin{cases} G\,, & \text{wenn } i=1, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es stellt sich heraus, daß der Raum durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, bis auf Homotopie-Äquivalenz (im *punktierten* Sinn: sowohl die Abbildungen als auch die Homotopien respektieren den Basispunkt). Das ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz. *Seien G und G' Gruppen. Es gibt eine 1:1 Beziehung zwischen*
— *Gruppenhomomorphismen $G \to G'$ und*
— *Homotopieklassen punktierter Abbildungen $K(G,1) \to K(G',1)$.*

Der Satz impliziert die Eindeutigkeit (bis auf Homotopie). Denn sei $K(G,1)$ ein solcher CW-Komplex, sei $K'(G,1)$ ein anderer. Nach dem Satz gibt es eine Abbildung $f : K(G,1) \to K'(G,1)$, die der identischen Abbildung von G entspricht. Diese Abbildung nun induziert Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen. Sie ist also eine Homotopie-Äquivalenz nach dem Whitehead-Satz.

Beweis des Satzes. Eine Homotopieklasse punktierter Abbildungen von $K(G,1)$ zu $K(G',1)$ induziert einen Homomorphismus $G \to G'$. Wir zeigen, diese Zuordnung ist (1) surjektiv und (2) injektiv.

Dazu machen wir zunächst eine spezielle Annahme, von der wir uns aber später befreien werden. Nämlich wir nehmen an, daß der CW-Komplex $K(G,1)$ auf die folgende Weise konstruiert ist (wir wissen, daß das geht): Ausgehend von einer Präsentation von G hat man an eine einzige 0-Zelle zunächst 1-Zellen angeheftet (je eine für jede Erzeugende) und dann an das so entstandene 1-Skelett 2-Zellen (je eine für jede Relation);

und schließlich wurden Zellen der Dimensionen 3, 4, usw. angeheftet, um die höheren Homotopiegruppen zu Null zu machen.

(1) *Surjektivität.* Zu dem Homomorphismus $G \to G'$ konstruiert man eine Abbildung $K(G,1) \to K(G',1)$ wie folgt. Die 0-Zelle geht auf den Basispunkt (wir hätten da gar keine andere Wahl). Jede 1-Zelle in $K(G,1)$ bestimmt einen geschlossenen Weg (da es nur eine 0-Zelle gibt), sie bestimmt also ein Element von $\pi_1 K(G,1) = G$ und damit, über den Homomorphismus, auch ein Element von $G' = \pi_1 K(G',1)$. Für dieses Element nehmen wir irgendeinen repräsentierenden geschlossenen Weg (sagen wir, im 1-Skelett), und auf den bilden wir die 1-Zelle ab.

Die Fundamentalgruppe des 1-Skeletts von $K(G,1)$ ist die freie Gruppe F, die von der Menge der 1-Zellen erzeugt ist; und eine Abbildung einer freien Gruppe ist eindeutig bestimmbar, und bestimmt, durch das, was sie auf den erzeugenden Elementen tut. Die durch das Verhalten auf den Erzeugenden vorgegebene Abbildung $F \to G'$ ist also dasselbe wie die zusammengesetzte Abbildung $F \to G \to G'$ (denn auf den Erzeugenden ist das so; nach Definition). Der Kern der Abbildung $F \to G$ wird folglich trivial nach G' abgebildet. Insbesondere wird jede der Relationen trivial nach G' abgebildet: jede der Anhefte-Abbildungen $S^1 \to$ 1-Skelett, gefolgt von der auf dem 1-Skelett schon definierten Abbildung, ist eine null-homotope Abbildung. Die Abbildung des 1-Skeletts kann also auf die 2-Zellen von $K(G,1)$ erweitert werden.

Die Erweiterung auf die Zellen höherer Dimension ist aus trivialen Gründen möglich. Z.B. eine Anhefte-Abbildung für eine 3-Zelle von $K(G,1)$ ist eine Abbildung von S^2 in das 2-Skelett von $K(G,1)$. Die Zusammensetzung mit der schon konstruierten Abbildung des 2-Skeletts nach $K(G',1)$ ist null-homotop, da $K(G',1)$ triviales π_2 hat.

(2) *Injektivität.* Sind f_0 und f_1 zwei Abbildungen von $K(G,1)$ zu $K(G',1)$, die dieselbe Abbildung $G \to G'$ induzieren, so ist behauptet, daß die beiden Abbildungen zueinander homotop sind. Die behauptete Homotopie wird induktiv über die Zellen von $K(G,1)$ definiert. Wir beginnen mit der trivialen Homotopie der 0-Zelle am Basispunkt (da haben wir keine andere Wahl).

Für jede der 1-Zellen ergibt die Abbildung f_0 einen geschlossenen Weg in $K(G',1)$, und f_1 ergibt einen anderen. Diese beiden geschlossenen Wege sind homotop wegen unserer Annahme, daß f_0 und f_1 dieselbe Abbildung $G \to G'$ induzieren. Folglich kann die Homotopie auf das 1-Skelett erweitert werden.

Die Erweiterung der Homotopie auf den ganzen Raum ist nun wieder aus trivialen Gründen möglich. Z.B. für eine 2-Zelle geht es darum, eine Abbildung auf $D^2 \times [0,1]$ zu finden, die eine vorgegebene Abbildung auf dem Rand davon, d.h. auf

$$D^2 \times \{0\} \;\cup\; \partial D^2 \times [0,1] \;\cup\; D^2 \times \{1\} \;,$$

erweitert. Nun ist das eine 2-Sphäre, die Abbildung ist also null-homotop, da $K(G',1)$ triviales π_2 hat. Also existiert die Erweiterung.

Wir müssen uns noch von der speziellen Annahme über den Raum $K(G,1)$ befreien. Dazu nehmen wir einen solchen speziellen Raum, $K''(G,1)$. Es gibt dann eine Homotopie-Äquivalenz $K''(G,1) \to K(G,1)$; und damit transportiert sich alles. $\square$

Höhere Homotopiegruppen sind abelsch. Wenn man "höhere" Eilenberg-MacLane-Räume betrachten will, so sollte man demgemäß nicht von einer vorgegebenen Gruppe ausgehen, sondern von einer vorgegebenen *abelschen* Gruppe.

Sei A eine abelsche Gruppe. Sei $n \geq 2$. Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* $K(A,n)$ ist, nach Definition, ein zusammenhängender CW-Komplex mit

$$\pi_i K(A,n) \quad = \quad \begin{cases} A\,, & \text{wenn } i = n, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz. *Sei A abelsche Gruppe, sei $n \geq 2$.* (1) *Ein Eilenberg-MacLane-Raum $K(A,n)$* existiert. (2) *Je zwei Eilenberg-MacLane-Räume* (zu gegebenem A und n) *sind zueinander homotopie-äquivalent.*

Beweis. Wenn X ein CW-Komplex ist, dessen $(n-1)$-Skelett trivial ist, und der ansonsten nur Zellen in den Dimensionen n und $n+1$ hat, mit Zellen indiziert durch Indexmengen J_n und J_{n+1}, so reduziert der zelluläre Kettenkomplex (relativ Basispunkt) sich auf eine Abbildung

$$\mathbb{Z}[J_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[J_n]$$

(wo $\mathbb{Z}[J]$ die von einer Menge J erzeugte freie abelsche Gruppe bezeichnet). Für die Existenz-Behauptung ist nun die Idee, einen solchen Zellenkomplex derart anzugeben, daß der Kokern der Abbildung die vorgegebene abelsche Gruppe A ist. Der Zellenkomplex wird dann diesen Kokern, also A, als n-te Homologiegruppe haben; folglich, nach dem Hurewicz-Satz, auch als n-te Homotopiegruppe. Aus dem Zellenkomplex bekommt man den gewünschten Eilenberg-MacLane-Raum, indem man die höheren Homotopiegruppen zu Null macht; also durch die Konstruktion des n-Co-Skeletts.

Jede abelsche Gruppe ist Quotient (= Bild einer surjektiven Abbildung von) einer *freien* abelschen Gruppe. Es gibt deshalb eine freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[J_n]$ und eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z}[J_n] \to A$; und, weiter, eine freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[J_{n+1}]$ und eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{Z}[J_{n+1}] \longrightarrow \mathrm{Kern}(\ \mathbb{Z}[J_n] \to A\ )\ .$$

Zusammen mit der Inklusion $\mathrm{Kern}(\mathbb{Z}[J_n] \to A) \to \mathbb{Z}[J_n]$ bekommen wir so eine Abbildung $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \to \mathbb{Z}[J_n]$.

(Tatsächlich ist folgendes richtig: eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist selbst wieder eine freie abelsche Gruppe. Wir könnten deshalb, wenn wir darauf Wert legten, die letztere Abbildung sogar als eine *injektive* Abbildung bekommen. Das ist aber nicht so wichtig für uns an dieser Stelle.)

Wir definieren nun einen CW-Komplex X auf die folgende Weise. Das $(n-1)$-Skelett besteht nur aus dem Basispunkt. An den Basispunkt werden n-Zellen, indiziert durch die Menge J_n, angeheftet. Bezeichne X^n dieses n-Skelett. Die Homotopiegruppen von X^n unterhalb von Nummer n sind trivial. Da wir auch $n \geq 2$ vorausgesetzt haben, ist, nach dem Hurewicz-Satz, die n-te Homotopiegruppe von X^n dasselbe wie die n-te Homologiegruppe; diese wieder ist dasselbe (Berechnung über den zellulären Kettenkomplex) wie die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[J_n]$.

Es werden nun $(n{+}1)$-Zellen an X^n angeheftet: je eine $(n{+}1)$-Zelle für jedes Element der Menge J_{n+1}. Sei a ein solches Element.

Es gehört dazu ein erzeugendes Element, $(+1)\,a$, in $\mathbb{Z}[J_{n+1}]$; und damit, über den Homomophismus $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \to \mathbb{Z}[J_n]$, ein Element in $\mathbb{Z}[J_n]$; und damit auch, wegen der genannten Isomorphismen $\mathbb{Z}[J_n] \approx H_n(X^n)$ und $H_n(X^n) \approx \pi_n(X^n, x_0)$, ein Element von $\pi_n(X^n, x_0)$.

Sei $\alpha_a : (S^n, s_0) \to (X^n, x_0)$ irgendeine repräsentierende Abbildung für dieses Element. Wir benutzen α_a als Anhefte-Abbildung für die durch a indizierte $(n{+}1)$-Zelle.

Sei X ($= X^{n+1}$) der resultierende CW-Komplex. Wir rechnen seinen zellulären Kettenkomplex aus, um uns davon zu überzeugen, daß es der richtige ist. Bezeichne

$$\Big(\coprod_{a\in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in J_{n+1}} S^n \Big) \longrightarrow \big(X\,,\ X^n \big)$$

die charakteristische Abbildung der Gesamtheit der $(n{+}1)$-Zellen. Sei X' definiert als X ohne die Mittelpunkte der $(n{+}1)$-Zellen. Von den vier Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(\, X\,,\ X^n\,) & \longrightarrow & H_{n+1}(\, X\,,\ X'\,) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_{n+1}\big(\coprod_{a\in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in J_{n+1}} S^n\big) & \longrightarrow & H_{n+1}\big(\coprod_{a\in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in J_{n+1}} (D^{n+1}{-}0)\big)
\end{array}$$

sind drei Isomorphismen (Inklusionen homotopie-äquivalenter Räume; Ausschneidungs-Satz für die rechte vertikale Abbildung), die vierte ist es folglich auch. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(\, X\,,\ X^n\,) & \longrightarrow & H_n(\, X^n\,,\ X^{n-1}\,) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_{n+1}\big(\coprod_{a\in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in J_{n+1}} S^n\big) & \longrightarrow & H_n\big(\coprod_{a\in J_{n+1}} S^n\big)
\end{array}$$

ist also die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus. Die horizontale Abbildung unten ist es ebenfalls. Es folgt, daß die obere Zeile (d.h. der zelluläre Kettenkomplex von X, relativ zum Basispunkt) als eine isomorphe Re-Inkarnation die rechte Spalte hat: die nun ist, nach Konstruktion, durch die Abbildung $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \to \mathbb{Z}[J_n]$ gegeben.

Aus dem CW-Komplex X bekommen wir, wie schon erwähnt, einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(A,n)$ durch die Konstruktion des n-Co-Skeletts; das heißt, indem wir Zellen der Dimensionen $n{+}2$, $n{+}3$, usw. anheften, um die Homotopiegruppen in den Dimensionen $n{+}1$, $n{+}2$, usw. zu Null zu machen. Soviel zur Existenz.

Die Eindeutigkeit (bis auf Homotopie) resultiert mit demselben Trick wie im vorigen Satz: Wenn $K'(A,n)$ ein weiterer Eilenberg-MacLane-Raum ist, so konstruieren wir, durch Induktion über die Zellen, eine Abbildung $K(A,n) \to K'(A,n)$, die Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert ("aufpassen" müssen wir dabei nur bei den n-Zellen). Die Abbildung ist dann eine Homotopie-Äquivalenz nach dem Whitehead-Satz. Die Details für diesen Teil lassen wir weg. $\square$

Korollar. *Jede Folge von Gruppen, mit der offensichtlichen Beschränkung* (nämlich von Nummer 2 an sollen die Gruppen alle abelsch sein), *kommt vor als die Folge der Homotopiegruppen eines Raumes.*

Beweis. Man nimmt einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(G_1, 1)$ zu der ersten vorgegebenen Gruppe, danach einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(A_2, 2)$ zu der zweiten vorgegebenen (abelschen!) Gruppe, und so weiter. Das Produkt all dieser Räume hat dann die behauptete Eigenschaft. — Wegen der Möglichkeit, zu einer CW-Approximation überzugehen, gibt es auch einen CW-Komplex mit derselben Eigenschaft.

Mit ein wenig mehr Mühe kann man die Verwendung des unendlichen Produktes an dieser Stelle vermeiden, wenn man das will:

Jeder der genannten Eilenberg-Mac-Lane-Räume ist o.B.d.A. ein CW-Komplex. Nun ist das Produkt von zwei (oder endlich vielen) CW-Komplexen zwar im allgemeinen nicht wieder ein CW-Komplex (wenn man die Produkt-Topologie verwendet; die Faktoren werden ja i.a. nicht lokal-kompakt sein), man kann aber, wie wir wissen, durch eine Um-Topologisierung einen CW-Komplex daraus machen. Diese Prozedur ändert nicht den "schwachen Homotopie-Typ" (da die *endlichen* Unterkomplexe bei dem Um-Topologisieren ungeändert bleiben).

Das Produkt der ersten n Faktoren nun kann aufgefaßt werden als Unterraum von dem Produkt der ersten $n+1$ Faktoren (man verwendet die Inklusion des ein-punktigen Raumes "Basispunkt" im letzten Faktor). Auf die Weise bekommt man ein aufsteigendes System von Räumen: es werden mehr und mehr Faktoren verwendet. Entsprechend viele der vorgegebenen Gruppen treten in den Räumen als Homotopiegruppen auf; und, beim Vereinigungs-Raum, schließlich alle. $\square$

Wir werden nun die ganze Konstruktion (die von den Räumen mit vorgegebenen Homotopiegruppen) noch ein wenig modifizieren. Die Modifikation besteht darin, die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen explizit mit in die Betrachtung einzubeziehen. Wir werden danach dann in der Lage sein, das obige Beispiel noch einmal anzugeben, mit dieser Modifikation. Das Resultat davon kann man schlicht so umreißen: Es ist alles möglich.

Vorher soll aber noch ein konkretes Beispiel explizit beschrieben werden.

Beispiel. Wir nehmen eine 1-Sphäre S^1 und eine 2-Sphäre S^2. Wir bilden die Ein-Punkt-Vereinigung dieser beiden, $S^1 \vee S^2$.

Die Fundamentalgruppe von $S^1 \vee S^2$ ist dieselbe wie die von dem Unterraum S^1. Denn einerseits ist die Fundamentalgruppe von S^1 ein Retrakt (da S^1 Retrakt von $S^1 \vee S^2$ ist), andererseits kann mehr auch nicht da sein (da nach dem zellulären Approximations-Satz alle Elemente der Fundamentalgruppe vom 1-Skelett herkommen).

Die Homologie (ganz-zahlige Koeffizienten) von $S^1 \vee S^2$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ in den Dimensionen 0, 1, 2, und ist Null sonst. Denn einerseits ist die Homologie von S^1 ein Retrakt; und die von S^2 auch. Andererseits kann es mehr nicht geben (der zelluläre

Kettenkomplex für die 'offensichtliche' Zellenstruktur hat nur je ein Erzeugendes in den Dimensionen 0, 1 und 2).

Die zweite Homotopiegruppe von $S^1 \vee S^2$ bestimmt sich unter Hinzuziehung von $\mathrm{Univ}(S^1 \vee S^2)$, der universellen Überlagerung. Es ist $\pi_2 \mathrm{Univ}(S^1 \vee S^2) \approx \pi_2(S^1 \vee S^2)$ (die höheren Homotopiegruppen sind bei einer Überlagerung dieselben wie bei dem Raum auch) und es ist $\pi_2 \mathrm{Univ}(S^1 \vee S^2) \approx H_2 \mathrm{Univ}(S^1 \vee S^2)$ (nach dem Hurewicz-Satz; die universelle Überlagerung ist ja einfach-zusammenhängend).

Die universelle Überlagerung von S^1 ist $\mathbb{R}$ (wo das Urbild des Basispunktes von S^1 durch die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ gegeben sein soll). Man bekommt hieraus eine (oder "die") universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$, indem man an jeden Punkt im Urbild des Basispunktes ein Exemplar S^2 anheftet. Das Resultat der Konstruktion kann man sich vorstellen als eine lange Schnur mit einer Reihe von daran hängenden Lampions,

$$\mathbb{R} \cup_{\mathbb{Z} \times \{s_0\}} \mathbb{Z} \times S^2 \ .$$

Die Decktransformationengruppe (isomorph zur Fundamentalgruppe; und damit zu $\mathbb{Z}$) operiert durch *Translation*; auf den "Lampions" ist die Operation *einfach-transitiv*.

Der zelluläre Kettenkomplex (relativ zu dem kontrahierbaren Unterraum $\mathbb{R}$) ist trivial außerhalb Dimension 2. In Dimension 2 gibt es unendlich viele Erzeugende. Die Kettengruppe (und damit auch die zweite Homologiegruppe) ist also die direkte Summe von unendlich vielen Exemplaren $\mathbb{Z}$.

Über die Operation der Decktransformationengruppe wird die zweite Homologiegruppe zu einem *Modul* über dem ganz-zahligen Gruppenring dieser Gruppe; die zweite Homotopiegruppe damit auch (Natürlichkeit der Hurewicz-Abbildung bezüglich Decktransformationen). Die Modul-Struktur "oben" (in der universellen Überlagerung) entspricht, wie wir wissen, der Modulstruktur "unten": der Struktur von π_2 als Modul über $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^2)]$, dem Gruppenring der Fundamentalgruppe.

Die erwähnte Tatsache, daß die Decktransformationengruppe einfach-transitiv auf der Menge der Erzeugenden operiert, übersetzt sich hier nun darin, daß der fragliche Modul der freie Modul vom Rang 1 ist. □

Die in diesem Beispiel beschriebenen Phänomene werden nun ein wenig fortgeführt. Das liefert die wesentlichen Dinge im Beweis des folgenden Satzes:

Satz. *Sei G Gruppe; sei A abelsche Gruppe, versehen mit einer Operation von G. Sei $n > 1$. Es gibt einen weg-zusammenhängenden Raum Z mit*

— *G als Fundamentalgruppe,*

— *A als n-ter Homotopiegruppe,*

— *trivialen Homotopiegruppen sonst,*

wobei $\pi_1(Z, z_0) = G$ auf $\pi_n(Z, z_0) = A$ in der vorgegebenen Weise operiert.

Ferner gibt es einen solchen Raum Z derart, daß der Eilenberg-MacLane-Raum $K(G,1)$ davon ein Retrakt ist.

Beweis. Es gibt i.a. viele solche Räume Z (was wir hier nicht beweisen). Unsere Konstruktion ist speziell, und sie liefert automatisch die zum Schluß genannte Eigenschaft (daß $K(G,1)$ Retrakt ist). Es ist richtig, aber auch das werden wir hier nicht beweisen, daß die Konstruktion bis auf Homotopie dadurch eindeutig charakterisiert ist (das Argument ist ähnlich zu dem oben gegebenen für die Eindeutigkeit von $K(G,1)$).

Der Raum Z wird konstruiert durch das Anheften von Zellen der Dimensionen n und $n{+}1$ an einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(G,1)$, um auf diese Weise die vorgegebene n-te Homotopiegruppe zu realisieren; danach werden weitere Zellen angeheftet, um die höheren Homotopiegruppen zu Null zu machen (Konstruktion des n-Co-Skeletts).

Sei, abkürzend, $X = K(G,1)$; ein Raum mit Basispunkt x_0.

Ein Raum Y sei aus X erhalten durch Anheften von n-Zellen, und zwar *triviales Anheften am Basispunkt*. Es ist in dem Fall X Retrakt von Y (die Retraktion bildet die neuen Zellen in den Basispunkt von X ab). Und die Inklusion $X \to Y$ induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen. Denn einmal ist die Fundamentalgruppe von X Retrakt von der von Y; und zum andern induziert die Inklusion $X \to Y$ eine *Surjektion* auf der Fundamentalgruppe (nach dem zellulären Approximations-Satz; da, nach Voraussetzung, $n \geq 2$).

Weiter sei ein Raum Y' aus Y erhalten durch das Anheften von $(n{+}1)$-Zellen. Es ist dann immer noch richtig, daß X Retrakt ist. Denn für jede der neuen Zellen von Y' ist es so, daß die Anhefte-Abbildung, gefolgt von der Retraktion $Y \to X$, eine Abbildung $S^n \to X$ ist; diese Abbildung ist null-homotop (da X Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist, aber andererseits $n > 1$), also läßt die Abbildung sich auf die Zelle fortsetzen. Die Inklusion $X \to Y'$ induziert ebenfalls einen Isomorphismus auf der Fundamentalgruppe.

Die universelle Überlagerung $\widetilde{Y}'$ von Y' kann, wie wir wissen, so beschrieben werden: ein Punkt von $\widetilde{Y}'$ entspricht einem Paar von Daten in Y', bestehend aus

— einem Punkt y in Y';

— einer Homotopieklasse (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen von dem Basispunkt x_0 zu dem Punkt y.

Die universelle Überlagerung $\widetilde{Y}$ von Y hat die analoge Beschreibung. Wegen der Tatsache, daß die Abbildung $\pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(Y', x_0)$ ein Isomorphismus ist, spielt es für einen in Y liegenden Punkt y nun keine Rolle, ob man “Homotopieklasse von Wegen von x_0 zu y” interpretiert als “Weg in Y” oder aber als “Weg in Y'”. Das hat die für uns sehr interessante Konsequenz, daß wir die folgenden beiden Räume miteinander identifizieren können: die universelle Überlagerung $\widetilde{Y}$ von Y einerseits und den Unterraum von $\widetilde{Y}'$ andererseits, der gegeben ist durch das Urbild von $Y \subset Y'$.

Ebenso können wir auch die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ von X identifizieren mit dem Unterraum von $\widetilde{Y}$ (oder von $\widetilde{Y}'$), der über X liegt.

Bezeichne J_n die Indexmenge für die n-Zellen von $Y - X$; und J_{n+1} diejenige für die $(n{+}1)$-Zellen von $Y' - Y$. Aus der Zellenstruktur

$$Y \;=\; X \cup_{J_n \times \partial D^n} J_n \times D^n \qquad \text{bzw.} \qquad Y' \;=\; Y \cup_{J_{n+1} \times \partial D^{n+1}} J_{n+1} \times D^{n+1}$$

ergibt sich, per "Pullback", eine Zellenstruktur in der universellen Überlagerung,

$$\widetilde{Y} \;=\; \widetilde{X} \cup_{\widetilde{J}_n \times \partial D^n} \widetilde{J}_n \times D^n \qquad \text{bzw.} \qquad \widetilde{Y}' \;=\; \widetilde{Y} \cup_{\widetilde{J}_{n+1} \times \partial D^{n+1}} \widetilde{J}_{n+1} \times D^{n+1} \;\; .$$

Diese Zellenstrukturen sind kompatibel mit der Operation der *Decktransformationengruppe* (die wir mit der Gruppe G identifizieren). Insbesondere sind somit auch die Indexmengen $\widetilde{J}_n$ und $\widetilde{J}_{n+1}$ mit einer Operation der Gruppe G versehen.

Über diese Operation kann man etwas sagen. Nämlich für jede der Zellen von $Y' - X$ bilden die darüber liegenden Zellen von $\widetilde{Y}' - \widetilde{X}$ bezüglich der Operation eine *einfach-transitive* G-Menge. Es ist andererseits von den Urbildern aber keines vor den andern ausgezeichnet. Man kann das so ausdrücken: Es gibt Isomorphismen von G-Mengen,

$$\widetilde{J}_n \;\approx\; G \times J_n \qquad \text{und} \qquad \widetilde{J}_{n+1} \;\approx\; G \times J_{n+1} \;,$$

aber diese Isomorphismen sind nicht kanonisch. Eine Auswahl würde darauf hinauslaufen, daß man für jede der Zellen aus $Y' - X$ jeweils einem von deren Urbildern eine ausgezeichnete Rolle zuweist.

Als universelle Überlagerung eines Eilenberg-MacLane-Raumes für die Dimension 1 ist $\widetilde{X}$ ein kontrahierbarer Raum. Aus diesem Raum entsteht $\widetilde{Y}'$ durch das Anheften von n-Zellen und $(n{+}1)$-Zellen. Also ist $\widetilde{Y}'$ $(n{-}1)$-zusammenhängend; insbesondere ist $\widetilde{Y}'$ deshalb auch *einfach-zusammenhängend*, da $n \geq 2$ (alternativ: $\widetilde{Y}'$ ist einfach-zusammenhängend, da es selbst eine universelle Überlagerung, nämlich von Y', ist).

Sei $\widetilde{x}_0$ ein Basispunkt über x_0. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $\widetilde{Y}'$ hängt die Homotopiegruppe $\pi_n(\widetilde{Y}', \widetilde{x}_0)$ nicht wirklich von dem Basispunkt ab: für je zwei Basispunkte sind die Homotopiegruppen zueinander *kanonisch* isomorph.

Es resultiert eine Operation der Decktransformationengruppe auf $\pi_n(\widetilde{Y}', \widetilde{x}_0)$. Unter dem Isomorphismus $\pi_n(\widetilde{Y}', \widetilde{x}_0) \to \pi_n(Y', x_0)$ entspricht diese Operation, wie wir wissen, der Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(Y', x_0)$ auf der Homotopiegruppe $\pi_n(Y', x_0)$.

Andererseits ist die Hurewicz-Abbildung $\pi_n(\widetilde{Y}', \widetilde{x}_0) \to H_n(\widetilde{Y}')$ verträglich mit der Operation der Decktransformationengruppe (Natürlichkeit der Hurewicz-Abbildung). Wegen des $(n{-}1)$-Zusammenhangs von $\widetilde{Y}'$ ist die Hurewicz-Abbildung in diesem Fall auch ein Isomorphismus. Insgesamt ist sie somit also ein Isomorphismus von R-Moduln, wenn

$$R \;=\; \mathbb{Z}[G]$$

den ganz-zahligen Gruppenring von G bezeichnet.

Der zelluläre Kettenkomplex von $\widetilde{Y}'$, relativ zu dem kontrahierbaren Unterraum $\widetilde{X}$, ist nicht-trivial nur in den Dimensionen n und $n{+}1$; er reduziert sich auf zwei Kettengruppen und eine Rand-Abbildung zwischen diesen beiden,

$$\mathbb{Z}[\widetilde{J}_{n+1}] \;\longrightarrow\; \mathbb{Z}[\widetilde{J}_n] \;.$$

Vermöge der Operation der Decktransformationengruppe ist dies eine Abbildung von R-Moduln (wo wieder $R = \mathbb{Z}[G]$). Der Modul $\mathbb{Z}[\widetilde{J}_n]$ ist ein *freier* R-Modul. Nämlich über den obigen (nicht-kanonischen) Isomorphismus von G-Mengen $\widetilde{J}_n \approx G \times J_n$ bekommt man (per "Linearisierung") einen Isomorphismus von R-Moduln

$$\mathbb{Z}[\widetilde{J}_n] \;\approx\; R[J_n] \;,$$

wo $R[J_n]$ den freien R-Modul mit der Basis J_n bezeichnet. Ebenso ist auch $\mathbb{Z}[\widetilde{J}_{n+1}]$ ein freier R-Modul, isomorph zu $R[J_{n+1}]$. — Die Wahl der Basen ist hier un-kanonisch insofern als sie darauf hinausläuft, daß man für jedes Element von J_n bzw. von J_{n+1} eine *Auswahl* treffen muß; nämlich für die dadurch indizierte Zelle muß man von deren Urbildern in der universellen Überlagerung eines auswählen (was, natürlich, nicht weiter schwierig ist).

Die n-te Homologiegruppe von $\widetilde{Y}'$, als *G-Modul*, und damit letztlich auch die n-te Homotopiegruppe als Modul über dem Gruppenring der Fundamentalgruppe, ist gegeben durch den Kokern der Abbildung $R[J_{n+1}] \to R[J_n]$.

Wenn umgekehrt A nun ein vorgegebener R-Modul ist, so gibt es einen freien R-Modul $R[J_n]$ und eine surjektive Abbildung

$$R[J_n] \;\longrightarrow\; A \;;$$

und, weiter, einen freien R-Modul $R[J_{n+1}]$ und eine surjektive Abbildung

$$R[J_{n+1}] \;\longrightarrow\; \mathrm{Kern}(R[J_n] \to A) \;.$$

Insgesamt kann man deshalb den vorgegebenen Modul A realisieren als den Kokern von einer Abbildung von freien R-Moduln,

$$R[J_{n+1}] \;\longrightarrow\; R[J_n] \;.$$

(Im allgemeinen wird es hier allerdings nicht möglich sein, diese Abbildung als *injektive* Abbildung zu wählen. Die Möglichkeit, das zu tun, macht [mehr oder weniger nach Definition] den Begriff der "homologischen Dimension 1" aus.)

Es bleibt nachzuprüfen, daß jede Abbildung vorkommen kann als zellulärer Kettenkomplex in der beschriebenen Weise. Sei also eine solche Abbildung gegeben. Indem wir hinreichend viele n-Zellen trivial an den Basispunkt anheften (je eine für jedes Element von J_n), konstruieren wir den Raum Y als das n-Skelett des gewünschten Raumes. Zu den $(n{+}1)$-Zellen nun, sei $a \in J_{n+1}$.

Dem Element a entspricht ein Erzeugendes $(+1)a$ in dem Modul $R[J_{n+1}]$ und damit, über die Abbildung, ein Element in dem Modul $R[J_n]$. Dieser Modul ist isomorph zu $H_n(\widetilde{Y})$; damit zu $\pi_n(\widetilde{Y}, \widetilde{x}_0)$; und damit schließlich auch zu $\pi_n(Y, x_0)$. Das Element von $\pi_n(Y, x_0)$, das wir uns auf diese Weise verschafft haben, benutzen wir zum Anheften der $(n{+}1)$-Zelle, die dem Element $a \in J_{n+1}$ entspricht.

Es bleibt nachzuprüfen, daß der so konstruierte Raum Y' die vorgegebene Abbildung $R[J_{n+1}] \to R[J_n]$ als zellulären Kettenkomplex (relativ zu $\widetilde{X}$) hat. Diese Nachprüfung haben wir früher gemacht (als die Fundamentalgruppe noch nicht beteiligt war). Das dort betrachtete Diagramm funktioniert hier aber auch:

Sei Y' ($= Y^{n+1}$) der konstruierte CW-Komplex, mit n-Skelett Y ($= Y^n$). Bezeichne

$$(\coprod_{a\in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in J_{n+1}} S^n) \longrightarrow (Y', Y)$$

die charakteristische Abbildung für die Gesamtheit der $(n{+}1)$-Zellen. Darüber, in der universellen Überlagerung, haben wir dann die (induzierte) charakteristische Abbildung

$$(\coprod_{a\in \widetilde{J}_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in \widetilde{J}_{n+1}} S^n) \longrightarrow (\widetilde{Y}', \widetilde{Y}) \ .$$

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(\widetilde{Y}^{n+1}, \widetilde{Y}^n) \arrow[r] & H_n(\widetilde{Y}^n, \widetilde{Y}^{n-1}) \\
H_{n+1}(\coprod_{a\in \widetilde{J}_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a\in \widetilde{J}_{n+1}} S^n) \arrow[u] \arrow[r] & H_n(\coprod_{a\in \widetilde{J}_{n+1}} S^n) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ist nun, wie früher auch, die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus; und die horizontale Abbildung unten ebenfalls. Folglich ist die obere Zeile (der zelluläre Kettenkomplex von $\widetilde{Y}'$, relativ zu dem Unterraum $\widetilde{X}$) isomorph zu der rechten Spalte; und die ist, nach Konstruktion, durch die Abbildung $\mathbb{Z}[\widetilde{J}_{n+1}] \to \mathbb{Z}[\widetilde{J}_n]$ gegeben oder, was bis auf Isomorphie dasselbe ist, $R[J_{n+1}] \to R[J_n]$.

Aus dem Raum Y' bekommen wir, wie schon früher gesagt, den gewünschten Raum Z durch die Konstruktion des n-Co-Skeletts; das heißt, indem wir Zellen der Dimensionen $n{+}2$, $n{+}3$, usw. anheften, um dadurch die Homotopiegruppen in den Dimensionen $n{+}1$, $n{+}2$, usw. zu Null zu machen. Bei jeder dieser Anheftungen läßt sich die Retraktion in den Raum X erweitern, da eben X ein Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist. □

Satz. *Es sei G eine Gruppe; und A_2, A_3, ... eine Folge von abelschen Gruppen, deren jede mit einer G-Aktion versehen ist. Es gibt einen Raum W mit $\pi_1(W, w_0) = G$ und, für $k \geq 2$, $\pi_k(W, w_0) = A_k$* (als abelsche Gruppe mit G-Aktion).

Beweis. W wird definiert als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Räumen W_n, wobei der Raum W_n die vorgegebenen Homotopiegruppen bis zur Nummer n (einschließlich) realisiert. Der Anfang der Folge ist $W_1 = X = K(G, 1)$. Für $n \geq 2$ wird W_n induktiv definiert als die *induzierte Faserung* in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\
W_{n-1} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

wo Z der Raum aus dem vorigen Satz ist, zu G und A_n; und Z' ein dazu homotopieäquivalenter Raum, der Faserung über X ist. Da X Retrakt von Z ist (und daher auch von Z'), folgt, daß auch W_{n-1} Retrakt von W_n ist; das gibt die erforderliche Inklusion $W_{n-1} \to W_n$. Die anderen Nachprüfungen lassen wir weg. □

Mannigfaltigkeiten, Poincaré-Vermutung

Unter den topologischen Räumen interessiert man sich vor allem für die *Mannigfaltigkeiten*, und da in erster Linie für die *kompakten*. Folgende Terminologie hat sich eingebürgert: Eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* bezeichnet eine solche, die nicht nur kompakt ist, sondern auch unberandet (z.B. ist die n-Sphäre S^n geschlossen, aber der n-Ball D^n ist es nicht); eine *berandete Mannigfaltigkeit* ist eine solche, die einen Rand hat (der aber möglicherweise auch leer sein kann!). Diese Terminologie ist nicht ganz so blödsinnig, wie es scheinen mag: wenn man von geschlossenen Mannigfaltigkeiten redet, so trifft man damit sozusagen die Verabredung, daß Ränder grundsätzlich nicht da sein sollen; wenn man von berandeten Mannigfaltigkeiten redet, so annonciert man damit eine größere Flexibilität in dieser Hinsicht. (Im übrigen hat natürlich das Wort "geschlossen" in diesem Zusammenhang nichts zu tun mit "abgeschlossenen Mengen" im Sinne einer topologischen Struktur.)

Die 2-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind vermutlich seit dem Altertum bekannt. Es gibt zwei Serien, die orientierbaren und die nicht-orientierbaren.

Die Liste der orientierbaren geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten ist: Sphäre, Torus (oder "Fläche vom Geschlecht 1" oder "Sphäre mit 1 Henkel"), Brezelfläche (oder "Fläche vom Geschlecht 2" oder "Sphäre mit 2 Henkeln"), und so weiter. Die Liste läßt sich ein wenig systematisieren mit dem Begriff der *zusammenhängenden Summe* von Mannigfaltigkeiten (die zusammenhängende Summe von zwei Mannigfaltigkeiten resultiert, indem man in beiden jeweils einen eingebetteten Ball wählt, von diesen Bällen das Innere entfernt; und die beiden 'Rest'-Mannigfaltigkeiten dann an ihren Rändern zusammenklebt). Die Fläche vom Geschlecht n läßt sich beschreiben als die zusammenhängende Summe von n Flächen vom Geschlecht 1.

Die Liste der nicht-orientierbaren geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten ist: projektive Ebene (oder "Sphäre mit 1 Kreuzhaube"), Klein'sche Flasche (oder "Sphäre mit 2 Kreuzhauben"), und so weiter. Eine nicht-orientierbare geschlossene 2-Mannigfaltigkeit kann nicht "physikalisch" realisiert werden (d.h. als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$). Das beste, was man machen kann, ist gewisse nicht-injektive Abbildungen in den $\mathbb{R}^3$ anzugeben, bei denen man so gut es geht die Singularitäten kontrolliert. Z.B. für die Klein'sche Flasche gibt es zwei sehr hübsche Immersionen in den $\mathbb{R}^3$ (mit jeweils einer einzigen Doppelkurve). Für die projektive Ebene existiert auch eine Immersion, aber die ist ziemlich kompliziert (die sogenannte Boy'sche Fläche). Eine andere Darstellung der projektiven Ebene ist einfacher zu beschreiben, sie hat allerdings das Manko einer *lokalen* Singularität; das ist die schon erwähnte *Kreuzhaube*. Die n-te Fläche in der Serie läßt sich darstellen als die zusammenhängende Summe von n projektiven Ebenen.

Die Homologie von geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten läßt sich (ziemlich leicht) ausrechnen; z.B. indem man sich eine Zellenstruktur überlegt. Als Resultat der Berechnung bekommt man, daß die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten schon durch ihre Homologie voneinander unterscheidbar sind.

Als Poincaré die Homologiegruppen erfunden hatte, sah er, daß sie gut waren. Er glaubte, daß er damit nun *alle* Mannigfaltigkeiten voneinander unterscheiden könnte.

Das glaubte er allerdings nur kurze Zeit. Er stellte fest, daß schon in der nächsten Dimension, 3, ein Malheur passiert. Unter den geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten gibt es nämlich solche, die *Homologie-Sphären* sind (d.h. dieselben Homologiegruppen haben wie die Sphäre dieser Dimension), *ohne* aber zu der Sphäre auch topologisch äquivalent zu sein.

Poincaré beschrieb eine solche 3-Mannigfaltigkeit. Die Art, *wie* er sie beschrieb, ist für sich äußerst interessant. Wir wollen uns hier aber nicht darum kümmern. Zum Nachweis dessen, daß die Mannigfaltigkeit nicht zur Sphäre topologisch äquivalent ist, benötigte Poincaré eine neue topologische Invariante. So erfand er die Fundamentalgruppe.

Das von Poincaré beschriebene Beispiel hat als Fundamentalgruppe eine Gruppe, die durch zwei Erzeugende und zwei Relationen beschreibbar ist:

$$\{ \ x \, , \, y \ ; \quad x^5 = (xy)^2 = y^3 \ \}$$

Dies ist eine *endliche* Gruppe, ihre Ordnung ist 120. (Es ist bekannt, daß dies die einzige endliche Gruppe ist, die Fundamentalgruppe einer Homologie-3-Sphäre sein kann.) An dem Beispiel selbst ist ansonsten wenig exotisches. Der Raum hat als universelle Überlagerung die 3-Sphäre. Er wird als der *Dodekaeder-Raum* bezeichnet; seine Fundamentalgruppe (oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Automorphismengruppe der 3-Sphäre, die durch die Decktransformationengruppe gegeben ist) als die “binäre Ikosaedergruppe”. Die Namensgebung hat mit geometrischen Figuren zu tun, die zu der Symmetriegruppe passen. Zur Beschreibung des Raumes gibt es ein “physikalisches Modell” (das Modell existiert in der hiesigen Fakultät). Bei dem Modell handelt sich um die Projektion eines 4-dimensionalen Polyeders in den 3-dimensionalen Raum. Das fragliche Polyeder (oder vielmehr sein Rand) ist eine Polyeder-Unterteilung der 3-Sphäre im $\mathbb{R}^4$; diese ist so gemacht, daß die Decktransformationengruppe darauf operiert.

Im Anschluß an die Beschreibung des Beispiels stellte Poincaré eine naheliegende Frage: Wenn unter den geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten die 3-Sphäre schon nicht durch ihre Homologie allein gekennzeichnet ist, wie ist es dann, wenn man die Fundamentalgruppe zu den Daten noch hinzunimmt?

Man weiß nicht, ob Poincaré selbst die eine oder die andere Antwort auf diese Frage favorisiert hat; jedenfalls hat er sich in seinen Schriften dazu nicht weiter geäußert, geschweige denn festgelegt. In der Folge sind die Leute aber stillschweigend dazu übergegegangen, Poincaré eine bestimmte Erwartung zu unterstellen. Die Frage ist demgemäß nicht bekannt als die "Poincaré-Frage" (wie es eigentlich richtig wäre), sondern als die "Poincaré-Vermutung".

Auf Grund von allgemeinen Dingen der Topologie kann man die Sache noch ein wenig umformulieren. Man hat nämlich den folgenden Sachverhalt:

Satz. *Sei M eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Es sind äquivalent:*

(1) *M ist homotopie-äquivalent zur 3-Sphäre,*

(2) *die Fundamentalgruppe und die Homologiegruppen von M sind dieselben wie die von der 3-Sphäre,*

(3) *M ist einfach-zusammenhängend.*

Beweis (Skizze). Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar (Fundamentalgruppe und Homologiegruppen hängen nur vom Homotopietyp ab); die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) ist es auch (die 3-Sphäre hat triviale Fundamentalgruppe). Für die Implikation (3) $\Rightarrow$ (1) wird etliches von dem Apparat der algebraischen Topologie benötigt.

Zunächst (nach Poincaré oder, wenn man so will, nach einem speziellen Fall des Hurewicz-Satzes) ist die erste Homologiegruppe von M isomorph zur abelsch gemachten Fundamentalgruppe. Da die Fundamentalgruppe von M nach Voraussetzung trivial ist, folgt, daß die Homologiegruppe $H_1(M)$ ebenfalls trivial ist.

Die Trivialität der Fundamentalgruppe impliziert auch, daß die Mannigfaltigkeit M *orientierbar* ist. — Denn die Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M kann man mit Hilfe der sogenannten *Orientierungs-Überlagerung* beschreiben: An jedem Punkt x der unberandeten n-Mannigfaltigkeit M hat man zwei *lokale Orientierungen*; nämlich die beiden erzeugenden Elemente ± 1 in der abelschen Gruppe $H_n(M, M - \{x\}) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx \mathbb{Z}$. Diese beiden Elemente variieren in lokal-trivialer Weise mit dem Punkt x; man hat also eine Überlagerung. Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit nun bedeutet, daß diese Überlagerung einen *Schnitt* besitzt; was offenbar in dem vorliegenden Fall einer zweiblättrigen Überlagerung darauf hinausläuft, daß die Überlagerung *trivial* ist (d.h. isomorph zum Produkt von M mit einer zwei-elementigen Menge). Die Nicht-Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit bedeutet demgemäß, daß die Überlagerung nicht-trivial ist. Insbesondere bedeutet sie die *Existenz* einer nicht-trivialen Überlagerung. Wegen der Klassifikation von zusammenhängenden Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe garantiert das, daß die Fundamentalgruppe nicht trivial sein *kann*.

Wir können nun auf die sogenannte *Poincaré-Dualität* verweisen (die wir, ebenso wie die Behandlung der *Kohomologiegruppen*, nicht gemacht haben — wenn wir das auch ohne Schwierigkeit bei etwas mehr Zeit hätten tun können). Im Fall einer orientierbaren[1] geschlossenen n-Mannigfaltigkeit sagt die Poincaré-Dualität, daß die Gruppe $H_i(M)$ kanonisch isomorph ist zu einer bestimmten anderen Gruppe: die Dimension i wird

[1] genauer: *orientierten*, d.h. orientierbar und mit einer bestimmten Orientierung versehen

ersetzt durch die komplementäre Dimension $n{-}i$, und "Homologie" wird ersetzt durch "Kohomologie"; der Isomorphismus sagt also $H_i(M) \cong H^{n-i}(M)$. Die Kohomologie nun kann ihrerseits wieder durch Homologie ausgedrückt werden; das sagt der sogenannte *Universelle-Koeffizienten-Satz*.

Im vorliegenden Fall bekommen wir auf die Weise aus $H_1(M) = 0$ (s. oben), daß

$$H_2(M) \;\approx\; H^1(M) \;\approx\; \mathrm{Hom}(\,H_1(M)\,,\,\mathbb{Z}\,) \;=\; 0 \;\;,$$

und aus $H_0(M) \approx \mathbb{Z}$ (da M weg-zusammenhängend ist), daß

$$H_3(M) \;\approx\; H^0(M) \;\approx\; \mathrm{Hom}(\,H_0(M)\,,\,\mathbb{Z}\,) \;\approx\; \mathbb{Z} \;\;.$$

Da nach Voraussetzung M einfach-zusammenhängend ist, können wir folglich den Hurewicz-Satz anwenden, um zu schließen, daß $\pi_3(M) \approx H_3(M) \approx \mathbb{Z}$ (Basispunkte lassen wir in der Notation hier weg). Sei $S^3 \to M$ eine Abbildung, die ein erzeugendes Element der Gruppe repräsentiert. Die Abbildung induziert dann einen Isomorphismus $H_3(S^3) \to H_3(M)$. Nun sind die Homologiegruppen oberhalb Nummer 3 (der Dimension) alle null; und die mit den Nummern 1 und 2 sind es auch. Es folgt, daß die Abbildung einen Isomorphismus *sämtlicher* Homologiegruppen induziert. Nach dem Whitehead-Satz ist die Abbildung $S^3 \to M$ deshalb eine Homotopie-Äquivalenz. (Wir benutzen hier die Version des Whitehead-Satzes mit den *Homologie*-Gruppen, die man im einfach-zusammenhängenden Fall ja hat.) □

Mit dem Satz bekommt man die folgende Formulierung von Poincaré's Frage:

Frage (Poincaré-Vermutung). *Sei M eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, die zu S^3 homotopie-äquivalent ist. Ist M zu S^3 dann auch topologisch äquivalent?*

Über die Frage weiß man heutzutage auch kaum mehr als Poincaré vor nun fast hundert Jahren. Es ist nicht so, daß nicht versucht worden wäre, daran etwas zu ändern. Einzelne Leute haben Jahre (oder gar Jahrzehnte) ihrer Arbeitskraft auf das Problem verwendet. Aber es ist bisher nichts dabei herausgekommen, was so aussieht, als hätte es das Problem einer Lösung nähergebracht.

