DER

CENSUS RÄUMLICHER COMPLEXE

ODER

VERALLGEMEINERUNG DES EULER'SCHEN SATZES VON DEN POLYEDERN.

VON

JOHANN BENEDICT LISTING.

Est modus in spatiis.

Mit zwei Figurentafeln.

Aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

GÖTTINGEN

IN DER DIETERICHSCHEN BUCHHANDLUNG.

1862.

Der von Euler in der Mitte des vorigen Jahrhunderts gefundene Satz über den Zusammenhang der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyëders[1]), wonach die Zahl der Ecken und Flächen zusammen genommen die Zahl der Kanten um 2 übertrifft, das Seitenstück des an sich evidenten Satzes, dass in einem Polygon die Zahl der Ecken gleich ist der Zahl der Seiten, ist von dem berühmten Erfinder in der ersten seiner beiden darauf bezüglichen Abhandlungen nur in unvollständiger Induction verificirt, in der zweiten aber streng bewiesen worden. Seitdem ist dieses Theorem von verschiedenen Geometern, wie Legendre[2]), Cauchy[3]), Lhuilier[4]) u. A. sowie noch

1) Leonh. Euler: Elementa doctrinae solidorum, und Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Commentarii Acad. Sc. Petrop. IV. ad annum 1752 et 1753. Petropoli 1758. pag. 109 und 140.

2) Elémens de géométrie, Paris 1794.

3) Recherches sur les polyèdres, 2de partie. Journal de l'Ecole polytechnique 16. Cahier. Paris 1813. pag. 76.

4) Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen de diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti (extrait par M. Gergonne). Annales de mathématiques pures et appliquées par Gergonne III. 1812 Dec. pag. 169.

neuerdings Cayley[1]) theils mit neuen Beweisen versehen, theils erweitert worden. Die verschiedenen zum Beweise des Satzes angewandten Methoden sind für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung weniger von unmittelbarem Interesse als die Erweiterungen desselben, welche als Anbahnung der Verallgemeinerung betrachtet werden dürfen, die den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet. Cauchy hat neben einem neuen Beweise dem Satze die Erweiterung gegeben, dass er sich auf ein zusammenhängendes Aggregat von Polyëdern, gleichsam mit Intercellularwänden versehen, bezieht, wo die im Euler'schen Satze vorkommende constante Zahl 2 durch $P + 1$ ersetzt wird, wenn P die Zahl der Raumtheile oder Partialpolyëder bedeutet, welche das polyëdrische Aggregat bilden. Während aber Euler und Cauchy andere als sogenannte convexe Polyëder — sei es stillschweigend, sei es ausdrücklich — von der Betrachtung ausschliessen, hat Lhuilier die sogenannten Ausnahmefälle, in welchen sich der Satz in der Euler'schen Fassung nicht verificirte, betrachtet und dem Theorem eine auch diese exceptionellen Fälle umfassende Erweiterung zu geben gesucht. Die drei Arten dieser sog. Ausnahmen, nach Lhuilier's Meinung die einzig möglichen, führen auf die allgemeine Relation

$$F + S = A + 2(i - o + 1) + (p + p' + p'' + \ldots)$$

wo i die Anzahl eingeschlossener Polyëderräume im Innern eines grösseren Polyëders, o die Anzahl von durchgehenden Oeffnungen, p, p', u. s. w. die Anzahl von eingeschriebenen Polygonen auf Seitenflächen des Polyëders bedeutet, welche dadurch ringförmige Zusammenhänge (nach unserer Ausdrucksweise Cyklosen) annehmen, wo ferner F die Zahl der Seitenflächen, S die Zahl der Ecken, A die Zahl der Kanten bezeichnet. Nur ist hierbei die aus der inductorischen Ausdehnung des Falles $o = 1$ auf Fälle complicirter Durch-

---

1) in einem erst nach Abschluss der vorliegenden Untersuchung bekannt gewordenen Aufsatz „on the Partitions of a Close“ in Lond. Edinb. Dubl. Philosophical Magazine 1861. June pag. 424. Die hier mehr angedeutete als durchgeführte Ausdehnung des Euler'schen Satzes auch auf krummlinige Flächenbegrenzungen bezieht sich wesentlich nur auf Linear-Configurationen in der Ebene oder auf der Kugelfläche.

löcherungen, wo der numerische Werth von o nicht sofort aus blosser Intuition hervorgeht, erwachsende Schwierigkeit weder erwogen noch erledigt.

Wir haben es im Folgenden nicht bloss mit Polyëdern irgend welcher Art und ihren Zusammensetzungen zu einer oder beliebig vielen ausser- oder ineinander bestehenden Gruppen, sondern mit *räumlichen Complexen* überhaupt zu thun, wie wir beliebige Aggregate von Punkten, Linien (gerade oder krumm) und Flächen (eben oder gekrümmt) nennen werden, durch welche der unbegrenzte Raum auf beliebige Weise vollkommen oder unvollkommen getheilt, die Theile auf beliebige Art, vollständig oder theilweise begrenzt werden. Je grösser aber die Allgemeinheit ist, welche man erzielt, desto schärfer müssen die Ausgangspunkte in ihren Begriffen festgestellt werden, will man nicht Gefahr laufen, der Allgemeinheit durch Unbestimmtheit oder Willkür ihren Werth zu entziehen. Während bei einem Polyëder kaum bevorwortet zu werden braucht, was man unter Eckpunkten, unter Kanten und Seitenflächen zu verstehen hat, genügt es in dem verallgemeinerten Gebiet räumlicher Complexe nicht, von einem Quadrat oder von einem Tetraëder zu sprechen; man muss vielmehr ausdrücklich angeben, ob das Quadrat bloss vier Seiten und vier Ecken, oder ob es auch eine Fläche besitze, die von den Linien der Figur eingeschlossen oder begrenzt wird, und ebenso ob das Tetraëder ausser seinen vier Ecken und sechs Kanten alle vier Seitenflächen, wie an einem soliden Körper, oder nur einige oder gar keine besitze, ähnlich einem Drahtgestelle mit oder ohne Papierwand.

Die genauer definirten Elemente und die aus ihnen zusammengesetzten Complexe werden nun zunächst, wie im Euler'schen Satze, gezählt, nur dass wir nicht bloss, wie dort, drei Zahlen — der Ecken, Kanten und Flächen — sondern vier, nämlich der Punkte, Linien, Flächen und Räume auszumitteln haben, welche alsdann durch das allgemeine Theorem mit einander in Relation treten. Es wird sich aber zeigen, dass das Theorem nicht die blosse Zahl jeder Art von Elementen, sondern für jedes Element noch eine numerische Modification erforderlich macht, der zu Folge der Satz nicht unmittelbar, sondern bloss mittelbar auf einer *Zählung* beruht, und so gleichsam in einem nach gewissen Rangklassen innerhalb der einzelnen Kategorien von Elementen geregelten *Census* besteht. Dieser Punkt in der Verallgemeinerung ist so wesentlich und durchgreifend, dass ich nicht angestanden habe, den Satz mit dem Namen des „Census“ räumlicher Complexe zu bezeichnen.

Der Inhalt des Satzes aber wird in seiner ersten allgemeinen Form darin bestehen, dass die in gedachter Weise modificirten Zahlen der Bestandtheile, so zu einem abgebraischen Aggregat vereinigt, dass die von gerader Anzahl von Dimensionen (Punkte und Flächen) positiv, die von ungerader Anzahl von Dimensionen (Linien und körperliche Räume) negativ genommen werden, von der Anzahl der Complexe um 1 übertroffen werden, d. h. bei Einem Complex Null, bei zweien 1, bei dreien 2 geben u. s. w.

Man sieht sofort, in welcher Weise sich der Euler'sche Satz als ganz specieller Fall diesem Theorem unterordnet. Die Summe nämlich der Ecken (oder Punkte) und ebenen Seiten (oder Flächen) positiv genommen, und der Kanten (oder Linien) und Räume (ihre Zahl ist hier allezeit $= 2$, der eingeschlossene und der ausgeschlossene Raum) negativ genommen ist gleich Null — die gedachte Modification fällt nämlich für die in diesem Falle betrachteten Polyëder weg.

Sodann aber wird das Theorem vermöge einer leichten Modification im Begriff des Complexes noch eine fernere, gleichsam mehr metaphysische Verallgemeinerung erlangen, in der jenes Aggregat von vier Gliedern unter Berücksichtigung der aus dem neuen Begriff des Complexes sich ergebenden Modalitäten in allen Fällen $= 0$ wird, selbst in dem anfänglich bei Seite zu setzenden Falle, wo sich beliebig viele Complextheile ins Unendliche erstrecken.

Diese einleitenden Bemerkungen mögen genügen, den Sinn des Theorems im Allgemeinen anzudeuten, dessen Begründung uns nun im Nachstehenden ausführlich beschäftigen soll.

1.

Begriff der Complexe und der Constituenten.

Unter einem *räumlichen Complex* verstehen wir vorerst jede beliebige Configuration von Punkten, Linien und Flächen im Raume, die Linien und

Flächen mögen gerade oder krumm, offen oder geschlossen, begrenzt oder unbegrenzt sein, nur dass alle diese Elemente unter sich zusammenhängen müssen, um zu Einem Complex gerechnet zu werden. Bei fehlendem Zusammenhang der Elemente haben wir es mit so vielen Complexen zu thun, als getrennte Configurationen im Raume vorhanden sind, gleichviel ob sie in einander oder neben einander bestehen. Es versteht sich von selbst, dass die Zahl einer oder mehrerer Arten von Elementen Null sein kann. So stellt z. B. ein einziger Punkt einen Complex dar, in welchem sowohl die Zahl der Linien, als der Flächen Null ist. Eine in sich zurückkehrende krumme Linie, z. B. der Umfang eines Kreises, würde einen Complex ohne Punkte und ohne Flächen, eine Kugelfläche einen Complex ohne Punkte und Linien, eine allseitig geschlossene mit einer Spitze versehene, birnförmige Fläche einen Complex bloss aus einem Punkte und einer Fläche bestehend darstellen. Selbst der Fall ist als zulässig zu betrachten, wo alle Elemente fehlen und somit die Zahl der Complexe Null ist.

Wir bemerken nun, dass wir uns im Folgenden zunächst auf die Betrachtung begrenzter oder endlicher Complexe beschränken, um weiterhin unter einer leichten Abänderung des Begriffes der Complexe die Untersuchung auch auf den Fall der Zulässigkeit unbegrenzter Complexe auszudehnen, d. h. solcher, wo Linien oder Flächen, die sie enthalten, sich ein- oder mehrseitig in unendliche Ferne erstrecken. Die Unbeschränktheit der Ausdehnung bleibt demnach vorläufig dem die Complexe umgebenden und ins Unendliche sich erstreckenden Raume allein reservirt.

Unter *Constituenten* verstehen wir die vorgenannten drei Arten von Elementen, welche die Complexe bilden, nebst den Theilen des ganzen unendlichen Raumes, welche durch die Complexe und ihre Elemente von einander abgegrenzt werden. Es gibt demnach vier Arten von Constituenten.

Zur Schärfe dieser vorläufigen Feststellungen ist es erforderlich, daran zu erinnern, dass man jeden körperlichen Raum als das Aggregat einer unendlichen Zahl von Flächen, jede Fläche als das Aggregat einer unendlichen Zahl von Linien, jede Linie als das Aggregat unendlich vieler Punkte betrachten kann, und dass man demzufolge bei gegebenem Complex oder gegebenen Complexen sämmtliche Constituenten auf Eine oder im Allgemeinen auf weniger als vier Kategorien würde zurückführen können. Da indessen hierdurch offenbar nicht nur einer oder mehrere Constituenten in unendlicher Anzahl auftreten, sondern auch eine der für unser Theorem wichtigsten Verschiedenartigkeiten unberücksichtigt bleiben würde, so schliessen wir hier solche Aequivalenzen, wie einer Fläche mit unendlich vielen in ihr enthaltenen Linien, einer Linie mit der unendlichen Reihe der in ihr enthaltenen Punkte, als unzulässig aus.

Die vier Arten von Constituenten nennen wir *Curien*.

2.

Erste Curie: Punkte.

Die Punkte, welche in der ersten Curie gezählt werden, sind die Grenzen nicht bloss von Linien, wie das Ende einer Linie oder die Grenze zwischen zwei oder mehreren Linien, z. B. eine Polygon- oder Polyëder-Ecke, sondern auch von Flächen oder Körpern, wo sie ebensowohl als Spitzen oder Ecken, wie bei einer Kegelfläche, als auch auf einer stetig gekrümmten oder ebenen Fläche vorkommen können, wie der Mittelpunkt einer Kreisfläche (die in diesem Falle als eine Ringfläche zu betrachten ist, mit einer äusseren Grenze, dem Kreisumfang, und einer inneren, dem Mittelpunkte) oder wie der Berührungspunkt zweier sich berührenden Kugelflächen. Im letztgedachten Beispiel kann der Punkt als solcher verloren gehen, sobald sich die zwei Kugeln von einander trennen und zwei Complexe bilden, oder aber eine oder beide Kugeln den Punkt auf ihrer Oberfläche (im letzteren Falle als zwei Punkte) behalten, je nachdem es bei Aufstellung der Elemente so oder anders bestimmt worden. Diese Beispiele legen vor Augen, dass jeder Binnenpunkt einer Linie oder einer Fläche oder jeder isolirte Punkt im Raume als zählpflichtiger Punkt, der sich als solcher von jedem andern bloss möglichen unterscheidet, unter den Constituenten gegeben sein kann. Es scheint daher zweckmässig, solche als Constituenten unter den Daten gegebene Punkte so wie alle Elemente, sofern sie in ihrer Curie mitzählen sollen, durch das Beiwort *effectiv* zu bezeichnen, und andere bei den Betrachtungen oder Operationen nur vorübergehend zu Hülfe genommene und in ihrer Curie nicht mitzählende Elemente durch die Bezeichnung *virtuell* von ihnen ausdrücklich zu unterscheiden. Bei Polyëdern, auf welche allein, und nicht einmal in ihrer möglichsten Allgemeinheit, sich der Euler'sche Satz in seiner ursprünglichen Form bezieht, erscheinen lediglich die Eckpunkte als (in unserm Sinne) effective Punkte. Wir statuiren die Zulässigkeit noch anderer effectiver Punkte sowohl innerhalb jeder Kante und jeder Seitenfläche als innerhalb oder ausserhalb des polyëdrischen Raumes. Die Allgemeinheit, welche den gegenwärtigen Betrachtungen vindicirt werden soll, lässt es als irrelevant erscheinen, ob z. B. der Winkel zwischen zwei an einem effectiven Punkte an einander grenzenden Linien oder zwischen ihren Endstücken einen Winkel von 144° oder von 180° bilden, und ob der Körperwinkel der einen Raum begrenzenden Fläche an einem effectiven Punkte dieser Fläche den achten Theil der Kugelfläche (vom Radius 1), wie beim Würfel, oder die Halbkugel zum Maasse hat, wie an jedem (effectiven) Binnenpunkte einer ebenen oder stetig krummen Oberfläche.

