The birth of the Borel conjecture

In 2005 the EPFZ and the University of Geneva organized a symposium in the memory of Armand Borel. At this occasion André Haefliger gave a talk to put in context the letter of May 2, 1953 from Borel to Serre (scan attached at end) where Borel states the problem which is now called "Borel Conjecture". The key paragraphs in the letter are:

Nomizu a rédigé la généralisation de Matsushima, ce n'est pas dégueulasse du tout. Il se demandait si cela se généralisait aux groupes résolubles. Hélas il n'en est rien, comme on le voit en faisant le quotient du groupe G^* *des déplacements du plan euclidien par un* $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ *formé de translations. On obtient un* T^3 *évidemment dont la coh. ne peut être celle de l'algèbre de Lie de* G^**, qui étant non abélienne de dim. 3 posséde un* H^1 *de dim.* < 3.

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract oú Mostow annonce que si G_1 *et* G_2 *sont résolubles, et si* G_1/H_1 *et* G_2/H_2 *sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, ... sa démonstration est épouvantable, mais peut être énormément simplifiée par utilisation de théorm̀es sur les espaces universels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient* B_1 *et* B_2 *2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe* G *(disons discret) et pour toutes les dimensions. Sont-elles homéomorphes? et si oui, le sont-elles par la projection d'un homomorphisme des espaces universels? Mostow, par d'astucieux choix de sous-groupes et de récurrences, se ramène essentiellement au cas oú* B_1 *et* B_2 *sont des tores, et la réponse aux deux questions précédentes est alors évidemment oui. Dans l'ensemble, son papier est très intéressant, ... de très loin le meilleur qu'il ait pondu.*

According to Malcev, two nilpotent simply connected groups with isomorphic discrete cocompact groups are isomorphic. This is not true if nilpotent is replaced by solvable, as shown by the example given by Borel in paragraph 1. Borel told Haefliger that he had shown Mostow this counterexample. Nomizu had shown that the real cohomology of the quotient of a simply connected nilpotent Lie group G by a cocompact discrete subgroup is isomorphic to the cohomology of the Lie algebra of G.

I am grateful to Dominique Borel for permission to reproduce her father's letter, and to André Haefliger for supplying the additional information.

Andrew Ranicki, 22nd September, 2016

2.5.53

Mon cher Serre,

Après mon retour de Boston-New-York, soit au début de cette semaine, j'ai montré ton diplodocus et la lettre de complément à Spencer. Il m'a dit qu'il t'écrirait aujourd'hui même aussi je suppose qu'il est inutile que j'entre dans beaucoup de détails. Il semble donc qu'il y ait beaucoup d'overlap, mais que tu n'es pas bouffé complètement; ils n'ont pas la dualité analytique, qui les intéresse beaucoup, et Spencer se convainc peu à peu que ta manière de voir le problème est meilleure que la sienne. Mais évidemment, tu auras à partager le gâteau, je songe avec mélancolie aux temps désormais révolus où nous disposions en exclusivité des yogas de la French Topology.

A propos de Boston, j'y ai été 3 jours (avec b) pour laiusser à MIT et ai logé chez Whitehead, mais je n'en ai pas tiré grand chose. Autant qu'il me semble, il ne chyade guère en ce moment.

Nomizu a rédigé la généralisation de Matsushima, ce n'est pas dégueulasse du tout. Il se demandait si cela se généralisait aux groupes résolubles. Hélas il n'en est rien, comme on le voit en faisant le quotien du groupe G* des déplacements du plan euclidien par un Z+Z formé de ttranslations. On obtient un T^3 évidemment dont la coh. ne peut être celle de l'algèbre de Lie de G*, qui étant non abélienne de dim. 3 possède un H^1 de dim. 3.

Néanmoins tu auras sans doute vu l'abstract où Mostow annonce que si G_1, G_2 sont résolubles, et si G_1/H_1 et G_2/H_2 sont compacts et ont des groupes fondamentaux isomorphes, ils sont homéomorphes. J'ai vu son papier sur la question, sa démonstration est épouvantable, mais peut être énormément simplifiée par utilisation de théorèmes sur les espaces univer-sels, mais il ne semble pas qu'elle puisse être trivialisée. En fait on tombe sur un pb du genre suivant : Soient B_1, B_2 2 variétés compactes, classifiantes pour un groupe G (disons discret) et pour toutes les dimensions. Sont-elles homéomorphes ? et si oui, le sont-elles par la project d'un homomorphisme des espaces universels ? Mostow, par d'astucieux choix de sous-groupes et de récurrences, se ramène essentiellement au cas où B_1 et B_2 sont des tores, et la réponse aux deux questions précédentes est alors évidemment oui. Dans l'ensemble, son papier est très intéressant, de très loin le meilleur qu'il ait pondu.

Il paraît (Nomizu dixit), que Koszul a émis la conjecture suivante: Soient G de Lie compact connexe, U sous-groupe fermé, U* la composante connexe de e de U. On considère la coh. réelle. Si U* est non homologue à zéro, alors H(G/U) = H(G/U*). S'il n'a pas trouvé la réponse, tu pourras à l'occasion lui dire que la réponse est affirmative. (En effet, H(G/U*) s'identifie à une sous-algèbre de H(G), par conséquent U/U* agit trivialement dessus, et on applique l'impérissable résultat déEckmann).

La remarque suivante quasique triviale, m'a bien ahuri, et le père foncteur ne voulait pas y croire ; Soit il s'agit d'homologie. Si H(X,Z) et H(Y,Z) sont de type fini, alors $H(X \times Y, Z_m) = H(X, Z_m) \otimes H(Y, Z_m)$, pour tout entier m 2, premier ou non. Cet isomorphisme est bien facile à établir, mais n'est pas naturel. Pour des polyèdres finis, on aura évidemment le même résultat en cohomologie, au point de vue additif au moins, mais j'aimerais beaucoup savoir si cela marche pour le cup-produit. As-tu des idées là-dessus ? Si oui, cela serait sans doute assez agréabl pour la suite spectrale.

Adem a paraît-il trouvé les relations, et ne semble pas savoir que Cartan a fait de même. Il commence à laiusser au Sém. Steenrod, mais cela s'annonce comme parfaitement imbitable. A propos, dans le papier que tu m'as envoyé, je suppose que le rang est plutôt l'entier $N = k_1 + \ldots + k_n$ que n. A part ça, Cartan a vraiment la pêche dans le maniement des coeff cients binomiaux; j'aurais, j'ai l'impression, bien séché pour résoudre c relations de récurrence. Il devrait bien être capable de trouver les pui sances réduites des classes de Chern, mais je suppose qu'il s'en fout. Que font les groupes stables ?

A part ça, tu dois te demander ce que je fous : Pas grand chose car je suis crevé, je commence à rédiger mon papier sur les groupes de Lie, et je chyade diverses combines pour tâcher de sortir de cette question, mais sans grand rendement.

Demain, départ pour Cornell pour un congrès de 4 jours sur la géom. diff. et les fibre bundles. Le plus intéressant sera probablement un talk de Chern sur les groupes de Lie infinis.