Natürlich hat andererseits die Arbeit an diesem Problem (wie bei anderen schwierigen Problemen auch) eine Menge "spin-off" hervorgebracht; also so etwas wie beschichtete Bratpfannen als Nebenprodukt der Weltraumfahrt.

In den dreißiger Jahren hatte Whitehead irgendwann die Poincaré-Vermutung bewiesen und, dummerweise, auch publiziert. Der dumme Teil dabei war, daß der Beweis nicht stimmte. Es war sogar so, daß die von Whitehead publizierte Version des *Satzes* nicht stimmte: der behauptete Satz war nachweislich falsch (wie Whitehead selber herausfand und, in der Folge, befriedigend klärte). [Der falsche Satz sagt, daß $\mathbb{R}^3$ unter den 3-Mannigfaltigkeiten durch seinen Homotopietyp charakterisiert ist. Für diesen "Satz" gibt es sehr viele, und relativ leicht verstehbare, Gegenbeispiele. Der Witz ist, daß es bei nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten so etwas wie einen "Rand" oder "unendlich-fernen Teil" gibt. Und, wenn man nicht explizit verlangt, daß dieser, bis auf Homotopie, *genau so aussieht wie bei $\mathbb{R}^3$ auch*, so muß eben das nicht stimmen. Diese Sache mußte damals erst gelernt werden.]

Man kann darüber spekulieren, ob Whitehead aufgrund dieser unangenehmen Erfahrung in der Folge vielleicht eine besondere Anstrengung unternommen hat, um die Poincaré-Vermutung doch noch zu beweisen. In den publizierten Arbeiten hat sich davon nichts (jedenfalls nicht direkt) niedergeschlagen. Man kann dort aber etliche sehr raffinierte (und sehr schwierige) Dinge finden, die so aussehen, als wären sie bei solcher Aktivität als Nebenprodukt entstanden. Dazu gehört eine Analyse dessen, was "Homotopie-Äquivalenzen" letztlich sein können. [Bei dieser Aktivität entstanden die CW-Komplexe; und der Whitehead-Satz. Die "einfachen Homotopie-Äquivalenzen" kommen auch daher und damit, zumindest teilweise, die "Whitehead-Torsion".]

In den späten fünfziger Jahren hat SMALE versucht (oder möglicherweise versucht), die Poincaré-Vermutung zu beweisen. Er hat jedenfalls eine Entdeckung gemacht, die man auf die folgende verblüffende Weise formulieren kann; und die, naturgemäß, damals auch großes Aufsehen erregt hat. Er fand, daß die Schwierigkeiten mit der Poincaré-Vermutung sozusagen von selbst verschwinden, wenn man das Problem durch ein "schwierigeres" ersetzt, nämlich durch sein höher-dimensionales Analogon. Nämlich auf die Frage ("höher-dimensionale Poincaré-Vermutung"):

Frage. *Sei M eine Homotopie-n-Sphäre* (d.h. eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit, die zu S^n homotopie-äquivalent ist). *Ist M zu S^n topologisch äquivalent?*

konnte er die Antwort geben:

Ja, *wenn $n \geq 5$ und wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

Vorsicht! Hier ist als Hypothese vorausgesetzt, daß M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Die Schlußfolgerung sagt aber nur, daß M als *topologische* (nicht notwendigerweise dagegen als *differenzierbare*) Mannigfaltigkeit zur Sphäre äquivalent ist.

BEMERKUNG. Dies ist nicht Pedanterie. Hier ist ein weiteres überraschendes Phänomen angesprochen, das ebenfalls in den fünfziger Jahren entdeckt wurde (durch MILNOR): es gibt geschlossene differenzierbare n-Mannigfaltigkeiten M (für gewisse Dimensionen n) mit der Eigenschaft, daß M zwar zur n-Sphäre topologisch äquivalent ist; aber nicht dazu äquivalent als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein solches M wird auch als eine *exotische differenzierbare Struktur* auf der n-Sphäre bezeichnet; oder, kurz, als eine *exotische Sphäre*. Es gibt z.B. exotische Sphären in der Dimension 7. [Es ist bekannt, daß es in jeder Dimension nur *endlich viele* differenzierbare Strukturen auf der Sphäre gibt; z.B. 28 in der Dimension 7. Solche Dinge auszurechnen, erfordert sehr viel an Apparat. Das unkommentierte Mitteilen der Ergebnisse hat wohl eher einen erheiternden Effekt. So sind die entsprechenden Anzahlen in den Dimensionen 8 bis 18 der Reihe nach gegeben durch die Zahlen: 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256, 2, 16, 16.]

BEMERKUNG. Nachdem durch Smale's Resultate das Eis gebrochen war, wurden andere Beweise für Varianten der Ergebnisse gefunden; unter anderem auch ein Beweis für die höher-dimensionale Poincaré-Vermutung für topologische Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit gibt die Möglichkeit, Techniken der Analysis zu verwenden (Satz von Sard, Implizite-Funktionen-Satz). Auf die Weise war Smale in der Lage, so etwas wie eine Zellen-Struktur ins Spiel bringen. Die Grundidee dafür ist ähnlich wie bei den CW-Komplexen insofern, als man in der Lage sein möchte, bei einer anstehenden Konstruktion die einzelnen Teile der Reihe nach herzunehmen (in Analogie zu einem induktiven Vorgehen, bei dem die Zellen eine nach der andern behandelt werden). — Nun macht es natürlich nicht viel Sinn, eine Mannigfaltigkeit einfach als einen CW-Komplex ansehen zu wollen: vernünftigerweise sollten die "Skelette" doch wohl *Untermannigfaltigkeiten* sein (und zwar von derselben Dimension). Stellen wir uns etwa vor, wir hätten schon das "1-Skelett" als eine (berandete) Untermannigfaltigkeit (der Dimension n) und wir wollten daran jetzt eine "2-Zelle" anhängen. Wenn $n > 2$, so sieht es nicht so aus, als könnte das Resultat überhaupt eine Chance haben, wieder eine Mannigfaltigkeit zu sein. Wie so oft, so kommt man auch hier mit einer (zumindest von der Idee her) ganz minimalen Änderung dahin, daß die Sache wieder funktioniert. Nämlich man wird nicht versuchen, wirklich eine 2-Zelle anzuheften. Man wird vielmehr diese Zelle zuerst *aufdicken*, damit sie die richtige Dimension bekommt. Im Klartext, was man anheftet, ist (in dem angedeuteten speziellen Fall) das Produkt $D^2 \times D^{n-2}$, und zwar wird es angeheftet entlang $(\partial D^2) \times D^{n-2}$. (Natürlich ist es so, daß hier von Rechts wegen einiges an technischen Details zu klären wäre, was wir einfach unterschlagen.) — Die angedeutete zusätzliche Struktur auf einer Mannigfaltigkeit wird als ein *Henkel-Aufbau* bezeichnet.

Definition. Ein *Kobordismus* ist ein Tripel von (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten $(W; M_0, M_1)$ mit den folgenden Eigenschaften:
— M_0 *und* M_1 *sind geschlossene Mannigfaltigkeiten* (einer Dimension n);
— W ist eine berandete Mannigfaltigkeit der Dimension $n{+}1$;
und zwar ist der Rand von W *gleich der disjunkten Vereinigung* $M_0 \dot\cup M_1$.

Er heißt *h-Kobordismus* (mit "h" für "Homotopie-Äquivalenz"), wenn zusätzlich gilt:
— die Inklusion $M_0 \to W$ ist eine Homotopie-Äquivalenz,
— die Inklusion $M_1 \to W$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.

Beispiel (für h-Kobordismus). Sei M eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit:

$$(W; M_0, M_1) \;=\; (\,M \times [0,1]\,,\, M \times \{0\}\,,\, M \times \{1\}\,)$$

Satz (Smale). *Für* $n{+}1 \geq 6$ *und* $\pi_1(W) = 0$ *gibt es keine anderen Beispiele von h-Kobordismen* (bis auf Diffeomorphie).

Dieser Satz ist eine (sehr weitreichende) Verallgemeinerung der höher-dimensionalen Poincaré-Vermutung. Z.B. in Dimension ≥ 6 bekommt man die aus dem Satz, indem man den Satz anwendet auf das W, das aus der fraglichen Homotopie-Sphäre entsteht durch das Entfernen von zwei kleinen Bällen: man weist hier die "h"-Kobordismus-Eigenschaft nach (das läuft auf eine Anwendung von Poincaré-Dualität hinaus).

Whitehead-Gruppe

Bei Smale's h-Kobordismus-Satz war vorausgesetzt, daß die beteiligten Mannigfaltigkeiten triviale Fundamentalgruppe haben. Der Satz kann übertragen werden auf den allgemeinen Fall, wo diese Voraussetzung über die Fundamentalgruppe nicht mehr gemacht wird. Dazu muß aber die Formulierung des Satzes geändert werden.

Man fixiert eine n-Mannigfaltigkeit M und betrachtet h-Kobordismen "mit M als unterem Ende". Das heißt, man betrachtet h-Kobordismen (W, M_0, M_1), wo M_0 zu M äquivalent ist (als differenzierbare Mannigfaltigkeit) und wo außerdem noch eine solche Äquivalenz $M \to M_0$ ausdrücklich fixiert ist.

Diese h-Kobordismen werden nun in naheliegender Weise zu Äquivalenzklassen zusammengefaßt. Nämlich (W, M_0, M_1) und (W', M'_0, M'_1) sollen zueinander äquivalent sein, wenn ein Diffeomorphismus von Tripeln existiert, $(W, M_0, M_1) \to (W', M'_0, M'_1)$, derart, daß der induzierte Isomorphismus $M_0 \to M'_0$ zu den fixierten Identifizierungen von M mit M_0 und M'_0 kompatibel ist. — Es sei in dem folgenden Satz wieder $n \geq 5$.

Satz. *Es gibt eine abelsche Gruppe* $\mathrm{Wh}(M)$. *Es gibt eine 1:1 Beziehung zwischen:*
— *Äquivalenzklassen von h-Kobordismen,*
— *Elementen von Wh(M).*

Die abelsche Gruppe $\mathrm{Wh}(M)$ ist die sogenannte *Whitehead-Gruppe*. Sie hängt, wie sich herausstellt, tatsächlich nur von der Fundamentalgruppe von M ab. Und im Fall der trivialen Fundamentalgruppe ist auch die Gruppe $\mathrm{Wh}(M)$ trivial. Auf die Weise ist hier der h-Kobordismus-Satz subsummiert.

Es sollen im folgenden zwei Beschreibungen der Whitehead-Gruppe gegeben werden: eine geometrische (mit Hilfe von endlichen relativen CW-Komplexen) und eine algebraische. Danach wird erläutert, wie diese beiden zueinander in Beziehung stehen.

Sei X ein topologischer Raum. Die Menge der endlichen CW-Komplexe relativ zu X wird mit $\mathrm{Komp}(X)$ bezeichnet. $Y \in \mathrm{Komp}(X)$ bedeutet also die folgenden beiden Dinge:
— X ist Unterraum von Y,
— Y ist versehen mit der Struktur eines endlichen CW-Komplexes, relativ zu dem Unterraum X.

Auf der Menge $\mathrm{Komp}(X)$ soll nun eine Äquivalenzrelation eingeführt werden, die als "einfache Homotopie-Äquivalenz" bezeichnet wird ("simple homotopy equivalence" im englischen). Neben den zellulären Isomorphismen, relativ zu X, ist eine weitere Konstruktion zugelassen, die als "elementare Erweiterung" bezeichnet wird ("elementary expansion").

Eine solche elementare Erweiterung kommt auf die folgende Weise zustande. Sei Y aus $\mathrm{Komp}(X)$, sei $\varphi : D^n \to Y$ eine "zelluläre" Abbildung; genauer: es sei vorausgesetzt, daß φ den n-Ball D^n in das n-Skelett von Y abbildet, und die Rand-Sphäre S^{n-1} in das $(n-1)$-Skelett. Wir können dieses φ dann benutzen, um an den CW-Komplex Y zwei weitere Zellen anzuheften: eine n-Zelle und eine $(n+1)$-Zelle. Und zwar werden diese beiden Zellen *simultan* angeheftet mit Hilfe der Verklebe-Konstruktion

$$Y' \ = \ Y \cup_{D^n_-} D^{n+1} \ .$$

Dabei bedeutet D^n_- die "südliche Halbkugel" im Rand von D^{n+1}, und die Anhefte-Abbildung $D^n_- \to Y$ ist durch φ gegeben. Aus der "nördlichen Halbkugel" D^n_+ wird bei der Konstruktion eine an Y angeheftete n-Zelle. Und aus D^{n+1} selbst wird bei der Konstruktion eine an $Y \cup_{S^{n-1}} D^n_+$ angeheftete $(n+1)$-Zelle.

Die beiden neuen Zellen bilden ein "Standard-kürzendes-Paar" (standard cancelling pair); der Übergang von Y zu Y' heißt *elementare Erweiterung*. Umgekehrt ist in dieser Situation offenbar Y auch Deformationsretrakt von Y' (und zwar Deformationsretrakt von sehr spezieller Art): eine Deformationsretraktion ist induziert von einer Deformationsretraktion von D^{n+1} zu D^n_-.

Definition. $\mathrm{Sh}(X)$ bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathrm{Komp}(X)$.

Es kann nun ein wenig gezaubert werden. Der Trick ist, *Funktorialität* zu benutzen. Und zwar bekommt man aus einer stetigen Abbildung $f : X \to X'$ eine induzierte Abbildung

$$f_* : \mathrm{Komp}(X) \longrightarrow \mathrm{Komp}(X') \ , \quad Y \longmapsto X' \cup_X Y \ .$$

Unter dieser Abbildung gehen (offenbar) zelluläre Isomorphismen wieder in zelluläre Isomorphismen über; und elementare Erweiterungen in elementare Erweiterungen. Die Abbildung ist also mit der Äquivalenzrelation verträglich. Per Übergang zu den Äquivalenzklassen hat man deshalb auch eine induzierte Abbildung

$$f_* : \mathrm{Sh}(X) \longrightarrow \mathrm{Sh}(X') \ .$$

Für diese Abbildung hat man die folgende fundamentale Tatsache:

Lemma. *Wenn $f : X \to X'$ und $f' : X \to X'$ homotope Abbildungen sind, dann sind die induzierten Abbildungen $f_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(X')$ und $f'_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(X')$ zueinander gleich.*

Beweis (Skizze). Sei $Y \in \mathrm{Komp}(X)$. Es ist zu zeigen, daß man von $f_*(Y)$ zu $f'_*(Y)$ übergehen kann durch elementare Erweiterungen und deren inverse. Dazu wird es sicherlich genügen, ein Z in $\mathrm{Komp}(X')$ zu finden, das sowohl von $f_*(Y)$ aus als auch von $f'_*(Y)$ aus durch elementare Erweiterungen erhalten werden kann. Ein solches Z gibt es. Man bekommt es durch explizite Benutzung der Homotopie. Die Homotopie von f

zu f' ist ja eine Abbildung $F\colon X \times [0,1] \to X'$. Man benutzt diese Abbildung für die Verklebe-Konstruktion

$$Z \ := \ X' \cup_{X\times[0,1]} Y\times[0,1] \ .$$

Es ist nun richtig, daß man Z von $f_*(Y)$ aus durch eine Folge von elementaren Erweiterungen erreichen kann. Und zwar sind diese elementaren Erweiterungen in 1:1 Beziehung zu den Zellen von Y; die Details hierfür lassen wir weg. Ähnlich auch kann man Z von $f'_*(Y)$ aus durch eine Folge von elementaren Erweiterungen erreichen. □

Auf der Menge $\mathrm{Komp}(X)$ definieren wir eine Art von 'Addition' durch das Zusammenkleben entlang von X,

$$Y_1 \perp Y_2 \ = \ Y_1 \cup_X Y_2 \ .$$

Wenn Y_1 äquivalent ist zu Y_1', dann ist auch $Y_1 \perp Y_2$ äquivalent zu $Y_1' \perp Y_2$; und ähnlich mit der zweiten Komponente. Man bekommt also eine induzierte Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen,

$$[Y_1] + [Y_2] \ := \ [\, Y_1 \perp Y_2 \,] \ .$$

Die Menge $\mathrm{Sh}(X)$ wird auf die Weise zu einer (kommutativen und assoziativen) *Halbgruppe*, mit $[X]$ als neutralem Element. Was die Existenz von inversen Elementen bezüglich dieser Addition angeht, so haben wir den folgenden Sachverhalt:

Satz. *Sei* $Y \in \mathrm{Komp}(X)$. *Es sind äquivalent:*

(1) *die Inklusion* $X \to Y$ *ist Homotopie-Äquivalenz,*

(2) X *ist Deformationsretrakt von* Y,

(3) $[Y]$ *hat ein inverses Element bezüglich* "+" *in* $\mathrm{Sh}(X)$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) gilt für jeden relativen CW-Komplex. Die Äquivalenz von (2) und (3) müssen wir hier nachweisen.

Es sei zunächst (2) vorausgesetzt. Sei $j: X \to Y$ die Inklusion und sei $r: Y \to X$ eine Retraktion derart, daß die Abbildung $j \circ r$ homotop ist zur identischen Abbildung auf Y. Sei $Z(r)$ definiert als der reduzierte Abbildungszylinder der Abbildung r,

$$Z(r) \ = \ X \cup_{X\times[0,1]} Y\times[0,1] \cup_{Y\times\{1\}} X \ .$$

Wie immer bei Abbildungszylindern, so hat $Z(r)$ den (Ziel-) Raum X nicht nur als Deformationsretrakt; sondern $Z(r)$ geht aus X hervor durch eine Folge von elementaren Erweiterungen, entsprechend den Zellen von Y (der Sachverhalt ist ähnlich wie im Beweis von dem obigen Lemma). Als Element von $\mathrm{Komp}(X)$ aufgefaßt, ist $Z(r)$ also äquivalent zur Null.

Andererseits ist Y (als $Y\times\{0\}$) in $Z(r)$ enthalten. Wir können $Z(r)$ deshalb auch als Element von $\mathrm{Komp}(Y)$ auffassen; das wir, zur Unterscheidung, mit Z bezeichnen wollen. Mit der Abbildung

$$r_* : \mathrm{Komp}(Y) \ \longrightarrow \ \mathrm{Komp}(X)$$

bekommen wir aus Z ein Element $r_*(Z)$ von $\mathrm{Komp}(X)$. Die Zellen von $r_*(Z)$ sind in 1:1 Beziehung zu den Zellen von Y; nur daß jeder Zelle von Y eine solche in $r_*(Z)$ von einer Dimension höher entspricht.

Wir behaupten nun, daß $[r_*(Z)]$ ein zu $[Y]$ inverses Element ist; oder, was dasselbe sagt, daß das Element $Y \perp r_*(Z)$ in $\mathrm{Komp}(X)$ äquivalent zum trivialen Element ist.

Dazu wird es genügen, daß das Element $Y \perp r_*(Z)$ in $\mathrm{Komp}(X)$ äquivalent zu $Z(r)$ ist (denn von $Z(r)$ wissen wir schon, daß es äquivalent zum trivialen Element ist).

Wir benutzen jetzt das Lemma. Die identische Abbildung von Y ist homotop zu der Abbildung $j \circ r$, deshalb ist, nach dem Lemma, das Element Z in $\mathrm{Komp}(Y)$ äquivalent zu dem Element $j_*(r_*(Z))$. Das heißt, im Klartext, daß es eine Folge von elementaren Erweiterungen und deren inversen gibt, *und zwar relativ zu* Y, die diese beiden verbindet. Da X in Y enthalten ist, folgt hieraus, daß es auch eine Folge (nämlich dieselbe!) von elementaren Erweiterungen und deren inversen gibt, die die beiden verbindet und die relativ zu X ist. Z nun, als Element von $\mathrm{Komp}(X)$, ist $Z(r)$. Und $j_*(r_*(Z))$, als Element von $\mathrm{Komp}(X)$, ist $Y \cup_X r_*(Z)$; das heißt, dasselbe wie $Y \perp r_*(Z)$.

Sei umgekehrt nun (3) vorausgesetzt. Das heißt, daß ein $\overline{Y}$ existiert derart, daß das Element $Y \perp \overline{Y}$ von $\mathrm{Komp}(X)$ äquivalent zum trivialen Element ist. Da eine elementare Erweiterung eine Homotopie-Äquivalenz ist, folgt hieraus, daß die Inklusion i von X in $Y \perp \overline{Y}$ eine Homotopie-Äquivalenz ist; daß deshalb auch X Deformationsretrakt von $Y \perp \overline{Y}$ ist. Sei $\widetilde{r} : Y \perp \overline{Y} \to X$ eine Retraktion, sei H eine Homotopie von $i \circ \widetilde{r}$ zur identischen Abbildung auf $Y \perp \overline{Y}$. Per Einschränkung bekommen wir aus $\widetilde{r}$ nun Retraktionen $r : Y \to X$ und $\overline{r} : \overline{Y} \to X$. Und wir bekommen auch eine Homotopie von der Selbst-Abbildung $j \circ r$ von Y zur identischen Abbildung: die Homotopie ist gegeben durch die Komposition

$$Y \times [0,1] \xrightarrow{\text{Inkl}} (Y \perp \overline{Y}) \times [0,1] \xrightarrow{H} Y \perp \overline{Y} \xrightarrow{\mathrm{Id} \perp \overline{r}} Y \ . \qquad \square$$

Definition (*geometrische Definition der Whitehead-Gruppe*). $\mathrm{Wh}(X)$ ist die Gruppe der invertierbaren Elemente in der Halbgruppe $\mathrm{Sh}(X)$.

Satz (Austauschtrick). *Sei Y Repräsentant eines Elements von $Wh(X)$.*

(1) *Sei m die kleinste der vorkommenden Dimensionen der Zellen von Y. Es ist möglich, von Y zu einem äquivalenten Repräsentanten Y' überzugehen; wobei Y' in jeder Dimension genauso viele Zellen hat wie Y, ausgenommen die Dimensionen m und $m{+}2$. In Dimension m hat Y' keine Zellen, und in Dimension $m{+}2$ entsprechend viele mehr.*

(2) *Es gibt einen zu Y äquivalenten Repräsentanten Y'', der nur Zellen hat in zwei benachbarten Dimensionen n und $n{+}1$. Dabei kann man n so groß wählen, wie man will* (insbesondere kann man z.B. darauf bestehen, daß $n \geq 2$).

Beweis. (2) resultiert, indem man (1) genügend oft anwendet. Nämlich man entfernt zunächst die m-Zellen, um sie durch $(m{+}2)$-Zellen zu ersetzen, danach entfernt man die $(m+1)$-Zellen, um sie durch $(m+3)$-Zellen zu ersetzen, und so weiter. Sei n als eine genügend große Zahl gewählt; nänlich so, daß es oberhalb Dimension $n+1$ keine Zellen mehr gibt. Man wiederholt den Schritt aus (1) so lange, bis alle Zellen bis zur Dimension $n-1$ (einschließlich) entfernt sind.

(1) wurde im wesentlichen schon früher diskutiert (im Zusammenhang mit dem Hurewicz-Satz; nämlich der Variante des Beweises). Da die Betonung hier etwas anders ist, gehen wir noch einmal darauf ein. Es wird genügen, zu zeigen, wie eine einzelne Zelle der kleinsten Dimension m entfernt (und dabei durch eine Zelle der Dimension $m+2$ ersetzt) werden kann. Sei $\psi : (D^m, S^{m-1}) \to (Y, X)$ die charakteristische Abbildung einer solchen Zelle. Da X Deformationsretrakt von Y ist, läßt die Abbildung ψ sich fortsetzen zu einer (zellulären) Abbildung

$$\Psi : (D^{m+1}, D^m_-) \longrightarrow (Y, X) \quad , \quad \Psi \big| D^m_+ = \psi \ .$$

Wir bilden den reduzierten Abbildungszylinder der Abbildung Ψ. Das läuft auf dasselbe hinaus, wie die Abbildung Ψ für eine elementare Erweiterung zu benutzen; das heißt, als die Anhefte-Abbildung $\Psi\colon D^{m+1}_- \to Y$ bei der Konstruktion

$$Y_1 \ = \ Y \cup_{D^{m+1}_-} D^{m+2} \ .$$

In Y_1 gibt es einen Unterkomplex Z_1 mit genau zwei Zellen; nämlich der ursprünglichen m-Zelle und der durch das Anheften von D^{m+1}_+ entstandenen $(m+1)$-Zelle. Wir können Z_1 auffassen als eine elementare Erweiterung von dem Raum X; insbesondere ist X damit auch Deformationsretrakt von Z_1. Der neue Komplex Y_1' wird nun definiert durch das Kollabieren von dem Unterkomplex Z_1; das heißt, als

$$X \cup_{Z_1} Y_1 \ .$$

Die ursprüngliche m-Zelle ist dann verschwunden, die hinzugekommene $(m+1)$-Zelle auch. Die hinzugekommene $(m+2)$-Zelle ist übriggeblieben. Es bleibt zu zeigen, daß Y_1' zu Y_1 (und damit auch zu dem ursprüngliche Y) einfach-homotopie äquivalent ist.

Bezeichne $j : X \to Z_1$ die Inklusion und $r : Z_1 \to X$ eine Retraktion (so daß $j \circ r$ homotop ist, relativ zu X, zur identischen Abbildung von Z_1). Wir fassen Y_1 als Element von $\mathrm{Komp}(Z_1)$ auf. Damit sind wir in der Lage, das obige Lemma anzuwenden. Es sagt, daß Y_1 äquivalent ist, als Element von $\mathrm{Komp}(Z_1)$, zu dem Element $j_*(r_*(Y_1))$. Im Klartext, es gibt eine Folge von elementaren Erweiterungen und deren inversen, *relativ zu* Z_1, von Y_1 zu $j_*(r_*(Y_1))$. Da X in Z_1 enthalten ist, bedeutet das, daß es auch eine Folge (dieselbe Folge!) von elementaren Erweiterungen und deren inversen relativ zu X gibt, die Y_1 verbindet mit $j_*(r_*(Y_1))$ aufgefaßt als Element von $\mathrm{Komp}(X)$. Dies Element ist gegeben durch

$$Z_1 \cup_X r_*(Y_1) \ .$$

Es ist eine elementare Erweiterung von $r_*(Y_1)$, da, wie schon gesagt, Z_1 eine elementare Erweiterung von X ist. □

Folgerung. *Ein solcher spezieller Repräsentant* (er heiße Y statt Y'') *liefert, über den zellulären Kettenkomplex in der universellen Überlagerung, eine Abbildung von freien Moduln über dem Gruppenring der Fundamentalgruppe,* $R = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$,

$$R[J_{n+1}] \longrightarrow R[J_n] \ .$$

(1) *In den beiden freien Moduln gibt es bevorzugte Erzeugende, die wohldefiniert sind bis auf die Multiplikation mit Elementen der Gruppe* $\pi_1(X)$.

(2) *Die Abbildung ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Diskussion ist dieselbe wie eine weiter oben (im Zusammenhang mit der Konstruktion von Räumen mit vorgegebenen Homotopiegruppen). Sei, abkürzend, $\pi = \pi_1(X) = \pi_1(Y)$. Sei J_n definiert als die Indexmenge für die n-Zellen von Y; und $\widetilde{J_n}$ als diejenige für die n-Zellen in der universellen Überlagerung $\widetilde{Y}$ von Y. Dann ist $\widetilde{J_n}$ eine π-Menge; und ist als solche isomorph zu dem Produkt $\pi \times J_n$. Der Isomorphismus $\widetilde{J_n} \approx \pi \times J_n$ ist nicht (oder, besser gesagt, nicht ganz) kanonisch. Um den Isomorphismus zu fixieren, muß man für jede der n-Zellen aus Y von den darüber liegenden Zellen aus $\widetilde{Y}$ eine auswählen. Das gibt die in (1) angesprochene Sache über die Erzeugenden des freien Moduls $R[J_n]$. — Die Angelegenheit für J_{n+1} geht genauso.

Was (2) angeht, so ist die Inklusion $X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, wie oben gesehen. Die Inklusion der universellen Überlagerungen, $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, ist deshalb ebenfalls eine Homotopie-Äquivalenz (z.B. weil die relativen Homotopiegruppen unten und oben zueinander isomorph sind). Der zelluläre Kettenkomplex des relativen CW-Komplexes $(\widetilde{Y}, \widetilde{X})$ hat deshalb triviale Homologie. Der zelluläre Kettenkomplex ist reduziert auf die Abbildung $R[J_{n+1}] \to R[J_n]$; der Kokern und der Kern der Abbildung bilden die n-te und die $(n{+}1)$-te Homologiegruppe von dem Kettenkomplex. Der Kokern und der Kern sind also beide null; was bedeutet, daß die Abbildung $R[J_{n+1}] \to R[J_n]$ ein Isomorphismus ist. □

Bemerkung. *Die beiden freien Moduln* $R[J_{n+1}]$ *und* $R[J_n]$ *haben denselben Rang* (dieselbe Anzahl von erzeugenden Elementen). Denn zum Beispiel über Homomorphismen $\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ kann man aus ihnen eine Abbildung von Vektorräumen bekommen. Die ist auch wieder ein Isomorphismus, also haben die Vektorräume dieselbe Dimension. *Die obige Abbildung ist also durch eine quadratische Matrix repräsentiert* — man muß dazu nur die Elemente von J_n, bzw. von J_{n+1}, der Reihe nach anordnen. □

Wir kommen zu der algebraischen Beschreibung der Whitehead-Gruppe. Sei π eine Gruppe; ihr soll eine abelsche Gruppe $\mathrm{Wh}(\pi)$ zugeordnet werden.

Die Konstruktion steht in Zusammenhang mit einer andern, die einem *Ring* R eine abelsche Gruppe $K_1(R)$ zuordnet. Diese Konstruktion wird zuerst beschrieben.

Unter den $n{\times}n$-Matrizen über dem Ring R betrachten wir diejenigen, die bezüglich der Matrizen-Multiplikation ein Inverses besitzen. Sie bilden eine Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$. Einer Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(R)$ nun können wir eine Matrix in $\mathrm{GL}_{n+1}(R)$ zuordnen:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise bekommen wir eine aufsteigende Folge von Gruppen und Inklusionen

$$\mathrm{GL}_1(R) \ \subset\ \mathrm{GL}_2(R) \ \subset\ \mathrm{GL}_3(R) \ \subset\ \ \cdots\ .$$

Die Vereinigung davon, die "Allgemeine lineare Gruppe" (general linear group) wird mit $\mathrm{GL}(R)$ bezeichnet.

Eine Matrix wird als *Elementarmatrix* bezeichnet, wenn sie mit der Identitätsmatrix übereinstimmt mit Ausnahme von einer einzigen Stelle außerhalb der Diagonalen. Eine Elementarmatrix ist invertierbar. Bezeichne $\mathrm{E}_n(R)$ die von den Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe in $\mathrm{GL}_n(R)$; und ebenso $\mathrm{E}(R)$ die in $\mathrm{GL}(R)$.

Lemma (Whitehead). *Die Untergruppe $E(R)$ von $GL(R)$ stimmt überein mit der Kommutator-Untergruppe von $GL(R)$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $\mathrm{E}(R)$ enthalten ist in der Kommutator-Untergruppe. Sei I die Eins-Matrix. Bezeichne $E_{i,j}$, für $i \neq j$, die Matrix mit einer 1 an der Stelle (i,j) und sonst lauter Nullen. Bezeichne $e_{i,j}(a) = (I + a \cdot E_{i,j})$ die Elementarmatrix mit dem Eintrag a an der (i,j)-ten Stelle. Es ist

$$e_{i,j}(a) \cdot e_{i,j}(b) \ = \ e_{i,j}(a+b) \ ,$$

insbesondere ist also $e_{i,j}(-a)$ das Inverse von $e_{i,j}(a)$. Die Identität

$$e_{i,j}(a) \cdot e_{j,k}(1) \cdot e_{i,j}(-a) \cdot e_{j,k}(-1) \ = \ e_{i,k}(a) \ ,$$

für $i \neq j \neq k \neq i$, zeigt deshalb, das jede Elementarmatrix in $\mathrm{E}_n(R)$ ein Kommutator ist, sobald nur $n \geq 3$.

Umgekehrt zeigen die drei folgenden Identitäten, daß jeder Kommutator $ABA^{-1}B^{-1}$ in $\mathrm{GL}_n(R)$ als ein Produkt von Elementarmatrizen in der größeren Gruppe $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ geschrieben werden kann:

(1) $$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (BA)^{-1} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I - A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I - A & I \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=n+1}^{2n} (I + a_{i,j} E_{i,j})$$

□

Nach dem Lemma bedeutet das Herauskürzen von $\mathrm{E}(R)$ dasselbe, wie die Gruppe $\mathrm{GL}(R)$ abelsch zu machen: $\mathrm{GL}(R)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}(R) \big/ [\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] \cong \mathrm{GL}(R) \big/ \mathrm{E}(R)$.

Definition. $K_1(R) = \mathrm{GL}(R) \big/ \mathrm{E}(R)$

Bemerkung. Bezeichne $\mathrm{U}(R)$ die Gruppe der *Einheiten* in dem Ring R (englisch: *units*); d.h. die Gruppe derjenigen Elemente, die multiplikativ-inverse haben. Wenn R ein kommutativer Ring ist, dann gibt die *Determinante* eine Abbildung

$$\det : \ \mathrm{GL}(R) \longrightarrow \mathrm{U}(R) \ .$$

Die Abbildung faktorisiert über die abelsch-gemachte Gruppe, also $K_1(R)$, da eben $\mathrm{U}(R)$ nach Voraussetzung eine *abelsche* Gruppe ist; ferner ist die Einschränkung der Determinanten-Abbildung auf $\mathrm{GL}_1(R)$ ein Isomorphismus. Im kommutativen Fall resultiert also, daß die Gruppe der Einheiten, $\mathrm{U}(R)$, ein Retrakt von $K_1(R)$ ist; insbesondere ist die Abbildung

$$\mathrm{U}(R) = \mathrm{GL}_1(R) \longrightarrow K_1(R)$$

injektiv. □

Es sei nun $R = \mathbb{Z}[\pi]$ ein Gruppenring. Bezeichne $(\pm g)$ das Bild, in $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$, von der Untergruppe in $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}[\pi])$, die von den Elementen $g \in \pi$ und $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ gebildet ist. Es ist nicht schwer zu sehen, was das genau ist.

Da nämlich $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ abelsch ist, faktorisiert die Abbildung $\mathbb{Z}/2 \times \pi \longrightarrow K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ über die abelsch gemachte Gruppe $\mathbb{Z}/2 \times \pi^{\mathrm{ab}}$. Andererseits haben wir auch noch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}[\pi]) & \longrightarrow & K_1(\mathbb{Z}[\pi]) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}[\pi^{\mathrm{ab}}]) & \longrightarrow & K_1(\mathbb{Z}[\pi^{\mathrm{ab}}])
\end{array}$$

in dem die untere Zeile nach der eben gemachten Bemerkung eine injektive Abbildung ist. Es folgt, daß die von den Elementen $\pm g$ gebildete Untergruppe von $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ zu der Gruppe $\mathbb{Z}/2 \times \pi^{\mathrm{ab}}$ isomorph ist.

Die *Whitehead-Gruppe* ist nun definiert als diejenige Gruppe, die durch das Entfernen der gerade beschriebenen "offensichtlichen" Elemente aus $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ entsteht:

Definition. $\mathrm{Wh}(\pi) = K_1(\mathbb{Z}[\pi]) \big/ (\pm g)$

Satz. *Sei X weg-zusammenhängender 'vernünftiger' topologischer Raum* (z.B. ein CW-Komplex). *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus der Whitehead-Gruppen,*

$$\mathrm{Wh}(X) \cong \mathrm{Wh}(\pi_1(X)) \ .$$

Es wurde angedeutet, wie man aus einem Repräsentanten, links, eine Matrix über dem Gruppenring bekommt. Daß dies den behaupteten Isomorphismus liefert, ist ein nicht-triviales Nachprüfen.

Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III

Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Homologiegruppen als Homotopiegruppen (2-3)

- simpliziale Mengen (2)
- simpliziale abelsche Gruppen (3)
- Formulierung des Satzes (3)

Simpliziale abelsche Gruppen (4-11)

- Moore-Kettenkomplex (4)
- Homotopie-Gruppen einer simplizialen abelschen Gruppe (5)
- Vergleich des Moore-Kettenkomplexes mit dem gewöhnlichen Kettenkomplex (6-9)
- Rekonstruktion einer simplizialen abelschen Gruppe aus ihrem Moore-Kettenkomplex (10-11)

Die Erweiterungs-Bedingung (12-18)

- Liftungs-Eigenschaften (12-14)
- Trichter, Trichter-Füllungen (14-16)
- Kan-Komplexe, Kan-Faserungen (16-17)
- Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Kan-Komplexe (17)

Die Homotopie-Relation (19-20)

- simpliziale Homotopie ist eine Äquivalenzrelation für Abbildungen in Kan-Komplexe (19)

Beispiele und Nicht-Beispiele (21-28)

- Erzwingen der Kan-Bedingung durch Trichter-Füllen (21-22)
- dasselbe für 'Faserungen' (23-24)
- Beschreibung von Trichtern durch Simplizes (24-25)
- simpliziale Gruppen 'sind' Kan-Komplexe (25-26)
- endlich-dimensionale Kan-Komplexe sind diskret (27)
- verallgemeinerte Trichter-Füllungen (27-28)

Bündel und Kan-Faserungen (29-36)

- G-Prinzipalbündel (29-30)
- lokal-triviale Bündel (31)
- lokal-triviale Bündel sind Kan-Faserungen, Prinzipalbündel sind lokal-trivial (31)
- geometrische Realisierung 'respektiert' lokal-triviale Bündel (32)
- die geometrische Realisierung eines lokal-trivialen Bündels ist eine Serre-Faserung (36)

Minimale Kan-Komplexe, minimale Kan-Faserungen (37-46)

- Existenz-Satz (37)
- Starrheit minimaler Faserungen (40-41)
- minimale Kan-Komplexe sind schon isomorph, wenn sie homotopie-äquivalent sind (45)
- minimale Kan-Faserungen sind lokal-trivial (45)

Azyklische Faserungen (47-50)
- äquivalente Bedingungen (47)
- eine Kan-Faserung ist eine azyklische Faserung, gefolgt von einer minimalen Faserung (48-49)
- die geometrische Realisierung einer Kan-Faserung ist eine Serre-Faserung (50)

Azyklisches Beispiel (51-52)
- homotopie-äquivalente Kan-Komplexe durch Trichter-Füllen (50)

Simpliziale Approximation (53-63)
- simplizialer Erweiterungs-Satz für Abbildungen in einen Kan-Komplex (53)
- ein Kan-Komplex ist Deformationsretrakt vom singulären Komplex seiner Realisierung (53)
- kombinatorische Beschreibung von Elementen von Homotopiegruppen (55)
- nicht-singuläre simpliziale Mengen (59)
- Stern-Unterteilung von endlichen nicht-singulären simplizialen Mengen (59)
- Existenz von Abbildungen nach Unterteilung (60)

Beschreibung simplizialer Homotopien (64-67)
- die 'Über'-Kategorie (64)
- simpliziale Homotopien als natürliche Transformationen (65)
- "Wege-Raum" eines simplizialen Objektes (67)

Nerven von Kategorien (68-70)
- die Nerv-Konstruktion (68)
- natürliche Transformationen geben Homotopien (69)
- die Kategorie zu einer Gruppe (70)

Die Bar-Konstruktion (71-73)
- die simpliziale Menge zu einer Gruppe (71)
- kanonische Eilenberg-MacLane Räume (72)
- Homologiegruppen einer Gruppe (72)

Zusatz, S. 72
- eine simpliziale Menge und ihre geometrische Realisierung haben dieselbe Homologie

Bi-simpliziale Mengen, simpliziale Räume (74-86)
- bisimpliziale Mengen und ihre geometrische Realisierung (74)
- bisimpliziale Mengen als iterierte simpliziale Objekte (75)
- simpliziale Räume und ihre geometrische Realisierung (75)
- diagonale simpliziale Menge (76)
- Yoneda-Lemma, mengenwertige Funktoren als Colimites darstellbarer Funktoren (77-79)
- die Realisierung einer bisimplizialen Menge und die der diagonalen simplizialen Menge (76, 79)
- eine alternative geometrische Realisierung (81-82)
- Realisierungs-Lemma ('lokale' Homotopie-Äquivalenzen sind auch 'globale') (80, 85)

Die Kan'sche Schleifen-Gruppe (121-126)

Homologiegruppen als Homotopiegruppen

Die Überschrift bezieht sich auf die folgende Tatsache. Einem Raum X kann man immer einen andern Raum $F(X)$ zuordnen ("F" für "funktorielle Konstruktion"), so daß

$$H_i(X) \;\cong\; \pi_i F(X) \; .$$

Die Beschreibung dessen, was es mit diesem "F" auf sich hat, ist besonders einfach, wenn man 'Raum' hier interpretiert als "kombinatorisch definierten CW-Komplex"; also *simpliziale Menge*. Diese Beschreibung soll jetzt gleich gegeben werden.

Daß die so konstruierten Homotopiegruppen wirklich die Homologiegruppen von dem ursprünglichen X ergeben, ist nicht ganz selbstverständlich. Für den Nachweis braucht man einige Dinge über simpliziale Mengen, die wir bisher noch nicht gemacht haben. Mit diesen Dingen wollen wir uns in Kürze befassen — aus dem gegebenen Anlaß und auch, weil die Dinge für sich genommen sehr interessant sind.

Nun zu der avisierten Beschreibung von "F".

Bezeichne, wie früher, Δ diejenige Kategorie, die man für die Buchführung bei den simplizialen Mengen benötigt. Die Objekte von Δ sind also die geordneten Mengen: $[0]\,,\ [1]\,,\ [2]\,,\ \dots\,,$

$$[n] \;=\; (\,0 < 1 < \;\cdots\; < n{-}1 < n\,)\;,$$

und die Morphismen sind die (schwach) monotonen Abbildungen; ein Morphismus in Δ, von $[m]$ zu $[n]$, ist also eine Abbildung

$$\alpha:\ [m] \longrightarrow [n] \quad , \qquad i \le j \implies \alpha(i) \le \alpha(j) \; .$$

Besonders prominente Beispiele von solchen Abbildungen sind (für jedes $n \ge 1$) die injektiven Abbildungen $\delta_i\,,\ 0 \le i \le n\,,$

$$\delta_i :\ [n{-}1] \longrightarrow [n] \qquad (i \text{ wird nicht getroffen}) \;,$$

und (für jedes n) die surjektiven Abbildungen σ_i ,

$$\sigma_i :\ [n{+}1] \longrightarrow [n] \qquad (i \text{ wird zweimal getroffen}) \;.$$

Die simpliziale Menge X ist, nach Definition, ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Δ in die Kategorie der Mengen,

$$X:\ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \; .$$

Oder, ausgeschrieben: für jedes $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\,,$ hat man eine Menge X_n, und für jede Abbildung $\alpha:\ [m] \to [n]$ hat man die induzierte Abbildung (Gegenrichtung!)

$\alpha^* : X_n \to X_m$. Prominente Beispiele für die Struktur-Abbildungen sind die *Rand-Abbildungen* d_i ,

$$d_i := \delta_i^* \quad , \qquad d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1} \quad ,$$

und die *Ausartungs-Abbildungen* s_i ,

$$s_i := \sigma_i^* \quad , \qquad s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1} \quad .$$

Für die Konstruktion der Homologie nun muß man die Mengen X_n "linearisieren": X_n ist zu ersetzen durch die davon erzeugte abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[X_n]$; und jede der Abbildungen $\alpha^* : X_n \longrightarrow X_m$ durch die "linearisierte" Abbildung $\mathbb{Z}[X_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[X_m]$.

Etwas prägnanter ausgedrückt: man ersetzt die *simpliziale Menge* X (den Funktor $X : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Mengen})$) durch die *simpliziale abelsche Gruppe* $\mathbb{Z}[X]$; d.h. den Funktor $\mathbb{Z}[X] : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow (\text{abelsche Gruppen})$, der gegeben ist durch die Zusammensetzung

$$\Delta^{\text{op}} \xrightarrow{X} (\text{Mengen}) \xrightarrow{\mathbb{Z}[-]} (\text{abelsche Gruppen}) \quad , \qquad [n] \longmapsto X_n \longmapsto \mathbb{Z}[X_n] \quad .$$

Für die Konstruktion der Homologie müßte man nun noch zwei andere Dinge tun: Man müßte die simpliziale abelsche Gruppe, von der gerade die Rede war, weiter durch einen Kettenkomplex ersetzen und von dem dann die Homologiegruppen bilden. Von diesen beiden Schritten soll aber hier im Moment nicht die Rede sein.