Wir werden die Zahl oder den Numerus der effectiven Punkte durch a bezeichnen, welches also Null oder jede endliche positive ganze Zahl bedeuten kann.

3.

Zweite Curie: Linien.

Während die Constituenten der ersten Curie in Elementen ohne räumliche Dimension, den Punkten, bestehen, enthält die zweite Curie Elemente von Einer Dimension, die Linien. Da wir vorerst nur endliche Complexe betrachten, so ist die einzige Bedingung, welche wir den effectiven Constituenten dieser Curie auferlegen, dass der Fall ihrer unbegrenzten Ausdehnung in unendliche Ferne ausgeschlossen bleibe, so dass also eine von einem gegebenen Anfangspunkte ausgehende, ins Unendliche sich erstreckende gerade Linie ebensowohl als eine beiderseits unbegrenzte gerade oder die längs ihren Asymptoten verlaufenden endlosen Curvenzweige noch unzulässig sein sollen. Uebrigens ist jede Gestaltung statthaft: gerade oder krumm; zweiendig, wie die Seite eines Dreiecks; oder einendig, wie jeder der zwei Theile oder Schlingen einer 8 oder wie der mit einem effectiven Punkte versehene Kreisumfang; in sich geschlossen, wie jede in sich zurückkehrende sich nirgend selbst schneidende Curve im Raum, in einfachem oder beliebig verschlungenem oder verknotetem Verlauf. Mehrere dieser Verschiedenartigkeiten, wiewohl alle gleich zulässig, werden weiterhin ihre wesentliche Berücksichtigung finden. So wie die Constituenten der ersten Curie als Grenzen der Constituenten der drei folgenden (höheren) Curien erscheinen, so treten die der zweiten Curie als Grenzen der zwei folgenden Curien, d. i. sowohl der Flächen als der körperlichen Räume auf. Die 6 Kanten eines Tetraëders begrenzen nicht nur die 4 dreiseitigen Seitenflächen dieses Körpers, sondern auch im Verein mit diesen Seiten sowohl den eingeschlossenen tetraëdrischen Raum, als den diesen Körper umgebenden äussern Raum. Ein bloss aus den Tetraëderkanten bestehender Complex, enthaltend 4 Punkte und 6 Linien, gibt dem ganzen unendlichen Raum, obwohl er nicht mehr, wie im vorigen Beispiel, wo die Seitenflächen des Tetraëders effectiv waren, in getrennte Stücke zerfällt, eine in gewissem Maasse complicirte Begrenzung, durch welche die Beschaffenheit dieses Constituenten auf eigenthümliche Weise modificirt wird. Eine mit einem Durchmesser oder einer Sehne versehene Kugelfläche enthält einen inneren Raum, der von der Fläche einerseits, von der Linie andererseits begrenzt ist, ähnlich einem mit einer Durchbohrung versehenen soliden Körper. Während die Durchschnitte von Flächen, die Kanten von Oberflächen, mögen sie, wie bei Polyëdern aus ebenen Theilen bestehen oder nicht, die Grenzen von Flächen ohne Nachbarflächen, wie die Seiten einer einzigen Dreiecksfläche, und endlich isolirte oder nackte Linien, wie die Sehne oder ein einzelner Radius einer Kugel, oder wie eine einzelne ringförmige Linie, selbstverständlich als effectiv gelten, so können überdies auch Linien in einer jeden Fläche als effective gegeben sein, die man sich dann als Kanten der Fläche vorstellen darf, längs welchen der diëdrische Kantenwinkel rücksichtlich beider Flächenseiten 180° beträgt. Begrenzt werden die Linien nur durch Punkte, oder sie ermangeln — ohne unendlich zu sein — der Grenze, wie Ringlinien.

Wir zählen jede Linie, so weit keiner ihrer Binnenpunkte effectiv ist, als einen Constituenten der zweiten Curie, und bezeichnen den Numerus dieser Curie durch b, welches wie a Null oder jede endliche positive ganze Zahl bedeuten kann.

4.

Dritte Curie: Flächen.

Die Flächen oder Constituenten zweier Dimensionen, der dritten Curie zugehörig, fungiren neben Linien und Punkten als Begrenzungen der Körperräume, welche die nächst höhere Curie bilden, während sie selbst sowohl von Linien als von Punkten begrenzt sein oder auch, wie z. B. rundum geschlossene sphäroidische Flächen ohne effective Punkte und Linien, aller Grenzen entbehren können. Auch hier schliessen wir vorerst, wie in der vorigen Curie, Ausdehnungen oder Erstreckungen in unendliche Ferne aus. Der eben erwähnte Fall der Abwesenheit einer Begrenzung, der sich an mannigfach gestalteten allseitig geschlossenen Flächen darbietet, wie Kugel, Ellipsoid, körperlicher Ring u. s. w., welche einzeln einen Complex für sich bilden, bestehend bloss aus einer Fläche nebst zwei Körperräumen, wird durch die Singularität seines Begrenzungsverhältnisses später eine besondere Betrachtung veranlassen. Flächen können ferner bloss Punkte als Grenzen besitzen, wie z. B. eine mit einer beliebigen Zahl auf ihrer Oberfläche befindlicher effectiver Punkte versehene sphäroidische Fläche; oder von einer Linie allein begrenzt sein, wie die Fläche einer Ellipse, ihren Umfang ohne effectiven Punkt vorausgesetzt; oder endlich von Linien und Punkten zugleich, wie die Seitenflächen jedes Polyëders.

Wir zählen als Einen Constituenten in dieser Curie jede Fläche, in welcher man von einem beliebigen Punkte nach allen übrigen Punkten Linien in der Fläche ziehen kann, ohne eine Grenze der Fläche zu überschreiten. Ihre Gestaltung bietet grosse Mannigfaltigkeiten und Complicationen dar, wie weiterhin bei der Cyklose erhellen wird. Die Grenzen einer Fläche können sowohl einfach als beliebig vielfach sein, und als nullfach ist die Grenze in dem erwähnten Falle einer allseitig geschlossenen Fläche zu betrachten. Einfach ist die Grenze bei der Fläche eines Polygons, wo begrenzende Linien und Punkte eine zusammenhängende und geschlossene Reihe von Gliedern bilden. Doppelt ist die Grenze einer ringförmigen zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltenen Fläche und ebenso einer cylindrischen, röhren- oder schlauchförmigen Fläche, die an jedem der beiden Canal-Enden von cyklischen Linien begrenzt ist, wie in Fig. 1 und 2.

Wir bezeichnen die Zahl der Flächen oder den Numerus der Constituenten der dritten Curie mit c, welches wie a und b Null oder jede endliche positive ganze Zahl bedeuten kann.

5.

Vierte Curie: Räume.

Die körperlichen Räume, welche durch die Complexe von einander getrennt werden, bilden die Constituenten dreier Dimensionen und zählen in der vierten Curie. Der ganze unbegrenzte Raum zerfällt im Allgemeinen durch die gegebenen Complexe in getrennte Theile, nämlich in abgegrenzte körperliche Räume oder Compartimente und einen ausgeschlossenen, nach allen Seiten hin in unbegrenzte Ferne sich erstreckenden, die Complexe umgebenden Raum, welchen letzteren wir mit dem schon bei anderer Gelegenheit[1]) gebrauchten Namen *Amplexum* bezeichnen werden. In besonderen, nicht seltenen Fällen aber kann eine solche Trennung oder Theilung ausbleiben, nämlich einmal offenbar, wenn die Zahl der Complexe Null ist, und sodann, wenn entweder die gegebenen Complexe keine Flächen enthalten d. i. wenn $c = 0$, oder wenn die in ihnen enthaltenen Flächen keinen endlichen körperlichen Raum abschliessen, wie z. B. der Fall sein würde, wenn man an einem Polyëder, unbeschadet seiner Kanten und Ecken, eine oder einige Seitenflächen hinwegnähme, d. h. aufhören liesse, effectiv zu sein. Der ganze amplexe Raum bildet in solchen Fällen einen einzigen Constituenten der vierten Curie, während gegentheiligen Falls ausser dem Amplexum noch so viele Raum-

1) Vorstudien zur Topologie, in den Göttinger Studien 1847. 1. Abtheilung math. und naturw. Abh. S. 863.

theile zählen, als abgeschlossene und gegenseitig begrenzte Compartimente in oder zwischen den Complexen enthalten sind.

Die Gestaltung der körperlichen Räume kann ebenso mannigfaltig und complicirt sein, wie die der Flächen. Die von den Gliedern der drei ersten Curien gebildeten Grenzen derselben können, wie die Flächengrenzen, einfach oder mehrfach sein, einfach z. B. bei einem gewöhnlichen Polyëder, mehrfach bei dem von beliebig vielen ausser einander befindlichen Kugeln ausgeschlossenen und von einer grösseren Kugel eingeschlossenen Raum und eben so bei dem mehrere ausser einander befindliche Complexe umgebenden Amplexum. Nullfach ist die Grenze lediglich in dem Falle der Abwesenheit aller Complexe.

Wir betrachten alle Theile des gesammten Raumes durchweg als in der vierten Curie effectiv, so dass die Summe aller Constituenten dieser Curie den gesammten Raum ohne Auslassungen oder Lücken darstellen. Als Einem Raum zugehörig betrachten wir die Gesammtheit aller Raumelemente, welche unter sich so zusammenhängen, dass man von einem derselben auf irgend welchen im Innern des Raumes möglichen Wegen, ohne Ueberschreitung einer Grenze, zu jedem andern gelangen kann.

Die Zahl der Räume oder den Numerus der vierten Curie bezeichnen wir mit d, wo d alle ganzen positiven Zahlen von 1 an bedeuten kann.

Die Zahl der als zugleich bestehend gegebenen, unter einander durch Constituenten der drei ersten Curien nicht zusammenhängenden Complexe bezeichnen wir durch p, welches Null oder jede endliche positive ganze Zahl bedeuten kann.

6.

Von der Begrenzung.

Aus den über die Complexe und die Constituenten gemachten Feststellungen ist ersichtlich, dass die Begrenzung irgend eines Constituenten nicht bloss von den Constituenten der nächst niedrigeren Curien, sondern auch von denen aller niedrigeren Curien bewirkt werden kann. Constituenten von gleicher Curie aber können *an* einander grenzen, d. i. benachbart oder *contigent* sein, indem sie durch begrenzende Glieder niedrigerer Curien von einander geschieden werden, woraus sich sofort ergibt, dass die *Contigenz* nur zwischen gleichartigen Constituenten der zweiten, dritten und vierten Curie, als neben welchen niedrigere Curien bestehen, nicht aber zwischen Constituenten der ersten Curie, d. i. zwischen effectiven Punkten bestehen kann. Eine durch zwei beliebige Durchmesser in vier Sectoren getheilte Kreisfläche bietet Contigenz zwischen je zweien dieser vier Theile dar: vier Paare neben einander liegender Sectoren besitzen eine aus einem Kreisradius und seinen beiden Endpunkten bestehende gemeinschaftliche Grenze, zwei Paare einander gegenüberliegender Sectoren besitzen eine nur aus einem Punkte, dem Kreismittelpunkte, bestehende gemeinsame Grenze. Auch zwischen zwei oder mehreren Theilen derselben Linie, derselben Fläche oder desselben Körperraums kann Contigenz Statt finden. Eine mit einem effectiven Punkte versehene Ringlinie hat an diesem Punkte Contigenz zwischen ihren beiden Extremitäten oder Enden.

Bezeichnen wir die Constituenten nach ihren Curien symbolisch durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, wo 1 die Punkte, 2 die Linien u. s. f. bedeutet, so stellen sich für die Contigenz die drei möglichen Fälle in den Symbolen

$$[4,4], \quad [3,3], \quad [2,2]$$

dar. Aehnliche Symbole dienen die Begrenzung zu bezeichnen, wobei wir das begrenzte Element voranstellen und ihm die begrenzenden nachfolgen lassen:

[20]	[300]	[4000]
[21]	[301]	[4001]
	[320]	[4020]
	[321]	[4021]
		[4300]
		[4301]
		[4320]
		[4321]

Von den drei nullfachen Begrenzungen [20], [300], [4000] bedeutet die erste jede in sich zurücklaufende Curve oder Ringlinie ohne effective Punkte, die zweite jede rundum geschlossene Fläche ohne effective Linien oder Punkte, und die letzte den ganzen unbegrenzten Raum, wo die Zahl p der Complexe Null ist.

7.

Von der Cyklose und der Dialyse

Unter den Constituenten der einzelnen Curien gibt es verschiedene Arten oder Kategorien, deren Unterscheidung lediglich von *topologischen* Eigenschaften, d. i. solchen abhängt, die sich nicht auf die Quantität und das Maass der Ausdehnung, sondern auf den Modus der Anordnung und Lage beziehen. Die Modalität des Zusammenhangs der Theile innerhalb jedes einzelnen Constituenten ist es, welche die nunmehr in Betracht kommenden Unterschiede bedingt.

Körperliche Räume und Flächen können so gestaltet sein, dass sie gleichsam wie mit Durchgängen oder Durchlöcherungen versehen erscheinen. Auch jede in sich zurückkehrende Ringlinie bietet einen solchen Durchgang dar.

Denken wir uns zur Vorbereitung für die genauere Untersuchung dieser Gestaltungsweisen eine einfache unverknotete und unverschlungene Ringlinie und nehmen an, dass sie sich ohne die geschlossene Ringform zu verlieren in Form und Lage beliebig aber stetig so verändere, dass ihre späteren Gestalten denen, die sie früher besessen, nirgend begegnen, und damit ende, dass unter stetiger Verkürzung ihres Umfangs bis zu Null, ihre Figur in einem (nicht effectiven) Punkte verschwinde, so beschreibt die cyklische Linie bei dieser stetigen Formänderung eine Fläche im Raum, die von der Ringlinie in ihrer anfänglichen Gestalt vollständig und einfach begrenzt wird. Der Zusammenhang ihrer Theile, sie mochte in Folge ihrer Entstehungsweise eben oder irgend wie und mannigfach gekrümmt ausfallen, ist so einfach, wie der einer Kreisfläche, ohne Durchgänge oder Löcher, vollständig von einem cyklischen Rand begrenzt, der, wenn man von einem Orte auf einer ihrer beiden Seiten nach dem ihm antipodisch gegenüberliegenden Orte der andern Seite, ohne die Fläche zu durchbohren, gelangen will, nothwendig irgendwo überschritten werden muss, so dass der Rand zugleich die alleinige Scheidelinie ist zwischen den zwei vollständig von einander getrennten (gleich grossen) Arealgebieten ihrer zwei Seiten [1]). Für sich allein schliesst sie keinen Körperraum ein,

---

1) Es mag nicht überflüssig erscheinen, schon bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dass eine von einer cyklischen unverknoteten Curve voll-

sondern kann dies nur in Verbindung mit anderen Flächen. Eine solche cyklisch begrenzte einfach zusammenhängende Fläche werden wir zuweilen der Kürze wegen *Zwerchfläche* oder *Diaphragma* desjenigen Cyclus nennen, der ihren Rand darstellt. Es ist klar, dass es unzählig viele Zwerchflächen desselben Cyklus geben wird, und dass zwei solcher Flächen von der Art, dass sie sich ausser an ihrem gemeinsamen Rande nirgend sonstwo begegnen oder durchschneiden, einen körperlichen Raum einschliessen, dessen vollständige Begrenzung von beiden Flächen und ihrem gemeinschaftlichen cyklischen Rand gebildet wird, wovon die Halbkugel, sowie jeder der drei Räume, welche durch zwei einander schneidende sphäroidische Flächen von einander gesondert werden, einfache Beispiele darbieten.

8.

Zur einfachen Ringlinie g (Fig. 5) gehöre die Zwerchfläche G dann ziehe man durch einen innerhalb G liegenden Punkt h eine zweite Ringlinie g' so dass sie die Fläche G in diesem Punkte durchschneidet und sonst keinen Punkt mit ihr gemein habe, so greifen die Cyklen g und g' kettenartig ineinander. Eine Zwerchfläche G' der Ringlinie g' wird ebenso von g nur in einem einzigen Punkte getroffen und durchschnitten. Die Grenze g' der Fläche G' erstreckt sich vom Punkte h aus nach entgegengesetzten Seiten von G, und ebenso erstreckt sich die Grenze g der Fläche G vom Punkte h' aus nach entgegengesetzten Seiten von G'. Die beiden Diaphragmen G und G' müssen sich also in einer einfachen unverknoteten Curve schneiden, deren Endpunkte h und h' sind. Von den Ringlinien g und g' sagen wir, sie seien *einfach verkettet*.

Fassen wir ohne Berücksichtigung der Zwerchflächen G und G' bloss die beiden Cyklen g und g' ins Auge, so geht offenbar von jeder beider Curven nur ein einziger Tractus durch den von der andern gebildeten Ring. Wir nennen die Verkettung einfach, so lange dies Kennzeichen Statt findet,

ständig begrenzte Fläche ganz andere Eigenschaften haben kann, als die eben angeführten. Fig. 3 und 4 stellen solche Beispiele dar.

die Curven mögen übrigens irgend wie verschlungen oder verknotet sein, wie beispielsweise Fig. 6 veranschaulicht. In jedem andern Falle zweier in einander greifender Cyklen ist die Verkettung mehrfach [1]).

9.

Es sei nun allgemein K ein beliebiger Constituent, L die Gesammtheit der seine Grenze bildenden Constituenten niedrigerer Curien, M der gesammte übrige körperliche Raum. Lassen sich nun zwei einfach verkettete die Grenze L nirgend durchschneidende Cyklen k und m so ziehen, dass k ganz in K, m ganz in M liegt, so nennen wir diese Eigenschaft von K eine *Cyklose*, den Constituenten K selbst *cyklodisch*. Im gegentheiligen Falle, wo K keine Cyklose besitzt, nennen wir ihn *acyklodisch*.

Da im Falle der Cyklose m ganz ausserhalb K liegt und alle Theile von K einen stetigen Zusammenhang untereinander besitzen, und m, weil im übrigen Raum M liegend und mit k einfach verkettet, muss einfach cyklisch, d. i. unverschlungen und unverkettet gezogen werden können, so muss es im Allgemeinen möglich sein, mittelst eines Diaphragmas von m den cyklodischen Constituenten K einmal und zwar so zu durchschneiden, dass der als additioneller Theil L' der Grenze L zu betrachtende Durchschnitt, dessen Curie um 1 niedriger ist als die von K, selbst acyklodisch ist. Nur wenn $L = 0$ ist und also K eine der Begrenzungsformen [4000], [300], [20] darbietet, kann ein singulärer Fall eintreten, in welchem dies wenigstens unmittelbar

---

1) Das Kriterium der einfachen Verkettung zwischen zwei irgend wie gestalteten Cyklen lässt sich nach den in den „Vorstudien zur Topologie" gegebenen Betrachtungsweisen dahin aussprechen, dass die beiden Cyklen — wenn erforderlich — so transformirt werden können, dass sie in ihrer Projection eine zweiseitige Parzelle (Oese) darstellen, mit gleichwendlichen Ecken versehen, mittelst deren sie an das Amplexum grenzt, jede Seite derselben je einem Cyklus angehörig. Diese Oese würde im Falle der Figuren 5. und 6. das Symbol δ^2 erhalten. Bei zwei einfachen einfach verketteten Cyklen gibt die Transformation und Projection vier solcher zweiseitiger Parzellen, deren eine das Amplexum ist, mit dem Symbol $2(\delta^2 + \lambda^2)$.

nicht möglich ist. Dieser particuläre Fall ist lediglich an die Begrenzungsform [300] geknüpft und wir werden ihn vorläufig bis zu einer weiter unten vorzunehmenden besonderen Discussion bei Seite setzen. Die zwei übrigen Fälle dagegen lassen sich sofort erledigen. Der Fall des Begrenzungstypus [4000] nämlich, wo $p = 0$, kann überall keine Cyklose darbieten, weil ausser K kein L und kein M und somit kein m existirt; der Fall [20] endlich enspricht einer cyklischen Curve ohne effectiven Punkt, bei welcher wir durch den Schnitt mittelst der Zwerchfläche von m nur einen Punkt erhalten werden, der wie alle Punkte, und somit die Constituenten der ersten Curie durchweg, offenbar acyklodisch ist.

Diese Durchschneidung sowie den dadurch erzeugten Durchschnitt L' bezeichnen wir durch den Ausdruck *Dialyse.*

10.

Wir unterwerfen den mit der neuen Grenze $L + L'$ versehenen Constituenten K, den wir, sofern die Dialyse L' wie die vorige Grenze L als effectiv betrachtet wird, durch K' bezeichnen, von neuem derselben Prüfung, und falls sich auch K' cyklodisch erweist, derselben Operation. Es geht in diesem Falle durch die neuen verketteten die neue Grenze $L + L'$ nirgend durchschneidenden Cyklen k' (innerhalb K') und m' (innerhalb M) eine neue Dialyse L'' hervor. Durch Wiederholung dieses Verfahrens, so lange bis durch die successiven Dialysen L', L'', L''', . . ., die letzte sei $L^{(x)}$, der Constituent K in seinem Zustande $K^{(x)}$ sich als acyklodisch erweist, finden wir dass der untersuchte Constituent x Cyklosen besitzt, die durch x Dialysen successiv annullirt worden sind, oder dass derselbe x fach cyklodisch ist. Jeder x fach cyklodische Constituent kann durch x Dialysen so durchschnitten werden, dass er nicht in getrennte Stücke zerfällt, sondern noch den Zusammenhang behält, der erforderlich ist, ihn im Census als Einen Constituenten zu zählen. Die Dialysen, obschon wahrhafte Durchschnitte, stellen gleichwohl nur die Auflösung der Anastomosen, die Vernichtung mehrfacher Zusammenhänge dar, welche cyklodische Linien, Flächen oder Körperräume besitzen, wie wenn man einen Ring aufschneidet, einen Schlauch der Länge nach aufschlitzt, u. s. w.

Insofern jedem acyklodischen Constituenten ein einfacher Zusammenhang beigelegt werden muss, erscheint ein Constituent von Einer Cyklose als zweifach zusammenhängend, von zwei Cyklosen als dreifach zusammenhängend u. s. w.

11.

Bei der den räumlichen Complexen zugedachten Allgemeinheit, so wie der damit verbundenen Möglichkeit selbst der verwickeltsten Gestaltungen leuchtet es ein, dass die in den vorigen Artikeln nur in ihren Grundzügen enthaltene Operation der Dialyse und die aus ihrer Wiederholung hergeleitete Ordnungszahl der Cyklose eines Constituenten irgend welcher Curie noch mancher näheren Beleuchtung bedarf, um in allen Fällen eine sichere Anwendung zu gestatten, was gleich anfänglich nicht ohne die Gefahr, den wesentlichen Grundgedanken, der in Art. 9 und 10 darzulegen war, zu beeinträchtigen, würde thunlich gewesen sein. Den cyklischen Linien k und m wird man, ohne die an sie gestellten Forderungen ausser Acht zu lassen, verschiedene, ja unzählig viele Lagen ertheilen können, und die durch sie ermittelten Cyklosen können in verschiedener Reihenfolge oder in verschiedenen Typen auf einander folgen. Die Curve k kann möglicherweise nicht anders als verschlungen oder verknotet realisirt werden, u. dgl. m. Es ist also erforderlich, je verwickelter solche Eventualitäten sein können, desto sorgfältiger auf die wesentlichen Erfordernisse der auf die Cyklose bezüglichen topologischen Analyse aufmerksam zu machen. Es scheint angemessen, zu diesem Behuf erst noch einiges Allgemeine zu erörtern und dann auf die Betrachtung der einzelnen Curien in Beziehung auf die Cyklose überzugehen.

Hätte man zur Ermittelung einer Cyklose und der sie auflösenden Dialyse zwei Cykeln k und m ausfindig gemacht, die den an sie gestellten Forderungen bis auf die der einfachen Verkettung genügten, so wäre es nicht nöthig sie als unbrauchbar völlig zu verwerfen, indem kleine Abänderungen sei es im Verfahren, sei es an den Cykeln selbst zur Dialyse der in solchem Falle vorhandenen Cyklose führen können. Das Diaphragma von m, welches nunmehr vorerst mit k mehrfach verkettet vorausgesetzt wird, liefert, obwohl k mehrfach, also in getrennte Stücke schneidend, an K entweder einen oder mehrere

Durchschnitte. Im ersten Fall ist der Schnitt als Dialyse gültig, im zweiten kann man von den mehrfachen Schnitten nach Belieben einen als solchen auswählen; mehr als einer würde K in getrennte Stücke zerschneiden. Im ersten Falle wird k in K so gezogen werden können, dass nicht mehrfache, sondern nur Ein Tractus von k durch den Ring m geht, im zweiten wird m gegen einen andern Cyklus können vertauscht werden, der nicht mehr als einen Tractus von k umringt.

Die nachstehenden Figuren 7 — 14 mögen das Gesagte in einigen Beispielen erläutern. Der in den Figuren nicht selbst dargestellte Constituent sei ein cyklodischer Körper, mit beliebig wie auf seiner Oberfläche angeordneten und dieselbe in Flächenstücke sondernden Kanten (gleichsam Nähten) versehen. In Fig. 7, 9, 11, 13 ist ein verschlungener oder verknoteter Cyklus k mit dem einfachen Cyklus m doppelt verkettet. Die Zwerchfläche von m liefert in Fig. 7 und 11 Einen, in Fig. 9 und 13 dagegen zwei Durchschnitte des Körpers K. Der eine Durchschnitt in Fig. 7 und 11 kann sofort als Dialyse beibehalten, der andere verworfen werden. Dem gegenüber stellen die Figuren 8, 10, 12, 14, die an den Cykeln k und m vorgenommenen Abänderungen dar, durch welche einfache Verkettung zwischen ihnen hergestellt wird. In Fig. 8 ist k durch den unverschlungenen, in Fig. 12 durch den unverknoteten Cyklus k', in Fig. 10 und 14 ist der zweifach verkettete Cyklus m durch den einfach verketteten m' oder m'' oder m''' ersetzt.

12.