Vielmehr notieren wir, daß eine simpliziale abelsche Guppe ihrerseits ja auch eine simpliziale Menge ist (per Vergessen der Addition); anders ausgedrückt: eine simpliziale abelsche Gruppe hat eine unterliegende simpliziale Menge. Es macht deshalb Sinn, von der *geometrischen Realisierung* einer simplizialen abelschen Gruppe zu reden (oder, wenn man es genau nehmen will: von der geometrischen Realisierung ihrer unterliegenden simplizialen Menge). Es existiert also der Raum

$$\big|\, \mathbb{Z}[X] \,\big| \quad .$$

Satz. *Die Homotopiegruppen von* $|\,\mathbb{Z}[X]\,|$ *sind die Homologiegruppen von* X.

Den Satz wollen wir beweisen. Dazu müssen wir drei Dinge tun (die alle nicht-trivial sind):

(1) Die Homologiegruppen des $\mathbb{Z}[X]$ zugeordneten Kettenkomplexes vergleichen mit noch zu definierenden "Homotopiegruppen der simplizialen abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X]$".

(2) Eine spezielle Eigenschaft von (gewissen) simplizialen Mengen studieren (die sogenannte *Erweiterungs-Eigenschaft*), die bei simplizialen abelschen Gruppen automatisch erfüllt ist (wie sich herausstellt) und bei deren Vorliegen es möglich ist, eine vernünftige *kombinatorische* Definition der Homotopiegruppen (*ohne* den Umweg über die geometrische Realisierung) anzugeben und zu studieren. Das hängt eng damit zusammen, eine Variante der *Faserungs-Theorie* für simpliziale Mengen zu entwickeln.

(3) Die kombinatorisch definierten Homotopiegruppen müssen verglichen werden mit den topologisch definierten Homotopiegruppen (d.h. den Homotopiegruppen der geometrischen Realisierung der simplizialen Menge).

Simpliziale abelsche Gruppen

Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe,

$$A: \ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{abelsche Gruppen}) \ , \qquad [n] \longmapsto A_n \ .$$

Früher haben wir dem A einen Kettenkomplex CA zugeordnet, der so definiert war: die n-te Kettengruppe CA_n ist definiert als die abelsche Gruppe A_n, und die Rand-Abbildung $\partial: \ CA_n \longrightarrow CA_{n-1}$ ist definiert als die Wechselsumme $\partial = \sum(-1)^i d_i$.

Wir wollen jetzt dem A noch auf eine andere, etwas kompliziertere Weise einen Kettenkomplex zuordnen. Zunächst schadet diese Änderung nicht: Die Homologiegruppen von dem neuen Kettenkomplex sind dieselben wie vorher auch (wie wir nachprüfen werden). Es ist aber natürlich nicht nur die Unschädlichkeit, die uns veranlaßt, die neue Konstruktion zu machen. Sie hat auch Vorteile:

— Zunächst kann man die Homologiegruppen von dem neuen Kettenkomplex sehr leicht übersetzen in “Homotopiegruppen” von der simplizialen abelschen Gruppe selbst.

— Sodann besteht die etwas verblüffende Tatsache, daß man aus dem neuen Kettenkomplex die *gesamte*(!) *ursprüngliche simpliziale abelsche Gruppe* rekonstruieren kann (bis auf kanonische Isomorphie).

Der neue Kettenkomplex, MA, wird als der *Moore-Kettenkomplex* bezeichnet (nach dem Mathematiker John Moore). Es handelt sich dabei, mehr oder weniger nach Definition, um einen Unterkomplex von dem obigen “üblichen” Kettenkomplex CA.

Die abelsche Gruppe MA_n, d.h. die Kettengruppe von MA in der Dimension n, ist nach Definition diejenige Untergruppe von A_n, die gegeben ist durch das Verschwinden von allen Rand-Abbildungen bis auf die letzte:

$$MA_n \ := \ \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i) \ = \ \ker(d_0 : A_n \to A_{n-1}) \cap \ \ldots \ \cap \ker(d_{n-1} : A_n \to A_{n-1})$$

und der Rand-Operator $\partial_n : MA_n \to MA_{n-1}$ ist i.w. gegeben durch die letzte, nicht benutzte Rand-Abbildung der simplizialen abelschen Gruppe A in der Dimension n. Allerdings müssen wir noch ein Vorzeichen einbauen, um sicherzustellen, daß die Inklusionen $MA_n \to CA_n$ mit den Rand-Operatoren verträglich sind. Die Rand-Abbildung $\partial_n : MA_n \to MA_{n-1}$ wird also definiert als

$$\partial_n \ := \ (-1)^n \, d_n \ .$$

Lemma. *MA ist Kettenkomplex und ist Unterkomplex von CA.*

Beweis. MA ist Kettenkomplex. Denn $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ ist (bis aufs Vorzeichen) gleich

$$d_{n-1}^{n-1} \circ d_n^n \;=\; d_{n-1}^{n-1} \circ d_{n-1}^n \;,$$

was auf MA_n den Wert 0 annimmt, da d_{n-1}^n das tut (hier ist, der Deutlichkeit halber, die Nummer der Quelle als oberer Index mit notiert).

MA ist Unterkomplex von CA. Denn auf MA_n ist $\sum(-1)^i d_i \;=\; (-1)^n d_n$. □

Bemerkung (*Homotopiegruppen einer simplizialen abelschen Gruppe*). Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe. Man definiert die Homotopiegruppen von A (oder besser: von der unterliegenden simplizialen Menge von A) in “naiver” Weise: Repräsentanten von Elementen von

$$\pi_n(A)$$

sind die Abbildungen, nach A hinein, vom “kombinatorischen Modell des n-dimensionalen Balles”, der simplizialen Menge Δ^n (Standard-n-Simplex). Dabei wird verlangt (wenn $n > 0$), daß der gesamte Rand von Δ^n in den Basispunkt abgebildet wird. Das heißt, daß für jedes i, $0 \le i \le n$, die i-te Rand-Seite (die Unter-simpliziale-Menge $\delta_i(\Delta^{n-1})$) nach 0 in A abgebildet wird.

Ein solches Element wird als *null-homotop* bezeichnet (das ist vielleicht ein wenig künstlich, wird aber später deutlicher werden), wenn eine Abbildung von Δ^{n+1} nach A existiert, deren Einschränkung auf die letzte Seite $\delta_{n+1}(\Delta^n)$ das vorgegebene Element ist, während die Einschränkungen auf die anderen Seiten $\delta_i(\Delta^n)$, $0 \le i \le n$, alle trivial sind (Abbildungen nach 0 in A).

Die Addition in $\pi_n(A)$ ist durch die Addition in A gegeben. □

Satz. *Die Gruppen $\pi_n(A)$ und $H_n(MA)$ sind dieselben.*

Beweis. Die beiden Gruppen sind sogar durch dieselben Repräsentanten und dieselbe Äquivalenzrelation gegeben. Das liegt daran, daß (für simpliziale Mengen, also auch für simpliziale abelsche Gruppen) eine 1:1 Beziehung besteht (Yoneda lemma!)

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{s.Mengen})}(\Delta^n, A) \;\longrightarrow\; A_n \;, \qquad f \;\longmapsto\; f(\iota)$$

wo $\iota \in (\Delta^n)_n$ das erzeugende Simplex bezeichnet. Aufgrund dieser Beziehung entspricht ein Repräsentant eines Elementes von $\pi_n(A)$ einem Element von A_n, das erstens die Bedingung erfüllt, daß die Ränder Nr. 0 bis Nr. $n{-}1$ null sind, das also in MA_n liegt; und das zweitens die Bedingung erfüllt, daß auch der Rand Nr. n null ist; womit das Element ein *Zykel* in MA_n ist. Ebenso ist eine Abbildung ‘null-homotop’ im obigen Sinne genau dann, wenn das zugeordnete Element in MA_n ein Rand ist. □

Wir wollen jetzt den Moore-Kettenkomplex MA vergleichen mit dem gewöhnlichen Kettenkomplex CA. Dazu definieren wir, für jede Zahl $p = 0, 1, 2, \ldots$, einen Kettenkomplex $\mathrm{F}^p A$ zwischen MA und CA. Nämlich wir verlangen nicht, daß *alle* Rand-Abbildungen (außer der letzten) null sein sollen, sondern wir verlangen das nur für die Rand-Abbildungen unterhalb der Nummer p. Also:

$$x \in A_n \quad\Longrightarrow\quad \left[\;\; x \in \mathrm{F}^p A_n \;\Longleftrightarrow\; d_i(x) = 0 \;, \quad \text{wenn} \;\; 0 \le i < \min(p,n) \;\;\right]$$

Es ist, demzufolge, $\mathrm{F}^0 A = CA$. Und es ist $\mathrm{F}^p A_n = MA_n$, wenn $p \geq n$.

Satz. (1) *Jedes der* $\mathrm{F}^p A$ *ist ein Unterkomplex.*
(2) *Jede der Inklusionen* $\mathrm{F}^{p+1} A \longrightarrow \mathrm{F}^p A$ *ist eine Ketten-Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. (1) Sei $x \in \mathrm{F}^p A_n$. Zu zeigen ist, daß $\partial(x) \in \mathrm{F}^p A_{n-1}$; daß also $d_i(\partial(x)) = 0$, wenn $i < \min(p, n-1)$. Es ist

$$d_i(\,\partial(x)\,) \;=\; d_i\Big(\,\sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, d_j(x)\,\Big) \;.$$

Wir behaupten, daß in dieser Summe sogar alle Summanden null sind: Wenn $i \geq j$, dann ist $d_j(x) = 0$ aufgrund der Annahme, daß $x \in \mathrm{F}^p A_n$. Wenn andererseits $i < j$, dann ist $d_i(d_j(x)) \;=\; d_{j-1}(d_i(x))$ was, aus demselben Grund, ebenfalls null ist.

(2) Zusätzlich zu der Inklusions-Abbildung $i^p : \mathrm{F}^{p+1} A \to \mathrm{F}^p A$ betrachten wir noch eine Abbildung in der anderen Richtung, $f^p : \mathrm{F}^p A \to \mathrm{F}^{p+1} A$. Sie wird definiert durch

$$f^p(x) \quad = \quad \begin{cases} x \;, & \text{wenn } x \in \mathrm{F}^p A_n \text{ und } n \leq p \;; \\ x - s_p(d_p(x)) \;, & \text{wenn } x \in \mathrm{F}^p A_n \text{ und } n > p \;. \end{cases}$$

Es ist richtig, daß die Abbildung ihre Werte in $\mathrm{F}^{p+1} A$ annimmt. Denn für $i < p$ ist

$$d_i(s_p(d_p(x))) \;=\; s_{p-1}(d_i(d_p(x))) \;=\; s_{p-1}(d_{p-1}(d_i(x))) \;,$$

was (für $n > p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) null ist, ebenso wie $d_i(x)$ auch. Und für $i = p$ (und wieder $n > p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) gilt $d_p \circ s_p \;=\; \mathrm{Id}$, und deshalb

$$d_p(f^p(x)) \;=\; d_p(x) - d_p(s_p(d_p(x))) \;=\; 0 \;.$$

Es ist auch richtig, daß die Abbildung eine Ketten-Abbildung ist, d.h. $\partial \circ f^p \;=\; f^p \circ \partial$. Um das einzusehen, betrachten wir zunächst die erste Abbildung, $\partial \circ f^p$, angewandt auf x aus $\mathrm{F}^p A_n$. Der Korrekturterm darin (die Differenz zu $\partial(x)$) ist null, wenn $n \leq p$, und ist ansonsten gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, d_i(\,-s_p(d_p(x))\,) \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} \;.$$

In der ersten der Teilsummen sind sämtliche Terme null, da für $i < p$ gilt

$$d_i \circ s_p \circ d_p \;=\; s_{p-1} \circ d_i \circ d_p \;=\; s_{p-1} \circ d_{p-1} \circ d_i$$

und $d_i(x) = 0$. Die beiden Terme in der zweiten Teilsumme heben sich weg, da

$$d_p \circ s_p \;=\; \mathrm{Id} \;=\; d_{p+1} \circ s_p \;.$$

Der gesamte Korrekturterm ist also durch die dritte Teilsumme gegeben, die wegen

$$d_i \circ s_p \circ d_p \;=\; s_p \circ d_{i-1} \circ d_p \;=\; s_p \circ d_p \circ d_i \qquad (\text{ für } i > p{+}1\ )$$

nun lautet

$$\sum_{i=p+2}^{n} -(-1)^i\, s_p(d_p(\,d_i(x)\,)) \;.$$

Auch bei der Abbildung $f^p \circ \partial$ ist der Korrekturterm wieder durch null gegeben, wenn $n \leq p$ (hier sogar, wenn $n \leq p{+}1$). Ansonsten lautet er

$$\sum_{i=0}^{n} -s_p(d_p(\,(-1)^i\, d_i(x)\,)) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} -(-1)^i\, s_p(d_p(\,d_i(x)\,)) \quad = \quad \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} \quad .$$

Da $x \in \mathrm{F}^p A_n$, ist $d_i(x) = 0$ für $i < p$; die Terme in der ersten Teilsumme sind also alle null. Die Terme in der zweiten Teilsumme (wenn $n > p{+}1$) heben sich weg, wegen

$$d_p \circ d_p \ = \ d_p \circ d_{p+1} \ .$$

Also bleibt nur die dritte Teilsumme, und das ist dieselbe wie die von vorher.

Der Korrekturterm in der Definition von f^p hat offenbar die Eigenschaft, daß er auf $\mathrm{F}^{p+1}A$ null ist. Das bedeutet, daß die eine Komposition eine identische Abbildung ist,

$$f^p \circ i^p \ = \ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}^{p+1}A} \ .$$

Wir zeigen, daß die andere Komposition zu einer identischen Abbildung homotop ist. Dazu geben wir eine Kettenhomotopie zwischen $i^p \circ f^p$ und der identischen Abbildung auf $\mathrm{F}^p A$ an. Die Homotopie ist definiert (für $x \in \mathrm{F}^p A_n$) durch

$$h^p(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 \ , & \text{wenn} \ \ x \in \mathrm{F}^p A_n \ \ \text{und} \ \ n < p \ ; \\ (-1)^p\, s_p(x) \ , & \text{wenn} \ \ x \in \mathrm{F}^p A_n \ \ \text{und} \ \ n \geq p \ . \end{cases}$$

Es ist richtig, daß die Abbildung ihre Werte in $\mathrm{F}^p A$ hat; also x nach $\mathrm{F}^p A_{n+1}$ abbildet, wenn x in $\mathrm{F}^p A_n$ liegt. Denn für $i < p$ ist

$$d_i(s_p(x)) \ = \ s_{p-1}(d_i(x)) \ ,$$

was (für $n \geq p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) null ist. Und es ist dies auch die gewünschte Homotopie, d.h. für $x \in \mathrm{F}^p A_n$ (und vorausgesetzt, daß $n > p$) ist:

$$\partial(\,h^p(x)\,) \,+\, h^p(\,\partial(x)\,) \ \stackrel{!}{=} \ x - i^p(f^p(x)) \ = \ x - (\,x - s_p(d_p(x))\,) \ .$$

Wir rechnen das nach: Der erste Term auf der linken Seite ergibt (wenn $n \geq p$):

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, d_i(\,(-1)^p s_p(x)\,) \quad = \quad \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n+1} \quad .$$

In der ersten der drei Teilsummen sind alle Terme null, wegen $d_i(s_p(x)) \ = \ s_{p-1}(d_i(x))$ für $i < p$. In der zweiten Teilsumme heben, wegen $d_p(s_p(x)) \ = \ d_{p+1}(s_p(x))$, die beiden Terme sich weg. Es bleibt die dritte Teilsumme, die, wegen $d_i(s_p(x)) \ = \ s_p(d_{i-1}(x))$ (für $i > p{+}1$), nun lautet

$$\sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^i(-1)^p\, s_p(d_{i-1}(x)) \ = \ \sum_{i=p+1}^{n} (-1)^{i+1}(-1)^p\, s_p(d_i(x)) \ .$$

Der zweite Term auf der linken Seite ergibt (wenn $n > p$):

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^p\, s_p(\,(-1)^i\, d_i(x)\,) \ = \ \sum_{i=p}^{n} (-1)^i(-1)^p\, s_p(d_i(x)) \ .$$

Die beiden Terme auf der linken Seite geben als ihre Summe also $s_p(d_p(x))$ (sofern $n > p$). Das ist aber dasselbe wie das Ergebnis auf der rechten Seite. $\square$

Korollar. *Die Inklusion $MA \longrightarrow CA$ induziert einen Isomorphismus in der Homologie.*

Beweis. Sei $n \geq 0$ eine vorgegebene Zahl, sei $p > n$. Wie oben angemerkt, stimmen die Kettenkomplexe MA und F^pA in Dimension $\leq n{+}1$ überein. Sie haben deshalb dieselbe Homologiegruppe in der Dimension n. Nach dem Satz induzieren die Inklusionen

$$CA \;=\; \mathrm{F}^0A \longleftarrow \mathrm{F}^1A \longleftarrow \;\ldots\ldots\; \longleftarrow \mathrm{F}^{p-1}A \longleftarrow \mathrm{F}^pA$$

Isomorphismen auf der Homologie. Also ist $H_nCA \xleftarrow{\approx} H_nMA$. □

Ein n-Simplex in A_n (d.h. ein Element der abelschen Gruppe A_n) werde, wie üblich, als *ausgeartet* bezeichnet, wenn es im Bild einer der “Ausartungs-Abbildungen” $s_i : A_{n-1} \longrightarrow A_n$ liegt. Eine Summe von zwei ausgearteten Simplizes muß nicht unbedingt auch wieder ausgeartet sein (das kann vorkommen, wenn die beiden Simplizes im Bild *verschiedener* Ausartungs-Abbildungen liegen). Trotzdem macht es natürlich Sinn, die von den ausgearteten n-Simplizes *erzeugte* Untergruppe zu betrachten. Diese Untergruppe von A_n werde mit DA_n bezeichnet.

Satz. (1) *Die Untergruppen DA_n bilden einen Unterkomplex DA von CA.*
(2) *Die von den Inklusionen $MA \to CA$ und $DA \to CA$ induzierte Abbildung*

$$MA \oplus DA \;\longrightarrow\; CA$$

ist ein Isomorphismus.

Bemerkung. Der Isomorphismus des Satzes induziert einen Isomorphismus von dem Mooreschen Kettenkomplex MA zu dem Quotienten-Komplex CA/DA, dem sogenannten *normalisierten Kettenkomplex*. □

Beweis des Satzes. (1) Sei $x \in DA_n$. Es ist zu zeigen, daß $\partial(x)$ eine Summe von ausgearteten Simplizes in A_{n-1} ist. Nach Definition von DA_n läßt x sich darstellen in der Form $x = \sum_{j=0}^{n-1} s_j(y_j)$. Es wird deshalb genügen, zu zeigen, daß (für jedes j) $\partial(\, s_j(y_j)\,)$ eine Summe von ausgearteten Simplizes ist. Es ist

$$\partial(\, s_j(y_j)\,) \;=\; \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\, d_i(\, s_j(y_j)\,) \;=\; \sum_{i=0}^{j-1} + \sum_{i=j}^{j+1} + \sum_{i=j+2}^{n}$$

Die Terme in der ersten Teilsumme sind alle ausgeartet, wegen $d_i(s_j(y)) = s_{j-1}(d_i(y))$, für $i < j$; und die Terme in der dritten Teilsumme sind es auch, wegen $d_i(s_j(y)) = s_j(d_{i-1}(y))$, für $i > j{+}1$. Die beiden Terme in der zweiten Teilsumme heben sich weg, wegen $d_j \circ s_j = d_{j+1} \circ s_j$.

(2) Wir benutzen die Abbildungen $i^p : \mathrm{F}^{p+1}A \to \mathrm{F}^pA$ und $f^p : \mathrm{F}^pA \to \mathrm{F}^{p+1}A$ aus dem Beweis des vorigen Satzes . Durch Komposition bekommen wir aus ihnen Abbildungen $i = i^0 \circ \cdots \circ i^{n-1} : MA_n \longrightarrow CA_n$ und $f = f^{n-1} \circ \cdots \circ f^0 : CA_n \longrightarrow MA_n$. Die Komposition $f \circ i$ ist die identische Abbildung auf MA, deshalb zerfällt CA als eine direkte Summe, $CA \cong MA \oplus \ker(f)$. Wir werden den Satz bewiesen haben, sobald wir

gezeigt haben, daß $\ker(f)$ und DA übereinstimmen. Dazu zeigen wir, daß $\ker(f) \subset DA$ und daß $DA \subset \ker(f)$.

Nun bedeutet $x \in \ker(f_0)$, daß $x = s_0(d_0(x))$; insbesondere also, daß x in $\mathrm{Bild}(s_0)$ enthalten ist. Ähnlich auch für $\ker(f_p)$, $p = 1, 2, \ldots, n{-}1$. Es folgt, daß der Kern von $f = f^{n-1} \circ \cdots \circ f^0$ enthalten ist im Erzeugnis der Bilder der s_p, d.h., enthalten in DA.

Sei umgekehrt x ein Element von DA. Per Definition heißt das, daß x sich darstellen läßt in der Form $x = \sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i)$. Das Bild $f_0(x)$ hat dann die Darstellung

$$x - s_0(d_0(x)) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i) \;-\; s_0\big(d_0\big(\sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i)\big)\big) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \big(\, s_i(y_i) - s_0(d_0(s_i(y_i)))\,\big).$$

Die beiden Terme für $i = 0$ heben sich weg, wegen $d_0 \circ s_0 = \mathrm{Id}$, und die anderen Terme lassen sich, wegen $s_0 \circ d_0 \circ s_i = s_0 \circ s_{i-1} \circ d_0 = s_i \circ s_0 \circ d_0$, zusammenfassen zu

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i\big(\, y_i - (s_0(d_0(y_i))\,\big) \;;$$

das heißt, $f_0(x)$ hat eine Darstellung der Art $\sum_{i=1}^{n-1} s_i(y_i^1)$. Es folgt nun, induktiv, daß das Bild von x unter $f^{j-1} \circ \cdots \circ f_0$ eine Darstellung der Art

$$\sum_{i=j}^{n-1} s_i(y_i^j)$$

hat: der Induktionsschritt von hier auf den nächsten Fall ist gegeben durch die analoge Umformung

$$f^j\big(\sum_{i=j}^{n-1} s_j(y_i^j)\big) \;=\; \sum_{i=j}^{n-1} \big(\, s_j(y_i^j) \;-\; s_j(d_j(\, s_i(y_i^j)))\,\big) \;=\; \sum_{i=j+1}^{n-1} s_i\big(\, y_i^j - s_j(d_j(y_i^j))\big)$$

(weil wieder $d_j \circ s_j = \mathrm{Id}$, und $s_j \circ d_j \circ s_i = s_j \circ s_{i-1} \circ d_j = s_i \circ s_j \circ d_j$ für $i > j$). Insbesondere, schließlich, ist $f^{n-1}(\, s_{n-1}^{n-1}(y_{n-1}^{n-1})) = 0$. Wir haben gezeigt, daß DA enthalten ist in $\ker(f)$. $\square$

Für simpliziale Mengen besteht eine wichtige Tatsache, die man oft benutzen muß (und die wir oft benutzt haben); nämlich die Simplizes lassen sich auf kanonische Weise darstellen mit Hilfe der nicht-ausgearteten Simplizes und mit Hilfe der Ausartungs-Abbildungen. Im Detail: Sei X eine simpliziale Menge, sei x darin ein Simplex; die Dimension von x sei n, d.h., es ist $x \in X_n$. Es existiert dann ein *nicht-ausgeartetes* Simplex y, von einer Dimension $m \leq n$, und es existiert eine *surjektive* Struktur-Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$ (eine sogenannte Ausartungs-Abbildung, wenn $n > m$), so daß das Simplex x gegeben ist durch $\sigma^*(y)$. Und diese Daten sind *eindeutig*: sowohl das Simplex y als auch die surjektive Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$ sind durch das Simplex x eindeutig bestimmt. Z.B. wird die surjektive Abbildung σ genau dann die identische Abbildung auf $[n]$ sein, wenn das Simplex x selbst nicht-ausgeartet ist.

Eine simpliziale abelsche Gruppe kann, per Vergessen der Addition, als eine simpliziale Menge aufgefaßt werden; deshalb gilt darin das vorgenannte.

Es gilt aber auch noch eine raffiniertere Aussage, die die Addition berücksichtigt, und die demgemäß mit weniger an nicht-ausgearteten Simplizes auskommt; nämlich nur mit denjenigen, die in dem Moore-Komplex liegen (wo also alle Ränder von einem solchen Simplex null sind, ausgenommen allenfalls den letzten Rand).

In engem Zusammenhang damit stehen die folgenden beiden Aussagen:

— Eine simpliziale abelsche Gruppe kann vollständig rekonstruiert werden aus ihrem Moore-Kettenkomplex (bis auf kanonische Isomorphie).

— Zu jedem Kettenkomplex (genauer: nicht-negativen Kettenkomplex) gibt es eine simpliziale abelsche Gruppe, die den Kettenkomplex als Moore-Kettenkomplex hat.

(Ein "nicht-negativer Kettenkomplex" bedeutet einen solchen, wo die Kettengruppen vorhanden sind [oder von null verschieden sind — das ist Geschmacksache] höchstens in den Dimensionen 0, 1, 2, ... , usw., und nicht etwa in negativen Dimensionen).

Satz. (1) *Zu einem Kettenkomplex K,*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} K_2 \xrightarrow{\partial} K_1 \xrightarrow{\partial} K_0 \ ,$$

gibt es eine simpliziale abelsche Gruppe ΓK, mit K selbst als Moore-Komplex, wo

$$\Gamma K_n \ = \bigoplus_{\sigma\colon [n] \twoheadrightarrow [m]} K_m \ .$$

Die Konstruktion ist funktoriell.

(2) *Wenn K der Moore-Komplex einer simplizialen abelschen Gruppe A ist, dann gibt es eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen $\gamma\colon \Gamma K \longrightarrow A$. Diese Abbildung ist natürlich. Sie ist ein Isomorphismus von ΓK zu A.*

Beweis. Ein Element x von ΓK_n ist, nach Definition, eine Summe von Paaren (σ, z),

$$(\sigma, z) \ , \quad \sigma\colon [n] \longrightarrow [m] \ , \ \ \sigma \text{ surjektiv} \ , \quad z \in K_m \ .$$

Dabei operieren die Struktur-Abbildungen wie folgt. Sei $\alpha\colon [n'] \to [n]$ eine Abbildung in der Kategorie Δ (also eine schwach monotone Abbildung von $[n']$ zu $[n]$). Dann ist $\alpha^*(\sigma, z)$ gegeben durch das Paar (σ', z'), das man wie folgt bekommt. Man schreibt die zusammengesetzte Abbildung $[n'] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\sigma} [m]$ in ihre kanonische Form um: eine Surjektion gefolgt von einer Injektion, $[n'] \xrightarrow{\sigma'} [m'] \xrightarrow{\beta} [m]$. Man hat nun drei Fälle:

$$\alpha^*(\sigma, z) \ = \ \begin{cases} (\,\sigma'\,,\, z\,) \ , & \text{wenn } \ \beta \ = \ \mathrm{Id}_{[m]} \ ; \\ (\,\sigma'\,,\, \partial(z)\,) \ , & \text{wenn } \ \beta \ = \ \delta_n\colon \ [n{-}1] \to [n] \ ; \\ (\,-\,,\, 0\,) \ , & \text{wenn } \ \beta \ = \ \text{sonst} \ ; \end{cases}$$

wobei im dritten Fall die Buchführung über σ' weder notwendig ist, noch erwünscht. Es ist klar (oder?), daß man auf die Weise eine simpliziale abelsche Gruppe bekommt (daß nämlich, wenn α ein Kompositum $\alpha_2 \circ \alpha_1$ ist, man ebensogut α auf die genannte Weise operieren lassen kann, wie auch erst α_1 und dann α_2).

Es ist auch klar (oder?), daß der Moore-Kettenkomplex dieser simplizialen abelschen Gruppe nicht größer ist als K selbst (wegen dem Satz: $C\Gamma K \approx M\Gamma K \oplus D\Gamma K$ — die hinzukommenden Dinge sind, nach Definition, ja Summen von Ausartungen).

Wenn K der Moore-Komplex einer simplizialen abelschen Gruppe A ist, und x wie oben, $x = \sum(\sigma, z)$, dann definiert jedes der σ eine Abbildung $\sigma^* \colon A_m \to A_n$, und das zu σ gehörige z ist Element von A_m. Die Abbildung $\gamma \colon \Gamma K \to A$ ist definiert durch

$$\gamma(x) \ := \ \textstyle\sum_\sigma \sigma^*(z) \ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist (nämlich, wenn $\alpha : [n'] \to [n]$ eine Abbildung ist, und (σ, z) ein Summand, dann besteht, in der obigen Notation, die Beziehung $\alpha^*(\gamma(\sigma, z)) = \alpha^*(\sigma^*(z)) = (\sigma \circ \alpha)^*(z) = (\beta \circ \sigma')^*(z) = \sigma'^*(\beta^*(z)) = \gamma(\sigma', \beta^*(z)) = \gamma(\alpha^*(\sigma, z))$).

Eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie erstens injektiv und zweitens surjektiv ist. Also wird es genügen, diese beiden Dinge für die Abbildung γ nachzuprüfen. Bei der Nachprüfung können wir, induktiv, annehmen, daß diese Dinge in kleineren Dimensionen bereits etabliert sind.

Sei x ein Element im Kern von γ. Da γ eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist (d.h., mit den Struktur-Abbildungen verträglich), folgt aus $\gamma(x) = 0$ auch $\gamma(\, d_i(x)\,) = 0$. Wegen der induktiv vorausgesetzten Injektivität ist deshalb, für alle i, $d_i(x) = 0$; das heißt, x liegt im Moore-Komplex. Es ist aber klar (oder?), daß, im Falle $K = MA$, der Moore-Komplex von ΓK derselbe ist wie der von A auch; und daß die Abbildung γ darauf die identische Abbildung ist. Also ist $x = 0$.

Für die Diskussion der Surjektivität sei x' ein Element in A. Nach einem früher geklärten Sachverhalt (dem Satz, daß $A \approx MA \oplus DA$) ist x' eine Summe $x'_1 + x'_2$, wo x'_1 im Moore-Komplex liegt (also, wie gerade besprochen, auch im Bild von γ), und wo x'_2 in DA liegt, also darstellbar ist als eine Summe ausgearteter Elemente, $x'_2 = \sum s_i(y_i)$. Nach der Induktionsvoraussetzung nun liegen die y_i alle im Bild von γ. Da γ mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist, liegen folglich auch die $s_i(y_i)$ im Bild; und damit auch deren Summe. □

Bemerkung. Zu dem beschriebenen Sachverhalt zweier Kategorien (hier: simpliziale abelsche Gruppen einerseits und [nicht-negative] Kettenkomplexe andererseits) mit einem Paar von Funktoren, die zueinander invers sind, bis auf natürliche Isomorphie, sagt man auch, daß es sich hier um eine *Äquivalenz von Kategorien handelt*. Diese Art von "Äquivalenz" bedeutet "Gleichheit für alle praktischen Zwecke". Das vorliegende Beispiel zeigt, daß es sich dabei um einen sehr nicht-trivialen Sachverhalt handeln kann.

Bemerkung. Bei früherer Gelegenheit haben wir diskutiert, daß der zusammengesetzte Funktor (simpl. Mengen) $\longrightarrow$ (simpl. abelsche Gruppen) $\longrightarrow$ (Kettenkomplexe) simpliziale Homotopien in Kettenhomotopien überführt. Wir hätten hier die Gelegenheit, auch für simpliziale abelsche Gruppen den Begriff der simplizialen Homotopie einzuführen; und zu zeigen, daß der Funktor $A \to MA$ simpliziale Homotopien in Kettenhomotopien überführt, und umgekehrt der Funktor $K \to \Gamma K$ Kettenhomotopien in simpliziale Homotopien. Das lassen wir jetzt aber weg.

Die Erweiterungs-Bedingung

Bezeichne $E \to B$ eine Abbildung von topologischen Räumen, und D^m den m-dimensionalen Ball. Die HLE (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft) für die Abbildung $E \to B$ ist eine Bedingung an kommutative Diagramme der Art:

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Die linke vertikale Abbildung ist dabei gegeben durch die Inklusion der 0-ten Ecke im Intervall, $j_0 : D^0 \to D^1$,

$$D^{n-1} \approx D^{n-1} \times D^0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times j_0} D^{n-1} \times D^1 \ .$$

Das Diagramm beschreibt erstens eine Abbildung $D^{n-1} \to E$ und zweitens eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung $D^{n-1} \to E \to B$.

Die HLE fordert, daß zu einem solchen Diagramm immer eine *Liftung* existiert: eine Abbildung von links unten nach rechts oben,

$$D^{n-1} \times D^1 \longrightarrow E \ ,$$

mit der Eigenschaft, daß das resultierende Diagramm immer noch kommutativ ist.

Eine andere (äquivalente) Form der HLE macht den Test ein wenig raffinierter dadurch, daß in dem Test-Diagramm noch zusätzliche Daten spezifiziert werden: nämlich eine vorgegebene Liftung der Homotopie auf dem Rand ∂D^{n-1} von D^{n-1}. Das Diagramm ist also nun

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} \cup \partial D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

und gefragt ist wieder nach einer Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Für simpliziale Mengen kann man diese Art von Bedingung in ganz ähnlicher Form formulieren (und gegebenenfalls verlangen):

Es bezeichne dazu, wie üblich, Δ^m die simpliziale Menge *Standard-m-Simplex*; sie ist beschreibbar als der darstellbare Funktor,

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\Delta^m} (\text{Mengen}) \quad , \qquad [k] \longmapsto (\Delta^m)_k = \mathrm{Hom}_\Delta(\,[k]\,,\,[m]\,) \quad .$$

Für jedes i zwischen 0 und m hat man die Inklusion $\delta_{i*} : \Delta^{m-1} \to \Delta^m$, die durch die Abbildung $\delta_i : [m{-}1] \to [m]$ gegeben ist. Ihr Bild heißt die *i-te Seite* von Δ^m. Die Vereinigung sämtlicher Seiten heißt der *Rand* von Δ^m, wir schreiben dafür $\partial\Delta^m$.

Wenn $E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen ist, so können wir, in Analogie zu dem obigen, nun kommutative Diagramme von Abbildungen von simplizialen Mengen betrachten:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^{n-1} \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Dabei ist die linke vertikale Abbildung gegeben durch die Inklusion der 0-ten Ecke im 1-Simplex, $j_0 : \Delta^0 \to \Delta^1$,

$$\Delta^{n-1} \approx \Delta^{n-1} \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times j_0} \Delta^{n-1} \times \Delta^1 \ ,$$

und gefragt ist wieder nach einer *Liftung*; einer Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Die Interpretation dieser Dinge ist dieselbe wie vorher auch: Das Diagramm $(*)$ spezifiziert sowohl eine Abbildung $\Delta^{n-1} \to E$ als auch eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung $\Delta^{n-1} \to E \to B$; gesucht ist eine Liftung der Homotopie. — Unter der geometrischen Realisierung geht, wie wir wissen, Δ^{n-1} über in D^{n-1}, und $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ in $D^{n-1} \times D^1$. Folglich geht, unter der geometrischen Realisierung, das Diagramm $(*)$ über in das vorher betrachtete Diagramm von topologischen Räumen.

Auch in dem gegenwärtigen simplizialen Kontext ist es möglich, eine Liftung der Homotopie über dem Rand vorzugeben. Dazu betrachtet man Diagramme der Art:

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1 & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^{n-1} \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Es ist aber hier nicht mehr klar, ob die Diagramme des Typs $(*)$ auf der einen Seite und die des Typs $(**)$ auf der anderen Seite *dieselbe* Bedingung definieren. Der Beweis der entsprechenden Tatsache aus dem topologischen Kontext überträgt sich jedenfalls nicht. Nämlich die Tatsache, daß es eine topologische Äquivalenz von $D^{n-1} \times D^1$ auf sich gibt, die D^{n-1} auf $D^{n-1} \cup \partial D^{n-1} \times D^1$ abbildet, hat kein simpliziales Analogon:

Bemerkung. Es gibt *keinen* Isomorphismus von $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ auf sich, der Δ^{n-1} abbildet auf $\Delta^{n-1} \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$. Denn diese beiden Unter-simplizialen-Mengen von

$\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ sind z.B. nicht einmal zueinander isomorph (die eine hat ein einziges nicht-ausgeartetes $(n-1)$-Simplex, die andere hat davon ganz viele).

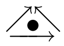
Wegen solcher Dinge ist es angebracht, eine zusätzliche, neue Formulierung einer Liftungs-Bedingung einzuführen. Wie wir sehen werden, ist diese Bedingung stark genug, um alle anderen gewünschten Formulierungen zu implizieren; insbesondere auch diejenigen, die durch die obigen Diagramme $(*)$ und $(**)$ gegeben sind.

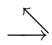
Die neue Bedingung kommt daher, daß man sich anschaut, wie das Prisma $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ aus seinen Einzelteilen aufgebaut ist:

In einer gleich zu klärenden Sprache ist es so, daß man $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ bekommen kann, ausgehend von $\Delta^{n-1} \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$, durch sukzessive "Trichter-Füllungen". Dabei bedeutet eine *Trichter-Füllung*, daß ein einzelnes Simplex in einer ganz speziellen Weise an den vorher schon vorhandenen Teil angeheftet wird (das ist, wenn man so will, die kombinatorische Version von einer "elementaren Erweiterung"). Eine ähnliche Sprache wird auch für Abbildungen verwendet werden; die (noch zu formulierende) neue Liftungs-Bedingung wird dann eine Bedingung sein, die das Liften von Trichter-Füllungen betrifft.

Definition. Sei $0 \leq i \leq n$. Der *i-te Trichter* (englisch: "*i-th horn*") ist diejenige Unter-simpliziale-Menge Λ_i^n von Δ^n, die gegeben ist durch die Vereinigung von allen Seiten von Δ^n, bis auf die i-te.

(Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß Λ_i^n die Vereinigung derjenigen Seiten von Δ^n ist, die die i-te Ecke von Δ^n enthalten.)

Beispiel. Im 2-Simplex Δ^2 :  gibt es die drei Trichter Λ_0^2, Λ_1^2, Λ_2^2 , wie folgt:

Λ_0^2 :  , Λ_1^2 :  , Λ_2^2 : 

(diese sind *nicht* zueinander isomorph).

Definition. Eine simpliziale Menge, X', entsteht aus einer anderen, X, durch eine *Trichter-Füllung*, wenn $X' \approx X \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ (für geeignetes n und geeignetes i).

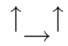
Die geometrische Realisierung ist, wie wir wissen, mit Verklebe-Konstruktionen verträglich. Man hat also in dieser Situation einen Isomorphismus:

$$|X'| \approx |X| \cup_{|\Lambda_i^n|} |\Delta^n|$$

Das heißt, $|X'|$ entsteht aus $|X|$ durch das Anheften von zwei neuen Zellen: einer $(n-1)$-Zelle und einer n-Zelle. Dabei kommt die $(n-1)$-Zelle her von der in Λ_i^n nicht vorhandenen i-ten Seite von Δ^n, und die n-Zelle kommt von Δ^n selbst. Insbesondere ist es auch richtig, daß $|X'|$ zu $|X|$ homotopie-äquivalent ist (in sehr spezieller Weise).

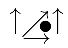
Beispiel. $\Delta^1 \times \Delta^1$ entsteht aus

$$\Delta^1 \times 0 \;\cup\; \partial\Delta^1 \times \Delta^1 \quad :$$



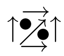
durch das Füllen von zwei Trichtern. Zuerst wird ein Trichter Λ^2_1 gefüllt:

$$(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1{\times}\Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2 \quad :$$



danach wird ein Trichter Λ^2_0 gefüllt:

$$(\,(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1{\times}\Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2\,) \cup_{\Lambda^2_0} \Delta^2 \quad :$$



□

Die allgemeine Form dieses Beispiels lautet:

Satz. $\Delta^{n-1}{\times}\Delta^1$ *entsteht aus* $\Delta^{n-1}{\times}0 \cup \partial\Delta^{n-1}{\times}\Delta^1$ *durch Füllen von* n *Trichtern*:

$$\Lambda^n_{n-1}\;,\quad \Lambda^n_{n-2}\;,\;\ldots\ldots\;,\quad \Lambda^n_1\;,\quad \Lambda^n_0\;.$$

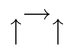
Beweis. Das kommt von der (bei früherer Gelegenheit schon betrachteten) Zerlegung von dem Prisma $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ in n-Simplizes, n an der Zahl. Das *letzte* von diesen n-Simplizes hat als seine “freie Seite” den Deckel des Prismas. Im Simplex ist das die Seite, die nicht die 0-te Ecke enthält, also die 0-te Seite; das Hinzufügen des letzten unter den n-Simplizes entspricht einer Trichter-Füllung vom Typ Λ^n_0.

Das letzte und das vorletzte unter den n-Simplizes haben als gemeinsame Seite diejenige, die nicht die 1-te Ecke (in beiden von ihnen) enthält. Wenn man sich also vorstellt, daß das letzte Simplex nicht da ist, so hat das vorletzte Simplex als seine freie Seite diejenige mit der Nummer 1. Hinzufügen des vorletzten n-Simplexes entspricht einer Trichter-Füllung vom Typ Λ^n_1.

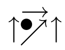
Und so weiter. □

Wegen der Unsymmetrie des simplizialen “Intervalls” Δ^1 gibt es von dem Beispiel eine (davon verschiedene!) Variante. Nämlich statt ein Prisma von unten nach oben mit Hilfe von Trichtern zu füllen, kann man dies auch in umgekehrter Richtung veranstalten: von oben nach unten. Die erwähnte Unsymmetrie wird unter anderem dadurch deutlich, daß im obigen Fall der Trichter Λ^n_n nicht Verwendung findet; dagegen in der nun folgenden Variante der Trichter Λ^n_0 nicht.

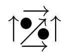
Beispiel. $\Delta^1 \times \Delta^1$ entsteht aus

$$\Delta^1 \times 1 \ \cup \ \partial\Delta^1 \times \Delta^1 \quad :$$


durch das Füllen von zwei Trichtern. Zuerst wird ein Trichter Λ^2_1 gefüllt:

$$(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1 {\times} \Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2 \quad :$$


danach wird ein Trichter Λ^2_2 gefüllt:

$$(\,(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1 {\times} \Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2\,) \cup_{\Lambda^2_2} \Delta^2 \quad :$$


$\square$

Die allgemeine Form dieses Beispiels lautet:

Satz. $\Delta^{n-1} {\times} \Delta^1$ *entsteht aus* $\Delta^{n-1} {\times} 1 \cup \partial\Delta^{n-1} {\times} \Delta^1$ *durch Füllen von* n *Trichtern*:

$$\Lambda^n_1\ ,\ \ \Lambda^n_2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \ \Lambda^n_{n-1}\ ,\ \ \Lambda^n_n\ .$$

$\square$

Wir kommen nun zur Formulierung der Erweiterungs-Bedingung. Diese wird gelegentlich auch als "Ausfüllungs-Bedingung" bezeichnet; oder, nach dem Mathematiker Daniel Kan, der sie eingeführt hat, als "Kan-Erweiterungs-Bedingung" oder kurz "Kan-Bedingung".

Eine Abbildung, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, wird auch als "Faserung im Sinne von Kan" bezeichnet oder kurz "Kan-Faserung".

Definition. Sei $E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Die *Erweiterungs-Bedingung* sagt: Für jedes n, jedes i (wo $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$) und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

existiert eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die das Diagramm kommutativ macht.

Es gibt den Spezialfall der Erweiterungs-Bedingung, wo B ein “Punkt” ist, $B = \Delta^0$ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, “wo B eigentlich gar nicht da ist”). In dem Fall reduziert die Bedingung sich zu einer solchen, die nur die simpliziale Menge E betrifft. Diese Bedingung ist ganz und gar nicht-trivial. Ihrer Wichtigkeit wegen soll sie noch einmal gesondert formuliert werden. — Eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, wird manchmal auch als “Kan-Komplex” bezeichnet.

Definition. Sei E eine simpliziale Menge. Die *Erweiterungs-Bedingung* für E sagt: Für jedes n, jedes i (wo $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$) und jede Abbildung

$$\Lambda_i^n \longrightarrow E \ ,$$

existiert eine Erweiterung davon zu einer Abbildung $\Delta^n \to E$.

Die Abbildung $\Lambda_i^n \to E$ in dieser Definition wird als ein *Trichter in* E bezeichnet; und die Abbildung $\Delta^n \to E$ als eine *Füllung* dieses Trichters.

(Die Abbildung $\Delta^n \to E$ in der vorigen Definition wird dementsprechend auch als eine *Füllung über der vorgegebenen Füllung in* B bezeichnet.)

Der nun folgende Satz sagt insbesondere, daß die Kan-Erweiterungs-Bedingung die oben betrachteten Liftungs-Bedingungen $(*)$ und $(**)$ impliziert: diese beiden Liftungs-Bedingungen sind die Spezialfälle des Satzes, wo $L = \Delta^{n-1}$, und wo entweder $K = \emptyset$ ist oder $K = \partial\Delta^{n-1}$.

Satz (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft). *Sei $E \to B$ eine Abbildung. Es gelte die Kan-Bedingung für diese Abbildung. Sei L eine simpliziale Menge und $K \subset L$ eine Unter-simpliziale-Menge. Bezeichne $L \times 0 \cup K \times \Delta^1$ die Unter-simpliziale-Menge in $L \times \Delta^1$, die von $L \times 0$ und $K \times \Delta^1$ erzeugt ist. Es existiert für jedes kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} L\times 0 \cup K\times\Delta^1 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ L \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

eine Liftung (d.h. eine Abbildung $L\times\Delta^1 \to E$, die das Diagramm kommutativ macht).

Bemerkungen. (1) Es gibt eine (nicht-identische!) Variante von dem Satz, wo $L\times 0$ ersetzt ist durch $L\times 1$.

(2) Auch im Fall $B = \Delta^0$ macht der Satz eine durchaus nicht-triviale Aussage: Die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft* gilt für eine injektive Abbildung von simplizialen Mengen, *insofern als nur Abbildungen in Kan-Komplexe betrachtet werden.*

Beweis des Satzes. Wir klären zunächst den Spezialfall, wo L das $(n-1)$-Simplex Δ^{n-1} ist, und K dessen Rand $\partial\Delta^{n-1}$. Wie oben festgehalten wurde, so entsteht

$\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ aus $\Delta^{n-1} \times 0 \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ durch das Füllen von Trichtern, n an der Zahl. Die gewünschte Abbildung $\Delta^{n-1} \times \Delta^1 \longrightarrow E$ entsteht, folglich, durch die n-malige Anwendung der Hypothese des gegenwärtigen Satzes; nämlich der Hypothese, daß Trichter-Füllungen bei der Abbildung $E \to B$ möglich sind.