Die bisherigen Betrachtungen zeigen zwar den Weg zur Ausführung der successiven Dialysen, welche den gegebenen Constituenten zuletzt acyklodisch machen und ihm nur einfachen Zusammenhang ertheilen, und deren Anzahl den Werth von x bestimmen soll. Es bleibt hierbei jedoch noch fraglich, ob x in jedem concreten Falle einen bestimmten von der Wahl und der Ordnung der auf einander folgenden Dialysen unabhängigen Werth besitze. Betrachten wir das in Fig. 15 dargestellte Beispiel eines mehrfach cyklodischen Körpers, und wählen zur ersten Dialyse nur eine der sechs (durch Doppelstriche kenntlich gemachten) Stellen 1, 2, 3, 4, 5, 6, so würden sich, wenn man sich lediglich auf diese sechs Stellen behufs der Durchschneidung beschränkte, in jedem der sechs Fälle die successiven Durchschneidungen auf 120 verschiedene Arten ausführen lassen, welche durch sämmtliche Permutationen der sechs Ziffern von 1 bis 6 dargestellt würden. Aber in den meisten aller 720 Fälle würde sich der Körper schon nach der dritten Durhschneidung als einfach zusammenhängend herausstellen, und in einigen Fällen würde der dritte Schnitt den Körper schon in zwei Theile zerlegen, ohne dass er beim zweiten schon acyklodisch geworden wäre. In keinem Falle gestattet der Körper mehr als 3 Dialysen. Bilden wir also aus den Ziffern 1 bis 6 die Combinationen zu drei nebst ihren Permutationen, so müssen diese Symbole sämmtliche Vorschriften zur Zurückführung des Körpers auf seinen acyklodischen Zustand enthalten. Da unter diesen 120 Symbolen aber sowohl die Combinationen 136, 145, 235, 246 als ihre Permutationen, deren Zahl sich auf 24 beläuft, aus dem eben erwähnten Grunde als unanwendbar verworfen werden müssen, so folgt, dass sich der Körper auf 96 verschiedene Verfahrungsweisen durch drei successive Dialysen acyklodisch machen lasse, und dass sich also für denselben jedesmal $\varkappa = 3$ herausstellt.

Es kann dargethan werden, dass die Ordnungszahl $\varkappa$ der Cyklose allgemein bei irgend welchem gegebenen Constituenten von der Wahl und der Reihenfolge der Dialysen unabhängig und lediglich von der topologischen Beschaffenheit desselben abhängig ist.

13.

Von dem Diagramm.

Wir nehmen an, es sei ein beliebiger Constituent K gegeben, L sei seine Gesammtgrenze, welche, wie Art. 6 erörtert worden, im Allgemeinen aus Constituenten niedrigerer Curien besteht. Ertheilen wir nun der Grenze L an allen ihren Theilen eine stetige Veränderung in der Weise, dass dieselbe im Allgemeinen ohne Verletzung der ihr anfänglich zukommenden Zusammenhänge durch unendlich kleine, gleiche oder ungleiche Schritte immer tiefer ins Innere von K rücke, so lange bis durch diese Art von Verschmälerung, Verdünnung oder Zusammenschnürung K auf einen Complex bloss von Linien und Punkten reducirt ist, so geht aus K im Allgemeinen ein Complex hervor, welcher nur aus Constituenten der beiden ersten Curien besteht, und welcher gleichsam als das lineare Skelett des gegebenen Constituenten betrachtet werden kann. Die durch solche Transformation der Grenze L hervorgehende Linear-Complexion nennen wir das *cyklomatische Diagramm* oder *Diagramm* kurzweg von K.

Es mag nicht überflüssig sein, hierbei zu bemerken, dass diese Reduction eines Körpers oder einer Fläche oder einer Linie auf ihr Diagramm zwar als eine Contraction, wie sie bei Anwendung von äusseren Druckkräften oder durch Temperaturerniedrigung bei physischen Körpern eintritt, angesehen werden darf, dass aber bei dem hier vorausgesetzten Vorgange nur acyklodische Constituenten sich bis zu einem Punkte contrahiren, während solche, die mit Cyklosen begabt sind, den cyklodischen Charakter auch noch in ihrem Diagramm behalten. Das Diagramm jeder von Punkten begrenzten Linie ist ein Punkt, in welchem sich bei stetiger gegenseitiger Annäherung der ins Innere der Linie rückenden Endpunkte, die beiden Grenzen begegnen, wobei es gleichgültig ist, welchen Binnenpunkt der Linie man als ihr Diagramm betrachten will. Das Diagramm jeder acyklodischen Fläche, z. B. eines beliebigen Polygons, ist gleichfalls ein Punkt, der beliebig auf der Fläche angenommen werden darf, und ebenso ist das Diagramm eines acyklodischen Körpers, z. B. eines beliebigen Polyëders, ein im Innern des Körpers gelegener Punkt. Eine Ringfläche aber oder ein körperlicher Ring besitzen ein cyklisches Diagramm, welches innerhalb der Lineargrenzen oder im Innern des Körpers verläuft, während hier eine der Contraction, wie sie bei physischen Vorgängen Statt findet, ähnliche Veränderung in letzter Instanz die Fläche oder den Körper auf einen Punkt reduciren würde, indem die Grenze derselben zum Theil nach Innen, zum Theil nach Aussen rücken und die Ringöffnung verschwinden müsste.

Das Bisherige mag noch an einem besonderen Falle beispielsweise erläutert werden. In einer polygonal oder cyklisch begrenzten Ebene denke man sich, Fig. 17, die vier Durchlöcherungen oder Oeffnungen 1, 2, 3, 4 angebracht, deren Grenzen sowie die cyklische Aussengrenze der Fläche durch stärkere Linien kenntlich gemacht sind. Im Raume gehören die Oeffnungen dem ganzen umgebenden Raume, oder sofern diese Fläche sammt ihren fünf Grenzen den ganzen gegebenen Complex ausmachen, dem amplexen Raume an. In der Zeichnung oder der Darstellung auf einer Ebene erscheinen die vier Oeffnungen als (nicht effective) und von dem umgebenden (ebenfalls nicht effectiven) amplexen Flächenraum 5 gesondert. In dieser polycyklodischen Fläche lassen sich nun 15 verschiedene Arten cyklischer Linien ziehen, welche eine oder mehrere oder alle Oeffnungen umschliessen, oder was hiermit gleichbedeutend ist, welche unter den 5 nicht zur Fläche gehörigen Feldern 1, 2, 3, 4, 5 in verschiedener Weise Scheidungen veranstalten. Jede Art umfasst natürlich eine unendliche Menge von Cyklen, welche alle hinsichtlich der durch sie veranstalteten Scheidungen mit einander überein kommen. In der Figur ist jede Art durch einen Cyklus repräsentirt und in der nachstehenden Uebersicht sind die verschiedenen Arten, unter Beifügung der Buchstaben, die sie in der Figur kenntlich machen, symbolisch dadurch bezeichnet, dass die geschiedenen Gruppen durch einen Punkt von einander getrennt sind.

a	1.2345	*f*	12.345
b	2.3451	*g*	23.451
c	3.4512	*h*	34.512
d	4.5123	*i*	45.123
e	5.1234	*k*	51.234
		l	52.341
		m	13.452
		n	24.513
		o	35.124
		p	41.235

Alle diese Cykeln sind in dem Diagramm Fig. 18 durch dessen Lineartheile vertreten, welche die Ebene der Zeichnung ebenso wie die cyklodische Fläche selbst in fünf Felder 1, 2, 3, 4, 5 zerlegen.

14.

Sind während der Bildung des Diagramms einer Fläche oder eines Körpers bereits einige Theile linear geworden, welche zwar einerseits mit den übrigen Bestandtheilen desselben zusammenhängen, andererseits aber mit freien Endpunkten versehen sind, wie in Fig. 16 der Theil AD, so muss das Diagramm als in fortwährender Bildung begriffen angesehen werden, indem durch ferneres Einwärtsrücken des freien Endpunktes D bis zum Insertionspunkte A der appendiculäre Theil AD sich auf den Punkt A zusammengezogen und in den übrigen Bestandtheilen des Diagramms aufgegangen d. h. verschwunden ist. Bei der Zurückführung also von Körpern mit mannichfachen Verzweigungen auf ihr Diagramm gelangt man durch die hierfür erforderliche Verengung oder Retraction ihrer Grenze auf lineare Bestandtheile, welche selbst dem vollendeten Diagramm angehören werden oder nicht, je nachdem die Bestandtheile des Körpers, aus dem sie hervorgingen, mit einander anastomosirten oder freie Aeste und Zweige bildeten. Um ein concretes Beispiel zu benutzen, so geht aus einem Körper von der Gestaltung des Blutgefässsystems der Wirbelthiere einschliesslich der Capillaren, wie des Herzens eine complicirte Linearcomplexion als Diagramm hervor, in welchem jede Arterie, jede Vene, jede Capillare durch einen linearen Bestandtheil vertreten ist. Im Diagramm eines Körpers von der Gestaltung des Nervensystems einschliesslich des Gehirns und Rückenmarks erscheinen nur die den anastomosirenden Nerven (Plexus, Ganglien) entsprechenden Repräsentanten. Das Diagramm der Gestalt eines Baumes oder des menschlichen Körpers dagegen würde nichts weiter als ein Punkt sein.

Diese Bemerkungen, welche überflüssig scheinen könnten, sind gleichwohl insofern nicht ohne Belang, als wir bei den Operationen mit dem Diagramm behufs der topologischen auf die Cyklose bezüglichen Analyse die bei seiner Bildung postulirte Retraction der Grenze des gegebenen Constituenten auch während der am Diagramm vorzunehmenden Durchschneidung als fortbestehend voraussetzen, so dass offenbar durch jeden queren Durchschnitt eines Lineartheils zwei nicht mehr anastomosirende Zweige oder Appendikel entstehen, durch deren weitere Retraction ein bestimmter Lineartheil des Diagramms verschwinden oder ausgeschieden werden muss.

15.

Wenn nun nach dem Bisherigen einleuchtet, dass das Diagramm eines acyklodischen Constituenten im Allgemeinen ein Punkt ist, so darf doch der

der auch hier sich darbietende singuläre Fall, auf welchen bereits in Art. 9 aufmerksam gemacht worden, nicht mit Stillschweigen übergangen werden. Das Diagramm einer allseitig geschlossenen, z. B. einer sphäroidischen Fläche ohne effective auf ihr gelegene Linien oder Punkte würde zunächst nicht von der Fläche selbst verschieden sein, also keine Linearcomplexion bilden können. Wir ertheilen in diesem Falle der einer Grenze ermangelnden Fläche die möglichst einfache Grenze, indem wir als eine solche einen beliebigen auf ihr gelegenen Punkt annehmen. Diese virtuelle, mit dem Ausdruck *Trema* zu bezeichnende Grenze genügt, die zur Bildung des Diagramms erforderliche Retractibilität in Wirksamkeit zu setzen. Das hervorgehende Diagramm wird alsdann ebenso wohl, wie bei jeder anderen mit effectiven Grenzen versehenen acyklodischen Fläche ein Punkt oder irgend ein linearer Complex.

Der analoge Fall eines Körpers, der zwischen zwei in einander geschachtelten Grenzflächen enthalten ist, wie der Raum zwischen zwei Polyëdern, von denen ohne gegenseitige Berührung der eine sich ganz im Innern des andern befindet, oder einer durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzten Kugelschale, wiewohl derselbe durch die weiterhin zu erörternde Anathese seine Beseitigung finden wird, kann unter dem eben besprochenen Gesichtspunkt betrachtet werden. Auch für ihn gilt nur der Punkt als Diagramm, insofern sich durch die Retraction der Grenzen zunächst eine allseitig geschlossene Fläche ergibt, welche in dem vorerwähnten Modus in einen Punkt übergeht.

16.

Eine andere aber gewissermassen analoge Particularität hinsichtlich des Diagramms bietet der einen oder mehrere Complexe umgebende unbegrenzte Raum dar. Das Besondere liegt, was schon in Art. 1 hervorgehoben worden, in dem lediglich dem Amplexum eigenthümlichen Mangel der äusseren Begrenzung. So viel ist evident, dass im Falle $p=0$ der ganze unendliche Raum ebenso einfachen Zusammenhang hat und ebenso acyklodisch ist, als der von einem Polyëder oder einer Kugel eingeschlossene Raum, und dass wir für ihn mit gleichem Fug, wie in letzterem Falle, den Punkt als Diagramm annehmen, welchen man als aus der Retraction einer dem unbegrenzten Raum beizulegenden virtuellen unendlich grossen sphärischen Grenze hervorgehend ansehen kann. Im Falle dass $p=1$ oder >1 dagegen, wo wir, wenn $p>1$ durch p' die Zahl der ausser einander gelegenen (seclusiven) Complexe bezeichnen, besitzt der amplexe Raum eine oder mehrere einseitige innere Grenzen, welche, indem wir sie zugleich mit der anderseitigen äusseren virtuellen Grenze der Retraction unterwerfen, zunächst eine den oder die Complexe umschliessende sphäroïdische Fläche mit $p'-1$ Scheidewänden und p' Raumcompartimenten erzeugt, deren jedes einen Complex oder einen Satz ineinandergekapselter Complexe enthält, oder aber (was topologisch hiermit gleichbedeutend ist) p' sphäroïdische Hüllen entstehen lässt, deren jede einen der p' seclusiven Complexe umschliesst und welche durch $p'-1$ lineare Verbindungen unter einander zusammenhängen.

Die durch Scheidewände aneinandergrenzenden Compartimente oder die durch Linien unter einander verbundenen Hüllen aber werden je nach dem cyklodischen Zustande der Gesammtgrenze jedes der p' Complexe mit linearen Durchgängen versehen sein, welche in der Wand der einhüllenden Fläche endigen, und nur wo die Gesammtgrenze des eingehüllten Complexes acyklodisch ist, bietet der hier betrachtete vorläufige Zustand des entstehenden Diagramms solche Durchgänge nicht dar. Lassen wir nun in der für die Fälle des vorigen Art. erörterten Weise die Flächentheile des Diagramms in lineare übergehen und der weiteren Retraction unterworfen bleiben, so geht nunmehr auch hier als Diagramm für den amplexen Raum im Allgemeinen eine Linear-Complexion hervor. Ist $p=1$ und der Totalinhalt des Complexes acyklodisch, so ist das Diagramm ein Punkt, das Amplexum also ebenfalls acyklodisch. Bietet der Complex Durchgänge dar, so bewahrt die Configuration des Diagramms den cyklomatischen Charakter des Amplexums, der ihm durch den cyklomatischen Charakter des Complexes, gleichsam wie einer Matriz durch die Patriz, verliehen wird, in seinen unter einander cyklodisch zusammenhängenden linearen Bestandtheilen. Im Falle z. B. eines körperlichen Ringes, Fig. 19, oder eines ringähnlich gestalteten polyëdrischen Körpers, Fig. 20, ist das Diagramm des amplexen Raumes eine einfache Ringlinie, welche wie das Amplexum selbst, eine Dialyse gestattet, nämlich durch den Schnitt mittelst eines die Ringöffnung schliessenden Diaphragmas.

Wären die in beiden Figuren 19 und 20 dargestellten Complexe zugleich gegeben, wo also $p = 2$, so erhielte man für das Diagramm des amplexen Raumes die aus beiden Cykeln und einer etwa zwischen den Punkten r und s gezogenen Verbindungslinie bestehende Linearcomplexion, und das Amplexum würde sich als zweifach cyklodisch darstellen.

17.

Bei der Darstellung der im Raume enthaltenen diagrammatischen Linearcomplexionen auf einer Ebene, wie dies in den Figuren behufs Unterstützung der Raumvorstellungen erforderlich ist, werden wir die scheinbaren Durchschnittspunkte, wo nämlich im Diagramm selbst eine Linie im Raume die andere ohne sie zu schneiden überkreuzt, als sogenannte *Ueberkreuzungspunkte* dadurch von den wirklichen Vereinigungs- oder Durchschnittspunkten unterscheiden, dass wir in der Figur den von dem Beschauer entfernteren der beiden in Frage kommenden Lineartheile als solchen an der Ueberkreuzungsstelle durch eine kleine Unterbrechung kenntlich machen, während der näher liegende ununterbrochen durchgezogen wird, wie wir dies auch bereits für analoge Fälle in den bisherigen Figuren gehalten haben. Dies Mittel scheint den Vorstellungen kaum in geringerem Grade zu Hülfe zu kommen, als die bei (zusammengesetzteren Figuren umständlichere) Methode doppelter eng neben einander verlaufender Linien, zumal, wenn man die durchgezogene Linie in der Nähe der Ueberkreuzung etwas stärker zeichnet, als die unterbrochene [1]). Die Figuren 21, 22 und 23 dienen zur Erläuterung des Gesagten. Die Figuren 21 und 23 bieten eine Ueberkreuzung, die Fig. 22 eine Durchkreuzung oder einen Vereinigungspunkt von 4 Lineartheilen dar.

18.

Von der Anathese.

Es scheint hier der passende Ort, bevor wir zu ferneren Discussionen

1) Am vollkommensten freilich würden für den fraglichen Zweck stereoskopische Darstellungen dienen, durch welche dem binocularen Blick die Anordnung der Linien im Raume ohne Interpretatio per synesin klar würden.

über das Diagramm und zu dessen Gebrauch bei Ermittelung des cyklomatischen Ranges x übergehen, von der *Anathese* zu reden, einem bei der topologischen Analyse behufs des Census räumlicher Complexe nicht unwesentlichen Erleichterungsmittel. Wir verstehen darunter gewisse Abänderungen, die sich in der gegenseitigen Lage sowohl mehrerer Complexe als der Theile eines und desselben Complexes vernehmen lassen, ohne Einfluss auf die für den Census in Betracht kommenden numerischen Bestimmungsstücke.

Legen wir der Betrachtung zur Erleichterung der Vorstellungen ein Beispiel zum Grunde, und zwar den bereits in Figur 15 dargestellten Complex einer allseitig geschlossenen askoïdischen Fläche Fig. 24 mit unter einander anastomosirenden Abzweigungen in den Stellen *a*, *b*, *c*, *d* und einem frei endenden Zweige in *e*.

Das Diagramm des eingeschlossenen Körpers, in welchem nach Art. 14 der Zweig bei *e* verschwindet, würde sich nach dem Bisherigen in der Gestalt der Fig. 25 herausstellen. Die Umschlingung des Armes *ac* durch den Arm *ab*, so wie die von *ac* durch *bd* aber — wiewohl in anderweitigen topologischen Rücksichten von wesentlichem Belang, sind für die auf den Census bezüglichen Fragen ohne allen Belang und können durch eine einfachere Gestaltung ohne Verschlingung ersetzt werden. Durch Anathese des Körpers in Fig. 24 oder seines Diagramms in Fig. 25 erhalten wir demgemäss Diagramm-Gestalten wie in den Figg. 26, 27, 28, woraus hervorgeht, dass die Lineartheile des Diagramms im Wesentlichen dieselbe Anordnung und gegenseitige Verbindung darbieten, wie die sechs Kanten eines tetraëdrischen Körpers. Die angeführten Gestaltungen sind für den Census äquivalent, insofern es nicht auf die Grössenverhältnisse der Bestandtheile des Complexes, nicht auf die Graduationen und Quanta ihrer Krümmung, nicht auf ihre Stellung im Raume, sondern nur auf die Art ihrer Verbindung und ihres Zusammenhanges ankommt. Die Anathese erfordert also einerseits genaue Conservirung aller Constituenten und Complexe und für jeden Constituenten strenge Beibehaltung seines cyklomatischen Charakters, gestattet aber andererseits jede zur Vereinfachung in den Lagenverhältnissen erforderlich scheinende Abänderung zwischen den Complexen oder zwischen ihren Constituenten. Die Verkettung zweier cyklischen Linien, so wesentlich sie in Art. 8 für die auf die Dialyse bezügliche Erörterung gewesen war, ist, falls die zwei Ringlinien als zwei dem Census zu unterwerfende Complexe gelten, unwesentlich und wir können durch Anathese die Verkettung aufheben und zwei getrennte cyklische Linien als seclusive Complexe an ihre Stelle setzen, wodurch nicht nur die einfache Cyklose jeder der Ringlinien, sondern auch die zweifache Cyklose des Amplexums viel unmittelbarer als im Zustand der Verkettung erkennbar ist. Zwei concentrische Kugeln bilden zwei inclusive Complexe, wo der gesammte Raum in drei Theile zerfällt. Das Amplexum ist nach Art. 16 acyklodisch, ebenso die Kugelschale zwischen beiden sphärischen Flächen, so wie der von der inneren Kugel eingeschlossene Kern. Durch Anathese stellen wir die zwei kugelförmigen Complexe in seclusiver Stellung ausser einander, und es bleiben nach wie vor alle drei Räume acyklodisch. Wäre ein körperlicher Ring von einer Kugelfläche ohne gegenseitige Berührung umschlossen, so hätte man ebenfalls zwei Complexe und drei Räume, das Amplexum acyklodisch, der innerhalb der Kugel und ausserhalb des Ringes befindliche Raum einfach cyklodisch, der innerhalb des Ringes enthaltene Raum gleichfalls einfach cyklodisch. Durch anathetische Trennung der beiden Complexe in seclusiver Stellung wird der in der Kugel enthaltene Raum acyklodisch, dagegen das Amplexum wie der Innenraum des Ringes einfach cyklodisch. Das Amplexum hat im anathetischen Falle hinsichtlich der Cyklose die Rolle des im originären Falle ausserhalb des Ringes und innerhalb der Kugel befindlichen Raumes übernommen, und im einen wie im andern Falle hat man einen acyklodischen und zwei einfach cyklodische Räume. Die beiden Flächen, d. h. sämmtliche Constituenten ausser der vierten Curie, haben ohnehin ihre censuellen Eigenschaften vollkommen beibehalten. Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass dem Amplexum als solchem im Census keine ausnahmsmässige Stellung unter den Constituenten der vierten Curie zukommt, und man könnte an der Statthaftigkeit der Anathese zweifeln, wenn man die Sache so ansähe, als ob durch den mittelst der Anathese bewirkten Uebergang vom ersten zum zweiten Falle das Amplexum um so viel bereichert worden wäre, als einer der anderen Räume ärmer geworden, oder als ob, wiewohl sich im Endresultat Compensation herausstellte, zwei Constituenten in censuell wesentlichen Requisiten wären einer Veränderung unterworfen worden. Das Sachverhältniss ist vielmehr dies, dass Kugel und Ring den Gesammtraum in drei Theile zerlegen, einen acyklodischen und zwei einfach cyklodische, von denen der erste im ersten Falle, einer der beiden letzteren im zweiten Falle Amplexum geworden ist. Man könnte die Kugel anathetisch in den Innenraum des Rings versetzen, und es würde nun mehr auch bei inclusiver Disposition der beiden Complexe einer der beiden einfach cyklodischen Räume Amplexum werden [1]).

Die Beseitigung der Umschlingungen, Verknotungen und Verkettungen an den Complexen oder ihren Constituenten auf dem Wege der Anathese erweist sich in complicirteren Fällen für die Bestimmung der Dialysen der solche Configurationen umgebenden Räume als besonders förderlich.

19.

Bestimmungsstücke des Diagramms und ihre Variation.

Die in der Linearcomplexion eines Diagramms vorkommenden Punkte sind in Beziehung auf die Zahl der Lineartheile, die durch sie an einander grenzen, verschiedener Art. Die meisten Punkte — denn sie sind in dem Diagramm jedes cyklodischen Constituenten in unendlicher Zahl vorhanden —

1) Bei den geometrischen Untersuchungen an Flächen und Körpern, z. B. den Polyëdern, pflegt der amplexe Raum meistens ausser Acht zu bleiben. Im Euler'schen auf die gewöhnlichen Polyëder bezüglichen Satze ist nur von Ecken, Kanten und Flächen die Rede, und die diakritische Constante 2 ist nichts weiter als der in diesem besonderen Falle stattfindende Werth von d, nämlich die Anzahl der beiden Räume, des im Polyëder eingeschlossenen und des Amplexums. In Cauchy's Erweiterung des Satzes auf den Fall eines mit inneren Scheidewänden versehenen Polyëders muss das unter den Räumen in der Cauchy'schen Zahl P nicht mitgezählte Amplexum durch die Zahl $+1$ besonders in Rechnung gebracht werden. Während in solchen mehr oder weniger engen Provinzen des uns hier beschäftigenden allgemeinen Theorems das Amplexum gleichsam seiner Beitragspflicht enthoben und seine Rate auf die eine oder andere Weise anderweitig gedeckt erscheint, muss es sich in unserem Falle entschieden dieser Prärogative begeben — oder man dürfte, bildlich zu reden, die Truhe, in welcher man eine Anzahl Kleinodien aufbewahrt, nicht mit unter den Inventarienstücken aufzählen. Selbst das Attribut der Ausdehnung ins Unendliche kommt dem Amplexum nur so lange ausschliesslich zu, als wir nur begrenzte Complexe betrachten.

sind der Art, dass zwei Lineartheile an ihnen zusammenstossen, gleichviel ob der Winkel zwischen diesen Theilen, wie bei jedem Binnenpunkt einer geraden oder stetig krummen Linie, 180 Grad betrage, oder nicht. Punkte von denen nur Eine Linie ausgeht, kommen, wie in Art. 14 erörtert worden, nur in den intermediären Stadien des der Durchschneidung unterworfenen Diagramms als freie Enden appendiculärer Theile vor, welche in Folge weiterer Retraction gleichsam resorbirt werden. Der Fall von Punkten ohne lineare Auswege, d. i. isolirter Punkte tritt lediglich bei dem Diagramm acyklodischer Constituenten ein. Punkte aber mit mehr als zwei von ihnen ausgehenden Linien kommen im Diagramm offenbar nur in endlicher, bestimmter Anzahl vor. Wir nennen sie *Ausgänge*, drei-, vier- oder mehrzügig, je nach der Zahl der in ihnen concurrirenden Lineartheile, und einen *Zug* nennen wir jedes Stück der Linearcomplexion, welches in Ausgängen endigt ohne einen Ausgang als Binnenpunkt zu enthalten. Bei der Darstellung des Diagramms in einer Zeichnung auf einer Ebene (oder unendlich grossen Kugelfläche) können nach Art. 17 Ueberkreuzungen vorkommen, denen im Raum keine Ausgänge entsprechen. Wir werden sie von den Ausgängen durch die Benennung *Traversen* unterscheiden [1]). Sie theilen in der Projection die Züge, auf denen sie vorkommen, in Stücke, je eins mehr, als der Zug Traversen enthält, welche wir zur Unterscheidung von den Zügen *Strecken* nennen werden. Jeder Zug ohne Traversen ist zugleich eine Strecke. Die Projectionsfläche erscheint durch die Züge und Strecken in eine gewisse Anzahl von Stücken oder Parzellen zerlegt, welche — den umgebenden oder amplexen Flächenraum mit einbegriffen — *Felder* heissen werden.

Es verdient bemerkt zu werden, dass es nicht nothwendig ist, die Benennung „Ausgang" bloss auf drei- oder mehrzügige Punkte zu beschränken. Wir dürfen isolirte Punkte als nullzügige Ausgänge, das freie Ende eines Ap-

1) Bei anderweitigen Betrachtungen über Linearcomplexionen mag die Bezeichnung „Knotenpunkt" oder „Nodalpunkt" vorgezogen werden, wie dies in den Vorstudien zur Topologie S. 860 geschehen ist. Durch Anathese darf in den Traversen des Diagramms der überlaufende Zug mit dem unterlaufenden vertauscht werden, was in anderen Vorkommnissen einen wesentlichen Unterschied bedingen würde.

pendikels als einen einzügigen und jeden Binnenpunkt als einen zweizügigen Ausgang betrachten. Der Sinn dieser Beschränkung ist lediglich der, dass bei Zählung der Ausgänge die zweizügigen weggelassen werden dürfen, insofern es nur auf die Differenz zwischen der Zahl der Ausgänge und der Züge ankommen wird, und jeder als Ausgang zwischen zwei Zügen angenommene Binnenpunkt offenbar die Zahl der Ausgänge und der Züge zugleich um 1 vermehrt. Hiernach ist klar, dass man bei einem einfach cyklischen Diagramm — alle Verschlingungen und Verknotungen durch Anathese als beseitigt vorausgesetzt — eine beliebige Zahl seiner Punkte als zweizügige Ausgänge betrachten kann, wo alsdann, wie in einem gewöhnlichen Polygon, die Zahl der Züge der der Ausgänge gleich ausfällt, und dass es mithin das Einfachste ist, einen einzigen, übrigens beliebigen Punkt des Cyklus als Ausgang zu betrachten, in Folge dessen der Cyklus einen Ausgang und einen Zug besitzt.