Für den allgemeinen Fall wollen wir diesen Spezialfall als Hilfsmittel verwenden. Dazu benutzen wir die Skelett-Filtrierung von L, relativ zu K,

$$K = L^{-1} \subset L^0 \subset \ \dots \ \subset L^m \subset \ \dots \ .$$

Das m-Skelett L^m ist dabei definiert als die kleinste Unter-simpliziale-Menge in L, die sowohl K enthält als auch sämtliche Simplizes der Dimension m (oder, was auf dasselbe hinausläuft: sämtliche Simplizes der Dimensionen $\leq m$). Es besteht, wie wir wissen, die Beziehung, daß

$$L^m \ = \ L^{m-1} \cup_{J_m \times \partial\Delta^m} J_m \times \Delta^m \ ,$$

wo die Indexmenge J_m die Menge der *nicht-ausgearteten* m-Simplizes von L ist (wobei wir allerdings von diesen noch diejenigen ausnehmen müssen, die in K liegen).

Die gewünschte Abbildung $L \times \Delta^1 \to E$ zu konstruieren, ist nun gleichbedeutend mit der Konstruktion eines kompatiblen Systems von Abbildungen $L^m \times \Delta^1 \to E$ (wo "kompatibel" bedeuten soll, daß die m-te Abbildung der Serie als ihre Restriktion auf $L^{m-1} \times \Delta^1$ die $(m{-}1)$-te Abbildung hat).

Dies System wird induktiv konstruiert. Für den Schritt von $m{-}1$ auf m werden wir benutzen, daß, nach dem Spezialfall, eine Abbildung von $\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1$ auf $\Delta^m \times \Delta^1$ erweitert werden kann. Wir betrachten dazu, für jedes Element j aus der Indexmenge J_m, das zugehörige Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & L^m \cup L^{m-1} \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "\chi_j \times \mathrm{Id}"] & L^m \times \Delta^1 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

wo $\chi_j : \Delta^m \to L^m$ die charakteristische Abbildung von j ist, und $\partial\Delta^m \to L^{m-1}$ ihre Einschränkung (die Anhefte-Abbildung). Nach dem Spezialfall bekommen wir ein durch J_m indiziertes System von Abbildungen, kompatibel mit den vorhandenen Abbildungen; oder, was dasselbe bedeutet, eine Abbildung

$$J_m \times \Delta^m \times \Delta^1 \ \longrightarrow \ E \ ,$$

die die Abbildung $J_m \times (\,\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1\,) \longrightarrow E$ erweitert. Zusammenkleben ergibt nun die gewünschte Abbildung auf

$$L^m \cup L^{m-1} \times \Delta^1 \ \cup_{J_m \times (\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1)} \ J_m \times \Delta^m \times \Delta^1 \ = \ L^m \times \Delta^1 \ .$$

$\square$

Die Homotopie-Relation

Seien X, Y simpliziale Mengen und f_0, f_1 Abbildungen von X zu Y. Wie früher auch, so bedeutet eine *Homotopie von* f_0 *zu* f_1 eine Abbildung

$$F : X \times \Delta^1 \longrightarrow Y \ ,$$

deren Einschränkung über die beiden Inklusionen $j_0 : \Delta^0 \to \Delta^1$ und $j_1 : \Delta^0 \to \Delta^1$,

$$X \ \approx \ X \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times j_i} X \times \Delta^1 \ ,$$

die Abbildungen f_0 und f_1 ergibt.

Die Relation "Es gibt eine Homotopie von f_0 zu f_1" ist keine Äquivalenzrelation. Dies haben wir früher zur Kenntnis genommen an Beispielen wie den beiden folgenden (fehlende Symmetrie bzw. fehlende Transitivität):

— die beiden Inklusionen $\Delta^0 \to \Delta^1$ sind in der einen Richtung homotop, in der andern aber nicht. Denn eine Homotopie zwischen ihnen ist eine Abbildung $\Delta^1 \to \Delta^1$, und von solchen Abbildungen gibt es genau drei (die Identität und zwei konstante Abbildungen), entsprechend (Yoneda-Lemma) den drei Elementen von $(\Delta^1)_1$.

— die beiden Inklusionen der "äußeren" Punkte Δ^0 in $\Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$ sind beide homotop zum "mittleren" Punkt (genauer: homotop entweder in der einen oder in der andern Richtung), sie sind aber nicht zueinander homotop. Eine Homotopie zwischen ihnen entspräche einer Abbildung $\Delta^1 \to \Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$. Von solchen Abbildungen gibt es fünf: die beiden Inklusionen $\Delta^1 \to \Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$ und drei konstante Abbildungen.

Die Situation ist anders, wenn die Erweiterungs-Bedingung erfüllt ist:

Satz. *Y sei Kan-Komplex. X sei simpliziale Menge. Die Relation "es existiert eine Homotopie" ist eine Äquivalenzrelation für Abbildungen $X \to Y$.*
— Ähnlich auch die Relation "*es existiert eine Homotopie relativ zu $A \subset X$*".

Ähnlich auch für Abbildungen über B:

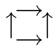
Satz. *$p : E \to B$ sei eine Kan-Faserung. X sei simpliziale Menge. Die Relation "es existiert eine Homotopie über B" ist eine Äquivalenzrelation für Abbildungen $X \to E$* (eine Homotopie ist "über B", wenn die nach B projizierte Homotopie konstant ist).
— Ähnlich auch die Relation "*es existiert eine Homotopie über B, relativ zu $A \subset X$*".

Beweis dieser Sätze. Es ist zu zeigen, daß die Relation "es existiert eine Homotopie von f_0 zu f_1" *reflexiv* ist (was klar ist: Existenz *konstanter* Homotopien), sowie auch *symmetrisch* und *transitiv*. Es bleibt somit zu zeigen:

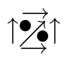
— wenn f_0 zu f_1 homotop ist, dann ist auch f_1 zu f_0 homotop; und:

— wenn f_0 zu f_1 homotop ist, und f_1 zu f_2, dann ist auch f_0 zu f_2 homotop.

Im folgenden Argument stellen wir uns zunächst vor, daß A und B eigentlich gar nicht da sind (der erste Teil des ersten Satzes).

Beide Behauptungen werden wir mit einem Um-Schreibe-Trick aus dem gerade vorher behandelten Liftungs-Satz herleiten. Die vorgegebene simpliziale Menge L wird dabei durch $X \times \Delta^1$ gegeben sein. Die zu konstruierende Homotopie ist demgemäß dann eine Abbildung auf $(X \times \Delta^1) \times \Delta^1$. — Um uns ein Bild zu machen, stellen wir uns X als einen Punkt vor, und demgemäß dann $X \times \Delta^1 \times \Delta^1$ als ein Quadrat: 

Für den Beweis der Transitivität stellen wir uns vor, daß von diesem Quadrat die linke Kante (die Homotopie von f_0 zu f_1) und die obere Kante (die Homotopie von f_1 zu f_2) schon gegeben sind, . Die linke Kante repräsentiert also die Abbildung (von der die Homotopie zu liften ist) mit Definitionsbereich $(X \times \Delta^1) \times 0$). Und die obere Kante repräsentiert die schon geliftete Homotopie auf dem Teil $(X \times 1)$, also eine Abbildung mit Definitionsbereich $(X \times 1) \times \Delta^1$. Die Liftung, die der Satz liefert, ist eine Abbildung auf dem ganzen Quadrat:



Die Einschränkung auf " $\nearrow$ ", die Diagonale $X \times \Delta^1 \subset X \times \Delta^1 \times \Delta^1$, ist Homotopie von f_0 zu f_2.

Für den Beweis der Symmetrie stellen wir uns vor, daß von dem Quadrat schon drei Kanten vorliegen, . Dabei soll die untere Kante die Homotopie von f_0 zu f_1 repräsentieren. Andererseits soll sowohl die linke Kante als auch die obere Kante jeweils eine konstante Homotopie repräsentieren; nämlich diejenige konstante Homotopie, die durch die Abbildung f_0 gegeben ist. Das gefüllte Quadrat hat dann als seine rechte Kante eine Homotopie von f_1 zu f_0.

Im allgemeinen Fall benötigt man noch die folgende Modifikationen. Wenn ein B da ist, dann sind alle Liftungen als "über B" zu nehmen. Und wenn ein A da ist, dann baut man die durch A spezifizierte Konstanz der Homotopie auch mit ein: die durch Liftung zu erhaltende "Homotopie", d.h. Abbildung auf $X \times \Delta^1 \times \Delta^1$, ist auf dem Teil $A \times \Delta^1 \times \Delta^1$ schon vorgegeben als die Projektion auf den Faktor A, gefolgt von der auf A vorhandenen Abbildung. $\square$

Beispiele und Nicht-Beispiele

Die Erweiterungs-Bedingung ist eine drastische Forderung. Es ist eine sehr spezielle Eigenschaft, wenn sie für eine simpliziale Menge erfüllt ist (bzw. auch, in ihrer relativen Form, für eine Abbildung von simplizialen Mengen). So werden wir weiter unten die Tatsache zur Kenntnis nehmen, daß eine simpliziale Menge, die die Kan-Bedingung erfüllt und die nicht "diskret" ist (d.h., es gibt mindestens ein nicht-ausgeartetes Simplex in Dimension > 0) notwendigerweise "unendlich-dimensional" sein muß (d.h., es gibt nicht-ausgeartete Simplizes in beliebig hohen Dimensionen). Insbesondere kann eine solche simpliziale Menge nicht *endlich* sein ("endlich" heißt, es gibt darin nur endlich viele nicht-ausgeartete Simplizes — das Standard-Simplex Δ^n z.B. ist endlich).

Einige Konstruktionen simplizialer Mengen führen automatisch auf solche, die die Kan-Bedingung erfüllen (wie wir weiter unten nachprüfen werden); so:
— der singuläre Komplex eines topologischen Raumes,
— die unterliegende simpliziale Menge einer simplizialen Gruppe.
Ebenso, als Variante von letzterem, hat man noch, daß ein 'Prinzipalbündel' Anlaß gibt zu einer Kan-Faserung.

Vor allen Dingen auch interessant ist die Tatsache, daß es zu jeder simplizialen Menge eine dazu (schwach-) homotopie-äquivalente gibt, für die die Kan-Bedingung erfüllt ist. Wie wir später diskutieren werden, besteht die wichtige Tatsache, daß der singuläre Komplex der geometrischen Realisierung diese Eigenschaft hat. Es gibt aber auch eine einfachere, direkte Konstruktion, die wir jetzt anschauen wollen. Grob gesprochen ist es so, daß man einfach alle die Simplizes dazutut, "die man braucht"; und anschließend prüft man dann nach, daß das Verfahren funktioniert:

Konstruktion (*Trichter-Füllen*). (a) Sei Y eine simpliziale Menge. Man betrachtet die Menge T, deren Elemente die Trichter in Y sind. Ein Element von T ist also ein Tripel

$$(n,i,f) \ ; \qquad \text{wo} \qquad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \quad f : \Lambda_i^n \longrightarrow Y \ .$$

Einen solchen Trichter zu *füllen*, bedeutet, daß man, unter Benutzung des Klebe-Diagramms $Y \xleftarrow{f} \Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n$, eine Verklebe-Konstruktion macht; also übergeht zu:

$$Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n \ .$$

Nun kann man aber auch *alle diese Trichter gleichzeitig füllen*: dazu benutzt man das Klebe-Diagramm, das durch das Zusammenpacken all der Daten entsteht:

$$Y \xleftarrow{\coprod_{t\in T} f(t)} \coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)} \xrightarrow{\text{Inkl}} \coprod_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

Es bezeichne $\Phi(Y)$ die durch das Zusammenkleben entstehende simpliziale Menge:

$$\Phi(Y) \;=\; Y \cup_{\coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)}} \coprod_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

(b) Sei X eine simpliziale Menge. Man definiert eine aufsteigende Folge von simplizialen Mengen durch *iteriertes Trichter-Füllen*:

$$\Phi^0(X) = X \;,\; \Phi^1(X) = \Phi(\,\Phi^0(X)\,) \;,\; \ldots \;,\; \Phi^n(X) = \Phi(\,\Phi^{n-1}(X)\,) \;,\; \ldots$$

und nimmt die Vereinigung von all diesen, $\Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$.

Satz. (1) $\Psi(X)$ *erfüllt die Erweiterungs-Bedingung.* (2) *Die Inklusion* $X \to \Psi(X)$ *induziert eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen,* $|X| \to |\Psi(X)|$.

Beweis. (1) Sei $g : \Lambda^m_j \to \Psi(X)$ ein Trichter. Es ist zu zeigen, daß man diesen füllen kann. Nun ist jedes Simplex von $\Psi(X)$ in einer der Unter-simplizialen-Mengen $\Phi^k(X)$ enthalten, da ja $\Psi(X)$ die aufsteigende Vereinigung von diesen ist. Dieselbe Aussage gilt auch für eine Kollektion von Simplizes, *vorausgesetzt*, diese Kollektion ist endlich. Insbesondere gilt die Aussage deshalb für die Bilder, unter g, von den (endlich vielen!) nicht-ausgearteten Simplizes in Λ^m_j. Es gibt also ein n, so daß $\Phi^n(X)$ die Bilder sämtlicher nicht-ausgearteter Simplizes von Λ^m_j enthält; und damit auch schon das ganze Bild $g(\Lambda^m_j)$, da ja Λ^m_j (wie jede andere simpliziale Menge auch) von seinen nicht-ausgearteten Simplizes erzeugt ist. — Das Resultat der Betrachtung ist, daß der vorgegebene Trichter aufgefaßt werden kann als ein Trichter in $\Phi^n(X)$ (für geeignetes n). Der Trichter kann deshalb gefüllt werden in der nächst-größeren simplizialen Menge in der Folge, $\Phi^{n+1}(X)$, nach der Definition von dieser.

(2) Eine einzelne Trichter-Füllung ergibt, wie früher schon einmal notiert wurde, eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen:

$$|Y| \xrightarrow{\simeq} |Y| \cup_{|\Lambda^n_i|} |\Delta^n_i| \;\approx\; |\,Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n_i\,|$$

Mit endlich vielen ist es deshalb genauso, per Induktion. Um von hier auf den allgemeinen Fall zu kommen, wenden wir den Whitehead-Satz an. Dazu prüfen wir nach, daß die von der Inklusion $|Y| \to |\Phi(Y)|$ auf den Homotopiegruppen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist; also erstens surjektiv und zweitens injektiv:

Zur Surjektivität: sei $f : S^k \to |\Phi(Y)|$ ein Repräsentant eines Elements (die Basispunkte lassen wir in der Notation fort):

$$f :\; S^k \;\longrightarrow\; |Y| \cup_{\coprod_{t\in T} |\Lambda^{n(t)}_{i(t)}|} \coprod_{t\in T} |\Delta^{n(t)}|$$

Wegen der Kompaktheit von S^k liegt das Bild $f(S^k)$ in einem *endlichen Unterkomplex* des CW-Komplexes $|\Phi(Y)|$. Es gibt deshalb eine *endliche* Teilmenge U von T, so daß dieses Bild schon enthalten ist in dem Unterraum:

$$|Y| \cup_{\coprod_{t\in U} |\Lambda^{n(t)}_{i(t)}|} \coprod_{t\in U} |\Delta^{n(t)}|$$

Wegen dem, was wir über *endliche* Trichterfüllungen schon wissen, können wir deshalb schließen, daß die Klasse von f herkommt aus $|Y|$, wie gewünscht.

Zur Injektivität: sind $f_0 : S^k \to |Y|$ und $f_1 : S^k \to |Y|$ zwei Repräsentanten, deren Äquivalenzklassen dasselbe Bild haben, so ist die Relation zwischen ihnen durch eine Homotopie beschreibbar, also eine Abbildung $S^k \times [0,1] \to |\Phi(Y)|$ mit gewissen Eigenschaften. Wie vorher können wir nun wieder auf den endlichen Fall zurückführen, da ja $S^k \times [0,1]$ ebenfalls kompakt ist.

Wir haben erhalten, daß in der aufsteigenden Folge von CW-Komplexen,

$$|X| = |\Phi^0(X)| \subset |\Phi^1(X)| \subset \cdots \subset |\Phi^n(X)| \subset \cdots$$

jede der Inklusions-Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Daraus folgt aber, wie wir wissen, daß auch die Inklusions-Abbildung $|X| \longrightarrow |\Psi(X)| = \bigcup_n |\Phi^n(X)|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist (der Beweis dafür ging übrigens mit derselben Anwendung des Whitehead-Satzes, die gerade eben auch verwendet wurde). $\square$

Variante der Konstruktion (*Trichter-Füllen über B*). (a) Sei $p : Y \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Man betrachtet die Menge T, deren Elemente die Trichter *in Y über B* sind. Ein Element von T ist also ein Tupel

$$(n, i, f, g) \ ; \quad \text{wo} \quad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \quad f : \Lambda^n_i \longrightarrow Y \ , \quad g : \Delta^n \longrightarrow B \ ,$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_i & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \text{Inkl}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta^n & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

kommutiert. Einen solchen Trichter zu *füllen*, bedeutet, daß man, unter Benutzung des Klebe-Diagramms $Y \xleftarrow{f} \Lambda^n_i \to \Delta^n$, eine Verklebe-Konstruktion macht; also übergeht zu:

$$Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n \ ;$$

wobei man, gleichzeitig, die Abbildung p auf $Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n$ erweitert, mit Hilfe von g.

Wieder kann man die Trichter alle gleichzeitig füllen. Man bekommt die simpliziale Menge

$$\Phi(Y) \;=\; Y \;\cup_{\coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)}} \;\coprod_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

zusammen mit einer Abbildung davon nach B.

(b) Sei X eine simpliziale Menge über B. Man definiert eine aufsteigende Folge von simplizialen Mengen, über B, durch *iteriertes Trichter-Füllen*:

$$\Phi^0(X) \;=\; X \;,\; \Phi^1(X) \;=\; \Phi(\,\Phi^0(X)\,)\;,\; \ldots \;,\; \Phi^n(X) \;=\; \Phi(\,\Phi^{n-1}(X)\,)\;,\; \ldots$$

und nimmt die Vereinigung von all diesen, $\Psi(X) \;=\; \bigcup_n \Phi^n(X)$.

Satz. (1) *Die Abbildung* $\Psi(X) \to B$ *erfüllt die Erweiterungs-Bedingung.* (2) *Die Inklusion* $X \to \Psi(X)$ *induziert eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen,* $|X| \to |\Psi(X)|$.

Beweis. Wie vorher. □

Nun zum Vorkommen der Erweiterungs-Bedingung "in der Natur":

Beispiel. Der singuläre Komplex $\mathrm{S}(W)$ eines topologischen Raumes W ist ein Beispiel für eine simpliziale Menge, in der die Erweiterungs-Bedingung *erfüllt* ist. Denn wegen der Adjungiertheit der Funktoren $\mathrm{S}(-)$ und $|-|$ (der Funktor "geometrische Realisierung" ist links-adjungiert zum Funktor "singulärer Komplex") kann man einen Trichter in $\mathrm{S}(W)$, $\Lambda^n_i \to \mathrm{S}(W)$, identifizieren mit einer stetigen Abbildung $|\Lambda^n_i| \to W$. Es ist aber klar (oder?), daß $|\Lambda^n_i|$ ein Retrakt von $|\Delta^n|$ ist. Dies ergibt eine Abbildung $|\Delta^n| \to W$ und, per Adjunktion, damit auch eine Abbildung $\Delta^n \to \mathrm{S}(W)$. Es ist plausibel, daß das die gewünschte Trichter-Füllung sein wird. Das (leichte) Nachprüfen davon lassen wir weg. □

Für unsere nächste Betrachtung benötigen wir eine alternative Beschreibung von Trichtern; nämlich eine Beschreibung durch Systeme von Simplizes:

Lemma (Alternative Beschreibung von Trichtern). (1) *Es läuft auf dasselbe hinaus*:
(i) *einen Trichter* $f : \Lambda^n_i \to E$ *anzugeben* oder
(ii) *ein System von* $(n{-}1)$*-Simplizes* x_j *in* E, $0 \le j \le n$, $j \ne i$, *mit der Bedingung, daß* $d_j(x_k) \;=\; d_{k-1}(x_j)$ *für* $j < k$ *und* $j \ne i \ne k$.

(2) *Es läuft auf dasselbe hinaus*:
(i) *eine Füllung des Trichters* $f : \Lambda^n_i \to E$ *anzugeben* (eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die die Abbildung f erweitert) oder
(ii) *ein* n*-Simplex* $y \in E$, *mit* $d_j(y) \;=\; x_j$ (*für* $j \ne i$).

Beweis. Dies beruht auf der 1:1 Beziehung (Yoneda-Lemma) zwischen Abbildungen $g : \Delta^m \to E$ einerseits und Elementen $y \in E_m$ andererseits: die 1:1 Beziehung ist dadurch gegeben, daß der Abbildung g das Simplex $y = g(\iota_m)$ zugeordnet wird, wo ι_m das erzeugende Simplex $\iota_m = \mathrm{Id}_{[m]}$ in $(\Delta^m)_m \;=\; \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[m]\,)$ bezeichnet. Die angegebenen Relationen für die x_j und ihre Ränder erklären sich durch die Definition von x_j als $f(d_j(\iota_n))$ und die Beziehung (in Δ^n, für $j < k$)

$$d_j(d_k(\iota_n)) \;=\; d_{k-1}(d_j(\iota_n)) \;.$$

Umgekehrt ist der Trichter aus dem System der Simplizes x_j auch (re-)konstruierbar. Das liegt daran, daß in einer Unter-simplizialen-Menge von Δ^n, die von Simplizes der Art $d_j(\iota_n)$ erzeugt ist, *jede* Relation aus den oben angegebenen Relationen folgt.

(Für letzteres benutzt man die Normalform für Morphismen in der Kategorie Δ. Nämlich jeder Morphismus ist auf kanonische Weise die Komposition von einer Surjektion, gefolgt von einer Injektion; die Injektionen lassen sich auf spezielle Weise mit Hilfe der δ_i darstellen; und die Surjektionen auf spezielle Weise mit Hilfe der σ_i). $\square$

Eine *simpliziale Gruppe* ist ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der Gruppen", also ein Funktor

$$G: \; \Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Gruppen}) \;.$$

Es bedeutet dasselbe, daß man für jedes $[n]$ in der Kategorie Δ eine Gruppe G_n hat, und für jede Abbildung $\alpha: [m] \to [n]$ in Δ einen Homomorphismus $\alpha^*: G_n \to G_m$. (Bei solcher "Zu-Fuß-Beschreibung" sollte man allerdings explizit darauf verweisen, daß die üblichen "simplizialen Identitäten" für die Abbildungen α^* erfüllt sein sollen.)

Satz. *Sei G eine simpliziale Gruppe. Die unterliegende simpliziale Menge von G erfüllt die Kan-Bedingung.*

Beweis. Sei ein Trichter $\Lambda_i^n \to G$ gegeben. Wie im vorangegangenen Lemma erläutert, so entspricht diesem Trichter ein Tupel von $(n{-}1)$-Simplizes in G:

$$x_0\,, \ldots, \, x_{i-1}\,, \; - \;, \, x_{i+1}, \ldots, \, x_n \;;$$

und gesucht ist, als Trichter-Füllung, ein n-Simplex y, mit

$$d_j(y) \;=\; x_j \quad (\text{für } j \neq i\,)\,.$$

Dazu konstruieren wir eine Folge von Simplizes, so daß diese Simplizes mehr und mehr von den gewünschten Eigenschaften haben.

Die Konstruktion geht in zwei Schritten. Zuerst wird eine Folge $y_0\,, \ldots, \, y_{i-1}$ konstruiert mit der Eigenschaft, daß für jedes k zwischen 0 und $i{-}1$ gilt: für $j \leq k$ ist $d_j(y_k) = x_j$. Im zweiten Schritt wird in analoger Weise eine Folge konstruiert, die sich (zusätzlich) um die Indizes $> i$ kümmert.

Es sei y_{-1} irgendein Element von G_n, zum Beispiel das neutrale Element $1_n \in G_n$. Für den Induktions-Schritt nehmen wir nun an, daß y_{k-1} schon konstruiert ist.

Sei g_k dasjenige Element der Gruppe G_{n-1}, das definiert ist durch die Gleichung

$$g_k \,\cdot\, d_k(y_{k-1}) \;=\; x_k \;,$$

und sei danach dann definiert (mit Hilfe des 'ausgearteten' Elements $s_k(g_k)$ in G_n):

$$y_k \;:=\; s_k(g_k) \,\cdot\, y_{k-1} \;.$$

Es gilt dann die gewünschte neue Beziehung

$$d_k(y_k) \;=\; d_k(\,s_k(g_k) \,\cdot\, y_{k-1}\,) \;=\; d_k(s_k(g_k)) \,\cdot\, d_k(y_{k-1}) \;=\; g_k \,\cdot\, d_k(y_{k-1}) \;=\; x_k \;,$$

und von den früheren Relationen ist auch nichts verlorengegangen. Denn für $j < k$ bekommen wir, wegen der "Trichter-Bedingung" $d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j)$, daß

$$d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j) = d_{k-1}(d_j(y_{k-1})) = d_j(d_k(y_{k-1}))$$

und folglich

$$d_j(g_k) \cdot d_j(x_k) = d_j(g_k) \cdot d_j(d_k(y_{k-1})) = d_j(\, g_k \cdot d_k(y_{k-1})\,) = d_j(x_k) \;,$$

woraus wir schließen, daß $d_j(g_k) = 1_{n-2}$, da es sich um eine Gleichung in einer *Gruppe* handelt. Es folgt, daß $s_{k-1}(d_j(g_k)) = s_{k-1}(1_{n-2}) = 1_{n-1}$ und deshalb (für $j < k$):

$$d_j(y_k) = d_j(\, s_k(g_k) \cdot y_{k-1}\,) = d_j(s_k(g_k)) \cdot d_j(y_{k-1}) = s_{k-1}(d_j(g_k)) \cdot x_j = x_j \;.$$

Im nun folgenden zweiten Schritt wird die (restliche) Folge $y_n, \ldots, y_{i+1}$ konstruiert mit der Eigenschaft, daß $d_j(y_k) = x_j$, für $j \geq k$ (wo $k > i$); und daß außerdem noch gilt $d_j(y_k) = x_j$, für $j < i$.

Es sei y_{n+1} definiert als y_{i-1}. Für den Induktions-Schritt (Induktion von oben nach unten) nehmen wir an, daß y_{k+1} schon definiert ist. $g_k \in G_{n-1}$ werde definiert durch

$$g_k \cdot d_k(y_{k+1}) = x_k \;,$$

und danach $y_k \in G_n$ als

$$y_k := s_{k-1}(g_k) \cdot y_{k+1} \;.$$

Es gilt die gewünschte neue Beziehung

$$d_k(y_k) = d_k(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_k(y_{k+1}) = g_k \cdot d_k(y_{k+1}) = x_k \;.$$

Was die weiteren Relationen angeht, so wird es genügen, wegen

$$d_j(y_k) = d_j(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_j(y_{k+1}) = s_{k-1}(d_{j-1}(g_k)) \cdot x_j \overset{?!}{=} x_j \qquad (\text{für } j > k)$$

und

$$d_j(y_k) = d_j(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_j(y_{k+1}) = s_{k-2}(d_j(g_k)) \cdot x_j \overset{?!}{=} x_j \qquad (\text{für } j < i)$$

zu zeigen, daß die Terme $d_{j-1}(g_k)$, $j > k$, und $d_j(g_k)$, $j < i$, beide gleich 1_{n-2} sind.

Im zweiten Falle, $j < i \leq k-1$, folgt das aus

$$d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j) = d_{k-1}(d_j(y_{k+1})) = d_j(d_k(y_{k+1}))$$

und, folglich,

$$d_j(g_k) \cdot d_j(x_k) = d_j(g_k) \cdot d_j(d_k(y_{k+1})) = d_j(\, g_k \cdot d_k(y_{k+1})\,) = d_j(x_k) \;;$$

im ersten Falle, $j > k$, ähnlich aus

$$d_{j-1}(x_k) = d_k(x_j) = d_k(d_j(y_{k+1})) = d_{j-1}(d_k(y_{k+1}))$$

und, folglich,

$$d_{j-1}(g_k) \cdot d_{j-1}(x_k) = d_{j-1}(g_k) \cdot d_{j-1}(d_k(y_{k+1})) = d_{j-1}(\, g_k \cdot d_k(y_{k+1})\,) = d_{j-1}(x_k) \;.$$

$\square$

Nicht-diskrete endliche simpliziale Mengen, wie zum Beispiel Δ^n, $n > 0$, erfüllen sicherlich nicht die Kan-Bedingung. Das sagt der folgende Satz.

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge, die die Kan-Bedingung erfüllt. X sei nicht diskret* (d.h. es gebe mindestens ein nicht-ausgeartetes Simplex in einer Dimension > 0). *Dann ist X nicht endlich-dimensional* (insbesondere also auch nicht endlich).

Beweis. Sei $x_0 \in X_n$ ein nicht-ausgeartetes Simplex. Seine Dimension, n, sei > 0. Für den Beweis des Satzes wird es genügen, zu zeigen, daß dann auch ein nicht-ausgeartetes Simplex in der nächsten Dimension, $n+1$, existiert.

Sei x_1 definiert als $x_1 := s_0(d_0(x_0))$ (das geht, weil die Dimension nicht 0 ist). Die beiden Simplizes x_0 und x_1 erfüllen die Bedingung, daß $d_0(x_0) = d_0(x_1)$, sie bilden also einen "verallgemeinerten Trichter" im Sinne des folgenden Lemmas. Nach diesem Lemma folgt aus der Kan-Bedingung die Existenz einer "verallgemeinerten Füllung"; also die Existenz von einem $(n+1)$-Simplex y, mit $d_0(y) = x_0$ und $d_1(y) = x_1$.

Das Simplex y nun ist automatisch nicht-ausgeartet. Denn andernfalls wäre es entweder von der Form $s_i(z)$, wo $i > 0$, oder von der Form $s_0(z)$. Beides geht nicht. Denn im ersten Fall ($y = s_i(z)$, $i > 0$) würde folgen

$$x_0 \ = \ d_0(s_i(z)) \ = \ s_{i-1}(d_0(z)) \ \ ;$$

und im zweiten Fall ($y = s_0(z)$),

$$x_0 \ = \ d_0(y) \ = \ d_0(s_0(z)) \ = \ d_1(s_0(z)) \ = \ d_1(y) \ = \ x_1 \ = \ s_0(d_0(x_0)) \ \ ;$$

beidemal im Widerspruch zu der Annahme, daß x_0 nicht-ausgeartet ist. □

Für den Satz müssen wir noch das folgende Lemma nachtragen. Wir definieren dazu, daß ein *verallgemeinerter Trichter, vom Typ V_h^m*, eine Unter-simpliziale-Menge Υ in Δ^m von der folgenden Art sein soll: Υ ist nicht leer, und ist aufgespannt von Teil-Simplexen von Δ^m, deren jedes die h-te Ecke von Δ^m enthält. Ein *Teil-Simplex von* Δ^m soll dabei das Bild irgendeiner injektiven Abbildung $\Delta^n \to \Delta^m$ bezeichnen (wo $n \leq m$).

Ein *verallgemeinerter Trichter in X* besteht aus einem solchen Υ zusammen mit einer Abbildung $\Upsilon \to X$; und eine *Füllung* davon ist eine Abbildung $\Delta^m \to X$, die die Abbildung $\Upsilon \to X$ erweitert.

Lemma. *X erfülle die Kan-Bedingung. Jeder verallgemeinerte Trichter in X hat eine Füllung.*

Für die Situation des Satzes ist dabei das folgende Beispiel relevant: Sei $0 \leq h \leq m$. Sei $j < k$, wo $j \neq h \neq k$ (für den Satz: $j = 0$ und $k = 1$). Die j-te und die k-te Seite von Δ^m spannen zusammen einen verallgemeinerten Trichter, Υ', vom Typ V_h^m auf. Die Angabe einer Abbildung $\Upsilon' \to X$ ist gleichbedeutend mit der Angabe von zwei $(m-1)$-Simplizes x_j und x_k in X mit $d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j)$. Und eine Füllung davon entspricht einem m-Simplex y in X mit $d_j(y) = x_j$ und $d_k(y) = x_k$.

Beweis des Lemmas. Wenn $\Upsilon = \Delta^m$, dann ist nichts zu zeigen. Ansonsten gibt es eine injektive Abbildung $\Delta^n \to \Delta^m$, deren Bild zum einen die h-te Ecke von Δ^m enthält, zum andern aber seinerseits nicht ganz in Υ enthalten ist. Diese Abbildung sei so gewählt, daß n möglichst klein ist. *Das Urbild von Υ in Δ^n ist dann ein Trichter* Λ_i^n. Die zusammengesetzte Abbildung $\Lambda_i^n \to X$ ist nun ein Trichter, den man, nach Voraussetzung über X, füllen kann. Das heißt, die Abbildung von Λ_i^n kann auf Δ^n erweitert werden. Folglich, per Zusammenkleben, kann auch die Abbildung $\Upsilon \to X$ erweitert werden zu einer Abbildung auf $\Upsilon'' = \Upsilon \cup \mathrm{Bild}(\Delta^n)$. Wenn Υ'' noch nicht ganz Δ^m ist, dann wiederholt man diesen Schritt. Und so weiter. $\square$

Bündel und Kan-Faserungen

Sei G eine simpliziale Gruppe. Eine *Operation* von G auf einer simplizialen Menge X besteht aus einer Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X \ ;$$

wobei noch verlangt ist, daß gewisse vertraute Bedingungen erfüllt sein sollen:

Eine Möglichkeit, diese Bedingungen zu formulieren, kommt von der Tatsache, daß man in jeder Dimension n eine Gruppe G_n und eine Menge X_n hat; und mit diesen eine Abbildung $G_n \times X_n \to X_n$; und daß man demgemäß nun verlangen kann, daß, für jedes n, letztere Abbildung eine Operation der Gruppe G_n auf der Menge X_n definiert: das neutrale Element 1_n von G_n operiert in trivialer Weise, $1_n \cdot x = x$, und es besteht Verträglichkeit mit dem Kompositionsgesetz in der Gruppe, $g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 \cdot g_1) \cdot x$.

Eine andere Möglichkeit, die aber auf dasselbe hinausläuft, ist, von der Abbildung $G \times X \xrightarrow{a} X$ zu verlangen, daß die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times a} & G \times X \\ {\scriptstyle \mathrm{mult} \times \mathrm{Id}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle a} \\ G \times X & \xrightarrow[a]{} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle 1 \times \mathrm{Id}} \big\uparrow & & \big\| \\ \Delta^0 \times X & \xrightarrow[\approx]{} & X \end{array}$$

Die Operation von G auf X heißt *frei*, wenn, für jedes n, die Operation der Gruppe G_n auf der Menge X_n eine freie Operation ist: es kann $g \cdot x = x$ nur dann vorkommen, wenn das Element g das neutrale Element der Gruppe ist.

Definition. Sei G simpliziale Gruppe. Ein *G-Prinzipalbündel* besteht aus
— einer simplizialen Menge E ;
— einer freien Operation von G auf E.

Die *Basis* von dem G-Prinzipalbündel ist definiert als die simpliziale Menge der Bahnen,

$$B = E/G \ .$$

Dabei ist, in jeder Dimension n, $B_n = E_n/G_n$, die Menge der Bahnen von E_n nach G_n ; d.h., die Menge der Äquivalenzklassen von E_n bezüglich der Operation von G_n.

Offenbar gibt es, für jede Dimension n, einen Isomorphismus $E_n \approx G_n \times B_n$ (eine allgemeine Tatsache betreffend eine Menge mit einer freien Operation von einer Gruppe darauf). Es ist im allgemeinen aber *nicht* möglich, solche Isomorphismen in einer Weise zu wählen, daß sie mit den simplizialen Struktur-Abbildungen verträglich wären.

Abkürzend werden wir sagen, daß E ein G-Prinzipalbündel "ist", wenn gemeint ist, daß E in bestimmter Weise mit der Struktur eines G-Prinzipalbündels versehen ist.

Lemma. *Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Sei $B' \to B$ eine Abbildung. Der Pullback $E' = E \times_B B'$ ist wieder ein G-Prinzipalbündel.*

Beweis. Die Operation wird definiert als die Abbildung

$$G \times (E \times_B B') \ \approx \ (G \times E) \times_B B' \ \longrightarrow \ E \times_B B' \ .$$

Wir müssen uns davon überzeugen, daß diese Abbildung
— den oben genannten beiden Bedingungen für eine Operation genügt;
— *frei* ist.

Offenbar nun genügt es für diese beiden Dinge, sie *dimensionsweise* nachzuprüfen (ein Diagramm von Abbildungen von simplizialen Mengen ist dann [und nur dann] kommutativ, wenn das in jeder Dimension der Fall ist; und "Freiheit" einer Operation ist ohnehin dimensionsweise definiert).

In Dimension n aber können wir schreiben $E_n \approx G_n \times B_n$, und unter diesem Isomorphismus entspricht die Operation von G_n derjenigen Operation, die auf dem Faktor B_n die triviale Operation ist, und auf dem Faktor G_n die "Translations-Operation" (die Operation von G_n auf seiner unterliegenden Menge, die durch die Gruppen-Multiplikation gegeben ist).

Die Pullback-Konstruktion $(G_n \times B_n) \times_{B_n} B'_n$ nun ergibt $G_n \times B'_n$, und die obige Abbildung ist gerade die, die die analoge Operation auf $G_n \times B'_n$ definiert (die triviale Operation auf dem zweiten Faktor und die Translations-Operation auf dem ersten Faktor). $\square$

Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung. Ein *Schnitt* von p ist eine Abbildung $s\colon B \to E$ mit der Eigenschaft, daß $p \circ s = \mathrm{Id}_B$.

Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Eine *Trivialisierung* davon ist ein Isomorphismus $E \longrightarrow G \times B$, der mit der Operation verträglich ist (wobei $G \times B$ mit der schon genannten Operation versehen sei; derjenigen, die auf dem Faktor B trivial ist und auf dem Faktor G die Translations-Operation).

Lemma. *Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Ein Schnitt von $E \to B$ induziert eine Trivialisierung von E.*

Beweis. Aus einem Schnitt $B \to E$ bekommt man eine Abbildung $G \times B \to E$ als die Komposition $G \times B \to G \times E \to E$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus: in jeder Dimension n ist sie beschreibbar als

$$G_n \times B_n \longrightarrow G_n \times (G_n \times B_n) \approx (G_n \times G_n) \times B_n \longrightarrow G_n \times B_n \ .$$

$\square$

Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Diese heißt ein *lokal-triviales Bündel, mit Faser* F, wenn die folgende Bedingung der "lokalen Trivialität" erfüllt ist: Für jedes n und jedes n-Simplex von B betrachtet man die zugehörige Abbildung $f\colon \Delta^n \to B$ und bildet damit den Pullback $E \times_B \Delta^n$. Die Bedingung ist, daß (für jedes n und jedes n-Simplex von B) dieser Pullback isomorph zum trivialen Bündel über Δ^n mit Faser F ist; das heißt, daß es einen Isomorphismus gibt, *über* Δ^n :

$$\begin{array}{ccc} E \times_B \Delta^n & \xrightarrow{\approx} & F \times \Delta^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n \end{array}$$

Satz. (1) *Ein G-Prinzipalbündel ist ein lokal-triviales Bündel mit Faser G.*

(2) *Ein lokal-triviales Bündel mit Faser F ist eine Kan-Faserung, sofern die Faser F die Erweiterungs-Bedingung erfüllt.*

Korollar. *Ein G-Prinzipalbündel ist eine Kan-Faserung.*

Beweis. Das folgt aus dem Satz wegen der früher gezeigten Tatsache, daß die unterliegende simpliziale Menge der simplizialen Gruppe G die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. — Das Korollar kann man auch direkter zeigen: Der Beweis dafür, daß die unterliegende simpliziale Menge einer simplizialen Gruppe G die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, läßt sich (fast wörtlich!) übertragen zu einem Beweis des Korollars; das steht so in den Büchern, die das Thema behandeln. $\square$

Beweis des Satzes. (1) Die Abbildung $E \to B$ werde mit $p\colon E \to B$ bezeichnet. Sei $f\colon \Delta^n \to B$ eine Abbildung. Wir zeigen, daß (für den mit f gebildeten Pullback) die Abbildung $E \times_B \Delta^n \to \Delta^n$ einen *Schnitt* besitzt, also (nach dem obigen Lemma) auch eine Trivialisierung.

Es sei dazu $\iota_n \in \Delta^n$ das erzeugende Simplex von Δ^n; unter der Identifikation $(\Delta^n)_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n], [n])$ entspricht es der identischen Abbildung auf $[n]$. Die Abbildung $p_n : E_n \to B_n$ ist, nach Definition, die Quotienten-Abbildung von E_n zu der Menge der Äquivalenzklassen E_n/G_n; die Abbildung ist also *surjektiv*. Sei $\kappa \in E_n$ irgendein Element, das über $f_n(\iota)$ liegt (also $f_n(\iota) = p_n(\kappa)$). Es existiert eine Abbildung $g\colon \Delta^n \to E$ mit $g_n(\iota) = \kappa$ (nach dem Yoneda-Lemma). Da, nach Konstruktion, $f_n(\iota) = p_n(g_n(\iota))$, gilt, wieder nach dem Yoneda-Lemma, daß $f = p \circ g$ (Gleichheit von Abbildungen $\Delta^n \to B$). Das resultierende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{g} & E \\ \| & & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

liefert den gewünschten Schnitt $\Delta^n \to E \times_B \Delta^n$.

(2) Sei $p\colon E \to B$ ein lokal-triviales Bündel, mit Faser F. Sei

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

ein Trichter. Wir können das Diagramm ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & \Delta^n \times_B E & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

und es wird deshalb genügen, den durch den linken Teil dieses Diagramms gegebenen Trichter zu füllen. Wegen der vorausgesetzten Existenz von lokalen Trivialisierungen, läßt sich dieses linke Quadrat umschreiben in die Form:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & F \times \Delta^n \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n \end{array}$$

Die Daten in diesem Diagramm sind äquivalent zu der Angabe einer Abbildung $\Lambda_i^n \to F$. Wegen der für die Faser F vorausgesetzten Erweiterungs-Eigenschaft, hat diese Abbildung eine Erweiterung auf ganz Δ^n. Das liefert die gewünschte Liftung in letzterem Quadrat: eine Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht. $\square$

Satz. *Geometrische Realisierung respektiert lokal-triviale Bündel.*

Beweis (Skizze). Die gegenwärtige Skizze ist in mehrfacher Hinsicht ungenau; oder, um es höflicher auszudrücken: unvollständig. Insbesondere bedarf auch die Behauptung selbst ein wenig der Interpretation.

Ein lokal-triviales Bündel ist etwas, das, nach seiner Definition, "lokal" ein "triviales Bündel" ist; also ein *Produkt*. Es ist also hier *auch* behauptet (mehr oder weniger), daß die geometrische Realisierung Produkte respektiert: $|X \times Y| \approx |X| \times |Y|$.

Diese Behauptung ist richtig, wenn man sie mit einem Körnchen Salz nimmt. Von der Behauptung haben wir seinerzeit einen Spezialfall behandelt (weil wir ihn brauchten für die Aussage "geometrische Realisierung respektiert Homotopien"); das ist der Spezialfall $|X \times \Delta^1| \approx |X| \times |\Delta^1|$. Zwar ist dieser Spezialfall, was die erforderliche Technik angeht, schon sehr dicht daran am allgemeinen Fall. Aber es gibt im allgemeinen Fall ein Phänomen, das in dem Spezialfall noch keinen Ärger macht:

Das Phänomen haben wir kennengelernt beim Thema "Produkte von CW-Komplexen". Das Phänomen ist, daß die Konstruktion von Verklebungen einerseits und die von Produkten andererseits im allgemeinen nicht miteinander kompatibel sind, wenn man nicht eine Bedingung der Art hat, daß mindestens einer der Faktoren im Produkt kompakt ist (oder zumindest lokal-kompakt).

Es gibt eine elegante Methode, dies Problem zu umgehen (die wir nicht behandelt haben). Nämlich man führt den Begriff des *kompakt-erzeugten Raumes* ein: das ist ein topologischer Raum, in dem eine Menge W schon dann eine offene Menge ist, wenn für jedes Kompaktum K in dem Raum gilt, daß der Durchschnitt $W \cap K$ eine offene Menge in K ist. Zum Beispiel haben CW-Komplexe diese Eigenschaft.

Man kann nun die übliche Produkt-Topologie ersetzen durch das "Produkt in der Kategorie der kompakt-erzeugten Räume"; was schlicht darauf hinausläuft, daß man in dem Produktraum, soweit nötig, einige weitere Mengen als 'offen' deklariert (s. oben). Mit dieser Modifikation ist es dann richtig, daß, generell, das Produkt von zwei CW-Komplexen wieder ein CW-Komplex ist. Und ebenso, daß, für simpliziale Mengen X und Y, gilt: $|X \times Y| \approx |X| \times |Y|$.

Zur Interpretation des Satzes nun: Wenn man sich nicht auf spezielle Fälle beschränken will (etwa den, wo $|F|$ kompakt ist oder zumindest lokal-kompakt), so wird es angebracht sein, den Satz so zu lesen, daß er sich auf eben die "kompakt-erzeugte Topologie" bezieht. — Wir kommen jetzt zur Begründung des Satzes.