20.

Die in Art. 18 besprochene Anathese musste in ihrer Anwendung auf das Diagramm die Zahl der Ausgänge und Züge unversehrt lassen und konnte nur Veränderungen in der Zahl der Traversen und Felder bewirken. Die jetzt zur Sprache kommende *Variation* greift in den Bestand an Ausgängen und Zügen abändernd ein. Sie findet ihren Grund in der Allgemeinheit, die wir in Art. 13 hinsichtlich der beliebig ungleich schleunigen Retraction der Grenztheile eines Constituenten bei Erzeugung seines Diagramms statuirt haben.

Das Diagramm Fig. 18 der polycyklodischen Fläche Fig. 17 hätte statt des vierzügigen Ausganges in E offenbar zwei dreizügige Ausgänge F und G (Fig. 29) annehmen dürfen, wodurch die Dialyse der zugehörigen in Art. 13 besprochenen Fläche mittelst Durchschneidung der Cykeln i, l, m in Fig. 17, d. h. mittelst eines Schnittes zwischen den Grenzen der Oeffnungen 2 und 4 auf der Fläche zwischen 1 und 3 hindurchgehend, ihre Repräsentation in der Durchschneidung des Diagrammzuges FG findet. Ebenso würde zur Darstellung der Möglichkeit eines Schnittes von der Oeffnung 1 nach der Oeffnung 3 zwischen 2 und 4 auf der Fläche hindurchgehend, dem Diagramm die Form Fig. 30 ertheilt werden können, wo, wie vorher, der vierzügige Ausgang E

unter Einfügung eines neuen Zuges zwei dreizügige Ausgänge H, I gebildet worden wären. Man hätte das Diagramm Fig. 29 in Fig. 30 variiren können, wo die zwei dreizügigen, durch einen Zug verbundenen, Ausgänge F, G gegen zwei andere dreizügige H, I diagonal vertauscht wären. Die Zahl der Züge und Ausgänge wäre hierbei dieselbe geblieben. Die Zulässigkeit einer Dialyse in der Fläche Fig. 17 mittelst eines Schnittes von 1 nach 3 so, dass die Oeffnungen 2 und 4 auf einerlei Seite desselben liegen bleiben, würde durch die Gestalt Fig. 31 dargelegt, wo die zwei dreizügigen Ausgänge A, B gegen die zwei dreizügigen K, L diagonal vertauscht erscheinen.

Jeder mehr als 3zügige Ausgang kann offenbar in zwei Ausgänge mit eingeschaltetem Zuge verwandelt werden, wodurch die Zahl der Züge und der Ausgänge zugleich um 1 wächst. Der Ausgang N (Fig. 32) sei allgemein $n$zügig. Zerlegt man n in zwei (ganzzahlige) Theile, jeder > 1, t und u, wo also $t + u = n$, so kann N unter Einfügung des Zuges TU in die zwei Ausgänge T und U verwandelt werden, von denen der eine $t + 1$ zügig, der andere $u + 1$ zügig ist. Die Anwendung dieser Operation auf einen dreizügigen Ausgang, wo die beiden Theile der Zahl 3 nur 1 und 2 sein könnten, oder auf einen mehr als 3zügigen Ausgang in der Form, dass man einen der beiden Theile $= 1$ annähme, würde zwar einen neuen Zug und einen neuen Ausgang ergeben, beide aber dürften, weil letzterer nur 2zügig geworden wäre, ungezählt bleiben, so dass diese Variation ohne Effect bliebe. Die Wiederholung des beschriebenen Verfahrens an allen mehr als 3zügigen Ausgängen würde das Diagramm dahin variiren, dass alle Ausgänge 3zügig würden. — Umgekehrt können je zwei durch einen Zug mit einander verbundene Ausgänge P, er sei $p$zügig, und Q, er sei $q$zügig, durch Vereinigung und unter Wegfall des Zwischenzuges PQ in einen Ausgang R von $p + q - 2$ Zügen verwandelt werden, und die Zahl der Züge wie der Ausgänge würde sich um 1 vermindert haben. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann jedes Diagramm, da alle seine Ausgänge durch Züge untereinander zusammenhängen, dahin variirt werden, dass es nur einen Ausgang besitzt, und alsdann muss jeder Zug für sich cyklisch geworden sein, d. h. in dem gemeinsamen einen Ausgang seine beiden Endpunkte finden. Das Diagramm Fig. 18 würde dann Gestalten wie Fig. 33 oder 34 annehmen.

Hatte das vorgegebene Diagramm k Ausgänge und l Züge, so sind beide Zahlen jetzt um $k-1$ vermindert und das Diagramm hat in dieser *monocentrischen* Gestalt einen Ausgang und $l-k+1$ Züge.

Diese Variationen, welche zumal bei verwickelten polycyklodischen Constituenten zu einer grossen Mannigfaltigkeit der Diagramm-Gestalten führen, und deren weitere Verfolgung für unseren gegenwärtigen Zweck unnöthig ist, lassen jede am Constituenten vorzunehmende Dialyse in dem Modus ausführbar erscheinen, dass am Diagramm, sei es in dieser oder jener seiner durch Variation ableitbaren, unter einander äquivalenten Gestalten, ein Zug durchschnitten wird, so dass jede Durchschneidung eines Zuges je einer Dialyse entspricht.

Die Äquivalenz der durch Variation aus einander abgeleiteten Diagrammgestalten überhebt uns aber der Mühe, diese Ableitung selbst in jedem concreten Falle wirklich auszuführen, insofern die Regel zur Bestimmung des cyklomatischen Ranges x, zu deren Aufstellung jetzt die hinreichenden Vorbereitungen gemacht sind, für alle Gestalten des Diagramms eines gegebenen Constituenten dieselbe ist, und man sie also nur auf irgend eine derselben anzuwenden nöthig hat.

21.

Anwendung des Diagramms.

Zur Ermittelung der Ordnungszahl x eines gegebenen Constituenten, leite man aus ihm das Diagramm in irgend einer seiner Gestalten ab. Es sei die Zahl der Ausgänge $= k$, die Zahl der Züge $= l$, so ist nach dem vorigen Artikel klar, dass das Diagramm in seiner monocentrischen Gestalt aus $l-k+1$ Zügen besteht, welche durch einen Punkt unter einander zusammenhängen, der seinerseits ein $2\,(l-k+1)$-zügiger Ausgang ist. Für diese Gestalt ist sofort evident, dass jeder Cyklus eine Dialyse gewährt, in Folge der er sich zunächst in zwei Appendikel auflöst. Nach $l-k+1$ Dialysen geht das Diagramm in $2\,(l-k+1)$ Appendikel über, welche alle mit einem Ende in dem anfänglichen Ausgang des monocentrischen Diagramms unter einander zusammenhängen und mit dem andern frei endigen. Alle Appendikel ziehen sich durch fernere Retraction in einen Punkt zusammen, das Diagramm ist nunmehr bloss ein Punkt, und der den $l-k+1$ Dialysen unterworfene Constituent ist acyklodisch geworden. Es ist somit $x = l-k+1$.

Aber auch in der ersten Gestalt mit k Ausgängen und l Zügen reducirt sich das Diagramm nach $l-k+1$ Dialysen auf einen Punkt. Die vorläufig als isolirt zu denkenden Ausgänge verbinde man in Befolgung der Configuration des Diagramms durch successive Züge unter einander in folgender Weise: einen ersten Ausgang mit einem zweiten durch einen ersten Zug, einen dritten Ausgang mit einem der beiden ersten durch einen zweiten Zug, einen vierten Ausgang mit einem der drei ersten durch einen dritten Zug, einen fünften Ausgang mit einem der vier ersten durch einen vierten Zug u. s. w. bis der letzte oder $k$te Ausgang mit einem der übrigen $k-1$ Ausgänge durch einen $k-1$ten Zug vereinigt ist. Dann stellen diese $k-1$ Züge einen vollständigen Zusammenhang unter allen k Ausgängen dar. Zugleich aber bilden sie ein partiales Diagramm, an welchem man sich durch Retraction von den $k-1$ Zügen zunächst den letzten, dann den vorletzten u. s. f. in rückläufiger Ordnung alle Züge sich in einen Punkt zurückziehend denken kann, woraus erhellt, dass dieses Partial-Diagramm von $k-1$ Zügen einem acyklodischen Constituenten entsprechen muss. Wollte man ausser den $k-1$ Zügen noch einen oder mehrere hinzufügen, so würde man offenbar nach bereits auf anderen Wegen untereinander zusammenhängenden Ausgängen auf neuen Wegen zurückkehren und dadurch cyklische Zusammenhänge herstellen, welche eine Retraction des Partial-Diagramms auf einen Punkt unmöglich machen würden. Der Ueberschuss an Zügen im totalen Diagramm über die $k-1$ Züge des partialen, d. h. die $l-k+1$ Züge des ersteren, welche dem letzteren fehlen, sind es somit, welche einzeln zu durchschneiden sind, um das totale in das partiale zu verwandeln, woraus ersichtlich, dass der zugehörige Constituent die Anzahl $l-k+1$ von Dialysen erfordert, um acyklodisch zu werden. Diese Schlussfolge gilt für jede anwendbare Ordnung in der Aufeinanderfolge der successiv unter einander verbundenen Ausgänge und für jede Wahl unter den bei jedem Schritte disponibelen Zügen des partiellen Diagramms. Man hat also hier, wie für das monocentrische Diagramm $x = l-k+1$.

Für irgend eine andere Gestalt, die dem totalen Diagramm durch Variation ertheilt werden kann (die monocentrische nicht ausgeschlossen) sei die Zahl der Ausgänge $= k'$, der Züge $= l'$, so würde man nach den eben gemachten Schlüssen die Ordnungszahl $\varkappa' = l' - k' + 1$ finden. Da aber aus den Erörterungen über die Variation der Ausgänge und Züge hinreichend hervorgegangen ist, dass die Unterschiede $l' - k'$ und $l - k$ gleich sind, so folgt $\varkappa' = \varkappa$.

Es ist also allgemein

$$\varkappa = l - k + 1 \tag{1}$$

d. h. man findet die cyklomatische Ordnungszahl eines gegebenen Constituenten, wenn man in seinem Diagramm (in irgend einer seiner Gestalten) die Zahl der Züge um die Zahl der Ausgänge vermindert und 1 hinzuzählt.

Wir fügen noch einige Beispiele bei.

1. Das Diagramm eines acyklodischen Constituenten ist ein Punkt, wo also $k = 1$, $l = 0$. Folglich ist $\varkappa = 0$.

2. Eine ringförmige Fläche, etwa zwischen zwei concentrischen Kreisen oder wie in Fig. 4, hat als Diagramm einen einfachen Cyklus. Hier ist $k = 1$, $l = 1$ (Art. 19), also $\varkappa = 1$.

3. Die Fläche in Fig. 17 hat das Diagramm Fig. 18, wo $k = 5$, $l = 8$, also $\varkappa = 4$. Im Diagramm Fig. 29 oder Fig. 30 derselben Fläche ist $k = 6$, $l = 9$, also wie vorher $\varkappa = 4$. Im monocentrischen Diagramm Fig. 33 derselben Fläche ist $k = 1$, $l = 4$, also wiederum $\varkappa = 4$.

Der in Fig. 15 dargestellte Körper hat das Diagramm Fig. 25 oder Figg. 26, 27, 28. In allen diesen Gestalten ist $k = 4$, $l = 6$, also $\varkappa = 3$, bereits vorläufig in Art. 12 erkannt worden ist.

22.

Bei den Betrachtungen des vor. Art. ist das Diagramm in seiner räumlichen Configuration zum Gegenstande gemacht worden und die zur Bestimmung von $\varkappa$ in Betracht kommenden Bestandtheile waren lediglich die Ausgänge und Züge, so dass die bei seiner projectiven Darstellung auftretenden Traversen, Strecken und Felder unbeachtet blieben. Es ist indess nicht ohne

Interesse, auch die Abhängigkeit der Zahl x von den letztgenannten Elementen des Diagramms kennen zu lernen.

Nehmen wir an, es sei ein Diagramm in seiner projectiven Darstellung *ohne* Traversen gegeben, so ist klar, dass wenn die musivisch in der Projectionsebene oder auf der Projectionskugel neben einander liegenden Felder durch successive Schnitte seiner Züge unter einander vereinigen, ihre Zahl dadurch bis zu 1 vermindern kann. Man vereinige mittelst eines Schnittes durch einen Zug irgend 2 seiner m Felder, gleichsam wie durch eine geöffnete Thür, zu einem Felde, in Folge dessen nur noch $m-1$ Felder existiren, dann durch einen zweiten Schnitt wieder zwei der $m-1$ Felder zu einem Felde u. s. f. bis nach $m-1$ Schnitten nur noch ein Feld, nämlich das amplexe, existirt. Das Diagramm ist alsdann acyklodisch und ein neuer Schnitt würde unfehlbar eine Sonderung in getrennte Stücke zur Folge haben. Den $m-1$ Schnitten entsprechen eben so viel Dialysen an dem zugehörigen Constituenten, und es ist also in jedem Diagramm ohne Traversen $x = m-1$. Auch hier ist x von der Wahl und Ordnung der successiven Schnitte unabhängig.

In einem beliebigen *mit* Traversen versehenen Diagramm D sei die Zahl der Ausgänge $= k$, der Züge $= l$, der Strecken $= l'$, der Traversen $= q$, der Felder $= m$. Man denke sich ein anderes (nicht äquivalentes) Diagramm D' aus dem angegebenen D dadurch abgeleitet, dass man die Traversen in vierzügige Ausgänge verwandelt. Man setze die Zahl der $k+q$ Ausgänge in $D' = k'$, die Zahl der Züge in D' wird gleich der Zahl der Strecken in D, d. h. $= l'$; die Zahl der Felder ist in beiden $= m$. Die Zahl der Cyklosen für D sei $= x$, für $D' = x'$. Da nun D' ohne Traversen ist, so hat man, wie so eben bewiesen, $x' = m-1$. Da aber auch nach dem Satze des vor. Art. $x' = l'-k'+1$, so hat man $m-1 = l'-k'+1$ oder

$$k'-l'+m-2 = 0 \qquad (2)$$

Dieser Satz, den wir später noch zu anderen Zwecken benutzen werden, besagt:

in einer Linearcomplexion in der Ebene oder auf der Kugelfläche ist die Zahl der Verbindungspunkte und der Flächenstücke um 2 grösser als die Zahl der Verbindungslinien.

Er enthält, nebenbei bemerkt, implicite den Euler'schen Satz von den Polyëdern, ist aber in mehrfacher Hinsicht allgemeiner, sowohl durch die Zulässigkeit beliebig krummer — wenn nur acyklodischer — Linien und Flächen, als durch seine Gültigkeit für zwei- und eineckige Flächen und für frei endende Linien, wie sie bei dem Diagramm öfter unter der Benennung „Appendikel" besprochen worden sind.

Es lässt sich nun darthun, dass $l'-l=2q$ ist. Man nehme aus D die einzelnen Züge heraus und füge sie alle in beliebiger Ordnung in einen Cyklus zusammen. Die Verbindungspunkte im Cyklus seien durch A bezeichnet und die Binnenpunkte auf den Stücken AA, welche in D den Traversen angehörten, durch B. Dann ist offenbar die Zahl der Punkte $A=l$, die der Punkte B aber (da jede Traverse in D auf zwei Zügen zugleich lag) $=2q$, die Zahl aller Stücke aber zwischen benachbarten Punkten A oder B ist gleich der Zahl der Strecken in D, d. h. $=l'$. Da nun die Zahl aller Stücke des Cyklus gleich der Zahl aller Punkte A und B sein muss, so hat man $l'=l+2q$ oder, was bewiesen werden sollte, $l'-l=2q$.

Man hat also in der vorhin gefundenen Relation $k'-l'+m-2=0$ die Werthe $k'=k+q$, $l'=l+2q$, durch deren Substitution wir erhalten $k-l-q+m-2=0$ oder $m-q-1=l-k+1$. Da aber nach dem Satze des Art. 22 $l-k+1=x$, so hat nunmehr

$$x=m-q-1 \tag{3}$$

d. h. man findet die cyklomatische Ordnungszahl x eines beliebigen Constituenten, wenn man in dessen Diagramm den Ueberschuss der Zahl der Felder über die Zahl der Traversen um 1 vermindert, oder wenn man von der Zahl der Binnenfelder (das amplexe Feld weglassend) die Zahl der Traversen abzieht.

Einige Beispiele mögen die Anwendung auch der in diesem Artikel gefundenen Vorschrift (3) zur Bestimmung von x erläutern.

1. In einem einfach cyklischen Diagramm ohne Traversen ist $m-1=1$, $q=0$, also, wie ohnehin bekannt, $x=1$. Erschiene das Diagramm in Form der Ziffer 8, wie Fig. 21, so hätte man $m-1=2$, $q=1$, also ebenfalls $x=1$. Stellte sich das Diagramm in einer der Gestalten der Fig. 6 dar, so wäre $m-1=4$, $q=3$, also wiederum $x=1$.

2. In jeder der Diagramm-Gestalten Fig. 18, 29, 30, 31, 33, 34 der

Fläche in Fig. 17, für welche wir bereits im dritten Beispiel des vor. Art. die Cyklose vierfach befunden haben, ist $m-1=4$, $q=0$, also wiederum $\varkappa=4$.

3. Die äquivalenten Diagramme Fig. 25, 26, 27, 28 eines Körpers von der Form Fig. 15 oder 24 haben im vierten Beispiel des vorigen Art. eine dreifache Cyklose ergeben. Wir erhalten jetzt für das Diagramm Fig. 28: $m-1=3$, $q=0$, $\varkappa=3$, für Fig. 26 oder 27: $m-1=4$, $q=1$, $\varkappa=3$, für Fig. 25, $m-1=10$, $q=7$, $\varkappa=3$.

4. Das Diagramm Fig. 35 von der Configuration der Kanten eines Würfels gibt nach (1) $l=12$, $k=8$, $l-k+1=\varkappa=5$, nach (3) $m-1=7$, $q=2$, $\varkappa=5$. Das äquivalente traverslose Diagramm Fig. 36 gibt $m-1=\varkappa=5$.

5. Ein Diagramm von der Configuration der Kanten irgend eines gewöhnlichen $h$seitigen Polyëders lässt sich durch Projection auf die Ebene einer der Polyëder-Seitenflächen in traversloser Gestalt darstellen, so dass $m=h$ und $q=0$ ist. Folglich ist in diesem eine Gruppe von unendlich vielen verschiedenen Diagrammen umfassenden Falle jederzeit $\varkappa=h-1$. Für den Würfel war nach dem vorigen Beispiel $\varkappa=5$, für das Oktaëder wird dieser Werth 7, für ein Dodekaëder 11, gleichviel ob es den Typus des Granat-Dodekaëders, wo $l=24$, $k=14$ und $l-k+1=11$, oder den Typus des regulären oder des Pyritoëder-Körpers habe, wo $l=30$, $k=20$ und $l-k+1=11$, oder den Typus der Fig. 37, wo $l=20$, $k=10$ und $l-k+1=11$ u. s. f. Die Vorschrift (3) gibt für Fig. 37 $m-1=23$, $q=12$, also wiederum $k=11$.

6. Ein Diagramm Fig. 38 von der Configuration der Kanten eines Würfels sammt vier einander nicht begegnenden beliebig krummlinigen Verbindungen je zweier einander diagonal gegenüberliegender Würfelecken ergibt nach (1) $k=16$, $l=8$, $l-k+1=\varkappa=9$, nach (3) $m-1=23$, $q=14$, also ebenfalls $\varkappa=9$.

7. Wenn sich im Falle des vorigen Beispiels die 4 diagonalen Verbindungen in einem Punkte kreuzen, Fig. 39, so ist $k=9$, $l=20$, $l-k+1=\varkappa=12$, und $m-1=20$, $q=8$, also wiederum $\varkappa=12$.

8. Das Diagramm habe die Configuration der Kanten eines aus zwei ungleich grossen in entgegengesetzter Stellung combinirten Tetraëdern entstehenden Oktaëders sammt den drei in der Mitte sich kreuzenden Oktaëderaxen,

Fig. 40. Hier ist nach (1) $k = 13$, $l = 24$, $x = 12$ und nach (3) $m-1 = 21$, $q = 9$, $x = 12$.

9. Von einem 14flächigen 12eckigen Polyëder, welches aus der Combination eines Oktaëders mit einem Würfel in der Art erwächst, dass ausser den 24 Combinationskanten weder Würfel- noch Oktaëderkanten hervorgehen, sollen sowohl die Kanten als die 6 in der Mitte sich kreuzenden Diagonalen ein Diagramm Fig. 41 darstellen, so ergibt sich nach (1) $k = 13$, $l = 36$, $x = 24$, nach (3) $m-1 = 52$, $q = 28$, $x = 24$.

Die letzten Beispiele dienen zugleich, Fälle vor Augen zu legen, wo das Diagramm eine traverslose Darstellung nicht gestattet.

Wollte man in dem zuletzt angeführten Beispiel den Theil des Diagramms, welcher den 24 Kanten des erwähnten Körpers entspricht, nach der unter dem 5. Beispiel besprochenen und bei Fig. 36 befolgten Art traverslos darstellen, so würde dies doch für den übrigen Theil nicht angehen, wie aus Fig. 42 ersichtlich ist, wo die in Fig. 41 geradlinig gestalteten Diagonalen zu grösserer Deutlichkeit krumm gestaltet worden. In Fig. 42 erscheinen 36 Binnenfelder und 12 Traversen, also ist, wie vorher, das Diagramm 24fach cyklodisch.

Diese Beispiele, deren Zahl und Complication sich leicht sehr vergrössern liesse, mögen für den gegenwärtigen Zweck genügen.

Es verdient noch erwähnt zu werden, dass die Verbindung der beiden Vorschriften (1) und (2) zur Bestimmung von x noch eine dritte liefert

$$x = \frac{l-k+m-q}{2}$$

welche zeigt, dass in jeder Linear-Complexion gewisse Summen und Differenzen je zweier der vier Elemente k, l, m, q zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen sind.

23.

Von der Cyklose in den einzelnen Curien.

Nach den bisherigen Untersuchungen über die aus dem Diagramm zu ermittelnde Ordnungszahl der Cyklose irgend welcher Constituenten haben wir nur noch Einiges über die Cyklose innerhalb der einzelnen Curien zu bemerken, und erwähnen im Voraus, dass wir das allgemeine Zeichen x für die Curien der Reihe nach durch x^0, x', x'', x''' ersetzen werden.

Erste Curie. Das Diagramm jedes Punktes ist ein Punkt. Alle Punkte sind acyklodisch. Es ist also stets $x^0 = 0$.

Zweite Curie. Eine Linie hat entweder die Begrenzung [21] oder [20] Im ersten Fall ist die Linie entweder durch zwei Punkte begrenzt, wie die Kanten eines Polyëders, und ist offenbar acyklodisch, oder ihre Endpunkte vereinigen sich in Einem (effectiven) Punkte, wie in Fig. 43, 44 oder 45. Ihr Diagramm ist auch dann noch, wie vorher, ein Punkt und sie selbst acyklodisch, so dass also für den Fall [21] stets $x' = 0$ ist. Im zweiten Fall ist sie unbegrenzt und kann nur, da unendliche Ausdehnung ausgeschlossen ist, in sich selbst zurücklaufen, d. h. eine cyklische Linie sein. Das Diagramm hat alsdann mit ihr gleiche Gestalt, und sie ist also einfach cyklodisch. Verschlingungen und Verknotungen, welche durch Anathese beseitigt oder aber im ungeänderten Zustande, wie im Beispiele 2. des vor. Art. bei Ermittelung von x berücksichtigt werden mögen, machen hierin keinen Unterschied. Für den Fall [20] ist also stets $x' = 1$. Es kann somit in der zweiten Curie x' nur die beiden Werthe 0 oder 1 annehmen.

24.

Dritte Curie. Die modale Verschiedenheit der Flächen rücksichtlich ihrer Begrenzung in den räumlichen Complexen ist aus den in Art. 6 angeführten Symbolen [300], [301], [320], [321] erkennbar. Für die drei letzten Fälle, wo eine Fläche durch Punkte oder durch Linien oder durch Punkte und Linien begrenzt ist, sind im Bisherigen die Vorschriften zur Bestimmung des cyklomatischen Ranges x'' vollständig enthalten. Nur der erste, dem Symbol [300] entsprechende Fall, auf welchen als einen singulären bereits in Art. 9 hingewiesen worden ist, macht noch eine besondere Erörterung erforderlich, für welche indess schon gelegentlich in Art. 15 das Wesentlichste anticipirt werden musste.

Um an einer *periphraktischen*, d. i. allseitig geschlossenen, aller Begrenzung durch Linien und Punkte ermangelnden Fläche des Diagramms abzuleiten, muss derselben, wie in Art. 15 auseinander gesetzt worden, eine virtuelle Grenze ertheilt werden, wozu wir am einfachsten einen beliebigen Punkt derselben wählen. Dieser Aufhebung der Periphraxis geben wir die Benennung *Diatrese* oder *Trema*. Erst durch sie wird eine Retraction der Grenze möglich, deren Resultat entweder, wie bei einer sphäroïdischen Fläche, ein Punkt, oder, wie bei einer in Fig. 19 dargestellten Ringoberfläche, ein Cyklus oder überhaupt ein Diagramm sein wird, welches, wie bei der Fläche in Fig. 24 aus einer Linearcomplexion besteht. Nach erfolgter Zuerkennung des Tremas ist der Fall [400] offenbar auf den [301] zurückgeführt. Das Trema selbst aber, als virtuelle und der gegebenen Fläche nicht effectiv zukommende Grenze, erheischt, wie weiterhin zur Sprache zu bringen ist, im Census die gebührende Berücksichtigung, wo es darauf ankommen wird, sämmtliche cyklodische Constituenten mit virtuellen Grenzen in der Weise auszurüsten, dass diese Grenzen die für den acyklodischen Zustand nothwendigen Dialysen bewirken.

Analog der auf die Cyklose bezüglichen Zahl $\varkappa$ können wir durch π den periphraktischen Rang einer Fläche bezeichnen, der offenbar — wie $\varkappa'$ in der zweiten Curie — nur die Werthe 1 oder 0 annehmen kann, jenachdem die Fläche periphraktisch oder aperiphraktisch ist.

Abgesehen also von diesem singulären Falle der Periphraxis kann in der dritten Curie $\varkappa''$ ausser 0 jeden positiven ganzzahligen Werth annehmen.

25.

Vierte Curie. Für die körperlichen Räume, welche durch die Complexe oder die Constituenten der drei vorhergehenden Curien nach den verschiedenen in Art. 6 aufgezählten Typen von einander abgegrenzt werden, ist das für die Ermittelung der Cyklose Erforderliche in dem Bisherigen vollständig enthalten und die Allgemeinheit der für die Ableitung und die Anwendung des Diagramms gegebenen topologischen Analyse überhebt uns der Betrachtung aller einzelnen in jenen Begrenzungs-Symbolen dargestellten Fälle.