Sei $p: E \to B$ eine Abbildung simplizialer Mengen, die ein lokal-triviales Bündel ist; wo also, nach Definition, für jede Abbildung $\Delta^n \to B$ das "Urbild" $E \times_B \Delta^n$ ein Produkt ist, $E \times_B \Delta^n \approx F \times \Delta^n$. Wenn wir für allgemeines n hier jetzt das akzeptieren, was wir für $n = 1$ früher nachgeprüft haben: $|F \times \Delta^n| \approx |F| \times |\Delta^n|$, so sehen wir, daß für die geometrische Realisierung die analoge Produkt-Struktur vorliegt: $|E \times_B \Delta^n| \approx |F| \times |\Delta^n|$. Dies sieht fast wie "lokale Trivialität" aus. Die Sache hat nur einen Haken: im allgemeinen wird das Bild von $|\Delta^n|$ in $|B|$ keine offene Menge sein.

Es ist auch nicht so, daß man erwarten könnte, zu einem vorgegebenen Punkt eine "vernünftige" offene Umgebung zu finden, die eine Vereinigung von (offenen) Zellen wäre. Zum Beispiel bei dem Kreis mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle, , gibt es nur eine einzige Umgebung der 0-Zelle, die auch eine Vereinigung von offenen Zellen ist; nämlich den ganzen Kreis selbst. Andererseits ist der ganze Kreis aber denkbar ungeeignet für die Bereitstellung von lokaken Trivialisierungen, da es über dem Kreis ja nicht-triviale Bündel wirklich gibt (z.B. die universelle Überlagerung von dem Kreis). Die benötigten offenen Mengen in $|B|$ werden wir uns also mit ein wenig Arbeit beschaffen müssen.

Bezeichne B^n das n-Skelett von B. Es entsteht also $|B^n|$ aus $|B^{n-1}|$ durch das Anheften von n-Zellen (je eine n-Zelle für jedes nicht-ausgeartete n-Simplex von B).

Sei $x \in |B|$, und zwar $x \in |B^m|$ aber nicht $\in |B^{m-1}|$. Es liegt dann x im Innern einer der offenen m-Zellen. Als offene Umgebung von x in $|B^m|$ wählen wir eine offene Teilmenge in der betreffenden Zelle; z.B. die Zelle selbst.

Induktiv nehmen wir nun an, daß schon eine offene Umgebung U^{n-1} von x in $|B^{n-1}|$ konstruiert ist, zusammen mit einer Trivialisierung der Einschränkung $U^{n-1} \times_{|B|} |E|$. Wir wollen U^{n-1} vergrößern zu einer offenen Umgebung U^n von x in $|B^n|$, und zwar wollen wir das in der Weise tun, daß wir auch die Trivialisierung fortsetzen können.

Das neue U^n wird aus dem alten U^{n-1} bestehen zusammen mit Teilen der daran anstoßenden n-Zellen. Diese Teile bekommen wir wie folgt.

Im n-Simplex $|\Delta^n|$ wählen wir eine offene Umgebung V von dem Rand $|\partial\Delta^n|$; und zwar soll V die Eigenschaft haben, daß eine Retraktion $r : V \to |\partial\Delta^n|$ existiert. Ein solches V bekommt man etwa, wenn man aus dem Simplex ein konzentrisches kleineres herausnimmt.

Zu dem Simplex $\in B_n$ mit der Nummer j (einem nicht-ausgearteten Simplex; die anderen sind hier nicht interessant) gehört eine Abbildung $\chi_j : \Delta^n \to B^n$ (die charakteristische Abbildung). Ihre geometrische Realisierung $|\chi_j| : |\Delta^n| \to |B^n|$ hat als Einschränkung die Abbildung $|\chi_j'| : |\partial\Delta^n| \to |B^{n-1}|$, die Anhefte-Abbildung für die betreffende Zelle.

Sei U_j definiert als $U_j = (\,|\chi_j| \circ r\,)^{-1}(U^{n-1})$, der Teilraum von V, der gegeben ist durch das Urbild von U^{n-1} unter der Abbildung

$$V \xrightarrow{\;r\;} |\partial\Delta^n| \xrightarrow{\;|\chi_j'|\;} |B^{n-1}| \ ;$$

und sei sein "Rand" ∂U_j definiert als $\partial U_j = U_j \cap |\partial\Delta^n|$, der Durchschnitt von U_j mit dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$ von V. Die Retraktion $r : V \to |\partial\Delta^n|$ ergibt dann, per Einschränkung, eine Retraktion

$$r_j : U_j \to \partial U_j \ .$$

Und die Anhefte-Abbildung $|\chi_j'| : |\partial\Delta^n| \to |B^{n-1}|$ ergibt, ebenfalls per Einschränkung, eine Anhefte-Abbildung

$$q_j : \partial U_j \to U^{n-1} \ .$$

Mit diesen Anhefte-Abbildungen kann die Teilmenge U^n in $|B^n|$ definiert werden als

$$U^n \ := \ U^{n-1} \cup_{\coprod_j \partial U_j} \coprod_j U_j \ ;$$

es ist klar (oder?), daß dies eine *offene* Teilmenge von $|B^n|$ ist.

Über all den hier zusammengeklebten Teilräumen haben wir Trivialisierungen des Bündels:

$$|E| \times_{|B|} U^{n-1} \xrightarrow{\;\approx\;} |F| \times U^{n-1}$$

(nach der Induktionsvoraussetzung); und

$$|E| \times_{|B|} U_j \xrightarrow{\;\approx\;} |F| \times U_j$$

(per Einschränkung von der Trivialisierung $|E| \times_{|B|} |\Delta^n| \xrightarrow{\;\approx\;} |F| \times |\Delta^n|$).

Um diese Trivialisierungen zu kombinieren, machen wir zunächst die zusätzliche Annahme, daß die Anhefte-Abbildungen $q_j : \partial U_j \to U^{n-1}$ mit den Trivialisierungen kompatibel sind in dem Sinne, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
|E| \times_{|B|} \partial U_j \arrow[r, "(q_j)_*"] \arrow[d, "\approx"'] & |E| \times_{|B|} U^{n-1} \arrow[d, "\approx"] \\
|F| \times \partial U_j \arrow[r, "\mathrm{Id} \times q_j"] & |F| \times U^{n-1}
\end{tikzcd}$$

(wo $(q_j)_*$ die Abbildung der zurückgezogenen 'Bündel' über der Abbildung q_j ist).

Als Konsequenz von dieser zusätzlichen Annahme erhalten wir die gewünschte Trivialisierung über U^n:

$$|E| \times_{|B|} U^n \;=\; |E| \times_{|B|} U^{n-1} \cup_{\coprod_j |E|\times_{|B|}\partial U_j} \coprod_j |E| \times_{|B|} U_j$$
$$\approx\; |E| \times \big(U^{n-1} \cup_{\coprod_j \partial U_j} \coprod_j U_j \big)$$

(wobei anzumerken ist, daß wir hier eine Verklebe-Konstruktion mit einer Produkt-Konstruktion vertauscht haben, *ohne* die Hypothese “lokal-kompakt” erwähnt zu haben: dies setzt die Verwendung der kompakt-erzeugten Topologie voraus).

Da die zusätzliche Annahme im allgemeinen nicht erfüllt sein wird (jedenfalls haben wir keinen Grund, derartiges zu glauben), werden wir eine zusätzliche Konstruktion machen müssen, um sie zu rechtfertigen. Das geht so.

Die zusammengesetzte Abbildung in dem Diagramm (unten links nach unten rechts über den langen Weg),

$$|F| \times \partial U_j \xleftarrow{\;\approx\;} |E| \times_{|B|} \partial U_j \xrightarrow{(q_j)_*} |E| \times_{|B|} U^{n-1} \xrightarrow{\;\approx\;} |F| \times U^{n-1} \;\;,$$

bildet für jeden Punkt $z \in \partial U_j$ die Faser $|F|$ über diesem Punkt z isomorph ab auf die Faser $|F|$ über dem Bildpunkt $q_j(z)$ in U^{n-1}. (Das “$|F|$” hier ist in beiden Fällen *dasselbe*, da es sich ja nicht einfach um Bündel handelt, sondern um Bündel mit einer gewählten Trivialisierung!)

Diese Abbildung muß nicht die Identität sein, wir hätten nur gern, daß sie es wäre. Wir hoffen, dies zu erreichen, indem wir die ganze Trivialisierung

$$|F| \times U_j \xleftarrow{\;\approx\;} |E| \times_{|B|} U_j$$

durch eine andere ersetzen.

Nun können wir die Tatsache, daß wir für jeden Punkt $z \in \partial U_j$ einen Isomorphismus von $|F|$ auf sich haben, auch so ausdrücken, per Exponentialgesetz für Abbildungen, daß wir eine Abbildung haben von ∂U_j in den Raum der Automorphismen von $|F|$:

$$\partial U_j \longrightarrow \operatorname{Aut}(|F|)$$

(wobei anzumerken ist, daß wir hier das Exponentialgesetz zitieren *ohne* die Hypothese “lokal-kompakt” für einen der beteiligten Räume gefordert zu haben: dies setzt die Verwendung der kompakt-erzeugten Topologie voraus).

Die gewünschte Änderung der Trivialisierung über U_j können wir deshalb erreichen, indem wir die Abbildung von ∂U_j zu $\operatorname{Aut}(|F|)$ fortsetzen zu einer Abbildung von U_j zu $\operatorname{Aut}(|F|)$. Das ist aber ganz leicht: wir nehmen einfach die Komposition mit der Retraktion r_j,

$$U_j \xrightarrow{r_j} \partial U_j \longrightarrow \operatorname{Aut}(|F|) \;\;.$$

Die Behandlung des Induktions-Schritts ist damit abgeschlossen.

Der Rest des Beweises besteht aus der Bemerkung, daß die Vereinigung der konstruierten U^n eine Umgebung in dem Raum $|B|$ sein wird; und daß die kompatiblen Trivialisierungen über den U^n sich zusammensetzen zu einer Trivialisierung über der Vereinigung. $\square$

Korollar. *Sei $p : E \to B$ eine Abbildung simplizialer Mengen, die ein lokal-triviales Bündel ist. Die geometrische Realisierung $|p| : |E| \to |B|$ ist eine Serre-Faserung* (d.h., sie hat die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder).

Beweis. Das kennen wir von früher, bis auf ein Detail. Nämlich der Begriff der "lokalen Trivialisierung" hat hier jetzt eine leicht abgeänderte Bedeutung: ein Isomorphismus

$$|E| \times_{|B|} U \;\approx\; |E| \times U \;,$$

wo das Produkt auf der rechten Seite nicht mit der *Produkt-Topologie* versehen ist, sondern mit der "kompakt-erzeugten" Variante davon: es werden zusätzlich solche Teilmengen W als 'offen' deklariert, die die Eigenschaft haben, daß für jedes Kompaktum K der Durchschnitt $W \cap K$ eine offene Menge in K ist.

Diese Variante ist aber unschädlich für den uns bekannten Beweis der HLEP. Der Witz ist, daß es für einen *kompakten* Raum P (z.B. ein Polyeder), und eine Abbildung $f : P \to |E| \times U$, für die Frage der Stetigkeit keinen Unterschied macht, ob der Zielraum mit der üblichen Topologie versehen ist oder mit der genannten Variante: wenn f für die übliche Topologie eine stetige Abbildung ist, dann auch für die kompakt-erzeugte Variante; denn in einem *kompakten* Unterraum, wie z.B. $f(P)$, kommen ja keine neuen offenen Mengen dazu. $\square$

Minimale Kan-Komplexe, minimale Kan-Faserungen

Ein Kan-Komplex heißt *minimal*, wenn er die Eigenschaft hat: Je zwei Simplizes, die homotop sind relativ Rand, sind schon zueinander gleich.

Ähnlich auch heißt eine Kan-Faserung $p: E \to B$ minimal, wenn je zwei Simplizes in E, die relativ Rand homotop sind über B (d.h. die Homotopie ist, nach B projiziert, konstant) schon gleich sind.

Satz. *Sei X Kan-Komplex. In X gibt es einen minimalen Kan-Komplex $\overline{X}$, der starker Deformationsretrakt von X ist.*

Ähnlich auch, wenn $p: E \to B$ Kan-Faserung ist, so gibt es eine minimale Kan-Faserung $\overline{p}: \overline{E} \to B$, so daß $\overline{E}$ starker Deformationsretrakt von E über B ist.

Ein Detail, das wir im Beweis des Satzes benötigen werden, behandeln wir vorweg. Nämlich, sobald zwei ausgeartete Simplizes auch nur denselben Rand haben, so sind sie schon zueinander gleich:

Lemma. *In einer simplizialen Menge seien x und y zwei n-Simplizes, die beide ausgeartet sind. Es sei $d_i(x) = d_i(y)$ für $0 \leq i \leq n$. Dann ist $x = y$.*

Beweis. Wenn x im Bild der i-ten Ausartungs-Abbildung liegt, $x = s_i(v)$, so ist $v = d_i(x)$; also $x = s_i(d_i(x))$. Es sei, ähnlich, $y = s_j(d_j(y))$. Wenn $i = j$, dann haben wir sofort, daß $x = y$. Andernfalls sei etwa $i < j$. Es ist dann

$$x = s_i\, d_i\, x = s_i\, d_i\, y = s_i\, d_i\, s_j\, d_j\, y = s_i\, s_{j-1}\, d_i\, d_j\, y = s_j\, s_i\, d_i\, d_j\, y \ .$$

Also ist x auch eine j-te Ausartung, $x = s_j(z)$, wo $z = s_i\, d_i\, d_j\, y$. Wie oben folgt daraus

$$x = s_j(z) = s_j(d_j(x)) = s_j(d_j(y)) = y \ .$$

□

Beweis des Satzes. Man kann den Beweis auf zwei verschiedene Weisen beschreiben. Die erste Methode ist "konstruktiv": das gewünschte $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) wird mit Hilfe einer induktiven Konstruktion beschrieben; und danach die gewünschte Homotopie dann ebenfalls. Die zweite Methode ist "summarisch": es wird ein Ding mit wünschenswerten Eigenschaften beschrieben; danach wird konstatiert, wenn dieses Ding *maximal* ist (das gibt es, nach Zorn's Lemma), dann ist es das gewünschte. Wir skizzieren zunächst die konstruktive Methode und beschreiben mit mehr Detail danach die summarische.

Die Simplizes von X (bzw. von E) werden in Äquivalenzklassen eingeteilt: Zwei Simplizes sind *äquivalent*, wenn zwischen ihnen eine Homotopie, relativ Rand, existiert (bzw. eine solche Homotopie über B) — wie wir wissen, ist das eine Äquivalenz-Relation. Das gewünschte $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) hat insbesondere dann die Eigenschaft, daß es aus jeder Äquivalenzklasse höchstens einen Repräsentanten enthält.

Bei der konstruktiven Methode nimmt man für $\overline{X}_0$ irgendeine Teilmenge von X_0, die aus jeder Äquivalenzklasse in X_0 genau einen Repräsentanten enthält. Danach, für die Konstruktion von $\overline{X}_1$, beginnt man nicht mit ganz X_1. Vielmehr betrachtet man nur diejenigen 1-Simplizes, deren Ränder in $\overline{X}_0$ liegen. Von diesen nimmt man dann aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten; und zwar, wenn es einen solchen gibt, einen ausgearteten. Und so weiter. Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß die so konstruierte Folge von Mengen eine Unter-simpliziale-Menge von X ist.

Es sei jetzt (die summarische Methode) $\overline{X}_0$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ... , irgendein System von Teilmengen von X_0, X_1, ... , mit den nun aufgelisteten Eigenschaften; die Elemente von $\overline{X}_n$ werden als die *auserwählten n-Simplizes* bezeichnet. Die Forderungen sind:
— es gibt aus jeder Äquivalenzklasse höchstens ein auserwähltes Simplex;
— ein solches ist ausgeartet, wenn es zu einem ausgearteten Simplex äquivalent ist;
— jeder Rand von einem auserwählten Simplex ist auch auserwählt;
— das System ist maximal (in Bezug auf die drei vorigen Forderungen).
Es gilt dann: *Das System der auserwählten Simplizes ist eine Unter-simpliziale-Menge.*

Wir müssen zeigen, das System ist abgeschlossen gegenüber Rand- und Ausartungs-Abbildungen. Die nicht-triviale Sache dabei ist der Nachweis dafür, daß die ausgearteten Simplizes dabei sind, soweit sie es müssen. Sei also x ein Simplex, $x \in \overline{X}_n$ (bzw. $\in \overline{E}_n$). Sei $s_i(x)$ davon eine Ausartung. Wir müssen uns davon überzeugen, daß $s_i(x)$ zu $\overline{X}_{n+1}$ gehört (bzw. zu $\overline{E}_{n+1}$). Für diesen Nachweis dürfen wir, induktiv, annehmen, daß die entsprechende Sache für kleinere Dimensionen als n schon geklärt ist. Nun sind die Ränder von $s_i(x)$, von x selbst abgesehen, sämtlich ausgeartet. Und sie sind auch Ausartungen von “iterierten Rändern” von x. Die Induktionsvoraussetzung ist also anwendbar, und wir schließen, daß die Ränder von $s_i(x)$ alle schon dazugehören.

Als nächstes wenden wir die Forderung der Maximalität an. Da die Ränder von $s_i(x)$ alle dazugehören, könnten wir notfalls $s_i(x)$ dazunehmen; das würde aber der Forderung der Maximalität widersprechen — es sei denn, es gibt einen anderen Hinderungsgrund; nämlich ein zu $s_i(x)$ äquivalentes Simplex, das schon dazugehört. Wir schließen, daß es unter den auserwählten Simplizes ein solches gibt, das zu $s_i(x)$ äquivalent ist.

Nach dem vorangestellten Lemma enthält die Äquivalenzklasse von $s_i(x)$ höchstens ein ausgeartetes Simplex. Da sie $s_i(x)$ enthält, enthält sie also genau ein ausgeartetes Simplex. Das auserwählte Simplex in der Äquivalenzklasse von $s_i(x)$ ist folglich $s_i(x)$ selbst — wegen der Forderung, daß das auserwählte Simplex in einer Äquivalenzklasse auf jeden Fall ausgeartet zu sein hat, wenn eine solche Wahl möglich ist.

Die erhaltene Unter-simpliziale Menge wird unser $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) sein.

Im Falle von $\overline{X}$ überzeugen uns jetzt davon, daß $\overline{X}$ ein starker Deformationsretrakt von X ist. Das Argument kann man am nettesten formulieren, wenn man wieder einen "Maximalitäts"-Trick verwendet, und wir wollen das auch so tun.

Dazu betrachten wir Paare (Y,h), bestehend aus einer Unter-simplizialen-Menge Y von X und einer Homotopie

$$Y \times \Delta^1 \xrightarrow{\ h\ } X \ ,$$

wo h eine Homotopie von der Inklusion $Y \to X$ zu einer Retraktion $Y \to \overline{X}$ ist; und zwar eine Homotopie, die auf $\overline{X}$ konstant ist.

Ein Beispiel, wenn auch kein besonders interessantes, für ein solches Paar besteht aus $\overline{X}$ selbst, zusammen mit der konstanten Homotopie. Um ein interessanteres Beispiel zu bekommen, verlangen wir jetzt zusätzlich, daß das Paar (Y,h) *maximal* sein soll (in Bezug auf die beschriebene Eigenschaft). Das Resultat ist dann wirklich interessant: *Es folgt aus der Maximalität, daß Y schon ganz X ist.*

Denn angenommen, Y wäre kleiner. Wir könnten dann das Paar (Y,h) durch ein größeres ersetzen, im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität: Sei dazu x ein Simplex in X, das nicht in Y enthalten ist. Die Dimension n von x sei so klein wie möglich. Die charakteristische Abbildung $\overline{x} : \Delta^n \to X$ hat in dem Fall die Eigenschaft, daß der Rand $\partial\Delta^n$ nach Y abgebildet wird. Wir können also Y' definieren durch "Zusammenkleben", $Y' = Y \cup_{\partial\Delta^n} \Delta^n$. Wir prüfen nach, daß die Abbildung h zu einer Abbildung $h' : Y' \times \Delta^1 \to X$ fortgesetzt werden kann, mit den analogen Eigenschaften.

In einem ersten Versuch wenden wir dazu die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft auf die Inklusion $Y \to Y'$ an. Die resultierende Homotopie $h'' : Y' \times \Delta^1 \to X$ hat zwei der drei gewünschten Eigenschaften: sie startet bei der Inklusion $Y' \to X$, und sie ist relativ zu $\overline{X}$. Die dritte Eigenschaft wäre ebenfalls erfüllt, wenn wir voraussetzen könnten, daß die (zusammengesetzte) Abbildung

$$\Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x}\times 1} Y' \times 1 \xrightarrow{\ h''\ } X$$

ihr Bild in $\overline{X}$ hat — was natürlich nicht der Fall sein muß.

Die Einschränkung von letzterer Abbildung auf $\partial\Delta^n \times 1$ ist alternativ auch beschreibbar als

$$\partial\Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x}\times 1} Y \times 1 \xrightarrow{\ h\ } X \ .$$

Sie *hat* also ihr Bild in $\overline{X}$. Wegen der "Maximalität" in der Definition von $\overline{X}$ gibt es also ein "auserwähltes" Simplex, das zu dem Simplex $h''(x \times 1)$ äquivalent ist. Das bedeutet, es existiert eine Homotopie, relativ $\partial\Delta^n$, von der Abbildung

$$\Delta^n \ \approx\ \Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x}\times 1} Y' \times 1 \xrightarrow{\ h''\ } X$$

zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{X}$. Per Zusammenkleben resultiert daraus eine Homotopie h''', relativ Y, von der Abbildung

$$Y' \ \approx\ Y' \times 1 \xrightarrow{\ h''\ } X$$

zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{X}$.

Wenn es möglich wäre, eine Zwei-Schritt-Homotopie kommentarlos durch eine Ein-Schritt-Homotopie zu ersetzen, so würden wir das für die Hintereinanderschaltung der Homotopien h'' und h''' tun und bekämen so die Homotopie h'. Diese Ersetzung geht nun zwar nicht, aber, da X Kan-Komplex ist, können wir die Transitivität der Homotopie-Relation zitieren und auf die Weise das h' doch bekommen.

Es resultiert, nachträglich, nun auch, daß die simpliziale Menge $\overline{X}$ die Erweiterungs-Bedingung erfüllt: es ist klar (oder?), daß das aus der Tatsache folgt, daß $\overline{X}$ Retrakt von X ist.

Im Falle der Kan-Faserungen verfährt man ganz ähnlich; nur daß als weiteres Detail die Buchführung über Struktur-Abbildungen nach B zu berücksichtigen ist: Man betrachtet Paare (D,h), wo D Unter-simpliziale-Menge von E ist, und h eine Homotopie, relativ $\overline{E}$ und über B, von der Inklusion $D \to E$ zu einer Retraktion $D \to \overline{E}$; insbesondere hat man also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

Wieder argumentiert man, wenn D nicht schon gleich dem ganzen E ist, dann ist das Paar (D,h) nicht maximal in Bezug auf die genannten Dinge. Der Unterschied zu dem schon gemachten Fall ist dabei einzig der, daß die Homotopien in der Konstruktion von dem “vergrößerten” Paar (D',h') ebenfalls nun als Homotopien über B zu nehmen sind; insbesondere “Homotopie-Erweiterung” ist in dem Sinne zu verstehen.

Aus der Tatsache, daß $\overline{E}$ Deformations-Retrakt (und insbesondere deshalb, Retrakt) von E über B ist, folgt schließlich auch noch, daß $\overline{E} \to B$ Kan-Faserung ist. □

Minimale Kan-Komplexe haben eine frappierende Starrheits-Eigenschaft: Eine Homotopie-Äquivalenz ist automatisch(!!) schon ein Isomorphismus. Eine ähnliche Starrheits-Aussage gibt es auch für Abbildungen von minimalen Kan-Faserungen. Im übrigen ist, wie sich herausstellt, eine minimale Kan-Faserung automatisch auch schon lokal-trivial (ein lokal-triviales Bündel).

Der Beweis dieser Dinge beruht auf dem folgenden, etwas technisch aussehenden Lemma. Das Lemma läuft darauf hinaus, in einer leicht trickreichen Weise die Idee der Homotopie-Liftung zu kombinieren mit der Idee der Minimalität.

Lemma. *Sei $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to B$ eine minimale Kan-Faserung. Sei X eine simpliziale Menge, und seien f_0 und f_1 zwei Abbildungen, $f_i : X \to \widetilde{E}$. Es gelte, daß f_0 zu f_1 homotop ist, und zwar homotop über B. Es gelte, daß die Abbildung f_0 ein Isomorphismus ist. Dann ist die Abbildung f_1 ebenfalls ein Isomorphismus.*

Daß man in dem Lemma eine Homotopie "über B" hat, bedeutet, daß man ein kommutatives Diagramm hat:

$$\begin{tikzcd} X \times \Delta^1 \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \widetilde{E} \arrow[d, "\widetilde{p}"] \\ X \arrow[r, "q"'] & B \end{tikzcd}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \times \Delta^1 \arrow[r, "(\widetilde{f}\,,\,\mathrm{pr}_2)"] \arrow[d, "q \times \mathrm{Id}"'] & \widetilde{E} \times \Delta^1 \arrow[d, "\widetilde{p} \times \mathrm{Id}"] \\ B \times \Delta^1 \arrow[r, "="'] & B \times \Delta^1 \end{tikzcd}$$

Nun ist es klar (oder?), daß in letzterem Diagramm die Abbildung $\widetilde{E} \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$ ebenfalls eine Kan-Faserung ist, und zwar auch wieder eine minimale.

Als Variante des Lemmas können wir deshalb noch die folgende Verallgemeinerung notieren, wo "Deformation" sich nicht nur auf die Abbildungen bezieht, sondern auch auf die Faserung selbst; wo wir also statt einer Faserung über B nunmehr eine Faserung über $B \times \Delta^1$ betrachten:

Lemma (2. Form). *Sei $p : E \longrightarrow B \times \Delta^1$ eine minimale Kan-Faserung, und sei $q : X \to B$ eine Abbildung. Es sei*

$$f : X \times \Delta^1 \longrightarrow E$$

eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \times \Delta^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q \times \mathrm{Id}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times \Delta^1 \arrow[r, "="'] & B \times \Delta^1 \end{tikzcd}$$

Sei $E_0 = p^{-1}(B \times 0)$ und $E_1 = p^{-1}(B \times 1)$. Wenn die Abbildung $f_0 : X \to E_0$,

$$f_0 = f \mid (X \times 0)\,,$$

ein Isomorphismus ist, dann ist die Abbildung $f_1 : X \to E_1$,

$$f_1 = f \mid (X \times 1)\,,$$

ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Der Beweis ist eigentlich nur eine Bemerkung: erstens, wegen der Kan-Bedingung, existieren "Prismen-Füllungen"; und zweitens, wegen der Minimalität, gibt es für solche Prismen-Füllungen nicht nur eine Existenz- sondern auch eine Eindeutigkeits-Aussage. Wir kommen zur Benennung der Details — sie sind etwas umfänglich.

Wie bei einer früheren Gelegenheit besprochen, so kann man das Prisma $\Delta^n \times \Delta^1$, von dem Teil

$$\Delta^n{\times}0 \cup_{\partial\Delta^n\times 0} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1$$

ausgehend, durch iteriertes Trichter-Füllen bekommen; wir nennen das eine "Prismen-Füllung von links nach rechts". — Ebenso gibt es auch eine "Prismen-Füllung von rechts nach links", wo man entsprechend ausgeht von $\Delta^n{\times}1 \cup_{\partial\Delta^n\times 1} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1$.

Wenn eine "Prismen-Füllungs"-Aufgabe ("von links nach rechts") ein kommutatives Diagramm der Art

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n{\times}0 \cup_{\partial\Delta^n\times 0} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

bezeichnet, so hat, wegen der Kan-Bedingung, jede solche Aufgabe eine Lösung: eine Abbildung von unten links nach oben rechts, so daß das resultierende Diagramm kommutativ ist. — Und entsprechend auch mit Prismen-Füllungs-Aufgaben "von rechts nach links".

Für unsere Zwecke wird die Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$ in dem Diagramm von sehr spezieller Art sein: das Produkt einer Abbildung $\Delta^n \to B$ mit der identischen Abbildung auf Δ^1. In dem Fall bekommen wir bei einer Trichter-Füllung von links nach rechts als deren "rechtes Ende" folglich eine Abbildung

$$\Delta^n \xrightarrow{\varphi} E_1 = p^{-1}(B \times 1) .$$

Es ist diese Abbildung, an deren Eindeutigkeit wir interessiert sind.

Wenn die Kan-Faserung p minimal ist, dann ist die Abbildung φ eindeutig bestimmt. Denn angenommen, wir haben zwei Prismen-Füllungen ψ_0 und ψ_1:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\chi \times \mathrm{Id}"] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

Wir können diese beiden dann in eine neue Liftungs-Aufgabe einbauen: die Abbildung

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$$

ist definiert als die Komposition

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,2}} \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{\chi \times \mathrm{Id}} B \times \Delta^1$$

(wo $\mathrm{pr}_{1,2}$ die Projektion auf die ersten beiden Faktoren bezeichnet).

Für eine Liftung dieser Abbildung nach E machen wir eine Vorgabe über einem Teil von $\Delta^1 \times \Delta^1$, nämlich (wenn wir uns den neuen Faktor Δ^1 als die vertikale Richtung vorstellen) eine Vorgabe über den Teil $\uparrow\!\substack{\rightarrow \\ \rightarrow}$ des Randes: links haben wir die alte Abbildung $\Delta^n \times 0 \to E$ (wo der neue Faktor Δ^1 nichts tut — weg-projiziert wird) und oben und unten haben wir die beiden zu vergleichenden Prismen-Füllungen ψ_0 und ψ_1.

Es kann $\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1$ durch Trichter-Füllen aus $\Delta^n \times \uparrow\!\substack{\rightarrow \\ \rightarrow}$ erhalten werden; oder auch aus $\partial\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \cup \Delta^n \times \uparrow\!\substack{\rightarrow \\ \rightarrow}$ (wir haben solches im Zusammenhang mit “Homotopie-Liftung” und “Homotopie-Relation” besprochen). Also existiert die gewünschte Liftung

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow E \ .$$

Die Einschränkung davon auf $\Delta^n \times 1 \times \Delta^1$ hat nun die Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \arrow[r, "\chi \times 1"] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Das heißt, es handelt sich hier um eine Homotopie (relativ $\partial\Delta^n$), die eine *Homotopie über* $B \times \Delta^1$ ist. Wegen der vorausgesetzten Minimalität der Faserung ist diese Homotopie folglich konstant. Insbesondere sind die Abbildungen an ihren Enden dieselben; das heißt, die beiden Abbildungen φ_0 und φ_1 stimmen überein. — Für Prismen-Füllungen in der anderen Richtung (von rechts nach links) hat man eine analoge Eindeutigkeits-Aussage.

Wir kommen nun zum Beweis dessen, daß die Abbildung f_1 bijektiv ist. Wir nehmen, induktiv, an, dies sei schon gezeigt in Dimensionen $< n$. Unter der Voraussetzung zeigen wir jetzt, daß f_1 auch in der Dimension n erstens injektiv und zweitens surjektiv ist.

— *Injektivität.* Seien x_1 und x_2 zwei n-Simplizes von X, die unter der Abbildung f_1 dasselbe Bild haben; seien $\overline{x}_i : \Delta^n \to X$ ihre charakteristischen Abbildungen. Nach der induktiv vorausgesetzten Injektivität von f_1 in Dimensionen $< n$ haben x_1 und x_2 dieselben Ränder; oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$\overline{x}_1 \,|\, \partial\Delta^n \;=\; \overline{x}_2 \,|\, \partial\Delta^n \ .$$

Wir bekommen eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von rechts nach links)

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \times 1 \cup_{\partial\Delta^n \times 1} \partial\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "f_1 \circ \overline{x}_i \,\cup\, f \circ (\overline{x}_i \times \mathrm{Id})"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

wo wir nicht spezifizieren müssen, ob $i = 1$ oder $= 2$, da ja die beiden Abbildungen $f \circ \overline{x}_i$ sowohl auf $\partial\Delta^n \times \Delta^1$ als auch auf $\Delta^n \times 1$ übereinstimmen. Andererseits ergeben die beiden Abbildungen $f \circ (\overline{x}_i \times \mathrm{Id})$ nun *zwei* Lösungen der Prismen-Füllungs-Aufgabe.

Wegen der oben diskutierten Eindeutigkeits-Aussage schließen wir, daß die beiden am linken Ende übereinstimmen:

$$f \circ \overline{x}_1 \mid \Delta^n{\times}0 \;=\; f \circ \overline{x}_2 \mid \Delta^n{\times}0 \; .$$

Da die Abbildung $f_0 = f \,|\, X{\times}0$ injektiv ist (eine Voraussetzung des Lemmas), folgt daraus, daß auch $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ übereinstimmen; also, daß $x_1 = x_2$.

— *Surjektivität.* Sei y_1 ein n-Simplex in E_1, sei $\overline{y}_1$ seine charakteristische Abbildung. Wegen der induktiv vorausgesetzten Surjektivität von f_1 in Dimensionen $< n$ kommt der Rand her von X; das heißt, es gibt eine Abbildung

$$z : \; \partial\Delta^n \longrightarrow X$$

so daß $f_1 \circ z \;=\; \overline{y}_1 \,|\, \partial\Delta^n$. Wir bekommen eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von rechts nach links):

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n{\times}1 \cup_{\partial\Delta^n\times 1} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1 & \xrightarrow{\overline{y}_1 \cup f\circ(z\times\mathrm{Id})} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \times \Delta^1 \end{array}$$

Eine Lösung davon ergibt, als ihr linkes Ende, eine Abbildung

$$\Delta^n \;\approx\; \Delta^n \times 0 \;\longrightarrow\; E_0 \;=\; p^{-1}(B \times 0)$$

und damit ein zugehöriges n-Simplex y_0 von E_0 (mit eben dieser Abbildung als charakteristischer Abbildung).

Wegen der vorausgesetzten Surjektivität der Abbildung $f_0 : X \to E_0$ (eine Voraussetzung des Lemmas) gibt es ein n-Simplex x in X, dessen Bild das Simplex y_0 ist, $y_0 = f_0(x)$. Wir haben nun eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von links nach rechts):

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n{\times}0 \cup_{\partial\Delta^n\times 0} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1 & \xrightarrow{\overline{y}_0 \cup f\circ(z\times\mathrm{Id})} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \times \Delta^1 \end{array}$$

und für diese Aufgabe haben wir *zwei* Lösungen: die erste ist die von oben, anders herum gelesen; die zweite ist durch die Homotopie gegeben:

$$\Delta^n{\times}\Delta^1 \xrightarrow{f\circ(x\times\mathrm{Id})} E \; .$$

Aufgrund der Eindeutigkeits-Aussage stimmen die beiden am rechten Ende überein. Das heißt, $y_1 = f(x{\times}1)$; und y_1 ist somit im Bild der Abbildung f_1. $\square$

Nun zu den angekündigten Anwendungen:

Satz. (1) *Seien X und X' minimale Kan-Komplexe. Jede Homotopie-Äquivalenz von X zu X' ist ein Isomorphismus.*

(2) *Seien $p : E \to B$ und $p' : E' \to B$ minimale Kan-Faserungen. Jede Homotopie-Äquivalenz, über B, von $p : E \to B$ zu $p' : E' \to B$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (1) Sei $f : X \to X'$ eine Homotopie-Äquivalenz. Dies bedeutet, daß eine Abbildung in der anderen Richtung existiert, $g : X' \to X$, so daß die beiden Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ jeweils homotop zu einer identischen Abbildung sind; z.B. im zweiten Falle existiert eine Abbildung:

$$X \times \Delta^1 \longrightarrow X \ ,$$

die eine Homotopie ist zwischen der identischen Abbildung auf X einerseits und der Abbildung $g \circ f$ andererseits. Da X als minimaler Kan-Komplex vorausgesetzt wurde, ist das vorangegangene Lemma anwendbar. Es liefert, daß die Abbildung $g \circ f$ ein Isomorphismus ist. Da von X' ebenfalls vorausgesetzt wurde, daß es minimaler Kan-Komplex ist, folgt auf die gleiche Weise, daß auch $f \circ g$ ein Isomorphismus ist. Offenbar folgt jetzt, daß auch f und g beide Isomorphismen sind.

(2) Das geht genauso; mit der Modifikation, daß die vorausgesetzten Homotopien solche über B sind und die resultierenden Isomorphismen ebenfalls. □

Korollar. (1) *Sei X Kan-Komplex. "Der" homotopie-äquivalente minimale Kan-Komplex ist bis auf* (nicht-kanonische!) *Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(2) *Sei $p : E \to B$ Kan-Faserung. "Die" über B homotopie-äquivalente minimale Kan-Faserung ist bis auf* (nicht-kanonische!) *Isomorphie über B eindeutig bestimmt.*

□

Wenn $p : E \to B$ eine Kan-Faserung (bzw. eine minimale Kan-Faserung) ist, und $B' \to B$ eine Abbildung, dann ist die durch den Pullback gegebene induzierte Abbildung

$$B' \times_B E \ \longrightarrow \ B'$$

ebenfalls eine Kan-Faserung (bzw. eine minimale Kan-Faserung). Wenn die Abbildung den Namen f hat, $f : B' \to B$, dann schreiben wir abkürzend (und etwas mißbräuchlich) auch $f^*(E)$ für diese induzierte Faserung.

Satz. *Sei $p : E \to B$ eine minimale Kan-Faserung.*

(1) *Wenn f_1 und f_2 homotope Abbildungen $B' \to B$ sind, dann sind die induzierten Faserungen $f_1^*(E)$ und $f_2^*(E)$ isomorph.*

(2) *Wenn die identische Abbildung auf B homotop ist zu einer trivialen Abbildung, dann ist $p : E \to B$ ein triviales Bündel* (genauer: ein *trivialisierbares* Bündel).

(3) *Jede minimale Kan-Faserung ist ein lokal-triviales Bündel.*

Beweis. (1) Sei F eine Homotopie von f_1 zu f_2; also eine Abbildung

$$F : B' \times \Delta^1 \longrightarrow B \ ,$$

die an den Enden auf f_1, bzw. auf f_2 einschränkt. $F^*(E)$ ist dann eine minimale Kan-Faserung über $B' \times \Delta^1$, die an den beiden Enden $B' \times \Delta^0$ auf die beiden uns interessierenden Faserungen $f_1^*(E)$ und $f_2^*(E)$ einschränkt.

Um diese beiden zueinander in Beziehung zu setzen, vergleichen wir mit einer anderen minimalen Kan-Faserung über $B' \times \Delta^1$, nämlich dem Produkt $f_1^*(E) \times \Delta^1$; oder, um es etwas genauer zu sagen, der Abbildung

$$(B' \times_B E) \times \Delta^1 \longrightarrow B' \times \Delta^1 \ ,$$

wo der Pullback mit Hilfe der Abbildung $f_1 : B' \to B$ gebildet ist.

Mit einem kleinen Trick schaffen wir es, diese beiden Faserungen miteinander in Beziehung zu setzen. Nämlich wir denken uns als ein "Liftungs-Problem" das folgende kommutative Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B E & \longrightarrow & F^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B' \times_B E) \times \Delta^1 & \longrightarrow & B' \times \Delta^1 \end{array}$$

In dem Diagramm sind der untere und der rechte Pfeil die Faser-Projektionen der beiden Kan-Faserungen über $B' \times \Delta^1$, während die beiden anderen Pfeile gegeben sind durch die Inklusion von $f_1^*(E)$ in der einen oder anderen dieser Faserungen.

Die Liftung existiert (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft von Kan-Faserungen). Wir bekommen auf die Weise eine Abbildung von Faserungen; d.h., eine Abbildung, derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (B' \times_B E) \times \Delta^1 & \longrightarrow & F^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \times \Delta^1 & \xrightarrow{=} & B' \times \Delta^1 \end{array}$$

An einem Ende ist diese Abbildung ein Isomorphismus (nämlich die identische Abbildung auf $f_1^*(E)$). Da es sich um minimale Faserungen handelt, schließen wir mit dem vorangegangenen Lemma, daß wir am anderen Ende ebenfalls einen Isomorphismus haben; mithin einen Isomorphismus von $f_1^*(E)$ zu $f_2^*(E)$.

(2) Die Voraussetzung impliziert, nach (1), daß $E \to B$ isomorph ist zu einer anderen Faserung; nämlich zu einer solchen, die zurückgezogen ist entlang einer trivialen Abbildung. Es ist aber klar (oder?), daß dies ein triviales Bündel sein wird.

(3) Sei $\widetilde{E} \to \widetilde{B}$ eine minimale Kan-Faserung. Die Behauptung ist, daß, für jedes n und jede Abbildung $\Delta^n \to \widetilde{B}$, die zurückgezogene Faserung über Δ^n trivialisierbar ist. Dies folgt aus (2), sobald man weiß, daß die identische Abbildung auf Δ^n homotop ist zu einer trivialen Abbildung. Es ist aber klar (oder?), daß das so ist. $\square$

Azyklische Faserungen

Sei $q : Y \to Z$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Sie heißt eine *azyklische Faserung*, wenn

— für jedes Paar von simplizialen Mengen, $A \subset X$, und

— für jedes kommutative Diagramm:

$$(\dagger) \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

gilt, daß in diesem Diagramm immer eine Liftung existiert: eine Abbildung $X \to Y$, so daß das resultierende Diagramm kommutativ ist.

Die Bedingung in der Definition der azyklischen Faserungen kann man durch eine dem Anschein nach schwächere ersetzen, wo man Liftungen nur für spezielle Paare (X, A) fordert, nämlich für solche vom Typ $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Tatsächlich ist die scheinbar schwächere Bedingung in Wirklichkeit gar nicht schwächer:

Satz. *Eine Abbildung $q : Y \to Z$ ist schon dann eine azyklische Faserung, wenn die Liftungsbedingung für die speziellen Paare $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ erfüllt ist,* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis. Sei ein Liftungs-Diagramm $(\dagger)$ gegeben. Es sei X' eine simpliziale Menge zwischen A und X (das heißt, $A \subset X' \subset X$) zusammen mit einer "partiellen Liftung": einer Abbildung $\eta : X' \to Y$ derart, daß das resultierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id}_Y} \\ X' & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

kommutativ ist. A selbst (zusammen mit der vorgegebenen Abbildung zu Y) ist dafür ein Beispiel. Wir nehmen nun an (wir dürfen das, wegen "Zorn's Lemma"), daß (X', η) 'maximal' ist in bezug auf diese Eigenschaft. Es stellt sich heraus, daß dann schon $X' = X$ ist. Denn angenommen, X' wäre kleiner. Sei x ein Simplex von X, das nicht in X' liegt; und zwar sei x so gewählt, daß seine Dimension, n, möglichst klein ist. Es ist dann x ein nicht-ausgeartetes Simplex, und seine charakteristische Abbildung, $\overline{x}$, bildet den Rand von Δ^n in die Unter-simpliziale-Menge X' ab. $\overline{x}$ gibt also Anlaß zu einer Abbildung von Paaren $\overline{x} : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X, X')$ und deshalb, per Komposition, auch zu einer Abbildung $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (Z, Y)$.

Wir nutzen nun die Hypothese, daß die Liftungsbedingung (†) für $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ erfüllt ist; dies gibt eine kompatible Abbildung $\Delta^n \to Y$. Per Zusammenkleben resultiert daraus eine Abbildung $X' \cup_{\partial\Delta^n} \Delta^n \to Y$, die ebenfall eine partielle Liftung ist. Das ist ein Widerspruch zu der vorausgesetzten Maximalität von X'. □

Jede azyklische Faserung ist eine Kan-Faserung: Das liegt schlicht daran, daß die Trichter-Füllungen bei den Inklusionen $A \subset X$ zur Konkurrenz zugelassen sind.

Darüberhinaus hat eine azyklische Faserung $q : Y \to Z$ auch die Eigenschaft, daß Z starker Deformationsretrakt von Y ist. Denn über die folgenden beiden Liftungs-Diagramme bekommt man erstens einen Schnitt $i : Z \to Y$ von $q : Y \to Z$ und zweitens dann eine Homotopie von der Abbildung $i \circ q$ zu der identischen Abbildung auf Y:

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "="] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times 0 \;\dot\cup\; Z \arrow[r, "\mathrm{Id} \,\dot\cup\, i"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Y \times \Delta^1 \cup_{Y \times 1} Z \arrow[r, "q \circ \mathrm{pr}_1 \cup \mathrm{Id}"] & Z \end{tikzcd}$$

Wir verzichten hier auf die Diskussion dessen, wie weit azyklische Faserungen durch Eigenschaften dieser Art schon charakterisiert sind. Die Begriffsbildung dient uns zur Formulierung des folgenden Lemmas, das wir unten benutzen werden:

Lemma. *Sei $p : E \to B$ eine Kan-Faserung. Die Abbildung p läßt sich schreiben als eine Komposition $p = \overline{p} \circ q$, wo q eine azyklische Faserung ist, und $\overline{p}$ eine minimale Kan-Faserung.*

Beweis. Wie wir gesehen haben, so gibt es eine minimale Kan-Faserung $\overline{p} : \overline{E} \to B$, die starker Deformationsretrakt von p ist. Das heißt, es gibt eine Inklusion $j : \overline{E} \to E$ und eine Projektion $q : E \to \overline{E}$ (beide über B), so daß $q \circ j = \mathrm{Id}_{\overline{E}}$ und so daß eine Homotopie H (auch über B) existiert, von der identischen Abbildung auf E zu der Abbildung $j \circ q$; wobei die Homotopie noch relativ zu $\overline{E}$ ist (also $H \,|\, \overline{E} \times \Delta^1 = j \circ \mathrm{pr}_1$):

$$\begin{tikzcd} \overline{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \overline{E} \arrow[d, "\overline{p}"] \\ B \arrow[r, "="'] & B \arrow[r, "="'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \times \Delta^1 \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p \circ \mathrm{pr}_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "="'] & B \end{tikzcd}$$

Wir werden uns jetzt davon überzeugen, daß die Abbildung $q \colon E \to \overline{E}$ automatisch schon eine azyklische Faserung ist. Sei, zum Test, ein Liftungs-Diagramm gegeben:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\quad u \quad} & E \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ \Delta^n & \xrightarrow[\quad v \quad]{} & \overline{E} \end{array}$$

Durch die Komposition mit der Abbildung $\overline{p} : \overline{E} \to B$ einerseits und mit der Abbildung $j \circ q : E \to E$ andererseits bekommen wir hieraus zwei andere Liftungs-Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\quad u \quad} & E \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta^n & \xrightarrow[\quad \overline{p} \circ v \quad]{} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\; j \circ q \circ u \;} & E \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta^n & \xrightarrow[\quad \overline{p} \circ v \quad]{} & B \end{array}$$

Das zweite von diesen Diagrammen hat eine Liftung. Nämlich wegen $\overline{p} = p \circ j$ und $v \circ i = q \circ u$, ist die Abbildung $j \circ v : \Delta^n \to E$ eine solche Liftung.

Die obige Homotopie H, von der identischen Abbildung zu der Abbildung $j \circ q$, kann aufgefaßt werden als eine Homotopie von dem ersten dieser Diagramme zu dem zweiten (da ja die Homotopie eine *Homotopie über* B ist). Per Homotopie-Erweiterung über B (angewandt auf die Liftung mit der "rückwärts zu lesenden" Homotopie H) resultiert, daß auch das erste Diagramm eine Liftung hat; diese heiße $w : \Delta^n \to E$.

Es ist nun eine ganz erstaunliche Tatsache, daß die Abbildung w automatisch auch eine Liftung für das Diagramm $(*)$ ist. Zum Nachweis von dieser Behauptung ist die Kommutativität des unteren Dreiecks in dem ergänzten Diagramm nachzuprüfen; oder, was auf dasselbe hinausläuft: es ist zu zeigen, daß die beiden Abbildungen $q \circ w : \Delta^n \to \overline{E}$ und $v : \Delta^n \to \overline{E}$ in Wirklichkeit dieselben sind.

Wegen der Minimalität der Faserung $\overline{p} : \overline{E} \to B$ werden wir wissen, daß diese beiden Abbildungen übereinstimmen, sobald wir nur wissen, daß sie zueinander homotop sind, über B, mit einer Homotopie, die auf dem Rand konstant ist. Eine solche Homotopie werden wir nun konstruieren.

Das geht mit dem üblichen Trick, eine geeignete Liftungs-Aufgabe zu erfinden. Es wird eine Abbildung von $\Delta^n \times \square = \Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1$ zu $\overline{E}$ (indirekt) angegeben als die Lösung einer Homotopie-Liftungs-Aufgabe (für Abbildungen $\Delta^n \times \Delta^1 \to \overline{E}$ über B); dabei ist die gesuchte 'Liftung' sowohl auf $\partial\Delta^n \times \square$ als auch auf $\Delta^n \times \sqsubset$ vorgegeben.

Als Vorgabe auf $\partial\Delta^n \times \square$ nehmen wir die Abbildung:

$$(\partial\Delta^n \times \Delta^1) \times \Delta^1 \xrightarrow{\;\mathrm{pr}\;} \partial\Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{\;u \times \mathrm{Id}\;} E \times \Delta^1 \xrightarrow{\;H\;} E \xrightarrow{\;q\;} \overline{E}$$

(wo 'pr' die Projektion weg von dem letzten Faktor bezeichnet, den wir uns in '$\square$' als den "vertikalen" Faktor vorstellen wollen). Auf den drei Teilen von $\Delta^n \times \sqsubset$ ist:

(oben): die Homotopie aus der Definition von w, gefolgt von der Abbildung q ;
(links): die 'konstante' Homotopie $\Delta^n \times \Delta^0 \times \Delta^1 \xrightarrow{\;\mathrm{pr}\;} \Delta^n \xrightarrow{\;w\;} E \xrightarrow{\;q\;} \overline{E}$;
(unten): die Homotopie $\Delta^n \times \Delta^1 \; (\times \Delta^0) \xrightarrow{\;w \times \mathrm{Id}\;} E \times \Delta^1 \xrightarrow{\;H\;} E \xrightarrow{\;q\;} \overline{E}$. $\square$

Satz. *Die geometrische Realisierung einer Kan-Faserung ist eine Serre-Faserung.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Lemma kann eine vorgegebene Kan-Faserung, p, geschrieben werden als eine Komposition von einer azyklischen Faserung, q, und einer minimalen Kan-Faserung, $\overline{p}$. Nun ist es klar (oder?), daß die Zusammensetzung zweier Serre-Faserungen wieder eine Serre-Faserung ist. Wir werden also wissen, daß $|p| = |\overline{p} \circ q|$ eine Serre-Faserung ist, sobald wir wissen, daß $|\overline{p}|$ und $|q|$ es sind.

Den Fall einer minimalen Kan-Faserung haben wir früher schon behandelt: Es wurde gezeigt, daß eine minimale Kan-Faserung ein lokal-triviales Bündel ist; und es wurde skizziert, daß bei einem lokal-trivialen Bündel die geometrische Realisierung ebenfalls lokal-trivial ist (zumindest im "kompakt-erzeugten" Sinne); und, folglich, auch eine Serre-Faserung.

Es bleibt zu zeigen, daß die geometrische Realisierung einer azyklischen Faserung $q : X \to Y$ eine Serre-Faserung ist. Das geht mit einem kleinen Trick. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "="] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X \times Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Wegen der Injektivität von $X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times q} X \times Y$, ist das Diagramm ein akzeptables Liftungs-Diagramm für die azyklische Faserung $q : X \to Y$. Es existiert also eine Liftung: eine Abbildung $l : X \times Y \to X$, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Das ergänzte Diagramm, etwas anders betrachtet, ist nun ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id} \times q"] \arrow[d, "q"'] & X \times Y \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "q"'] \\ Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "="'] & Y \end{tikzcd}$$

und die obere zusammengesetzte Abbildung in dem Diagramm ist die identische Abbildung auf X. Wir haben herausgefunden, daß die Abbildung q ein Retrakt von der Projektions-Abbildung pr_2 in dem Diagramm ist.

Die geometrische Realisierung der Projektions-Abbildung, $|\mathrm{pr}_2| : |X \times Y| \to |Y|$, ist (zumindest im "kompakt-erzeugten" Sinne) selbst eine Projektions-Abbildung (wie im Zusammenhang mit den lokal-trivialen Bündeln besprochen); und damit auch eine Serre-Faserung.

Der Retrakt $|q|$ von $|\mathrm{pr}_2|$ ist folglich ebenfalls eine Serre-Faserung. $\square$

Azyklisches Beispiel

Die Erweiterungs-Bedingung kann, wie wir wissen, erzwungen werden durch den Prozeß des "Trichter-Füllens". Diese Konstruktion ändert nicht den Homotopietyp der geometrischen Realisierung; z.B. eine Inklusion $Y \to Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ induziert eine Homotopieäquivalenz $|Y| \to |Y| \cup_{|\Lambda_i^n|} |\Delta^n|$.

Daß das Trichter-Füllen nicht den Homotopietyp ändert, gilt zu einem gewissen Grad auch im simplizialen Kontext selbst:

Satz. *E und E' seien Kan-Komplexe. E' entstehe aus E durch Trichterfüllen. Dann ist E starker Deformationsretrakt von E'.*

Von diesem Sachverhalt benötigen wir den Fall $E = \Delta^0$:

Korollar. *E' sei Kan-Komplex und entstehe aus Δ^0 durch Trichterfüllen. Dann ist E' azyklischer Kan-Komplex.*

Beweis des Korollars. Daß E' azyklischer Kan-Komplex ist, bedeutet, nach Definition, daß die Abbildung $E' \to \Delta^0$ azyklische Faserung in dem früher besprochenen Sinne ist; oder, im Klartext: für jede Inklusion von simplizialen Mengen $K \subset L$ und jede Abbildung $K \to E'$ existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf L.

Sei eine solche Abbildung $K \to E'$ gegeben. Nach dem Satz existiert eine Homotopie der identischen Abbildung auf E' zu einer trivialen Abbildung; folglich auch eine Homotopie der Abbildung $K \to E'$ zu einer trivialen Abbildung. Diese triviale Abbildung kann zu einer trivialen Abbildung auf L erweitert werden. Mit Hilfe der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für Abbildungen in einen Kan-Komplex schließen wir, daß auch die ursprüngliche Abbildung $K \to E'$ zu einer Abbildung von L erweitert werden kann. □

Beweis des Satzes. Es wird genügen, die folgende Behauptung zu zeigen: $K \subset L$ sei eine Inklusion von simplizialen Mengen, wo L aus K durch Trichterfüllen entsteht. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ L & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Dann existiert eine Homotopie, relativ K, von der Abbildung $L \to E'$ zu einer Abbildung nach E.

Der Satz resultiert als der Spezialfall der Behauptung, wo die horizontalen Abbildungen in dem Diagramm die identischen Abbildungen auf E und E' sind.

Statt des allgemeinen Falles dieser Behauptung wird es genügen, den Fall einer einzigen Trichter-Füllung zu behandeln. Denn damit kann man den allgemeinen Fall bekommen mit Hilfe von Induktion und (eventuell unendlicher) Wiederholung.

Wir können also annehmen, daß $L = K \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$. Es wird sogar genügen, den ganz speziellen Fall $K = \Lambda_i^n$ zu behandeln. Denn aus diesem ganz speziellen Fall kommt man auf den Fall eines allgemeinen K durch "Zusammenkleben".

Das fragliche Diagramm lautet jetzt:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist E ein Kan-Komplex. Es existiert also eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die die Abbildung $\Lambda_i^n \to E$ erweitert.

Die beiden Abbildungen $\Delta^n \to E'$ und die konstante Homotopie auf Λ_i^n ergeben zusammen eine Abbildung

$$\Delta^n \times 0 \ \cup \ \Lambda_i^n \times \Delta^1 \ \cup \ \Delta^n \times 1 \ \longrightarrow \ E' \ .$$

Auch E' ist nach Voraussetzung ein Kan-Komplex. Wegen des nachfolgenden Lemmas läßt sich die Abbildung folglich zu der gewünschten Homotopie

$$\Delta^n \times \Delta^1 \ \longrightarrow \ E'$$

erweitern. □

Lemma. $\Delta^n \times \Delta^1$ *entsteht aus* $\Delta^n{\times}0 \cup \Lambda_i^n{\times}\Delta^1 \cup \Delta^n{\times}1$ *durch Trichter-Füllen.*

Beweis. Das ist eine Variante von dem früher behandelten Sachverhalt, daß $\Delta^n \times \Delta^1$ durch Trichter-Füllen entsteht aus $\Delta^n \times 0 \cup \partial\Delta^n \times \Delta^1$. Dort hatten wir überlegt, daß man aus dem Prisma $\Delta^n \times \Delta^1$ die $(n{+}1)$-Simplizes, $n{+}1$ an der Zahl, der Reihe nach "ab-baut" (wegläßt), beginnend mit dem obersten.

Wir machen es hier genauso; mit den folgenden Änderungen:

Der Deckel von dem Prisma (d.h. $\Delta^n{\times}1$) steht hier als "freie Seite" nicht zur Verfügung. Die freie Seite für das *erste* wegzulassende Simplex wird deshalb eine n-dimensionale Seite sein, die in der wegzulassenden Seitenwand von dem Prisma liegt (der Seitenwand über der nicht in Λ_i^n vorkommenden i-ten Seite von Δ^n). Von den $(n{+}1)$-Simplizes haben alle bis auf eines eine n-dimensionale Seite mit der fraglichen Seitenwand gemeinsam. Das oberste $(n{+}1)$-Simplex nun steht immer als 'erstes' zur Verfügung, es sei denn, es ist $i = 0$; in dem Fall vertauscht man 'oben' und 'unten'.

Beginnend mit dem ersten, werden die $(n{+}1)$-Simplizes der Reihe nach von oben nach unten abgebaut. — Zum Schluß gibt es noch die Reste von der Seitenwand (von den n-dimensionalen Simplizes sind $n{-}1$ der ursprünglich n noch da). Die baut man auch noch ab. □

Simpliziale Approximation

Gegeben Simplizialkomplexe (oder simpliziale Mengen) und eine stetige Abbildung zwischen deren unterliegenden topologischen Räumen (bzw. geometrischen Realisierungen), so möchte man wissen, daß die vorgegebene Abbildung "approximiert" werden kann durch eine "bessere" Abbildung; nämlich eine solche, die mit der zusätzlichen Struktur kompatibel ist.

Wegen der 'Starrheit' simplizialer Strukturen gibt es im allgemeinen nicht so viele Abbildungen, wie man bräuchte. Für die Gültigkeit des Approximations-Satzes ist es deshalb notwendig, eine zusätzliche Voraussetzung zu machen: man fordert die *Erweiterungs-Bedingung* (für das Ziel der Abbildung).

Es bezeichne $|X|$ die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge X.

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Es sei $K \subset L$ ein Paar von simplizialen Mengen, und es seien Abbildungen*

$$K \xrightarrow{f} X \quad , \qquad |L| \xrightarrow{g} |X|$$

vorgegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|K|$ übereinstimmen. Dann existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen,

$$L \xrightarrow{f'} X \ ,$$

so daß die geometrische Realisierung der Abbildung f' homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung g.

Man kann die Sache auch so ausdrücken. Eine Abbildung $|L| \xrightarrow{g'} |X|$ werde als "realisiert" bezeichnet, wenn eine Abbildung von simplizialen Mengen existiert, $L \to X$, deren geometrische Realisierung die Abbildung g' ist (eine solche Abbildung ist eindeutig bestimmt, aber sie muß im allgemeinen natürlich nicht existieren). Die Erweiterungs-Bedingung garantiert (das sagt der Satz), jede Abbildung $g : |L| \to |X|$ ist zumindest homotop zu einer realisierten Abbildung; und zwar sogar homotop relativ zu einer vorgegebenen Realisierung auf einem Unterraum $|K|$.

Korollar. *X sei simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Dann ist X ein starker Deformationsretrakt von $\mathrm{S}|X|$, dem singulären Komplex der geometrischen Realisierung.*

Beweis. Das resultiert aus dem Satz, angewandt auf Abbildungen, die man aus der Adjungiertheit der beiden Funktoren $|-|$ (geometrische Realisierung) und $\mathrm{S}(-)$ (singulärer

Komplex) bekommt. Die Adjungiertheit der Funktoren bedeutet, wie sonst auch, daß, für simpliziale Mengen X und topologische Räume W, ein natürlicher Isomorphismus besteht:

$$\mathrm{Hom}_{\text{top.Räume}}\,(\,|X|\,,\,W\,)\;\;\cong\;\;\mathrm{Hom}_{\text{simp.Mengen}}\,(\,X\,,\,\mathrm{S}(W)\,)\;\;.$$

Insbesondere hat man die beiden sogenannten *Adjunktions-Transformationen*. Nämlich über den Isomorphismus der Hom-Mengen entspricht der identischen Abbildung auf $|X|$ eine Abbildung

$$X \longrightarrow \mathrm{S}|X|\;\;,$$

und der identischen Abbildung auf $\mathrm{S}(W)$ entspricht, ähnlich, eine Abbildung

$$|\,\mathrm{S}(W)\,| \longrightarrow W\;\;.$$

Der Hom-Mengen-Isomorphismus läßt sich aus den Adjunktions-Transformationen rekonstruieren: einer Abbildung $f\colon |X| \to W$ ist die zusammengesetzte Abbildung

$$X \longrightarrow \mathrm{S}|X| \xrightarrow{\mathrm{S}(f)} \mathrm{S}(W)$$

zugeordnet; und einer Abbildung $g\colon X \to \mathrm{S}(W)$ ist, ähnlich, die Abbildung

$$|X| \xrightarrow{|g|} |\mathrm{S}(W)| \longrightarrow W$$

zugeordnet.

Insbesondere (man nimmt für $g\colon X \to \mathrm{S}|X|$ die eine Adjunktions-Transformation) bekommt man so, daß die aus den beiden Adjunktionstransformationen zusammengebaute Abbildung

$$|X| \longrightarrow |\,\mathrm{S}|X|\,| \longrightarrow |X|$$

gleich der identischen Abbildung auf $|X|$ ist. Wir haben, folglich, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
|X| & \xrightarrow{\;=\;} & |X| \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{=} \\
|\,\mathrm{S}|X|\,| & \longrightarrow & |X|
\end{array}$$

auf das wir den Satz anwenden können. Wir schließen, daß eine Homotopie existiert, relativ zu dem Unterraum $|X|$, von der Abbildung $|\,\mathrm{S}|X|\,| \to |X|$ zu der geometrischen Realisierung einer Abbildung $\mathrm{S}|X| \to X$.

Die Homotopie ist eine Abbildung $|\,\mathrm{S}|X| \times \Delta^1\,| \;\cong\; |\,\mathrm{S}|X|\,| \times [0,1] \;\xrightarrow{\;h\;}\; |X|$. Per Adjunktion entspricht ihr eine Abbildung

$$\mathrm{S}|X| \times \Delta^1 \;\longrightarrow\; \mathrm{S}|X|\;.$$

Das ist die im Korollar behauptete Homotopie. Denn daß diese Homotopie die gewünschten Eigenschaften hat, kann man daraus sehen, daß die Homotopie, als eine adjungierte Abbildung, ja beschreibbar ist als die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{S}|X| \times \Delta^1 \;\longrightarrow\; \mathrm{S}|\,\mathrm{S}|X| \times \Delta^1\,| \;\xrightarrow{\;\mathrm{S}(h)\;}\; \mathrm{S}|X|\;\;.$$

□

Korollar (Kombinatorische Beschreibung von Elementen von Homotopiegruppen). *Sei X simpliziale Menge, mit Basispunkt $x_0 : \Delta^0 \to X$. Es sei vorausgesetzt, daß X die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Jedes Element von $\pi_n(\,|X|\,,\,|x_0|\,)$ ist repräsentierbar durch eine Abbildung*

$$\alpha : \ (\,\Delta^n\,,\,\partial\Delta^n\,) \ \longrightarrow \ (\,X\,,\,x_0\,) \ .$$

Ein solches Element ist dann, und nur dann, trivial, wenn die Abbildung $\alpha : \Delta^n \to X$ sich fortsetzen läßt zu einer Abbildung $\widetilde{\alpha} : \Delta^{n+1} \to X$, mit α als der Abbildung der letzten Seite, und wo alle anderen Seiten in den Basispunkt x_0 abgebildet werden.

Beweis. Ein Element von $\pi_n(\,|X|\,,\,|x_0|\,)$ ist, nach Definition, repräsentierbar durch eine Abbildung

$$(\,|\Delta^n|\,,\,|\partial\Delta^n|\,) \ \longrightarrow \ (\,|X|\,,\,|x_0|\,) \ .$$

Nach dem Satz ist die Abbildung homotop, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu einer "realisierten" Abbildung. Das gibt die Abbildung α.

Wenn die Abbildung α das triviale Element repräsentiert, dann gibt es eine Erweiterung der Abbildung $|\alpha|$ zu einer Abbildung

$$(\ |\Delta^{n+1}|\ ,\ |\Lambda^{n+1}_{n+1}|\ ) \ \longrightarrow \ (\,|X|\,,\,|x_0|\,) \ .$$

Nach dem Satz ist die Abbildung homotop, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^{n+1}|$, zu einer "realisierten" Abbildung. Das gibt die Abbildung $\widetilde{\alpha}$. □

Lemma. *Für den Beweis des Satzes genügt es, den Spezialfall*

$$(L, K) \ = \ (\Delta^n, \partial\Delta^n) \quad , \quad n = 0,\,1,\,2,\,\dots\,,$$

zu behandeln.

Beweis. Wir nehmen diesen Spezialfall hier als gegeben an und zeigen, wie daraus der allgemeine Fall des Satzes folgt.

Bezeichne L^n das n-Skelett von L, relativ zu K; also die Unter-simpliziale-Menge von L, die erzeugt ist von den Simplizes der Dimension $\leq n$, zusammen mit denjenigen von K. Eine auf $|L|$ definierte Abbildung g entspricht einem kompatiblen System $\{g_n\}$ von Abbildungen auf den $|L^n|$, und die Abbildung g wird "realisiert" sein dann, und nur dann, wenn die g_n es alle sind; ähnlich auch entspricht eine Homotopie von auf $|L|$ definierten Abbildungen einem kompatiblen System solcher Homotopien für die $|L^n|$. Es wird folglich genügen, geeignete kompatible Systeme anzugeben.

Sei $n \geq 0$. Es werde, induktiv, angenommen, daß bis $n{-}1$ einschließlich solche Systeme schon konstruiert sind; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß die eingeschränkte Abbildung $g \,\big|\, |L^{n-1}|$ schon deformiert wurde zu einer "realisierten" Abbildung. Per Homotopie-Erweiterung für die Inklusion von CW-Komplexen $|L^{n-1}| \subset |L|$ können wir annehmen, daß nicht nur die eingeschränkte Abbildung, sondern auch die Abbildung g selbst entsprechend deformiert wurde; wir behalten die Bezeichnung g für die Abbildung.

Es ist

$$L^n \;=\; L^{n-1} \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} \; J_n \times \Delta^n \;,$$

wo die Indexmenge J_n gegeben ist durch die Menge der nicht-ausgearteten n-Simplizes von L, soweit diese nicht in K liegen. Für einen solchen Index $j \in J_n$ bezeichne $\chi_j : \Delta^n \to L$ die zugehörige charakteristische Abbildung. Die resultierende zusammengesetzte Abbildung

$$|\Delta^n| \xrightarrow{|\chi_j|} |L| \xrightarrow{\;g\;} |X|$$

hat als ihre Einschränkung die Abbildung $|\partial\Delta^n| \xrightarrow{|\chi_j|} |L^{n-1}| \xrightarrow{\;g\;} |X|$, die, nach Induktions-Hypothese, eine “realisierte” Abbildung ist. Nach dem Spezialfall des Satzes, den wir hier als gegeben annehmen, existiert deshalb eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, von der Abbildung $g\circ|\chi_j|$ zu einer ebenfalls “realisierten” Abbildung.

Die resultierende Homotopie von der Abbildung auf der disjunkten Vereinigung,

$$|\coprod_{j\in J_n} \Delta^n| \xrightarrow{\;|\coprod_{j\in J_n} \chi_j|\;} |L| \xrightarrow{\;g\;} |X| \;,$$

zusammen mit der konstanten Homotopie auf $|L^{n-1}|$, liefert, per Zusammenkleben, eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|L^{n-1}|$, von der (vorher schon etwas modifizierten) Abbildung g, eingeschränkt auf $|L^n|$, zu der gewünschten “realisierten” Abbildung g_n. Der Induktions-Schritt ist damit fertig. $\square$

Beweis des Satzes. Mit dem vorangegangenen Lemma haben wir uns darauf zurückgezogen, den Satz in der folgenden Form zu zeigen:

Sei X eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Seien Abbildungen

$$\partial\Delta^n \xrightarrow{\;f\;} X \quad , \qquad |\Delta^n| \xrightarrow{\;g\;} |X|$$

gegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|\partial\Delta^n|$ übereinstimmen. Dann existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen,

$$\Delta^n \xrightarrow{\;f'\;} X \;,$$

so daß die geometrische Realisierung der Abbildung f' homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu der Abbildung g.

Der Fall $n = 0$. In dem Fall ist $\partial\Delta^n$ nicht da, $g(|\Delta^n|)$ ist ein Punkt in $|X|$, und die Behauptung ist, daß dieser Punkt in eine 0-Zelle (geometrische Realisierung von einem 0-Simplex) deformiert werden kann. Es ist klar (oder?), daß das geht.

Der Fall $n \geq 1$. Bei der Behandlung dieses Falles werden wir, induktiv, voraussetzen, daß die Angelegenheit für $n{-}1$ schon geklärt ist.

Für einen sogleich durchzuführenden Trick ist es angebracht, eine zusätzliche Voraussetzung technischer Art über die Abbildung $f : \partial\Delta^n \to X$ zu machen. Diese Voraussetzung ist, daß mindestens eine der Seiten von Δ^n, sagen wir die 0-te, von der Abbildung f *trivial* abgebildet wird.

Die zusätzliche Voraussetzung ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn zunächst ist die Abbildung $\Delta^{n-1} \to X$ (die Einschränkung von f auf die 0-te Seite) homotop zu einer trivialen Abbildung (dies benutzt nicht einmal die Erweiterungs-Bedingung). Da nun X die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, sind wir in der Lage, "Homotopie-Erweiterung" für Abbildungen nach X zu zitieren; es existiert also eine Homotopie von f, die die genannte Homotopie erweitert. Schließlich existiert auch eine Erweiterung der induzierten Homotopie von $|f|$ zu einer Homotopie der Abbildung g. — Nachdem mit dem noch zu beschreibenden Argument die Existenz einer Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, von g zu einer "realisierten" Abbildung etabliert ist, werden die Hilfs-Homotopien rückgängig gemacht; dabei ist wieder "Homotopie-Erweiterung" für Abbildungen nach X zu benutzen.

Im übrigen ist es keine zusätzliche Mühe, nicht nur die 0-te Seite trivial abzubilden, sondern auch die Vereinigung davon mit der 0-ten Ecke (denn diese beiden werden offenbar in dieselbe Zusammenhangskomponente von X abgebildet). Diese Modifikation wollen wir auch noch machen.

Nun zum Argument. Als einen *Basispunkt* $x_0 : \Delta^0 \to X$ wählen wir dasjenige 0-Simplex, in das die Abbildung f die 0-te Seite von Δ^n abbildet (und die 0-te Ecke auch). Das zu beschreibende induktive Argument beruht darauf, daß man aus der Inklusion des Basispunktes eine Kan-Faserung $p\colon E \to X$ machen kann:

$$\begin{tikzcd} \Delta^0 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "="'] & X \end{tikzcd}$$

Wir möchten die Abbildung f gegen die Kan-Faserung p liften. Dazu liften wir zunächst zumindest einen großen Teil davon:

Behauptung. *Die eingeschränkte Abbildung* $\Lambda_0^n \xrightarrow{\text{Inkl}} \partial\Delta^n \xrightarrow{f} X$ *hat eine Liftung zu einer Abbildung* $\widetilde{f} : \Lambda_0^n \to E$.

Beweis. Zunächst liftet man die Ecke Nr. 0 von Δ^n. Das geht, weil diese Ecke in den Basispunkt abbildet (das haben wir oben so eingerichtet), und weil sicherlich das Urbild unter p von dem Basispunkt x_0 nicht-leer ist.

Anschließend wird f der Reihe nach auf den $(n{-}1)$-Simplizes geliftet, die den Trichter Λ_0^n ausmachen. Dabei hat man jedesmal, was wir früher bezeichnet haben als eine verallgemeinerte Trichter-Füllungs-Aufgabe vom Typ V_0^{n-1}: die Aufgabe ist, die Abbildung auf dem Simplex Δ^{n-1} zu liften, relativ zu einer vorgegebenen Liftung auf einer Vereinigung von Unter-Simplizes, deren jedes die Ecke Nr. 0 enthält.

Im Falle von der ersten Seite (das ist hier tatsächlich die Seite mit der Nr. 1), besteht die genannte Vereinigung von Unter-Simplizes nur aus der 0-ten Ecke. Im Falle der zweiten Seite hat man den Durchschnitt der zweiten Seite mit der ersten. Und so weiter. $\square$

Behauptung. *Die Abbildung* $g : |\Delta^n| \to |X|$ *hat eine Liftung* $\widetilde{g} : |\Delta^n| \to |E|$, *die die geometrische Realisierung der Abbildung* $\widetilde{f} : \Lambda_0^n \to E$ *erweitert.*

Beweis. Wir wissen, daß die geometrische Realisierung der Kan-Faserung $p : E \to X$ eine Serre-Faserung ist. □

Behauptung. *Die Abbildung* $\widetilde{g} : |\Delta^n| \to |E|$ *kann deformiert werden* (mit einer Homotopie relativ zu dem Unterraum $\widetilde{g}(|\Lambda_0^n|)$; und über $|X|$) *zu einer Abbildung* $\overline{g} : |\Delta^n| \to |E|$, *deren Einschränkung auf den gesamten Rand* $|\partial\Delta^n|$ *"realisiert" ist.*

Beweis. Es ist in der Rechtfertigung dieser Behauptung, wo wir den Induktions-Schritt von $n-1$ auf n machen. Es bezeichne dazu F die Faser der Kan-Faserung $p : E \to X$ über dem Basispunkt x_0,

$$F \;=\; E \times_X \Delta^0 \;.$$

Es ist klar (oder?), daß F die Erweiterungs-Bedingung erfüllt.

Der Witz des Arguments ist nun, daß die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf die 0-te Seite von $|\Delta^n|$ ganz in $|F|$ hinein abbildet: das liegt an unserer technischen Voraussetzung, daß die 0-te Seite von Δ^n durch die Abbildung f ganz in den Basispunkt abgebildet werden sollte. Die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf den Rand dieser 0-ten Seite ist eine "realisierte" Abbildung: sie ist die geometrische Realisierung von der Abbildung $\widetilde{f}$, eingeschränkt auf den 'Rand' des Trichters Λ_0^n.

Also können wir, per Induktions-Voraussetzung, unseren Satz anwenden, um zu schließen, daß die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf die 0-te Seite von $|\Delta^n|$ homotop ist, relativ Rand, zu einer "realisierten" Abbildung. Aus dieser Homotopie erhalten wir, per Homotopie-Erweiterung, eine Homotopie (relativ zu dem Unterraum $\widetilde{g}(|\Lambda_0^n|)$; und über $|X|$) von der Abbildung $\widetilde{g}$ zu der gewünschten Abbildung $\overline{g}$. □

Abschluss des Beweises. Es bezeichne $\overline{f} : \partial\Delta^n \to E$ die Abbildung, deren geometrische Realisierung die Abbildung $\overline{g}\,\big|\,|\partial\Delta^n|$ ist ($\overline{f}$ existiert nach Definition dessen, was es heißt, daß die letztere Abbildung eine "realisierte" Abbildung ist). Die Abbildung $\overline{f}$ hat die Eigenschaft, daß ihre Komposition mit der Faser-Projektion p gleich der ursprünglichen Abbildung f ist.

Wir benutzen nun, daß die Inklusion $i : \Delta^0 \to E$ eine *Homotopie-Äquivalenz* in einem sehr starken Sinne ist: Es ist nicht nur Δ^0 starker Deformationsretrakt von E nach der geometrischen Realisierung. Sondern Δ^0 ist auch starker Deformationsretrakt von E im simplizialen Sinne: E ist "azyklischer Kan-Komplex".

Es folgt, daß die Abbildung $\overline{f}$ erweitert werden kann zu einer Abbildung $\overline{f}\,'$; und daß $|\overline{f}\,'|$ homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu der Abbildung $\overline{g}$.

Die Projektion von $\overline{f}\,'$ (das heißt, die Komposition davon mit p) ist nun die gewünschte Abbildung f'. Und die Projektion der Homotopie ist die gewünschte Homotopie von $|f'|$ zu g. □

Für Simplizialkomplexe gibt es eine Version des Approximations-Satzes, die nicht auf die Erweiterungs-Bedingung verweist, sondern stattdessen auf die Möglichkeit, einen der beteiligten Komplexe (die Quelle der Abbildung) zu *unterteilen*.

Bei früherer Gelegenheit haben wir diskutiert, wie ein Simplizialkomplex, zumindest nachdem man ihn 'angeordnet' hat, als ein Spezialfall einer simplizialen Menge aufgefaßt werden kann (die Konstruktion des "Hinzunehmens ausgearteter Simplizes"). Die auf solche Weise entstehenden simplizialen Mengen sind untypisch insofern, als sie sowohl "endlich" als auch "nicht-singulär" sind im Sinne der beiden folgenden Definitionen (von denen die erste für uns nicht neu ist):

Definition. Eine simpliziale Menge ist *endlich*, wenn es nur endlich viele nicht-ausgeartete Simplizes gibt.

Definition. Eine simpliziale Menge ist *nicht-singulär*, wenn gilt: für jedes nicht-ausgeartete Simplex ist die charakterische Abbildung eine injektive Abbildung.

Es ist klar (oder?), daß die charakteristische Abbildung von einem n-Simplex schon dann injektiv sein wird, wenn die $n{+}1$ Ecken von dem Simplex alle verschieden sind.

Beispiele. (1) Der übliche 'Kreis' (je ein nicht-ausgeartetes 0-Simplex und 1-Simplex) ist 'singulär' (d.h. nicht 'nicht-singulär' im Sinne der obigen Definition).

(2) Es gibt einen 'Kreis' mit je zwei nicht-ausgearteten 0-Simplizes und 1-Simplizes. Dieser 'Kreis' ist nicht-singulär, er kommt aber nicht von einem Simplizialkomplex her.

Der "Unterteilungs"-Begriff, den wir hier verwenden, ist eine Variante von dem früheren Begriff der *baryzentrischen Unterteilung*. Er ist Variante in zweifacher Hinsicht:

— es werden nicht alle Simplizes unterteilt;

— die Spezifizierung der Anordnung der Ecken ist anders (und komplizierter).

Sei dazu L eine simpliziale Menge, die endlich und nicht-singulär ist, und $K \subset L$ eine Unter-simpliziale-Menge. Eine *Stern-Unterteilung von* L*, weg von* K, wird, nach Definition, auf die folgende Weise erhalten: Für ein K', mit $K \subset K' \subset L$, werden die nicht-ausgearteten Simplizes von L, die nicht in K' liegen, *stellar* unterteilt; und zwar in der Reihenfolge aufsteigender Dimension: erst 1, dann 2, usw.; ein Simplex "stellar" zu unterteilen, heißt dabei, es zu ersetzen durch den Kegel auf seinem (schon vorher unterteilten!) Rand. — Die Definition ist bisher insofern unvollständig, als noch zu spezifizieren ist, wie die Eckenanordnung in den Simplizes sein soll (was die simpliziale Struktur festlegt). Es liegt in der Natur der Sache, daß diese Spezifizierung erst später gemacht werden kann (s. unten für die nachzuholenden Details).

Eine *iterierte Stern-Unterteilung von* L*, weg von* K, entsteht durch endlich viele Wiederholungen dieser Konstruktion (wobei die diversen K' nichts miteinander zu tun haben müssen; außer, daß sie alle K enthalten). Das Resultat der Konstruktion ist eine simpliziale Menge $\overline{L}$ (bis auf die noch nachzuholende Spezifizierung), die auch endlich und nicht-singulär ist, die ebenfalls K enthält, und deren geometrische Realisierung zu derjenigen von L isomorph ist (isomorph relativ zu der identischen Abbildung auf $|K|$).

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge. Sei $K \subset L$ ein Paar von endlichen nicht-singulären simplizialen Mengen. Es seien Abbildungen*

$$K \xrightarrow{f} X \quad , \qquad |L| \xrightarrow{g} |X|$$

vorgegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|K|$ übereinstimmen. Es existiert dann $\overline{L}$, eine iterierte Stern-Unterteilung von L, weg von K; und es existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen, $f' : \overline{L} \to X$, derart, daß die Abbildung

$$|L| \;\approx\; |\overline{L}| \xrightarrow{|f'|} |X|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung g.

Beweis. Aus dem X machen wir einen Kan-Komplex durch den Prozeß des 'Trichter-Füllens': die früher beschriebene Konstruktion $X \mapsto \Psi(X)$.

[Zur Erinnerung: Es entsteht $\Phi(Z)$ aus Z durch "Füllen aller Trichter"; und es ist definiert $\Phi^n(X) = \Phi(\Phi^{n-1}(X))$, $\Phi^0(X) = X$, und $\Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$.]

Wir können den oben gegebenen Satz dann anwenden auf die zusammengesetzte Abbildung $\widetilde{g}$:

$$|L| \xrightarrow{g} |X| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Psi(X)|$$

Wir erhalten, daß eine Homotopie davon existiert, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu einer 'realisierten' Abbildung $\widetilde{g}'$.

Nun ist $|\Psi(X)| = \bigcup_n |\Phi^n(X)|$ die Vereinigung einer aufsteigenden Folge:

$$|X| \;=\; |\Phi^0(X)| \;\subset\; |\Phi^1(X)| \;\subset\; |\Phi^2(X)| \;\subset\; \cdots$$

und $\widetilde{g}'(|L|)$ ist *kompakt* (wegen der Endlichkeit von L). Es existiert also ein m, so daß schon $\widetilde{g}'(|L|) \subset |\Phi^m(X)|$. Per absteigender Induktion über dieses m folgt der Satz deshalb aus dem folgenden Lemma:

Lemma. *Sei Y eine simpliziale Menge, $K \subset M$ ein Paar von endlichen nicht-singulären simplizialen Mengen, und*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \text{Inkl}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{Inkl}} \\ M & \xrightarrow[\widetilde{f}]{} & \Phi(Y) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Es existiert M', eine Stern-Unterteilung von M, weg von K, und eine Abbildung $f' : M' \to Y$ derart, daß die Abbildung

$$|M| \;\approx\; |M'| \xrightarrow{|f'|} |Y| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Phi(Y)|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung $|\widetilde{f}|$.

Beweis. Für den Beweis werden wir so tun, als entstünde $\Phi(Y)$ aus dem Y durch eine einzige Trichter-Füllung (und nicht durch ganz viele gleichzeitig).

[Für das richtige Vorgehen muß man die vielen Trichter-Füllungen durch einen angehängten Index kennzeichnen; und diesen Index dann an viele andere Dinge ebenfalls anhängen. — Alternativ könnte man argumentieren, daß von den Trichter-Füllungen ohnehin nur endlich viele wirklich verwendet werden (wegen der Kompaktheit von $|M|$). Diese endlich vielen kann man dann nacheinander behandeln; was auf eine weitere Induktion hinausläuft. Bei solchem induktiven Vorgehen sollte man allerdings das Wort "Stern-Unterteilung" in der Formulierung des Lemmas ersetzen durch die Worte "iterierte Stern-Unterteilung".]

Statt von $\Phi(Y)$ reden wir also jetzt von $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$. Die Idee für das weitere Vorgehen ist, die beiden hinzugekommenen Simplizes in Y^+ ihrerseits zu unterteilen; und zwar in der Weise, daß für das durch die Modifikation entstehende Y' nunmehr eine Retraktion in die Unter-simpliziale-Menge Y hinein definiert werden kann. Wenn es nun noch gelingt, eine kompatible Unterteilung M' von M zu finden, so wird man eine Abbildung $M' \to Y'$ haben. Die gesuchte Abbildung kann dann definiert werden als die Komposition $M' \to Y' \to Y$.

Bei der Ausführung der Details treffen wir auf das folgende Problem. Da wir über die Anhefte-Abbildung $\Lambda_i^n \to Y$ nichts voraussetzen können, dürfen wir insbesondere auch nicht annehmen, daß sie eine injektive Abbildung ist. Es kann deshalb sein, daß Y^+ *singulär* ist; selbst dann, wenn Y es nicht ist. 'Singularität' aber ist schlecht für Unterteilung: da Unterteilungen konstruiert werden durch die induktive Behandlung *nicht-ausgearteter* Simplizes, werden wir auf Komplikationen gefaßt sein müssen, wenn wir nicht voraussetzen können, daß ein nicht-ausgeartetes Simplex als Ränder auch nur nicht-ausgeartete Simplizes hat.

Zum Glück läßt dieses spezielle Problem sich sehr leicht umgehen. Was wir anstreben, ist ja nur eine *lokale* Änderung: wir wollen nur solche Simplizes in M unterteilen, die über den beiden neuen Simplizes von Y^+ liegen. Eine Pullback-Konstruktion gibt uns nun die Möglichkeit, uns auf diese 'lokale' Situation zu konzentrieren. Der Witz dabei ist, daß 'Nicht-Singularität' eine automatische Konsequenz sein wird.

Wir definieren $K_0 = M \times_{Y^+} \Lambda_i^n$ und $M_0 = M \times_{Y^+} \Delta^n$. Dann sind K_0 und M_0 nicht-singulär (denn Produkte von nicht-singulären simplizialen Mengen sind wieder nicht-singulär; und Unter-simpliziale-Mengen ebenfalls), und M entsteht aus dem Teil über Y durch Ankleben von M_0 entlang K_0 ,

$$M \;=\; (M \times_{Y^+} Y) \cup_{K_0} M_0 \;\; .$$

Per 'Zusammenkleben' folgt das Lemma also aus dem folgenden speziellen Fall:

Behauptung. *Seien $K_0 \subset M_0$ endliche nicht-singuläre simpliziale Mengen. Es sei ein kommutatives Diagramm von Abbildungen simplizialer Mengen gegeben:*

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{Inkl}"'] & \Lambda_i^n \arrow[d, "\text{Inkl}"] \\ M_0 \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \Delta^n \end{tikzcd}$$

Dann existiert M_0', eine Stern-Unterteilung von M_0, weg von K_0, und es existiert eine Abbildung $f' \colon M_0' \to \Lambda_i^n$ derart, daß die Abbildung

$$|M_0| \;\approx\; |M_0'| \xrightarrow{|f'|} |\Lambda_i^n| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Delta^n|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K_0|$, zu der Abbildung $|\widetilde{f}|$.

Beweis. Die Existenz der Homotopie wird eine automatische Konsequenz sein, wegen der Zusammenziehbarkeit von $|\Delta^n|$. Es geht nur um die Existenz der Abbildung f'; vorausgesetzt, diese Abbildung f' wird eine Erweiterung der Abbildung f sein.

Die Nicht-Singularität kommt auf die folgende Weise ins Spiel. Wenn W eine *nicht-singuläre* simpliziale Menge ist, dann macht es Sinn, die nicht-ausgearteten Simplizes von W *alleine* zu betrachten. Man bekommt, was wir früher als eine Δ-*Menge* bezeichnet haben; einen (kontravarianten) Funktor, nicht auf der ganzen Kategorie Δ, sondern auf der Unterkategorie inj-Δ, die aus den *injektiven Abbildungen* in Δ besteht:

$$\overline{W} : \quad (\text{inj-}\Delta)^{\text{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Mengen}) \;, \qquad [n] \;\longmapsto\; \overline{W}_n \;;$$

wo eben, nach Definition, $\overline{W}_n$ die Menge der nicht-ausgearteten Simplizes in W_n ist.

Die Δ-Menge $\overline{W}$ ihrerseits hat eine zugeordnete simpliziale Menge (per Hinzunahme von ausgearteten Simplizes), und diese simpliziale Menge ist W selbst (bis auf kanonische Isomorphie). Das liegt daran, daß jedes Simplex in W auf eine, und nur eine, Weise dargestellt ist als "Ausartung von einem nicht-ausgearteten Simplex". Ferner hat $\overline{W}$ eine geometrische Realisierung als Δ-Menge,

$$\overline{W} \;\longmapsto\; \text{Real}(\overline{W})$$

(es wird nur mit Hilfe der Rand-Abbildungen zusammengeklebt). Wie wir wissen, gibt es schließlich auch einen kanonischen Isomorphismus zu der 'richtigen' geometrischen Realisierung:

$$\text{Real}(\overline{W}) \;\;\cong\;\; |W|$$

Der Nachweis der Behauptung geht nun wie folgt.

Es werde $\mathrm{U}(\Delta^n)$ definiert als eine Stern-Unterteilung von $\overline{\Delta^n}$, weg von $\overline{\Lambda_i^n}$; und zwar so, daß die beiden Simplizes von $\overline{\Delta^n}$, die nicht in $\overline{\Lambda_i^n}$ liegen, wirklich unterteilt sind.

Die Ecken-Numerierung soll dabei so gewählt werden, daß eine Retraktion von $\mathrm{U}(\Delta^n)$ nach $\overline{\Lambda_i^n}$ definiert werden kann. Dazu bekommt der 'Baryzenter' der $(n-1)$-dimensionalen Seite die Nummer i, und der 'Baryzenter' von dem n-Simplex selbst die Nummer $i\frac{1}{2}$ (eine Nummer, die zwischen i und $i+1$ liegt). Es ist klar (oder?), daß mit diesen Vorgaben die gewünschte Retraktion wirklich existiert.

Der Übergang von $\overline{M}_0$ zu $\overline{M}_0'$ besteht in einer Stern-Unterteilung, weg von $\overline{K}_0$. Dazu werden, induktiv, diejenigen Simplizes stellar unterteilt, die über den beiden unterteilten Simplizes in $\overline{\Delta^n}$ liegen; nennen wir diese beiden Simplizes A_1 und A_2.

Wenn B ein solches Simplex bezeichnet, dann ist bei der Unterteilung von B auf einige Dinge besonders zu achten: Bei der Wahl des Isomorphismus

$$\mathrm{Real}(B) \quad \cong \quad \mathrm{Real}(\,\mathrm{Unt}(B)\,)$$

ist der für die Unterteilung verwendete (Kegel-) Punkt in $\mathrm{Real}(B)$ so zu wählen, daß er über dem entsprechenden Punkt in $\mathrm{Real}(A_1)$ bzw. $\mathrm{Real}(A_2)$ liegt. Wie oben angedeutet, so wird man für den Kegelpunkt in A_j den Baryzenter genommen haben. Es wird aber im allgemeinen *nicht* möglich sein, für den darüber liegenden Punkt in B ebenfalls den Baryzenter zu nehmen. [Zum Beispiel, wenn man ein 2-Simplex affin und eckenerhaltend auf ein 1-Simplex abbildet, so ist der Baryzenter von dem 2-Simplex nicht enthalten im Urbild von dem Baryzenter vom 1-Simplex.] Man wird sich damit begnügen müssen, *irgendeinen* inneren Punkt von B in diesem Urbild zu nehmen. Es ist klar (oder?), daß es einen solchen Punkt gibt: das Urbild ist (nicht leer und) isomorph zu einem Produkt von Simplizes; nämlich isomorph zum Produkt derjenigen Simplizes in B, die die Urbilder der Ecken von A_j sind.

Schließlich muß man auch noch darauf achten, daß die Nummer für die neue Ecke geeignet gewählt wird. $\square$

Zusatz S. 61

Die in der letzten Zeile auf S. 61 aufgestellte Behauptung bedarf einer Rechtfertigung.

Denn einerseits soll das anzuheftende M_0 ja modifiziert werden zu M_0' (durch Sternunterteilung, weg von K_0). Andererseits hat man keinen Grund zu der Annahme, daß die Anhefte-Abbildung

$$(M \times_{Y^+} Y) \longleftarrow K_0$$

injektiv ist. Deshalb ist es nicht selbstverständlich, daß das resultierende

$$M' \ = \ (M \times_{Y^+} Y) \cup_{K_0} M_0' \ .$$

tatsächlich nicht-singulär ist.

Um zu sehen, daß das Problem nicht wirklich auftritt, überlegen wir uns, daß das verwendete M_0 (also der ominöse Pullback $M \times_{Y^+} \Delta^n$) auch durch etwas anderes, kleineres ersetzt werden könnte.

In $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ gibt es genau zwei nicht-ausgeartete Simplizes, die nicht in Y liegen. Diese beiden kommen von Δ^n, es sind der Erzeuger von Δ^n und der von dessen i-ter Seite.

Wir betrachten diejenigen Simplizes in M, die unter der Abbildung $M \to Y^+$ *nicht* nach Y abbilden. Ein solches Simplex bildet dann ab auf eines, das über einem der beiden genannten Simplizes liegt (d.h. davon eine Ausartung ist). Und die Abbildung von einem solchen Simplex *liftet* (*in eindeutiger Weise*) zu einer Abbildung nach Δ^n.

Wenn also N_0 definiert wird als die von diesen Simplizes erzeugte Unter-simpliziale-Menge von M (bzw. als die von den nicht-ausgearteten unter den genannten Simplizes erzeugte simpliziale Menge — das läuft natürlich auf dasselbe hinaus), so liftet die Abbildung $N_0 \to Y^+$ zu einer Abbildung $N_0 \to \Delta^n$. Das bedeutet, daß die Inklusion $N_0 \to M$ liftet zu einer Inklusion in den Pullback, $N_0 \to M_0$.

Wir können nun M_0 ersetzen durch die Unter-simpliziale-Menge N_0. Das Problem ist dann nicht mehr da, da die Anhefte-Abbildung für N_0,

$$(M \times_{Y^+} Y) \longleftarrow K_0 \cap N_0$$

eine *injektive* Abbildung ist.

Wir sehen aber auch, im Nachhinein, daß es vorher ein Problem nicht wirklich gab. Denn wenn man von der simplizialen Menge M_0 die Sternunterteilung weg von K_0 bildet, so sind von der Konstruktion nur solche Simplizes betroffen, die in N_0 liegen.

Beschreibung simplizialer Homotopien

Es geht hier um eine “kategorielle” Beschreibung simplizialer Homotopien. Unser Interesse daran ist nicht so sehr die große Allgemeinheit, die damit (auch) erreicht wird. Es geht vielmehr darum, in relevanten Fällen eine effiziente Beschreibung von Homotopien zur Verfügung zu haben.

Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Sei A ein Objekt von $\mathcal{D}$. Man definiert, in dieser Situation, eine Kategorie

$$\mathcal{D}/A \ ,$$

die “Kategorie der Objekte in $\mathcal{D}$ über A”. Die Objekte sind die Paare (D, d) :

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D} \quad & (\text{ein Objekt aus } \mathcal{D}), \\ d:\ D \to A \quad & (\text{ein Morphismus in } \mathcal{D} \text{ zu dem ausgewählten Objekt } A) \ . \end{aligned}$$

Und ein Morphismus in $\mathcal{D}/A$, von (D_0, d_0) zu (D_1, d_1), ist ein Morphismus

$$D_0 \xrightarrow{f} D_1$$

in $\mathcal{D}$, der mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist. Das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \xrightarrow{f} & D_1 \\ {\scriptstyle d_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d_1} \\ A & \xrightarrow[=]{} & A \end{array}$$

Für unsere gegenwärtigen Zwecke benötigen wir von dieser Begriffsbildung den Fall, wo $\mathcal{D}$ die Kategorie Δ der geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, $[2]$, … ,

$$[n] \ = \ \{\, 0 < 1 < \cdots < n \,\} \ ,$$

und ihrer schwach monotonen Abbildungen ist; und A das spezielle Objekt

$$[1]$$

in Δ.

Die Objekte der Kategorie $\Delta/[1]$ sind also die Paare $(\,[n]\,, a)$, bestehend aus einer geordneten Menge $[n]$ und einer schwach monotonen Abbildung $a : [n] \to [1]$. Und ein Morphismus in $\Delta/[1]$, von $(\,[n_0]\,, a_0)$ zu $(\,[n_1]\,, a_1)$, ist eine schwach monotone Abbildung $[n_0] \to [n_1]$, die mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist.

Es gibt eine offensichtliche "Vergiß"-Abbildung von $\Delta/[1]$ zu Δ. Wir bezeichnen diesen Funktor mit π; also

$$\pi : \ \Delta/[1] \longrightarrow \Delta \ , \qquad ([n], a) \longmapsto [n] \ .$$

Umgekehrt gibt es auch zwei ebenso offensichtliche Abbildungen von Δ zu $\Delta/[1]$,

$$\begin{aligned} \iota_0 : \ \Delta &\longrightarrow \Delta/[1] \\ [n] &\longmapsto ([n], \text{‘0’}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \iota_1 : \ \Delta &\longrightarrow \Delta/[1] \\ [n] &\longmapsto ([n], \text{‘1’}) \ , \end{aligned}$$

wo ‘0’ (bzw. ‘1’) die triviale Abbildung $[n] \to [1]$ mit Wert 0 (bzw. 1) bezeichnet.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein *simpliziales Objekt* in $\mathcal{C}$ ist, nach Definition, ein Funktor

$$X : \ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C} \ , \qquad [n] \longmapsto X_n \ .$$

Die simplizialen Objekte in $\mathcal{C}$ bilden ihrerseits eine Kategorie: eine Abbildung von X zu Y ist (nach Definition) eine natürliche Transformation von Funktoren.

Wenn X ein simpliziales Objekt in $\mathcal{C}$ ist, so bezeichnen wir mit X^* den Funktor von $(\Delta/[1])^{\mathrm{op}}$ zu $\mathcal{C}$, der definiert ist als die Zusammensetzung

$$(\Delta/[1])^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \pi\ } \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ X\ } \mathcal{C} \ .$$

Definition. Seien X und Y simpliziale Objekte in $\mathcal{C}$. Eine *simpliziale Homotopie*, von Abbildungen von X zu Y, ist eine natürliche Transformation von Funktoren $X^* \to Y^*$.

Naturgemäß werden wir erwarten, daß zu einer Homotopie zwei Abbildungen von X zu Y gehören: eine Abbildung f_0, wo die Homotopie ‘startet’, und eine andere, f_1, wo sie ‘aufhört’. Das ist auch der Fall:

Wir bekommen die Abbildung f_0 über die Bemerkung, daß der zusammengesetzte Funktor

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \iota_0\ } (\Delta/[1])^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \pi\ } \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ X\ } \mathcal{C} \ .$$

wieder X ist (da $\pi \circ \iota_0 = \mathrm{Id}_\Delta$); daß demgemäß die natürliche Transformation von X^* zu Y^*, per Zurückziehen entlang ι_0, eine natürliche Transformation von X zu Y induziert.

Ähnlich bekommen wir f_1 unter Zuhilfenahme von $\iota_1 : \Delta^{\mathrm{op}} \to (\Delta/[1])^{\mathrm{op}}$.

Satz. *Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen ist, dann ist "simpliziale Homotopie" der übliche Begriff: eine simpliziale Homotopie von f_0 zu f_1 entspricht einer Abbildung $F : X \times \Delta^1 \to Y$, die an ihren ‘Enden’ auf f_0 und f_1 einschränkt.*

Beweis. Eine solche Abbildung F ist eine natürliche Transformation; also ein kompatibles System von Abbildungen, indiziert durch die $[n]$ aus Δ^{op},

$$X_n \times \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1]) \ = \ X_n \times (\Delta^1)_n \ \cong \ (X \times \Delta^1)_n \ \longrightarrow \ Y_n \ .$$

Das ist aber dasselbe wie ein kompatibles System von Abbildungen

$$X_n \longrightarrow Y_n$$

indiziert durch die $([n], \alpha)$ aus $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$. Die Menge $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$ ist aber auch die Menge der Objekte von $(\Delta/[1])^{\mathrm{op}}$. Eine natürliche Transformation von X^* zu Y^* ist also ebenfalls ein kompatibles System von Abbilungen

$$X_n \longrightarrow Y_n$$

indiziert durch $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$.

[Natürlich sollten wir hier im Prinzip nachprüfen, daß “kompatibel” in den beiden Fällen wirklich dasselbe bedeutet. Auf diese Nachprüfung paßt die Charakterisierung “La preuve se fait par l’âne qui trotte”: man schreibt die Sachen aus und sieht, daß es wirklich so ist. Wir lassen das hier weg.]

Wir notieren noch, daß die Restriktion auf den ‘Anfang’ aus der Abbildung F resultiert durch die Einschränkung entlang der Inklusion der Ecke Nr. 0. Wenn man die Inklusion schreibt als

$$\Delta^0 \longrightarrow \Delta^1 \ , \quad [n] \longmapsto ([n], \text{‘}0\text{’}) \ ,$$

so ergibt sich die obige Beschreibung der Abbildung f_0. □

Bemerkung. Für den Beweis des Satzes gibt es noch eine etwas andere Betrachtungsweise, die hier zumindest angedeutet werden soll.

Einer simplizialen Menge Z kann man eine Kategorie $\mathrm{simp}(Z)$ zuordnen. Die Objekte dieser Kategorie sind die Paare

$$([n], z) \ , \quad z \in Z_n \ .$$

Und ein Morphismus in $\mathrm{simp}(Z)$, von $([n_0], z_0)$ zu $([n_1], z_1)$, ist eine schwach monotone Abbildung $\alpha\colon [n_0] \to [n_1]$ (also eine Abbildung α in Δ von $[n_0]$ zu $[n_1]$) mit der Eigenschaft, daß $z_0 = \alpha^*(z_1)$.

Wenn W eine simpliziale Menge über Z ist (ein Paar bestehend aus der simplizialen Menge W und einer Abbildung $f: W \to Z$), so bekommt man über die “Urbild”-Funktion einen Funktor

$$\mathrm{simp}(Z)^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \ .$$

Da die Konstruktion mit Abbildungen verträglich ist, bekommt man so einen Funktor

$$(\text{simpliziale Mengen über } Z) \longrightarrow (\text{mengenwertige Funktoren auf } \mathrm{simp}(Z)^{\mathrm{op}}) \ .$$

Dieser Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Insbesondere bekommt man so eine Äquivalenz von der Kategorie der simplizialen Mengen über Δ^1 zu der Kategorie der mengenwertigen kontravarianten Funktoren auf

$$\mathrm{simp}(\Delta^1) \ \cong \ \Delta/[1] \ .$$

Ist X eine simpliziale Menge, so entspricht unter der Äquivalenz die simpliziale Menge $X \times \Delta^1$ (aufgefaßt als simpliziale Menge über Δ^1) dem oben mit X^* bezeichneten Funktor $(\Delta/[1])^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen})$. □

Definition. Sei $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ ein simpliziales Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Der "Wege-Raum" von X ist definiert als das simpliziale Objekt, ebenfalls in $\mathcal{C}$, das aus X entsteht als der zusammengesetzte Funktor

$$PX : \quad \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\text{shift}} \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{C} \quad , \qquad (PX)_n \;=\; X_{n+1} \;\; .$$

Dabei ist 'shift' der Funktor $\Delta \to \Delta$, der $[n]$ auf $[n{+}1]$ abbildet; und der einer schwach monotonen Abbildung $a : [m] \to [n]$ die Abbildung $a' : [m{+}1] \to [n{+}1]$ zuordnet, die definiert ist durch $a'(0) = 0$ und $a'(i{+}1) = a(i) + 1$.

Die Tatsache, daß ein Wege-Raum als einen Deformationsretrakt den Raum der trivialen Wege besitzt, hat hier ein Analogon:

Satz. *PX ist simplizial-homotopie-äquivalent zu dem* (trivialen) *simplizialen Objekt* $[n] \mapsto X_0$.

Beispiel. Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen ist, so ist das triviale simpliziale Objekt $[n] \mapsto X_0$ eine 'diskrete' simpliziale Menge. Wenn also X eine simpliziale Menge ist, die *reduziert* ist (das heißt, es gibt nur ein einziges 0-Simplex in X), dann ist $[n] \mapsto X_0$ isomorph zum '0-Simplex', Δ^0. Damit ist PX *zusammenziehbar* in dem Fall.

Beweis des Satzes. Die Abbildung $[0] \to [n{+}1]$, $0 \mapsto 0$, gibt eine Abbildung $(PX)_n \to (X_0)_n$. Für variables n sind diese Abbildungen mit den Struktur-Abbildungen verträglich (das liegt insbesondere daran, daß die 0-te Rand-Abbildung von X nicht in PX verwendet wird). Man hat also eine Abbildung von simplizialen Objekten

$$r : PX \longrightarrow X_0 \;.$$

Umgekehrt hat man auch eine Abbildung in der anderen Richtung, $s : X_0 \to PX$; sie ist gegeben durch die Abbildungen $X_0 \to X_{n+1}$, induziert von $[n{+}1] \to [0]$.

Es ist klar (oder?), daß die Komposition $r \circ s$ gleich der identischen Abbildung auf X_0 ist. Die andere Komposition, $s \circ r$, ist homotop zur identischen Abbildung auf PX : Die gewünschte Homotopie ist gegeben durch die natürliche Transformation

$$(\, a : \; [n] \to [1] \,) \;\longmapsto\; (\, \phi_a^* : X_{n+1} \longrightarrow X_{n+1} \,) \;,$$

die induziert ist von

$$(\, a : \; [n] \to [1] \,) \;\longmapsto\; (\, \phi_a : [n{+}1] \longrightarrow [n{+}1] \,)$$

(eine natürliche Transformation kovarianter Funktoren $\Delta/[1] \to \Delta$,
nämlich von dem Funktor " $\text{shift} \circ \pi$ " zu sich selbst)

wo $\phi_a(0) = 0$ und

$$\phi_a(j{+}1) \quad = \quad \begin{cases} j{+}1 \,, & \text{wenn} \;\; a(j) \;=\; 1 \\ 0 \,, & \text{wenn} \;\; a(j) \;=\; 0 \;. \end{cases}$$

$\square$

Nerven von Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.[1] Man ordnet ihr eine simpliziale Menge zu, den sogenannten "Nerv" von $\mathcal{C}$. Diese simpliziale Menge wird mit $N\mathcal{C}$ bezeichnet.

Die simpliziale Menge $N\mathcal{C}$ ist so gemacht, daß die 0-Simplizes den Objekten von $\mathcal{C}$ entsprechen, und die 1-Simplizes den Morphismen. $N\mathcal{C}_0$ wird also die Menge der Objekte von $\mathcal{C}$ sein; und $N\mathcal{C}_1$ die Menge der Morphismen.

Allgemein ist $N\mathcal{C}_n$, die Menge der n-Simplizes, definiert als die Menge der Diagramme "vom Typ $[n]$" in $\mathcal{C}$. Ein n-Simplex entspricht also einer Folge in $\mathcal{C}$:

$$c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_{n-1} \to c_n$$

Mit Hilfe von einem kleinen Klimmzug kann man die Dinge noch ein wenig prägnanter ausdrücken. Nämlich die geordnete Menge $[n]$ kann ihrerseits als eine Kategorie angesehen werden. Die Objekte von $[n]$ sind $0, 1, \ldots, n$; und die Sache mit den Morphismen ist wie folgt geregelt: zu je zwei Objekten i und j in der Kategorie $[n]$ gibt es höchstens einen Morphismus von i zu j; und zwar gibt es einen solchen Morphismus genau dann, wenn $i \leq j$. — Nach dieser Sprachschöpfung können wir nun sagen, daß ein n-Simplex von $N\mathcal{C}$ einem Funktor $[n] \to \mathcal{C}$ entspricht.

Eine schwach monotone Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ (also ein Morphismus in der Buchführungs-Kategorie Δ) wird zu einem 'Funktor' $[m] \to [n]$. Die Struktur-Abbildungen in der simplizialen Menge $N\mathcal{C}$ können deshalb über die Zusammensetzung von Funktoren definiert werden: $\alpha^* : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_m$ ist die Abbildung:

$$\Big(\ [n] \xrightarrow{f} \mathcal{C} \ \Big) \quad \longmapsto \quad \Big(\ \alpha^*(f) = f \circ \alpha : \quad [m] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{f} \mathcal{C} \ \Big)$$

Die Konstruktion $\mathcal{C} \longmapsto N\mathcal{C}$ hat einige bemerkenswerte Eigenschaften:

[1] Um Verwirrungen mit der Terminologie zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß $\mathcal{C}$ eine "kleine" Kategorie ist; daß also die Objekte von $\mathcal{C}$ eine "Menge" bilden (und nicht nur eine "Klasse"). Diese Art von Unterscheidung hat ihren Ursprung in den 'Grundlagen' der Mathematik; der Unterschied zwischen den Termen erklärt sich wie folgt. Wenn man versucht, Mathematik axiomatisch zu begründen, so muß man ja die Regeln festlegen. Insbesondere muß man sich darauf festlegen, ob bei einer *Menge* es immer eine erlaubte Operation sein soll, die Potenzmenge davon zu bilden. Ein unkritisches "ja" an dieser Stelle führt sehr schnell zu absurden Konsequenzen, wie man an Beispielen wie der "Menge aller Mengen" sieht (was wäre von dem Ding die Potenzmenge??). Ein relativ einfacher Ausweg aus dem Dilemma ist es, auch 'Mengen' zu benutzen, bei denen man ausdrücklich darauf verzichtet, etwa die Potenzmenge jemals bilden zu wollen; die nennt man dann, zur Unterscheidung, "Klassen". — Die Angelegenheit wurde angesprochen in der Hoffnung, auf die Weise Verwirrung zu vermeiden. Wir wollen sie jetzt ganz schnell vergessen.

Bemerkung. *Die Kategorie $\mathcal{C}$ ist aus der zugeordneten simplizialen Menge $N\mathcal{C}$ rekonstruierbar*: Die Menge der Objekte und die Menge der Morphismen sind durch die beiden Mengen $N\mathcal{C}_0$ und $N\mathcal{C}_1$ gegeben. Die (Ausartungs-)Abbildung:

$$N\mathcal{C}_0 \longrightarrow N\mathcal{C}_1 \ , \quad c_0 \ \longmapsto \ \left(c_0 \xrightarrow{=} c_0 \right)$$

gibt den "identischen Morphismus" eines Objekts c_0. Die beiden Rand-Abbildungen:

$$N\mathcal{C}_1 \longrightarrow N\mathcal{C}_0 \ , \quad \left(c_0 \xrightarrow{f} c_1 \right) \ \longmapsto \ c_0 \ , \ \text{bzw.} \ \longmapsto \ c_1$$

geben "Quelle" und "Ziel" von einem Morphismus f. Schließlich, zu zwei Morphismen $c_0 \xrightarrow{g_1} c_1$ und $c_1 \xrightarrow{g_2} c_2$ (Ziel(g_1) = Quelle(g_2)!) gibt es ein (und nur ein) 2-Simplex

$$c_0 \xrightarrow{g_1} c_1 \xrightarrow{g_2} c_2$$

so daß die beiden vorgegebenen Morphismen davon die Bilder sind unter den Rand-Abbildungen

$$N\mathcal{C}_2 \longrightarrow N\mathcal{C}_1$$

mit den Nummern 0 (Weglassen von c_0) und 2 (Weglassen von c_2). Die Rand-Abbildung mit der Nummer 1 entspricht dem Weglassen von c_1; was darauf hinausläuft, daß das resultierende Element von $N\mathcal{C}_1$ dem zusammengesetzten Morphismus $c_0 \xrightarrow{g_2 \circ g_1} c_2$ entspricht. — Ansonsten sind in den simplizialen Identitäten noch einige Eigenschaften kodifiziert, die eine Kategorie nun einmal hat: Die Identität $d_0 s_0 = \mathrm{Id} = d_1 s_0$ für Abbildungen $N\mathcal{C}_0 \to N\mathcal{C}_1 \to N\mathcal{C}_0$ drückt die Tatsache aus, daß Quelle oder Ziel von einem identischen Morphismus wieder das Ausgangs-Objekt ergeben. Die Identität $d_1 d_2 = d_1 d_1$ für Abbildungen $N\mathcal{C}_3 \to N\mathcal{C}_2 \to N\mathcal{C}_1$ ist das Assoziativitätsgesetz für die Komposition der Morphismen in $\mathcal{C}$.

Beispiel. *Für die 'Kategorie' $[k]$ ist $N[k] = \Delta^k$*: Denn ein 'Funktor' $[n] \to [k]$ ist dasselbe wie eine schwach monotone Abbildung. Folglich ist $(N[k])_n \approx \mathrm{Hom}_\Delta([n],[k])$ in einer Weise, die mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist.

Bemerkung. *Der Funktor*

$$(\text{Kategorien}) \ \longrightarrow \ (\text{simpliziale Mengen}) \ , \quad \mathcal{C} \longmapsto N\mathcal{C} \ ,$$

ist mit Produkten verträglich: Denn im Falle von einer Produkt-Kategorie $\mathcal{C}' \times \mathcal{C}''$ hat man eine natürliche Abbildung $N(\mathcal{C}' \times \mathcal{C}'') \longrightarrow N\mathcal{C}' \times N\mathcal{C}''$. Diese Abbildung ist in der Dimension n gegeben durch die Abbildung von Mengen von Funktoren:

$$\mathrm{Fun}([n], \mathcal{C}' \times \mathcal{C}'') \ \longrightarrow \ \mathrm{Fun}([n], \mathcal{C}') \times \mathrm{Fun}([n], \mathcal{C}'')$$

Es ist klar (oder?), daß letztere Abbildung ein Isomorphismus ist.

Bemerkung. Folgendes ist von geradezu phantastischer Wichtigkeit (wie sich herausstellt). Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Eine *natürliche Transformation* von Funktoren von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{D}$ kann ihrerseits beschrieben werden als ein Funktor von (anderen) Kategorien; nämlich als ein Funktor $\mathcal{C} \times [1] \longrightarrow \mathcal{D}$. Per Übergang zu Nerven resultiert daraus eine Abbildung

$$N\mathcal{C} \times \Delta^1 \cong N(\mathcal{C} \times [1]) \ \longrightarrow \ N\mathcal{D} \ ;$$

also eine "simpliziale Homotopie" von Abbildungen von $N\mathcal{C}$ zu $N\mathcal{D}$.

Beispiel. Sei G eine Gruppe. Bezeichne $<G>$ die Kategorie mit einem einzigen Objekt $*$ und mit

$$\mathrm{Hom}_{<G>}(*,*) = G \ .$$

Es ist dann

$$(N{<}G{>})_n \;=\; \left\{ * \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} * \ \ldots \ * \xrightarrow{g_n} * \right\} \;\approx\; G^n$$

mit Rand-Abbildungen:

$$d_i(g_1, g_2, \ldots, g_n) \;=\; \begin{cases} (g_2, \ldots, g_n) & \text{für } \ 0 = i \\ (g_1, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_n) & \text{für } \ 0 < i < n \\ (g_1, \ldots, g_{n-1}) & \text{für } \qquad i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen:

$$s_j(g_1, \ldots, g_{n-1}) \;=\; (g_1, \ldots, g_j, 1, g_{j+1}, \ldots, g_{n-1}) \ , \qquad 0 \leq j \leq n{-}1 \ .$$

Bemerkung. Wenn G eine *kommutative* Gruppe ist, dann sind die Rand- und Ausartungs-Abbildungen von $N{<}G{>}$ Gruppenhomomorphismen; es ist klar (oder?), daß die übrigen Struktur-Abbildungen in dem Fall ebenfalls Gruppenhomomorphismen sind. Im kommutativen Fall ist also $N{<}G{>}$ eine simpliziale *Gruppe* (und zwar eine simpliziale abelsche Gruppe).

Beispiel. Sei G eine Gruppe, sei $f \in G$. Es gibt einen (und nur einen) Funktor

$$\tau_f : \ {<}G{>} \times [1] \longrightarrow {<}G{>} \ , \qquad \tau_f(g\,,0) = g \ , \quad \tau_f(*\,, 0{\to}1) = f \ .$$

Erklärungen dazu: Die Kategorie $<G> \times [1]$ hat die beiden Objekte $(*,0)$ und $(*,1)$.

Die Kategorie $<G>\times[1]$ enthält zwei isomorphe Kopien von $<G>$, nämlich $<G>\times 0$ und $<G> \times 1$. Die Morphismen in $<G> \times 0$ werden mit $(g,0)$ bezeichnet.

$(*, 0{\to}1)$ bezeichnet den Morphismus von $(*,0)$ zu $(*,1)$, dessen erste Komponente das Eins-Element von G ist.

Die restlichen Daten des obigen Funktors sind erzwungen als $\tau_f(g\,,1) = f^{-1}\,g\,f$; das ergibt sich aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \tau_f(*\,,0) \arrow[r, "g \,=\, \tau_f(g\,,0)"] \arrow[d, "f"'] & \tau_f(*\,,0) \arrow[d, "f"] \\ \tau_f(*\,,1) \arrow[r, "f^{-1}\,g\,f"'] & \tau_f(*\,,1) \end{tikzcd}$$

(Komposition in der Gruppe wird hier von links nach rechts gelesen).

Der Funktor beschreibt eine natürliche Transformation (und damit, nach Übergang zum Nerv, eine Homotopie) von der identischen Abbildung auf $<G>$ zu dem durch f gegeben "inneren Automorphismus". Der innere Automorphismus wird die Identität sein, wenn G kommutativ ist (oder, allgemeiner: wenn f zentrales Element ist). Die natürliche Transformation ist aber nur dann die Identität, wenn f das Eins-Element der Gruppe ist.

Die Bar-Konstruktion

Der Name für die Konstruktion kommt daher, so sagt eine Theorie, daß zwei Männer diese Konstruktion in einer Bar erfunden haben.

Eine andere Theorie sagt, der Name komme daher, daß Eilenberg und MacLane (das waren die beiden Männer) bei der Gruppen-Homologie eine Notation verwendeten, wo Tupel von Gruppen-Elementen vorkamen; und verschiedene Elemente waren jeweils durch einen Strich (englisch: bar) voneinander getrennt — etwa so: $(g_1|g_2|\ldots|g_n)$.

Definition. Sei G eine Gruppe. Es bezeichne BG die simpliziale Menge

$$BG : \ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \ , \qquad [n] \longmapsto BG_n := G^n \ ,$$

mit Rand-Abbildungen $d_i : BG_n \to BG_{n-1}$,

$$d_i(\, g_1 \,|\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) \quad = \quad \begin{cases} (\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } \ 0 = i \\ (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_i \cdot g_{i+1} \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } \ 0 < i < n \\ (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) & \text{für } \qquad i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen $s_i : BG_{n-1} \to BG_n$,

$$s_j(\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) \quad = \quad (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_j \,|\, 1 \,|\, g_{j+1} \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) \quad , \qquad 0 \le j \le n{-}1$$

(wo “ 1 ” das Eins-Element von G bezeichnet).

Bemerkung. Es ist klar (oder?), daß die simpliziale Menge BG dasselbe ist wie die früher mit $N{<}G{>}$ bezeichnete simpliziale Menge: der *Nerv* der Kategorie ${<}G{>}$; wo eben ${<}G{>}$ die Kategorie mit einem einzigen Objekt $*$ ist und mit Morphismen-Menge

$$\mathrm{Hom}_{<G>}(*, *) = G \ .$$

□

Es sei erinnert an den Begriff des *prinzipalen G-Bündels*. Es handelt sich dabei um eine simpliziale Menge E zusammen mit einer Operation von G auf E, die *frei* ist. Es folgt daraus, wie wir wissen, daß die Projektion von E auf E/G (die simpliziale Menge der Bahnen) ein *lokal-triviales Bündel* ist.

Satz. *Es gibt ein G-Prinzipalbündel EG, mit Bahnenraum $(EG)/G \approx BG$, derart, daß EG ‘zusammenziehbar’ ist im schwachen Sinn* (das heißt, die geometrische Realisierung $|EG|$ ist homotopie-äquivalent zum ein-punktigen Raum).

Korollar. *Die geometrische Realisierung $|BG|$ ist ein Eilenberg-MacLane Raum für die Dimension 1, mit Fundamentalgruppe G.*

Beweis. $EG \to BG$ ist ein lokal-triviales Bündel, mit Faser G; die geometrische Realisierung $|EG| \to |BG|$ ist deshalb eine Serre-Faserung. Da $|EG|$ zusammenziehbar ist, bedeutet dies, daß der 'Schleifenraum' von $|BG|$ homotopie-äquivalent ist zu dem (diskreten) Raum $|G|$. Also

$$\pi_n|BG| \;\approx\; \pi_{n-1}|G| \;\approx\; \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } n > 1\,; \\ G\,, & \text{wenn } n = 1\,. \end{cases}$$

□

Korollar. *Die Homologie der Gruppe G* (mit ganz-zahligen Koeffizienten) *ist berechenbar aus dem Kettenkomplex, wo die n-te Kettengruppe die freie abelsche Gruppe ist, erzeugt von den*

$$(\, g_1 \,|\, g_2 \,|\, \dots \,|\, g_n \,) \;\in\; G^n \;;$$

und wo die Rand-Abbildung gegeben ist durch $d \;=\; \sum (-1)^i\, d_i$ (mit d_i wie oben).

Beweis. Die *Homologie der Gruppe G* ist definiert als die Homologie eines CW-Komplexes, der ein Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist, mit Fundamentalgruppe G. Dies ist wohl-definiert, da, wie wir wissen, ein solcher Eilenberg-MacLane-Raum eindeutig bestimmt ist (bis auf Homotopie-Äquivalenz). Andererseits kann, wie wir wissen, die Homologie des Raumes $|BG|$ auch berechnet werden als die Homologie der simplizialen Menge BG. Diese resultiert, nach Definition, aus der von dieser simplizialen Menge erzeugten simplizialen abelschen Gruppe durch Übergang zum Kettenkomplex. Genau dieser Kettenkomplex ist im Korollar beschrieben. □

Beweis des Satzes. Die simpliziale Menge EG wird in ähnlich expliziter Weise definiert wie BG auch. Nämlich es bezeichne EG die simpliziale Menge

$$EG:\; \Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Mengen})\;, \qquad [n] \;\longmapsto\; EG_n \;:=\; G^{n+1}\;,$$

mit Rand-Abbildungen $d_i : EG_n \to EG_{n-1}$,

$$d_i(\, g_0 \mid g_1 \,|\, g_2 \,|\, \dots \,|\, g_n \,) \;=\; \begin{cases} (\, g_0 \cdot g_1 \mid g_2 \,|\, \dots \,|\, g_n \,) & \text{für } 0 = i \\ (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|\, g_i \cdot g_{i+1} \,|\, \dots \,|\, g_n \,) & \text{für } 0 < i < n \\ (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|\, g_{n-1} \,) & \text{für } \quad i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen $s_i : EG_{n-1} \to EG_n$,

$$s_j(\, g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|\, g_{n-1} \,) \;=\; (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|\, g_j \mid 1 \,|\, g_{j+1} \,|\, \dots \,|\, g_{n-1} \,)\;, \quad 0 \le j \le n{-}1\;.$$

Die Gruppe G operiert auf EG, von links, durch Manipulation des (neu hinzugekommenen) " g_0 ". Nämlich $G \times EG_n \to EG_n$ ist die Abbildung

$$(\, g \;,\; (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|g_n \,)\,) \;\longmapsto\; (\, g \cdot g_0 \mid g_1 \,|\, \dots \,|g_n \,)\;.$$

Es ist klar (oder?), daß die Operation mit der simplizialen Struktur verträglich ist; und daß sie *frei* ist. Der Übergang zum Bahnenraum läuft nun einfach darauf hinaus, daß das neu hinzugekommene " g_0 " wieder weg gelassen wird; es ist also auch klar, daß die simpliziale Menge der Bahnen gleich BG ist.

Es bleibt zu zeigen, daß EG im schwachen Sinne 'zusammenziehbar' ist. Dazu zeigen wir, daß EG sogar im *starken* Sinne zusammenziehbar ist; nämlich, daß die identische Abbildung auf EG simplizial homotop ist zu einer trivialen Abbildung. Wir geben dafür drei Beweise — oder, wenn man so will: drei verschiedene (oder wenig verschiedene) Formulierungen von ein- und demselben Argument. (Selbstverständlich würde es auch reichen, von diesen drei Formulierungen nur eine einzige zu geben.)

1. Beweis für $EG \simeq *$. Wenn man den 'kombinatorischen Wegeraum' der simplizialen Menge BG bildet,

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\text{shift}} \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{BG} (\text{Mengen}) \quad , \qquad [n] \longmapsto BG_{n+1} \ ,$$

so erhält man gerade die simpliziale Menge EG. Es folgt (wie wir wissen), daß EG simplizial homotopie-äquivalent ist zu dem trivialen simplizialen Objekt $[n] \mapsto BG_0$.

2. Beweis für $EG \simeq *$. Wir zeigen, daß EG ein 'azyklischer Kan-Komplex' ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß jede Abbildung $\partial\Delta^n \to EG$ fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung $\Delta^n \to EG$.

Für $n = 0$ ist dafür nicht viel zu zeigen: es gibt mindestens eine Abbildung von Δ^0 zu EG, da EG nicht-leer ist.

Für $n > 0$ haben Δ^n und $\partial\Delta^n$ dasselbe 0-Skelett. Wir werden deshalb wissen, daß (für $n > 0$) die Einschränkungs-Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, EG) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\partial\Delta^n, EG)$$

bijektiv ist (und insbesondere deshalb surjektiv), sobald wir wissen, daß (für alle n) die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, EG) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sk}_0(\Delta^n), EG)$$

bijektiv ist; das heißt, daß ein Simplex in EG bestimmt ist (und bestimmbar ist) durch die Menge seiner Ecken. Das ist aber klar. Zum Beispiel einem 2-Simplex $(g_0 \,|\, g_1 \,|\, g_2)$ entspricht die Eckenmenge (in $(EG_0)^3 \;=\; G^3$):

$$(\text{0-te Ecke}, \text{1-te Ecke}, \text{2-te Ecke}) \;=\; (\,g_0 \,,\, g_0 \cdot g_1 \,,\, g_0 \cdot g_1 \cdot g_2\,) \ .$$

3. Beweis für $EG \simeq *$. EG ist selbst der Nerv einer Kategorie; nennen wir diese eG. Die Menge der Objekte von eG ist die unterliegende Menge von G. Und ein Morphismus in eG, von g_0 zu g_0', ist ein Gruppenelement g mit der Eigenschaft, daß $g_0 \circ g \;=\; g_0'$. Offenbar gibt es ein solches Gruppenelement, und zwar genau eines. Die Eindeutigkeit der Morphismen bedeutet, daß jedes Objekt in der Kategorie eG ein *terminales* Objekt ist. Man hat deshalb eine natürliche Transformation vom identischen Funktor zu einem konstanten Funktor (nämlich dem konstanten Funktor zu einem ausgewählten terminalen Objekt); folglich hat man auch, per 'Nerv', eine Homotopie von der identischen Abbildung auf EG zu einer konstanten Abbildung. $\square$

Zusatz: S. 72

Warum wir wissen: Eine simpliziale Menge und ihre geometrische Realisierung haben dieselbe Homologie.

Die Homologie einer simplizialen Menge X berechnet sich (nach Definition) aus der simplizialen abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X]$; über den zugeordneten Kettenkomplex. Die Homologie des Raumes $|X|$ ist definiert als diejenige der simplizialen Menge $S|X|$ (singulärer Komplex). Die hier zur Rede stehende Behauptung ist, daß die kanonische Inklusion $X \to S|X|$ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert.

Sei $X \longmapsto \Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$ die Konstruktion "iteriertes Trichterfüllen", die aus dem X einen Kan-Komplex macht. Über die Inklusion $X \to X'$, wo $X' = \Psi(X)$, bekommt man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S|X| \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X' & \longrightarrow & S|X'| \end{array}$$

und wir werden wissen, daß der obere Pfeil einen Isomorphimus auf der Homologie induziert, sobald wir das für die drei anderen Pfeile wissen.

Rechter Pfeil: $|X| \to |X'|$, als Homotopie-Äquivalenz topologischer Räume, induziert einen Isomorphismus auf der Homologie.

Unterer Pfeil: $X' \to S|X'|$ ist *simpliziale* Homotopie-Äquivalenz (da X' Kan-Komplex ist) ; und induziert folglich einen Isomorphismus auf der Homologie.

Linker Pfeil: Es ist klar (oder?), daß es genügt, zu zeigen: Wenn Y^+ aus Y durch eine (einzige) Trichter-Füllung entsteht, $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$, dann ist die Inklusion $Y \to Y^+$ ein Isomorphismus auf der Homologie. Oder, äquivalent dazu: die relative Homologie $H_*(Y^+, Y)$ ist *null*.

Die relative Homologie berechnet sich aus der simplizialen abelschen Gruppe

$$\operatorname{coker}(\ \mathbb{Z}[Y] \longrightarrow \mathbb{Z}[Y^+]\ ) \ \cong\ \operatorname{coker}(\ \mathbb{Z}[\Lambda_i^n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\Delta^n]\ ) \ .$$

Wir werden also wissen, daß sie null ist, sobald wir wissen, daß die Inklusion $\Lambda_i^n \to \Delta^n$ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Hinreichend dafür ist es, zu wissen, daß die Inklusion "i-te Ecke"

$$\Delta^0 \longrightarrow \Lambda_i^n \quad , \qquad \Delta^0 \longrightarrow \Delta^n$$

in beiden Fällen einen Deformationsretrakt bezüglich simplizialer Homotopie ergibt. Dazu überlegt man, daß es eine Folge von (zwei) simplizialen Homotopien zwischen der jeweiligen identischen Abbildung und der trivialen Abbildung in die i-te Ecke gibt. [Man kommt mit einer einzigen Homotopie aus, wenn $i = 0$ oder $i = n$; ansonsten benötigt man zwei.]

Bi-simpliziale Mengen, simpliziale Räume

Wir haben eine Situation kennengelernt, wo eine simpliziale Struktur "generiert" wird: aus einer Gruppe entsteht durch die Bar-Konstruktion eine simpliziale Menge.

Wenn in solch einer Situation schon eine simpliziale Struktur da ist, so bekommt man durch die Konstruktion eine *zweite* simpliziale Struktur. In vernünftigen Fällen wird die zweite simpliziale Struktur mit der ersten 'kompatibel' sein. Zum Beispiel ist das so (wie sich herausstellt), wenn man die Bar-Konstruktion auf eine simpliziale Gruppe anwendet.

Zwei simpliziale Strukturen zusammen — und kompatibel — geben das, was wir als eine "bi-simpliziale Struktur" bezeichnen wollen:

Definition. Eine *bisimpliziale Menge* ist ein Funktor:

$$\begin{aligned} X: \quad \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow (\text{Mengen}) \\ ([m] , [n]) &\longmapsto X_{m,n} \end{aligned}$$

Ebenso wie man eine simpliziale Menge interpretieren kann als einen Code für das Zusammenkleben von geometrischen Standard-Simplizes ∇^n,

$$\nabla^n \;=\; \left\{ \, (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_i \geq 0 \,, \;\; \textstyle\sum x_i = 1 \, \right\} \;,$$

so kann man auch eine bisimpliziale Menge interpretieren als einen Code für einen Verklebe-Prozeß — nicht für das Zusammenkleben von Simplizes diesmal, sondern für das von Zusammenkleben von 'Prismen'; wo unter einem *Prisma* das Produkt von zwei Simplizes verstanden sein soll: $\nabla^m \times \nabla^n$.

Man definiert nämlich die *geometrische Realisierung* einer bisimplizialen Menge X wie folgt. Für jedes (m,n) und für jedes Element von $X_{m,n}$ nimmt man ein Prisma $\nabla^m \times \nabla^n$ und tut die alle zusammen; man bildet also die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{m,n} X_{m,n} \;\times\; \nabla^m \times \nabla^n \;\;.$$

Von dieser disjunkten Vereinigung nimmt man den Quotientenraum bezüglich einer Äquivalenzrelation (eine Variante dessen, was wir von der geometrischen Realisierung einer simplizialen Menge her kennen): für die "m–Richtung" hat man die Relation, daß für jede Abbildung $\alpha\colon [m] \to [m']$, für jedes n und jedes $x \in X_{m',n}$, die Abbildung

$$\alpha_* : \;\; \{\alpha^*(x)\} \times \nabla^m \times \nabla^n \;\longrightarrow\; \{x\} \times \nabla^{m'} \times \nabla^n$$

eine Identifizierung werden soll; und für die n–Richtung hat man die analoge Relation.

Wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Kategorien sind, so bezeichne $\mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ die entsprechende Funktorkategorie: die Objekte von $\mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ sind die Funktoren von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{C}$, und die Morphismen sind die natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren. Man hat für Funktorkategorien das "Exponentialgesetz" :

$$\mathrm{Fun}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathrm{Fun}(\,\mathcal{B}\,,\,\mathcal{C}\,)\,) \;\cong\; \mathrm{Fun}(\,\mathcal{A}\times\mathcal{B}\,,\,\mathcal{C}\,)$$

Insbesondere kann eine bisimpliziale Menge deshalb übersetzt werden in einen Funktor (ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der simplizialen Mengen")

$$\Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\;\Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Mengen})\;)\;\;.$$

Und zwar geht das auf zwei Weisen, je nachdem welche der beiden 'simplizialen Richtungen' man als die "erste" ansehen will; die eine der beiden Möglichkeiten ist:

$$[m] \;\longmapsto\; (\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;)\;\;.$$

Für festes m kann man die simpliziale Menge $[n] \mapsto X_{m,n}$ geometrisch realisieren. Da 'geometrische Realisierung' ihrerseits eine funktorielle Konstruktion ist, bekommt man so (wenn m nun wieder als variabel angesehen wird) einen Funktor

$$[m] \;\;\longmapsto\;\; \big|\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;\big|\;\;,$$

das heißt, ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der topologischen Räume" ; oder, wie wir dafür kurz auch sagen wollen, einen "simplizialen Raum".

Der Konstruktion dieses simplizialen Raumes lag eine 'partielle' geometrische Realisierung zugrunde (eben die "Realisierung in der n-Richtung"). Durch einen weiteren Verklebe-Prozeß (die "Realisierung in der m-Richtung") bekommt man daraus die geometrische Realisierung der bisimplizialen Menge in der oben beschriebenen Form. Es ist angebracht, diesen zweiten Verklebe-Prozeß in etwas größerer Allgemeinheit zur Kenntnis zu nehmen:

Für einen *simplizialen Raum*, $[m] \mapsto Y_m$, ist die *geometrische Realisierung* definiert als derjenige Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$\big|\;[m] \mapsto Y_m\;\big| \quad := \quad \coprod_m \, Y_m \times \nabla^m \;\;/\;\;\sim\;\;,$$

wo die Äquivalenzrelation die 'übliche' ist: für jede Abbildung $\alpha\colon\,[m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in \nabla^m$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad\ni\quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad\in\quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Mit dieser Begriffsbildung ist die geometrische Realisierung der bisimplizialen Menge $(\,[m]\,,\,[n]\,) \;\longmapsto\; X_{m,n}$ nunmehr beschreibbar als die 'iterierte' Realisierung:

$$\Big|\;\;[m] \;\;\longmapsto\;\; \big|\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;\big|\;\;\Big|$$

(dabei benutzen wir, insbesondere, daß die beiden Konstruktionen "Bildung eines Quotientenraumes" und "Produkt mit ∇^m" miteinander kompatibel sind).

Beispiel. Seien $[m] \mapsto V_m$ und $[n] \mapsto W_n$ simpliziale Mengen. Wir definieren eine bisimpliziale Menge als das 'Produkt' dieser beiden:

$$([m] , [n]) \longmapsto V_m \times W_n \ .$$

Die partielle Realisierung davon ("Realisierung in n-Richtung") ist der simpliziale Raum

$$[m] \quad \longmapsto \quad \Big| \, [n] \mapsto V_m \times W_n \, \Big| \quad \cong \quad V_m \ \times \ \Big| \, [n] \ \mapsto \ W_n \, \Big| \ .$$

Das heißt, in Dimension m hat man hier das Produkt von der Menge V_m mit dem Raum $\big| \, [n] \ \mapsto \ W_n \, \big|$; einem Raum, der von der Dimension m in gar keiner Weise abhängt. Es folgt, daß die geometrische Realisierung von dem simplizialen Raum

$$[m] \quad \longmapsto \quad V_m \ \times \ \Big| \, [n] \ \mapsto \ W_n \, \Big|$$

isomorph ist zu dem Produkt von dem Raum $\big| \, [n] \mapsto W_n \, \big|$ mit der geometrischen Realisierung von der simplizialen Menge $[m] \mapsto V_m$; jedenfalls folgt das bis auf das übliche technische Detail, daß man ein wenig aufpassen muß, wenn man möchte, daß eine Quotientenraumkonstruktion (wie bei der geometrischen Realisierung von $[m] \ \mapsto \ V_m$) kompatibel sein soll mit der Produktbildung mit einem Raum (wie $\big| \, [n] \ \mapsto \ W_n \, \big|$). — Wie wir wissen, so ist die fragliche Kompatibilität jedenfalls dann gewährleistet, wenn $\big| \, [n] \ \mapsto \ W_n \, \big|$ *kompakt* (oder *lokal-kompakt*) ist; alternativ: auch dann, wenn vereinbart wird, daß "Räume" für unsere Zwecke sämtlich mit der kompakt-erzeugten Topologie versehen sein sollen.

Aufgrund der Diskussion in diesem Beispiel folgt der uns bekannte Satz " $|X \times Y|$ ist isomorph zu $|X| \times |Y|$ " (vorausgesetzt, sagen wir, daß $|Y|$ kompakt ist) aus dem nun folgenden Satz:

Definition. Sei $([m], [n]) \ \mapsto \ X_{m,n}$ eine bisimpliziale Menge. Die *diagonale simpliziale Menge*, $[n] \mapsto X_{n,n}$, ist die Komposition:

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \text{Diagonale}\ } \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \ X\ \ } (\text{Mengen})$$

Satz. *Die geometrische Realisierung einer bisimplizialen Menge* $([m], [n]) \mapsto X_{m,n}$ *ist in natürlicher Weise isomorph zu der geometrischen Realisierung ihrer diagonalen simplizialen Menge* $[n] \mapsto X_{n,n}$.

Beweis (Skizze). Das geht in zwei Schritten. Zunächst prüft man die Behauptung nach in dem Spezialfall des repräsentierbaren Funktors

$$([m] , [n]) \ \longmapsto \ \mathrm{Hom}_{\Delta\times\Delta}(\, ([m] , [n]) \, , \, ([k] , [l]) \,) \ .$$

Dieser Funktor ist dasselbe wie das Produkt von Δ^k und Δ^l, *aufgefaßt als bisimpliziale Menge*. Die geometrische Realisierung davon, im Sinne von bisimplizialen Mengen (s. oben), ist $\nabla^k \times \nabla^l$. Die Diagonale dieser bisimplizialen Menge ist ebenfalls das Produkt $\Delta^k \times \Delta^l$, wobei aber diesmal das Produkt als *simpliziale Menge* gebildet wird. Die erforderliche Nachprüfung, daß $|\Delta^k \times \Delta^l| \ \cong \ |\Delta^k| \times |\Delta^l|$, hatten wir seinerzeit gemacht in einem Fall, der (wie sich herausstellt) nicht sehr weit vom allgemeinen Fall entfernt ist; nämlich dem Fall, wo $l = 1$ (wo aber k nicht weiter eingeschränkt ist).

Der zweite Schritt des Beweises ist kategorien-theoretischer Art. Wir müssen dafür ein wenig ausholen. Sei $\mathcal{C}$ eine (kleine) Kategorie. Bezeichne $\widehat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der kontravarianten mengenwertigen Funktoren auf $\mathcal{C}$,

$$\widehat{\mathcal{C}} \;=\; \left\{ F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \;\middle|\; F \text{ Funktor} \right\} .$$

$\mathcal{C}$ bildet nach $\widehat{\mathcal{C}}$ ab durch den Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \;, \quad A \longmapsto F_A \;,$$

der jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ den davon repräsentierten Funktor F_A zugeordnet,

$$F_A : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \;, \quad F_A(B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \;.$$

Für $A \in \mathcal{C}$ und $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ hat man eine Abbildung 'Evaluation',

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F_A, F) \longrightarrow F(A) \;;$$

sie resultiert daraus, daß man eine Abbildung $F_A \to F$ auswertet an der Stelle A, und insbesondere an dem Element

$$\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) = F_A(A) \;.$$

Lemma (Yoneda-Lemma). *Die Abbildung* $\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F_A, F) \to F(A)$ *ist bijektiv.*

Beweis. Die Injektivität der Evaluations-Abbildung ist gleichbedeutend damit, daß eine natürliche Transformation $f : F_A \to F$ durch ihren Wert auf Id_A schon festgelegt ist. Das ist aber klar: Ist $a : B \to A$ ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) = F_A(B)$, dann ist dies Element auch das Bild von Id_A unter der Abbildung $a^* : F_A(A) \to F_A(B)$. Unter der Abbildung f geht es also auf das Element $a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))$, wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd} F_A(B) \arrow[r, "f"] & F(B) \\ F_A(A) \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "a^*"] & F(A) \arrow[u, "a^*"'] \end{tikzcd}$$

Umgekehrt kann man zu vorgegebenem $\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A)$ die Abbildung f *definieren* durch

$$f(a) := a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))$$

(für jedes B und jedes $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$). Dies ist dann eine natürliche Transformation von Funktoren $F_A \to F$. Denn sind $b : C \to B$ und $a : B \to A$ komponierbare Morphismen, dann ist

$$b^*(f(a)) = b^*(a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))) = (ab)^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A)) = f(ab) = f(b^*(a)) \;.$$

Daraus resultiert die geforderte Kommutativität der Diagramme:

$$\begin{tikzcd} F_A(C) \arrow[r, "f"] & F(C) \\ F_A(B) \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "b^*"] & F(B) \arrow[u, "b^*"'] \end{tikzcd}$$

□

Nach dem Lemma ist, insbesondere, die Abbildung $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ eine volle Einbettung (Bijektivität von $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F_A, F_B) \to F_B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für A und B aus $\mathcal{C}$).

Für $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ definieren wir eine Kategorie $\mathcal{C}/F$. Die Objekte sind die Paare (A, a) ,

$$A \in \mathcal{C} \quad , \quad a \in F(A) \quad .$$

Und ein Morphismus in $\mathcal{C}/F$, von (A, a) zu (B, b), ist ein Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$, der der Bedingung genügt, daß die Elemente a und b über die Abbildung $F(f)$ zueinander in Beziehung stehen; also:

$$f : \ A \longrightarrow B \quad , \quad a \ = \ F(f)(b) \ \ .$$

Beispiel. Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie Δ der endlichen geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, ... , ist, dann ist $\widehat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der mengenwertigen kontravarianten Funktoren auf Δ ; also die Kategorie der simplizialen Mengen. Für eine simpliziale Menge F ist die hier mit Δ/F bezeichnete Kategorie dieselbe wie die, die früher mit $\mathrm{simp}(F)$ bezeichnet wurde.

Die Kategorie $\mathcal{C}/F$ ist also eine Abstraktion (und Verallgemeinerung) der früher betrachteten "Kategorie der Simplizes".

Lemma (Yoneda-Lemma, Zusatz). *Sei $F \in \widehat{\mathcal{C}}$. F ist Colimes darstellbarer Funktoren:*

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{C}/F}(\ (A, a) \longmapsto F_A\ ) \ \xrightarrow{\ \ \approx\ \ } \ F \ .$$

Beweis. Colimites in einer Funktorkategorie berechnen sich 'stellenweise'; zumindest dann, wenn es sich bei der Funktorkategorie um eine Kategorie mengenwertiger Funktoren handelt. Wenn, zum Beispiel, G und G' zwei Funktoren in einer solchen Kategorie sind, dann ist deren disjunkte Vereinigung $G \,\dot\cup\, G'$ gegeben durch den Funktor, der an jeder Stelle D den Wert $G(D) \,\dot\cup\, G'(D)$ annimmt.

Ähnlich, eine Äquivalenzrelation auf einem solchen Funktor G'' zu haben, läuft darauf hinaus, daß man an jeder Stelle D eine Äquivalenzrelation auf der Menge $G''(D)$ hat; mit der Maßgabe, daß alle diese Äquivalenzrelationen miteinander kompatibel sind (bezüglich der durch den Funktor gegebenen Abbildungen).

Schließlich wird (zum Beispiel) eine Abbildung solcher Funktoren, $G \to G'$, dann surjektiv sein, wenn an jeder Stelle D die Abbildung $G(D) \to G'(D)$ surjektiv ist.

Der im Lemma genannte Colimes berechnet sich wie folgt. Man bildet zunächst die disjunkte Vereinigung (in der Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}$)

$$\coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)} F_A \quad = \quad \coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \Big(\coprod_{a \in F(A)} F_A \Big)$$

und dann, in einem zweiten Schritt, den Quotienten davon bezüglich einer Äquivalenzrelation. Nämlich für jeden Morphismus $f : (A, a) \to (B, b)$ in $\mathcal{C}/F$ soll die induzierte Abbildung $(F_A, f^*(b)) \to (F_B, b)$ eine Identifikation werden (wo $f^*(b)$ kurz ist für $F(f)(b)$); das heißt: für jedes Objekt $C \in \mathcal{C}$ und jedes $x \in F_A(C)$ ist das Paar $(x, f^*(b))$ zu identifizieren mit seinem Bild, dem Paar $(f_*(x), b)$ in $(F_B(C), b)$.

Zu dem Index $(A, a) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)$ gehört (nach dem Yoneda-Lemma) eine Abbildung $F_A \to F$; sie hat die Eigenschaft, daß $\mathrm{Id}_A \mapsto a$, und sie ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Man bekommt so eine Abbildung von dem Coprodukt,

$$\coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)} F_A \longrightarrow F \ ;$$

diese Abbildung ist surjektiv (denn an der Stelle A ist jedes $a \in F(A)$ im Bild).

Die Abbildung ist mit der Äquivalenzrelation verträglich. Denn ist $f\colon (A, a) \to (B, b)$ ein Morphismus in $\mathcal{C}/F$, so ist $a = f^*(b)$, und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
F_A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A \ \mapsto \ f^*(b) \in F(A)"] \arrow[d, "f_*"'] & F \arrow[d, equal] \\
F_B \arrow[r, "\mathrm{Id}_B \ \mapsto \ b \in F(B)"'] & F
\end{tikzcd}$$

Denn der linke Pfeil, f_*, bildet das Element $\mathrm{Id}_A \in F_A(A)$ ab auf das Element f in $F_B(A)$, was (nach Definition der Abbildung $F_B \to F$; und wegen $f = f^*(\mathrm{Id}_B)$ in F_B) durch den unteren Pfeil abgebildet wird auf $f^*(\mathrm{Bild}(\mathrm{Id}_B)) \in F(A)$; also auf $f^*(b)$.

Es bleibt zu zeigen, daß nach dem Übergang zu Äquivalenzklassen diese Abbildung injektiv wird. Nun hat jedes Element $d \in F(D)$ einen kanonischen Repräsentanten, nämlich $(\mathrm{Id}_D\,,\, d)$ in $(F_D(D)\,,\, d)$. Wir zeigen, daß jeder andere Repräsentant zu diesem äquivalent ist. Wenn $(e, a) \in (F_A(D), a)$ ein anderer Repräsentant ist, so heißt dies, daß $a \in F(A)$; und daß $e\colon D \to A$ eine Abbildung ist, die der Bedingung genügt:

$$e^*(a) = d \quad , \quad F(A) \xrightarrow{e^*} F(D) \ .$$

Nach Definition der Äquivalenzrelation gibt es in dieser Situation die Äquivalenz

$$(e\,,\, a) = (e_*(\mathrm{Id}_D)\,,\, a) \quad \sim \quad (\mathrm{Id}_D\,,\, e^*(a)) = (\mathrm{Id}_D\,,\, d) \ .$$

□

Beweis des Satzes (Fortsetzung). Nach dem Yoneda-Lemma (bzw. dem Zusatz) ist die bisimpliziale Menge X ein Colimes darstellbarer Funktoren:

$$X \ = \ \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\ ((\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\, z \in X_{k,l}\,) \ \longmapsto \ (\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,) \ \Big) \ .$$

Dabei ist $(\Delta\times\Delta)\,/\,([k]\,,\,[l])$ ein ‘Prisma’; nämlich das Produkt von Δ^k und Δ^l, aufgefaßt als bisimpliziale Menge.

Nun sind die für den Satz relevanten Konstruktionen, geometrische Realisierung einerseits und Diagonalisierung andererseits, beide mit Colimites verträglich; also:

$$\begin{aligned}
\big|\,\mathrm{diag}(X)\big| \ &= \ \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\ ((\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\, z \in X_{k,l}\,) \ \longmapsto \ \big|\,\mathrm{diag}(\,(\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,)\,\big| \ \Big) \\
&= \ \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\ ((\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\, z \in X_{k,l}\,) \ \longmapsto \ \big|\,(\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,\big| \ \Big) \ = \ \big|\,X\,\big|
\end{aligned}$$

unter Benutzung dessen, daß wir die gewünschte Identifizierung im Spezialfall repräsentierbarer Funktoren schon kennen. □

Für den Umgang mit bisimplizialen Mengen hat man den folgenden fundamentalen Sachverhalt. Er spielt für die Praxis eine wichtige Rolle.

Satz (Realisierungs-Lemma). *Sei $X \to X'$ eine Abbildung von bisimplizialen Mengen. Es gelte, daß, für jedes m, die Abbildung von simplizialen Mengen*

$$(\ [n] \longmapsto X_{m,n} \ ) \quad \longrightarrow \quad (\ [n] \longmapsto X'_{m,n} \ )$$

eine schwache Homotopie-Äquivalenz ist (d.h. die Abbildung wird eine Homotopie-Äquivalenz nach geometrischer Realisierung). *Dann ist auch die Abbildung $X \to X'$ eine schwache Homotopie-Äquivalenz* (d.h. ...).

Korollar. *Sei X eine bisimpliziale Menge, derart, daß für jedes m die simpliziale Menge $[n] \mapsto X_{m,n}$ im schwachen Sinne zusammenziehbar ist* (d.h. die Abbildung zur trivialen simplizialen Menge ist eine schwache Homotopie-Äquivalenz). *Dann ist auch X selbst im schwachen Sinne zusammenziehbar.*

Beweis. Sei X' definiert als die triviale bisimpliziale Menge, wo jede der Mengen $X'_{m,n}$ ein einziges Element hat. Die geometrische Realisierung von diesem X' ist der ein-punktige Raum. Es gibt eine Abbildung $X \to X'$. Auf diese Abbildung ist der Satz anwendbar. $\square$

'Moralisch gesprochen' ist das Realisierungs-Lemma ein Spezialfall eines Satzes über simpliziale Räume:

"Satz". " *Sei $Y \to Y'$ eine Abbildung von simplizialen Räumen derart, daß, für jedes m, die Abbildung $Y_m \to Y'_m$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. Dann ist auch die Abbildung $|Y| \to |Y'|$ eine Homotopie-Äquivalenz.* "

Die bei der Formulierung benutzten Anführungszeichen sollen andeuten, daß die gegebene Formulierung als Satz nicht ernst gemeint ist; und auch nicht ernst gemeint sein kann. Es gibt Gegenbeispiele.

Allerdings werden wir uns berechtigt fühlen, solche Gegenbeispiele (wir werden sie nicht explizit betrachten) als ein wenig pathologisch anzusehen. Wir werden klären, daß eine Bedingung technischer Art dazu geeignet ist, die Gegenbeispiele zu vermeiden. Das Realisierungs-Lemma resultiert dann daraus, daß die Bedingung automatisch erfüllt sein wird bei solchen simplizialen Räumen, die als partielle geometrische Realisierung einer bisimplizialen Menge auftreten.

Für die Diskussion müssen wir noch eine andere Art von geometrischer Realisierung betrachten:

Definition. Sei Y ein simplizialer Raum. $||Y||$ ist definiert als derjenige Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$|| \ [m] \mapsto Y_m \ || \quad := \quad \coprod_m Y_m \times \nabla^m \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-(inj-}\Delta) \ )} \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation die übliche ist, aber eingeschränkt auf die *injektiven* Abbildungen in der Kategorie Δ ; nämlich für jede injektive Abbildung $\alpha\colon\ [m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in \nabla^m$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad \ni \quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad \in \quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Im Spezialfall simplizialer Mengen ist $||Y||$ das, was früher auch mit $\mathrm{Real}(Y)$ bezeichnet wurde.

Bemerkung. Sei Y ein simplizialer Raum. $||Y||$ kann auch auf andere Weise durch Verklebung erhalten werden. Nämlich $||Y||$ ist natürlich isomorph zu dem Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta \ )} \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation wieder die 'übliche' ist: für jede Abbildung $\alpha\colon\ [m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in ||\Delta^m||$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad \ni \quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad \in \quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Beweis. Das steht in engem Zusammenhang mit der Tatsache, daß für eine Δ-Menge deren geometrische Realisierung (im Sinne von Δ-Mengen) auch beschrieben werden kann als die 'richtige' geometrische Realisierung einer zugeordneten simplizialen Menge (sie entsteht aus der Δ-Menge durch das formale Hinzufügen ausgearteter Simplizes). Insbesondere ist $||\Delta^m||$ die geometrische Realisierung derjenigen simplizialen Menge, die aus Δ^m entsteht, indem man erstens die Ausartungsabbildungen vergißt (Übergang zu einer Δ^m-Menge) und zweitens dann ausgeartete Simplizes neu hinzunimmt.

Die resultierende simpliziale Menge hat als n-Simplizes die Paare

$$[n] \ \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \ [k] \ \ , \qquad [k] \ \longrightarrow \ [m]$$

wo der zweite Pfeil,

$$(\ [k] \to [m]\ ) \quad \in \quad \mathrm{Hom}_\Delta(\,[k]\,,\,[m]\,) \ \ ,$$

ein k-Simplex von Δ^m ist; und der erste Pfeil,

$$\text{eine } \textit{Surjektion} \qquad [n] \twoheadrightarrow [k] \ \ ,$$

davon eine formale Ausartung.

Die geometrische Realisierung dieser simplizialen Menge ist

$$\coprod_{\substack{(\ [n] \twoheadrightarrow [k]\ ,\ [k] \longrightarrow [m]\ ) \\ (\text{ alles variabel, außer } [m]\ )}} \nabla^n \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Folglich kann die 'geometrische Realisierung'

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad ,$$

auch geschrieben werden als:

$$\coprod_m Y_m \times \Bigg(\coprod_{(\ [n] \twoheadrightarrow [k]\ ,\ [k] \longrightarrow [m]\ )} \nabla^n \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \Bigg) \ \Bigg/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Die 'erste' Äquivalenzrelation bezieht sich dabei auf die n-Variable; und die 'zweite' auf die m-Variable. Da es bei einer Kombination von Äquivalenzrelationen auf deren Reihenfolge nicht ankommt, so kann man die beiden Relationen ebensogut vertauschen. Wenn man die Terme noch ein wenig anders schreibt:

$$\coprod_n \nabla^n \times \Bigg(\coprod_{\substack{(\ [n] \twoheadrightarrow [k]\ ,\ [k] \longrightarrow [m]\ ) \\ (\text{ außer } [n] \text{ alles variabel})}} Y_m \ \Big/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \Bigg) \ \Bigg/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad ,$$

so sieht man, daß man kürzen kann. Man erhält:

$$\coprod_n \nabla^n \times \Bigg(\coprod_{\substack{[n] \twoheadrightarrow [k] \\ (\ [n] \text{ nicht variabel})}} Y_k \Bigg) \ \Bigg/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )}$$

oder, etwas umgeschrieben,

$$\coprod_{[n] \twoheadrightarrow [k]} \nabla^n \times Y_k \ \Bigg/ \ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Bei der verbliebenen Äquivalenzrelation kann man immer noch kürzen. Nämlich der Anteil zur Äquivalenzrelation, der sich auf die *surjektiven* Abbildungen bezieht, ist kürzbar. Es bleibt übrig:

$$\coprod_k \nabla^k \times Y_k \ \Bigg/ \ \sim_{(\text{ Mor-(inj-}\Delta)\ )} \quad ;$$

also die modifizierte geometrische Realisierung, $||Y||$. $\square$

Wir wollen nun ein Kriterium dafür angeben, daß, für einen simplizialen Raum Y, die Abbildung $||Y|| \to |Y|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist.

Da die Abbildung so zustande kommt, daß gewisse "ausgeartete Teile" in dem Raum $||Y||$ nachträglich noch 'kollabiert' werden, so wird man als eine geeignete Bedingung eine Hypothese der Art erwarten, daß es sich bei den zu kollabierenden Teilen um "vernünftige" Unterräume handelt; also etwas der Art, daß die Inklusions-Abbildung die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (HEE) hat.

Definition. Für einen simplizialen Raum Y bezeichne der 'ausgeartete' Unterraum

$$\operatorname{aus}(Y_m) \quad \subset \quad Y_m$$

die Vereinigung der Bilder der Ausartungs-Abbildungen $Y_{m-1} \to Y_m$. Der simpliziale Raum Y heiße *gut*, wenn jede der Inklusionen $\operatorname{aus}(Y_m) \to Y_m$ die HEE hat.

Tatsächlich benötigen wir etwas, das möglicherweise stärker ist als die gerade beschriebene Bedingung — möglicherweise aber auch nicht stärker. Um nicht diese, für uns nicht relevante, Angelegenheit diskutieren zu müssen, werden wir einfach die Bedingung in ihrer stärkeren Form fordern; die formulieren wir jetzt.

Definition. Ein simplizialer Raum Y heißt *sehr gut*, wenn, für jedes m und für jede Inklusion von simplizialen Mengen $K \subset L$, die resultierende Inklusion

$$\operatorname{aus}(Y_m) \times |L| \cup_{\operatorname{aus}(Y_m)\times|K|} Y_m \times |K| \quad \longrightarrow \quad Y_m \times |L|$$

die HEE hat.

Bemerkung. Wenn $([m],[n]) \to X_{m,n}$ eine bisimpliziale Menge ist, und Y ein daraus durch partielle Realisierung entstehender simplizialer Raum,

$$Y_m \quad = \quad \Big| \ [n] \ \longmapsto \ X_{m,n} \ \Big| \ ,$$

dann ist Y 'sehr gut' im Sinne der gerade gegebenen Definition.

Beweis. Es bezeichne Z_m die (partielle) simpliziale Menge

$$Z_m \quad = \quad (\ [n] \mapsto X_{m,n} \ ) \ ;$$

und $\operatorname{aus}(Z_m)$ die Unter-simpliziale-Menge darin, die gegeben ist durch die Bilder der Abbildungen $Z_{m-1} \to Z_m$ (Ausartungs-Abbildungen in der m-Richtung). Die fragliche Inklusion in der obigen Definition resultiert aus der Inklusion von simplizialen Mengen

$$\operatorname{aus}(Z_m) \times L \cup_{\operatorname{aus}(Z_m)\times K} Z_m \times K \quad \longrightarrow \quad Z_m \times L$$

durch die geometrische Realisierung. Es handelt sich folglich um eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen; und insbesondere, deshalb, um eine Abbildung mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft. $\square$

Lemma. *Der simpliziale Raum Y sei 'sehr gut'. Die Abbildung*

$$||Y|| \longrightarrow |Y|$$

ist eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis. Die Idee für den Beweis ist, daß man die Abbildung schreiben kann als eine aufsteigende Vereinigung von Abbildungen von "Skeletten",

$$||Y||^k \longrightarrow |Y|^k \ ,$$

und daß es deshalb genügen wird, zu zeigen, daß jede von *diesen* Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Der Beweis dafür geht durch Induktion über k.

Aufgrund einer obigen Umformulierung können wir die Abbildung $||Y|| \to |Y|$ auch schreiben als eine von den Abbildungen $||\Delta^m|| \to |\Delta^m|$ induzierte Abbildung

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\text{ })} \quad \longrightarrow \quad \coprod_m Y_m \times |\Delta^m| \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\text{ })} \quad .$$

Das k-Skelett, links, ist definiert als der aus den Y_m bis zur Nummer k gebildete Teilraum:

$$||Y||^k \quad = \quad \coprod_{0 \le m \le k} Y_m \times ||\Delta^m|| \Big/ \sim \qquad \big(\text{induzierte Äquivalenzrelation}\big)$$

Wenn man dem letzten der Terme in dem Coprodukt eine Sonder-Rolle zuweist, so sieht man, daß $||Y||^k$ auch erhalten werden kann als das Resultat einer Verklebung; nämlich aus dem Klebe-Diagramm:

$$||Y||^{k-1} \longleftarrow \text{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k||} Y_k \times ||\partial\Delta^k|| \longrightarrow Y_k \times ||\Delta^k||$$

Für das anlog definierte k-Skelett, rechts, hat man eine ähnliche Beschreibung durch ein Verklebe-Digramm.

Man hat nun eine Abbildung zwischen diesen Verklebe-Diagrammen; also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
||Y||^{k-1} \arrow[d] & \text{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k||} Y_k \times ||\partial\Delta^k|| \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y_k \times ||\Delta^k|| \arrow[d] \\
|Y|^{k-1} & \text{aus}(Y_k) \times |\Delta^k| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times |\partial\Delta^k|} Y_k \times |\partial\Delta^k| \arrow[l] \arrow[r] & Y_k \times |\Delta^k|
\end{tikzcd}$$

Wegen der Hypothese, daß Y ein "sehr guter" simplizialer Raum sein soll, ist die HEE sichergestellt für die horizontalen Pfeile auf der rechten Seite von dem Diagramm. Das Klebe-Lemma ist also anwendbar, und wir werden deshalb wissen, daß die Abbildung der verklebten Räume eine Homotopie-Äquivalenz ist, sobald wir wissen, daß die drei vertikalen Abbildungen in dem Diagramm sämtlich Homotopie-Äquivalenzen sind.

Für den linken Pfeil gilt das nach Induktions-Voraussetzung. Für den rechten Pfeil folgt es aus der uns bekannten Tatsache, daß, für simpliziale Mengen, die Abbildung

$$||Z|| \longrightarrow |Z|$$

(früher bekannt als $\operatorname{Real}(Z) \to |Z|$) eine Homotopie-Äquivalenz ist; insbesondere ist $||\Delta^k|| \longrightarrow |\Delta^k|$ eine Homotopie-Äquivalenz.

Für den mittleren Pfeil betrachten wir das weitere Klebe-Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| & \longleftarrow & \operatorname{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k|| & \longrightarrow & Y_k \times ||\partial\Delta^k|| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\operatorname{aus}(Y_k) \times |\Delta^k| & \longleftarrow & \operatorname{aus}(Y_k) \times |\partial\Delta^k| & \longrightarrow & Y_k \times |\partial\Delta^k|
\end{array}$$

Wieder ist die HEE für die rechten horizontalen Pfeile sichergestellt. Und die vertikalen Pfeile sind Homotopie-Äquivalenzen aus dem schon genannten Grund, daß, für eine simpliziale Menge Z, die Abbildung $||Z|| \to |Z|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. $\square$

Der noch zu beweisende Satz ('Realisierungs-Lemma') ist, nach einer oben gemachten Bemerkung ("eine partielle Realisierung einer bisimplizialen Menge ist ein 'sehr guter' simplizialer Raum") ein Spezialfall von dem folgenden Satz.

Satz. *Sei $Y \to Y'$ eine Abbildung von simplizialen Räumen derart, daß, für jedes m, die Abbildung $Y_m \to Y'_m$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. Y und Y' seien 'sehr gute' simpliziale Räume. Dann ist die Abbildung $|Y| \to |Y'|$ eine Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. Man hat ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
||Y|| & \longrightarrow & ||Y'|| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
|Y| & \longrightarrow & |Y'|
\end{array}$$

Wegen dem vorangegangenen Lemma und der Hypothese 'sehr gut' sind die vertikalen Pfeile in diesem Diagramm Homotopie-Äquivalenzen. Es wird also genügen, zu zeigen, daß die Abbildung $||Y|| \longrightarrow ||Y'||$ eine Homotopie-Äquivalenz ist; und das werden wir auch zeigen.

Zum Beweis wird es genügen, die Abbildung $||Y|| \longrightarrow ||Y'||$ zu schreiben als eine aufsteigende Vereinigung von Abbildungen von "Skeletten" $||Y||_k \longrightarrow ||Y'||_k$ (die 'Skelette' sind andere als in dem vorigen Beweis); und dann zu zeigen, daß jede dieser Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Der Beweis dafür geht durch Induktion über k.

Wir verwenden wieder die andere Beschreibung von der 'groben' Realisierung, die ursprüngliche Definition:

$$||Y|| \quad = \quad \coprod_m Y_m \times \nabla^m \Big/ \sim_{(\text{ Mor-(inj-}\Delta) \text{ })}$$

Wir schreiben $||Y||_k$ für den Teilraum, den wir bekommen, wenn wir nur die Y_m bis zur Nummer k verwenden:

$$||Y||_k \quad = \quad \coprod_{0 \le m \le k} Y_m \times \nabla^m \Big/ \backsim \qquad \big(\text{induzierte Äquivalenzrelation}\big)$$

Indem wir dem letzten Term in dem Coprodukt eine ausgezeichnete Rolle zuweisen, bekommen wir eine Darstellung von $||Y||_k$ als einen zusammengeklebten Raum, mit Hilfe von einem Verklebe-Diagramm:

$$||Y||_{k-1} \longleftarrow Y_k \times \partial\nabla^k \longrightarrow Y_k \times \nabla^k$$

(wo $\partial\nabla^k$ den Rand bezeichnet; oder, was dasselbe ist: $\partial\nabla^k = \partial|\Delta|^k := |\partial\Delta^k|$).

Mit einem ähnlichen Verklebe-Diagramm, den Zielraum $||Y'||$ betreffend, hat man nun eine Abbildung zwischen Verklebe-Diagrammen:

$$\begin{array}{ccccc}
||Y||_{k-1} & \longleftarrow & Y_k \times \partial\nabla^k & \longrightarrow & Y_k \times \nabla^k \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
||Y'||_{k-1} & \longleftarrow & Y'_k \times \partial\nabla^k & \longrightarrow & Y'_k \times \nabla^k
\end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Homotopie-Äquivalenzen nach Voraussetzung (rechts und in der Mitte), bzw. nach Induktions-Voraussetzung (links). Mit dem Klebe-Lemma folgt, daß die Abbildung der verklebten Räume,

$$||Y||_k \longrightarrow ||Y'||_k \ ,$$

ebenfalls eine Homotopie-Äquivalenz ist.

□

On the Construction of the Kan Loop Group

Friedhelm Waldhausen

Received: December 19, 1995

Communicated by Ulf Rehmann

Abstract. A re-make, not of the construction, but of its description.

By an *ordered graph* will be meant a triple of sets (P, N, E) together with a pair of structure maps, $N \leftarrow E \rightarrow P$. These data are to be thought of as 'positive vertices', 'negative vertices', 'edges', and 'incidence relations', respectively.

An ordered graph is a sort of ordered simplicial complex. It can be made into a simplicial set by adding degenerate simplices. The details of this step can be neatly described by means of an auxiliary category C_Γ associated to the ordered graph Γ. The set of objects of C_Γ is the disjoint union $N \dot\cup P$; the set of non-identity morphisms is the set E, and the source and target functions on E are given by the two maps $E \rightarrow N$ and $E \rightarrow P$, respectively. The category is a little unusual insofar as no two morphisms in it can be composable unless at least one of them is an identity morphism.

The *nerve* construction produces a simplicial set $N(C_\Gamma)$ now: an m-simplex is a functor $[m] \rightarrow C_\Gamma$ (where $[m]$ denotes the ordered set $(0 < 1 < \cdots < m)$, regarded as a category). The set of m-simplices is thus a disjoint union $N \dot\cup E \dot\cup \ldots \dot\cup E \dot\cup P$, with one entry "$E$" for each surjective monotone map $[m] \rightarrow [1]$. The simplicial set $N(C_\Gamma)$ is 1-*dimensional* in the sense that every non-degenerate simplex has dimension ≤ 1. Instead of $N(C_\Gamma)$ we will henceforth write $N(\Gamma)$ for this simplicial set.

The geometric realization $|N(\Gamma)|$ is a CW complex of dimension ≤ 1. The 0-cells of $|N(\Gamma)|$ are indexed by the set $N \dot\cup P$ (disjoint union), and the 1-cells are indexed by the set E.

We will suppose now that the ordered graph Γ is *connected* (equivalently, that the CW-complex $|N(\Gamma)|$ is) and *pointed* (i.e., equipped with the choice of an element $x \in P$). We may then speak of the *fundamental group* $\pi_1(\Gamma, x)$. It can be described as the fundamental group of the CW-complex $|N(\Gamma)|$ based at $|x|$ or else, in somewhat more combinatorial terms, as the *edge path group* of Γ based at x.

We may also speak of the *universal covering* of Γ (with respect to the chosen basepoint x). This is an ordered graph $\widetilde{\Gamma}$. It comes equipped with an action of $\pi_1(\Gamma, x)$, and with a map $\widetilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$; and these two pieces of data are such that they make $\widetilde{\Gamma}$ into a principal $\pi_1(\Gamma, x)$-bundle over Γ (by definition, this means that the action is free, and that the quotient by the action is identified to Γ by the given map). The construction of all this is as follows, by covering space theory. An element of $\widetilde{N}$ (a 'negative vertex' of $\widetilde{\Gamma}$) consists of a pair of data in Γ, namely (i) a 'negative vertex' v of Γ and (ii) a homotopy class of paths connecting v to the chosen basepoint x. The map $\widetilde{N} \rightarrow N$ is defined as the forgetful map which forgets the path; and the action of $\pi_1(\Gamma, x)$ on $\widetilde{N}$ is given by composing the path with the loop in question. The other data are given similarly.

As we have implicitly used before, the ordered graphs are the objects of a category in an evident way: a map in this category is a triple of maps of sets, $P \to P'$, $N \to N'$, $E \to E'$, so that these maps are compatible to the structure maps of the two ordered graphs in question. It makes sense, consequently, to speak of a *simplicial ordered graph*, a simplicial object in the category of ordered graphs. We note that a simplicial ordered graph will give rise to a bisimplicial set, by *nerve*, and hence to a CW-complex, by geometric realization (this particular geometric realization uses 'prisms'; an equivalent construction, up to canonical isomorphism, would be to pass to the diagonal simplicial set first and then take the geometric realization of that diagonal simplicial set). We are in a position now to describe our basic construction. The construction is implicit in Kan's paper [1], but it was not made explicit there.

CONSTRUCTION. Let $X\colon \Delta^{\rm op} \to (\text{sets})$, $[n] \mapsto X_n$, be a simplicial set. There is an associated simplicial ordered graph. It has $P_n = X_n$, $N_n = X_0$, $E_n = X_{n+1}$, and the maps $E_n \to P_n$ and $E_n \to N_n$ are given by the 'last face' map and 'last vertex' map, respectively. This simplicial ordered graph will be denoted ΓX.

(Here are some more details. The simplicial set $P_\bullet$ is defined to be isomorphic to X itself, while $N_\bullet$ is defined as the set X_0 considered as a simplicial set in a trivial way. Concerning $E_\bullet$, if $\alpha\colon [n] \to [n']$ is a monotone map then $\alpha^* : E_{n'} \to E_n$ is defined to be the map $X_{n'+1} \to X_{n+1}$ induced from $\alpha \cup \{\infty\}\colon\ [n] \cup \{\infty\} \to [n'] \cup \{\infty\}$. The map $E_n \to P_n$ is defined to be the map $X_{n+1} \to X_n$ induced from the injective map $[n] \to [n{+}1]$ which misses $n{+}1$, and the map $E_n \to N_n$ is defined to be the map $X_{n+1} \to X_0$ induced from the map $[0] \to [n{+}1]$ taking 0 to $n{+}1$.)

Considering X as a simplicial ordered graph in a trivial way (no edges, no negative vertices) we have a natural inclusion $X \to \Gamma X$. The following will be shown later.

LEMMA. *The map $X \to \Gamma X$ is a weak homotopy equivalence.*

We will suppose now that the simplicial set X is connected and that it is equipped with a basepoint (that is, the choice of an element in X_0). Then $\Gamma_n X$, the ordered graph in degree n of the simplicial ordered graph ΓX, will also be connected (a proof of this fact will be given below) and it will be equipped with a basepoint x_n (namely the degenerate in degree n of the chosen element in X_0). ΓX can thus be considered as a simplicial object of *pointed* ordered graphs, and we can therefore define a simplicial group $G = G(X)$,

$$[n] \ \mapsto\ G_n := \pi_1(\Gamma_n X, x_n)\ .$$

THEOREM. *The simplicial group G is a loop group for X.*

PROOF. In view of the lemma it will suffice to show that there is a principal G-bundle over ΓX with weakly contractible total space ('weakly contractible' means that the map to the one-point-space is a weak homotopy equivalence). For by pulling back such a bundle along the map $X \to \Gamma X$ we can obtain a principal G-bundle over X, and the total space of the latter bundle will again be weakly contractible. (This is so since, for example, a map of principal bundles of simplicial sets is also a map of Kan fibrations [2, Satz 9.5] and the geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration [3]. So the Whitehead theorem applies.)

The universal covering of a pointed ordered graph, as described above, is *functorial*. Hence we have a simplicial ordered graph $[n] \mapsto \widetilde{\Gamma}_n X$, it is obtained from $[n] \mapsto \Gamma_n X$ (that is, from ΓX) by taking the universal covering degreewise. This simplicial ordered graph is weakly contractible in every degree; hence (by [4, Appendix A] for example) it is also weakly contractible globally.

The desired principal bundle is now obtained by observing that the simplicial group G acts on $\widetilde{\Gamma} X$, that the action is free, and that the quotient of $\widetilde{\Gamma} X$ by the action is just ΓX again. $\square$

Proof of Lemma. We give two proofs, both fairly self-contained. The short proof is in an appendix; here is the pedestrian one.

The category of ordered graphs, as well as the category of simplicial sets, is a *functor category*, namely the category of $\nwarrow\!\nearrow$-shaped, respectively of Δ^{op}-shaped, diagrams in the category of sets; and colimits in such a functor category are computed ‘pointwise’. It results that the functor $X \mapsto \Gamma X$ commutes with colimits and, what is more to the point here, that the functor $X \mapsto N(\Gamma X)$ (and therefore also $X \mapsto |N(\Gamma X)|$) does so, too. We can apply this fact in two ways. First, by direct limit, we can reduce to proving the lemma for those simplicial sets which are *finite*; that is, there are only finitely many non-degenerate simplices. Next, a finite simplicial set can be obtained from a ‘smaller’ one by the attaching of a simplicial set *standard k-simplex*, for some k; by induction and the gluing lemma we can therefore reduce to proving the lemma for just the latter kind of simplicial set. In other words, we are reduced now to showing that $|N(\Gamma\Delta^k)|$ is contractible.

To show this, we will work out the cell structure of the CW-complex $|N(\Gamma\Delta^k)|$ explicitly. The cells in this complex are of three kinds. First, there are the cells coming from the *positive vertices*; these contribute the copy of $|\Delta^k|$ coming from the inclusion $\Delta^k \to N(\Gamma\Delta^k)$. Next, there are the cells coming from the *negative vertices*; these cells are all 0-dimensional, and there is one such for every vertex of Δ^k.

And, finally, there are the cells coming from the *non-degenerate edges*; of these there is a ‘basic’ edge for every negative vertex. Namely suppose that the negative vertex corresponds to the l-th vertex of Δ^k. Let $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$ denote the copy of Δ^l inside Δ^k whose vertices are the vertex l and its predecessors. Then the *last degenerate* of the generating simplex of $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$ gives an l-dimensional edge of the simplicial ordered graph, and this edge is non-degenerate. Conversely, every non-degenerate edge is either of this kind or is a face of one such. Indeed, suppose the edge corresponds to a simplex y of Δ^k and suppose that l is the highest vertex of Δ^k occurring in y. If any vertex $< l$ occurs twice in y, or if the vertex l occurs more than twice, then the edge associated to y is degenerate—contrary to assumption. If, on the other hand, some vertex $< l$ does not occur at all, or if the vertex l occurs only once rather than twice, then the edge associated to y is a proper face of one of higher dimension.

Returning to the ‘basic’ edge, we note that the associated cell has dimension $l{+}1$. Its closure is the image of a copy of $|\Delta^l| \times |\Delta^1|$ which is mapped in such a way that all of $|\Delta^l| \times 0$ is identified to a point (corresponding to the negative vertex in question), while $|\Delta^l| \times 1$ is identified to the geometric realization of $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$. By induction, there are no identifications over faces of Δ^k which are not of this kind. It results that $|N(\Gamma\Delta^k)|$ is the union of the cones on $|\Delta^0|, |\Delta^1|, \ldots, |\Delta^k|$, each glued along its base to the appropriate subsimplex in $|\Delta^k|$. This complex is indeed contractible. $\square$

Appendix (*on generators and relations*).

If the groups $G_n = \pi_1(\Gamma_n X, x_n)$ are expressed as *edge path groups*, one obtains a sort of description of the simplicial group G in terms of the structure of X. This description occurs as a definition of the loop group in [1, section 12]. Another definition of the loop group is given in [1, sections 7 and 9] in terms of *generators and relations*. The equivalence of the two definitions can be explained by combinatorial group theory. Namely, in a connected graph one can choose a *maximal tree*. The fundamental group of the graph can then be identified to the free group freely generated by the edges of the graph *not* in that maximal tree; equivalently, the fundamental group can be identified to the group generated by *all* the edges of the graph, where, however, the edges of the chosen maximal tree are also introduced as relations.

To make this description effective, one needs to know what a maximal tree in the ordered graph $\Gamma_n X$ will look like. The answer is as follows. If the simplicial set X is *reduced* (that is, if X_0, the set of 0-simplices, has only one element) then there is a maximal tree in $\Gamma_n X$ which is such that it contains exactly those edges where the corresponding simplex of X is a *last degenerate*. In the general case of a connected, but not necessarily reduced X, one has to choose a *maximal tree* in X first (a sub-simplicial-set which contains all of X_0 and whose geometric realization is a simply-connected CW-complex of dimension ≤ 1); the pieces in $\Gamma_n X$ coming from this sub-simplicial-set are then, additionally, in the maximal tree in $\Gamma_n X$.

We will justify this description of the maximal tree now (for much of the following, cf. [1, Lemma 9.1] and [1, section 14] in particular). We begin by explaining why, for connected X and for every n, the graph $\Gamma_n X$ is connected. First, every positive vertex of $\Gamma_n X$ can be connected to some negative vertex. Indeed, if the positive vertex corresponds to $x \in X_n$ then the last degenerate of x gives an edge in $\Gamma_n X$ which will connect this positive vertex to a negative vertex (namely the one associated with the 'last vertex' of that last degenerate or, what amounts to the same thing, the 'last vertex' of x itself). Next, all the negative vertices of $\Gamma_n X$ come from $\Gamma_0 X$, by degeneracy, hence it will suffice to show that they can be connected to each other inside $\Gamma_0 X$. It will, in fact, suffice to show this in the special case of two negative vertices where the associated 0-simplices of X are *adjacent* (in making this reduction we are using the assumed fact that X is connected). We are thus in the special case now where the two 0-simplices of X are the faces of some $y \in X_1$. We see that in this case the two negative vertices can be connected to each other by an edge path of length 2 in $\Gamma_0 X$; the two edges in the path are provided by the simplex y on the one hand and by the 1-dimensional degenerate of the last face of y on the other.

Next, suppose that the simplicial set X is a *tree*. We want to show that, in this case, the ordered graph $\Gamma_n X$ is a tree, too, for every n. Now the nerve $N(\Gamma_n X)$ is 1-dimensional, and connected; so it will be a tree if (and only if) it is *acyclic*. To prove the latter, since the functor $X \mapsto N(\Gamma_n X)$ commutes with colimits, we can further reduce, by direct limit and (inductively) the gluing lemma, to dealing with just the two cases where $X = \Delta^0$ or $X = \Delta^1$. We will write P_n, E_n, N_n, respectively, for the sets of positive vertices, edges, and negative vertices of $\Gamma_n X$. In the case $X = \Delta^0$, each of these sets has exactly one element, so $N(\Gamma_n \Delta^0)$ is isomorphic to Δ^1. In the case $X = \Delta^1$, the set P_n has $n{+}2$ elements which we denote $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ (where p_{n+1} stands for the map $[n] \to [1]$ with image consisting of only $0 \in [1]$ and where, otherwise, p_i stands for the monotone map $[n] \to [1]$ having the property that

$i \in [n]$ is the smallest element whose image is $1 \in [1]$); the set E_n has $n{+}3$ elements, $e_0, e_1, \ldots, e_{n+2}$, and the set N_n has two elements, n_0 and n_1. The map $E_n \to P_n$ takes e_i to p_i for all $i \leq n{+}1$, and, in addition, it takes e_{n+2} to p_{n+1}. The map $E_n \to N_n$ takes the element e_{n+2} into n_0 and it takes all other elements of E_n into n_1. We see that $N(\Gamma_n \Delta^1)$ is a one-point-union of $n{+}1$ copies of Δ^1, together with one extra copy of Δ^1 hanging on to one of the whiskers. It is a tree indeed.

Let X be a connected simplicial set now. Choose a maximal tree T in X. Let P', E', N' denote, respectively, the sets of positive vertices, edges, and negative vertices of $\Gamma_n T$. Let P'' denote the subset of X_n which is complementary to the subset T_n. Let E'' be defined as the subset of X_{n+1} given by the image of P'' under the 'last degeneracy' map. One of the structure maps of $\Gamma_n X$ restricts to a map $E'' \to N'$ (all the negative vertices of $\Gamma_n X$ are contained in N' since T contains all the 0-simplices of X), and the other structure map restricts to a map $E'' \to P''$. The latter map is given by the 'last face' map, and is actually inverse to the above map $P'' \to E''$; in particular it is an isomorphism. In view of this fact, and using the fact established above, that the ordered graph

$$N' \,,\ E' \,,\ P' \,, \quad N' \leftarrow E' \rightarrow P'$$

is indeed a tree, we can now conclude that the sets, and maps,

$$N' \,,\ E' \cup E'' \,,\ P' \cup P'' \ , \quad N' \leftarrow E' \cup E'' \rightarrow P' \cup P''$$

do form a tree, too. The isomorphisms $N' \approx X_0$ and $P' \cup P'' \approx X_n$ show that this tree contains all the vertices of $\Gamma_n X$. It is therefore a maximal tree. $\square$

Appendix (*another view at the lemma*).

The geometric realization $|\Gamma X|$ may be identified to the double mapping cylinder of the following diagram (the terms involved have been defined in connection with the definition of ΓX),

$$|P_{\bullet}| \ \longleftarrow \ |E_{\bullet}| \ \longrightarrow \ |N_{\bullet}| \,.$$

As a consequence, the assertion of the lemma, that the inclusion

$$|X| \approx |P_{\bullet}| \ \longrightarrow \ |\Gamma X|$$

is a homotopy equivalence, will therefore result once one knows that the map

$$E_{\bullet} \ \longrightarrow \ N_{\bullet}$$

is a (weak) homotopy equivalence. But this is a well known fact: $E_{\bullet}$ is obtained from the simplicial set X by *shifting*, it is a sort of path space on X, and it is homotopy equivalent to the *subspace of constant paths*; that is, the set X_0 regarded as a simplicial set in a trivial way. The latter statement is in fact true with the strongest possible interpretation of homotopy equivalence, namely *simplicial homotopy equivalence*. An account can be found in [4, proposition 1.5]; another in [5, lemma 1.5.1].

REFERENCES.

[1] Daniel M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* **67** (1958), 282–312

[2] Klaus Lamotke, Semisimpliziale algebraische Topologie, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **147**, Springer Verlag (1968)

[3] Daniel G. Quillen, The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration, *Proc. AMS* **19** (1968), 1499–1500

[4] Graeme Segal, Categories and cohomology theories, *Topology* **13** (1974), 293–312

[5] Friedhelm Waldhausen, Algebraic K-theory of spaces, Algebraic and Geometric Topology, *Springer Lecture Notes* **1126** (1983), 318–419

Friedhelm Waldhausen
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 33501
D-33501 Bielefeld
Germany

fw@mathematik.uni-bielefeld.de