Das Amplexum, als der stets vorhandene oder effective Constituent dieser

Curie, unter allen der einzige, welchem eine Ausdehnung ins Unendliche zukommt, hat in Art. 16 hinsichtlich des Diagramms eine besondere Besprechung gefunden. In Ansehung der Herleitung der cyklomatischen Zahl x''' aus dem Diagramm folgt der amplexe Raum mit allen übrigen Constituenten den gleichen in Art. 21 und 22 entwickelten Vorschriften.

Für den Fall endlich des Begrenzungs-Typus [4000] ist bereits in Art. 9 erwähnt, dass bei dem complexleeren Raum von Cyklose überall nicht die Rede sein kann. Das Diagramm des ganzen unbegrenzten Raumes ist nach Art. 16 ein Punkt und er selbst acyklodisch.

Auch hier kann, wie in der vorigen Curie, x''' ausser 0 jeden positiven ganzzahligen Werth annehmen.

26.

Der Partial-Census für acyklodische Constituenten.

Der Census besteht in der Relation, durch welche bei räumlichen Complexen die Zahlen unter einander zusammenhängen, welche auf bestimmte Weise von der Anzahl der Constituenten jeder Curie und von ihrer topologischen Beschaffenheit abhängen. Zur Ermittelung dieser allgemeinen Relation ist es erforderlich, erst von gewissen speciellen Voraussetzungen auszugehen von denen aus wir schrittweise durch allmälige Verallgemeinerungen zu dem generellen Falle des Census gelangen werden.

Vorerst werden wir uns nur mit solchen Complexen beschäftigen, deren Constituenten acyklodisch sind, und zunächst nur Einen Complex der Untersuchung unterwerfen. Ferner betrachten wir anfänglich nur gewisse Partial-Complexe, d. h. solche, in denen wir bloss die Constituenten niederer Curien zählen, also z. B. bloss Punkte und Linien (Linearcomplexe im Raum), oder bloss Punkte, Linien und Flächen (Flächencomplexe im Raum), während die nicht effectiven Constituenten der höheren Curien gewissen speciellen Bedingungen unterliegen.

Bei allen Complexen, den partialen wie den totalen, werden wir Aggregaten begegnen, in welchen die Constituenten-Zahl der ersten Curie positiv, der zweiten negativ, der dritten positiv, der vierten negativ erscheint. Den

Werth solcher Aggregate für partiale Complexe werden wir ***Diakrise*** nennen. Er ist eine für jede Particularität constante Zahl und kann als Charakteristik derselben angesehen werden. So ist z. B. im Euler'schen Satze die Diakrise $= 2$ und sie charakterisirt den Fall, wo bei acyklodischen Constituenten eines Complexes, der einen Raum ringsum vollständig gegen den übrigen äussern oder amplexen Raum abgrenzt, nur die drei ersten Curien zur Zählung herangezogen werden.

27.

Lehrsatz. In einem Linear-Complex ohne Flächen, in welchem bloss Punkte und (acyklodische) Linien gezählt werden, und welcher von einem acyklodischen amplexen Raum umgeben ist, hat die Diakrise den Werth 1.

Beweis. Die Zahl der Punkte sei $= k$, der Linien $= l$, die Diakrise $= \theta$, so ist zu beweisen, dass $\theta = k - l = 1$.

Da wir bloss Punkte und Linien zu zählen haben, so kann der Complex als ein Diagramm (mit beliebig vielen linearen Appendikeln) betrachtet werden, und da das Amplexum acyklodisch sein soll, so darf das Diagramm selbst nicht cyklodisch sein. Denn jeder Cyklose des Diagramms würde offenbar eine Cyklose des Amplexums entsprechen, vgl. Art. 16. Da nun in jedem Diagramm von k Ausgängen und l Zügen nach (1) Art. 21 die Zahl $x = l - k + 1$ ist und für den vorliegenden Fall $x = 0$ sein muss, so hat man $0 = l - k + 1$ oder, was zu beweisen war:

$$\theta = k - l = 1.$$

Beispiele. Der Linear-Complex in Fig. 45 von der verlangten Beschaffenheit hat 14 Punkte und 13 Linien, also $\theta = 1$. — Einen anderen Complex gleicher Art stellt Fig. 46 dar. In ihm ist $k = 16$, $l = 15$, also wiederum $\theta = k - l = 1$.

28.

Lehrsatz. In einem Linear-Complex von acyklodischen Constituenten, in welchem ausser den beliebig vielen Punkten und Linien nur eine Fläche und ein körperlicher Raum, nämlich das (acyklodische) Amplexum vorhanden ist, hat die Diakrise den Werth 0.

Beweis. Die Zahl der Punkte sei $= k$, der Linien $= l$, die Diakrise $= \theta'$, so ist zu beweisen, dass $\theta' = k - l = 0$, oder dass die Zahl der Linien gleich ist der Zahl der Punkte.

Der Beweis kann ganz dem des vorigen Satzes analog geführt werden. Man darf nämlich den Complex unter Vernachlässigung der von einigen oder allen Linien begrenzten Fläche als ein Diagramm von k Ausgängen und l Zügen betrachten, in welchem die Züge den vollständigen Umfang einer acyklodischen Fläche polygonähnlich darstellen, und in welchem, falls hierzu nicht alle Züge concurriren, einige derselben appendiculare Lineartheile bilden. Das Diagramm würde durch die Dialyse an einem der in der Flächengrenze enthaltenen Züge acyklodisch werden, es ist also selbst einfach cyklodisch, und somit ist nach (1) Art. 21 $\varkappa = l - k + 1$, woraus folgt, was zu beweisen war:

$$\theta' = k - l = 0.$$

Beispiele. Die Fläche des Complexes sei ein beliebiges Polygon mit geraden oder krummen Seitenlinien, die Linien des Complexes seien die Seiten des Polygons. Dann ist offenbar die Zahl der Linien gleich der Zahl der die Ecken den Polygons bildenden Punkte, mithin $\theta' = k - l = 0$.

In dem Linear-Complex Fig. 47 sind es 6 Linien, welche die Fläche des Complexes begrenzen, die übrigen 8 Linien bilden appendiculare Theile des Complexes. Derselbe hat 14 Punkte, eben so viel als Linien; also ist wiederum $\theta' = k - l = 0$.

Die Fläche des Complexes Fig. 48 ist von einer Linie begrenzt. Er besitzt 3 Punkte und eben so viel Linien.

29.

Lehrsatz. In einem Flächen-Complex acyklodischer Constituenten, von beliebig vielen Punkten, Linien und Flächen, aber nur einem Körperraum, nämlich dem acyklodischen Amplexum ist, die Diakrise $= 1$.

Beweis. Die Zahl der Punkte sei $= k$, der Linien $= l$, der Flächen $= m$, die Diakrise $= \theta''$, so ist zu beweisen, dass $\theta'' = k - l + m = 1$.

Man zerlege den Complex in m Theile, so dass jeder Theil eine der m Flächen nebst etwa vorhandenen Appendikeln enthält, in beliebiger Ordnung jedoch so, dass nach Ablösung jeden Theils alle übrigen das Amplexum stets in seinem acyklodischen Zustand erhalten. Dann hat jeder Theil vor seiner Trennung von den übrigen einen linearen Complex von der Beschaffenheit der im Satze Art. 27 besprochenen Complexe gemein, dessen Diakrise $\theta = 1$ ist. Jeder Theil aber ist ein Complex von der Art des in Art. 28 enthaltenen Satzes, dessen Diakrise $\theta' = 0$. Setzen wir also die Zahl der Punkte und Linien im ersten Theil k_1, l_1, im zweiten k_2, l_2, u. s. f., desgleichen die Punkte und Linien in den gemeinschaftlichen Linear-Complexen $(k)_1$, $(l)_1$, $(k)_2$, $(l)_2$ u. s. w., so haben wir nach dem Satze Art. 28:

im 1. Theil ..... $k_1 - l_1 = \theta'$

2. .... $k_2 - l_2 = \theta'$

3. .... $k_3 - l_3 = \theta'$

etc.

m. Theil $k_m - l_m = \theta'$

und
$$\Sigma k_m - \Sigma l_m = m\,\theta' \qquad (4)$$
wo das Summationszeichen sich auf die Suffixa von 1 bis m bezieht.

In dem gemeinschaftlichen Linearcomplex (Satz des Art. 27) zwischen

dem 1. Theil und den übrigen ist $(k)_1 - (l)_1 = \theta$

2. .... $(k)_2 - (l)_2 = \theta$

3. .... $(k)_3 - (l)_3 = \theta$

etc.

$m-1$. und dem $m$ten Theil $(k)_{m-1} - (l)_{m-1} = \theta$

und
$$\Sigma(k)_{m-1} - \Sigma(l)_{m-1} = (m-1)\theta \qquad (5)$$

Wir erhalten aber die Zahl der Constituenten des gegebenen Complexes, wenn wir die gleichartigen Constituenten aller Theile addiren und davon die Summe der gleichartigen gemeinschaftlichen Constituenten abziehen. Hiernach ist
$$k = \Sigma k_m - \Sigma(k)_{m-1}$$
$$l = \Sigma l_m - \Sigma(l)_{m-1}$$
Also
$$k - l = \Sigma k_m - \Sigma l_m - (\Sigma(k)_{m-1} - \Sigma(l)_{m-1})$$

oder aus (4) und (5) $\qquad k-l = m\theta' - (m-1)\theta$

Da aber nach den Sätzen der beiden vorigen Artt. $\theta' = 0$, $\theta = 1$, so ist
$$k-l = -(m-1)$$
oder, was zu beweisen war:
$$\theta'' = k-l+m = 1.$$

Dieser Satz enthält als Corollarium den von Cauchy in der oben angeführten Abhandlung (p. 78) bewiesenen Satz: „in jedem durch innere Punkte und Linien in eine beliege Zahl von Polygonen zerlegten Polygon ist die Zahl der Partial-Polygone und der Winkelpunkte um 1 grösser als die Zahl der Linien, welche die Seiten der Polygone bilden".

Beispiele. 1. In dem Flächencomplex Fig. 50, wo $k = 8$, $l = 11$, $m = 4$, ist $\theta'' = k-l+m = 1$.

2. In Fig. 50 ist $k = 21$, $l = 28$, $m = 8$, also $k-l+m = 1$.

3. In Fig. 51 ist $k = 9$, $l = 14$, $m = 6$, und $9-14+6 = 1$.

4. In Fig. 52 ist $k = 11$, $l = 18$, $m = 8$ und $11-18+8 = 1$.

5. Jedes gewöhnliche Polyëder, an welchem man eine oder mehrere untereinander benachbarte Flächen herausnimmt, bietet ein hierher gehöriges Beispiel. Man wird ohne Figur leicht nachzählen, dass z. B. am regulären Ikosaëder nach Wegnahme von fünf um einen Eckpunkt gelegenen Dreiecksflächen, noch 11 Ecken, 25 Kantenlinien und 15 Seitenflächen übrig bleiben, wo wiederum $11-25+15 = 1$. Hätte man zwei an einander liegende Dreiecke herausgenommen, so würde man 12 Eckpunkte, 29 Kantenlinien und 18 Flächen erhalten haben, welche wiederum $\theta'' = 1$ ergeben.

30.

Lehrsatz. In einem Flächen-Complex acyklodischer Constituenten von beliebig vielen Punkten, Linien und Flächen und zwei Körperräumen, nämlich einem acyklodischen von den Constituenten der niederen Curien eingeschlossenen und einem acyklodischen ausgeschlossenen Amplexum, ist die Diakrise $= 2$.

Beweis. Aus dem gegebenen Complex löse man eine derjenigen Flächen, welche den eingeschlossenen Raum begrenzen, aus, nebst ihren linearen Grenzen und etwa vorhandenen linearen Appendikeln, aber so, dass die an ihrer Grenze etwa inserirten appendicularen Flächen mit dem übrigen Theil des Complexes in Connex bleiben. Dadurch zerfällt der ganze Complex in zwei Flächen-Complexe, einen mehrflächigen und einen einflächigen, welchen beiden ein Linear-Complex gemeinschaftlich ist, in welchem die Grenzen des einflächigen Theils den Umfang einer Fläche darstellen. Der letzte fällt in die Kategorie des Satzes Art. 28, die beiden Complex-Theile unter die des im vor. Art. enthaltenen Satzes.

Es sei nun die Zahl der Punkte des gegebenen Complexes $= k$, der Linien $= l$, der Flächen $= m$, die Diakrise $= \theta'''$, die entsprechenden Zahlen für den mehrflächigen Theil seien k_1, l_1, m_1, θ'' und für den einflächigen k', l', 1, θ''. Im gemeinschaftlichen Linear-Complex seien (k) Punkte, (l) Linien und seine Diakrise $= \theta'$.

Man erhält nun die Constituenten des gegebenen Complexes, wenn man von der Summe der gleichartigen Constituenten der beiden Theile die, in dieser Summe doppelt gezählten, gleichartigen Constituenten des gemeinsamen Complexes abzieht, d. h.

$$\left.\begin{aligned} k &= k_1 + k' - (k) \\ l &= l_1 + l' - (l) \\ m &= m_1 + 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Nun ist nach den Sätzen in Art. 29 und 28:

$$\begin{aligned} k_1 - l_1 + m_1 &= \theta'' \\ k' - l' + 1 &= \theta'' \\ (k) - (l) &= \theta' \end{aligned}$$

folglich aus (6):

$$k - l + m = k_1 - l_1 + m_1 + k' - l' + 1 - (k) + (l) = 2\theta'' - \theta'$$

und da nach den Sätzen Art. 28 und 29 $\theta' = 0$, $\theta'' = 1$, so folgt, was zu beweisen war:

$$\theta''' = k - l + m = 2.$$

31.

Vor der Aufführung von Belegen durch Beispiele auch für den so eben erwiesenen Satz, scheint eine Bemerkung über die Bedeutung partialer Complexe, mit denen wir hier noch beschäftigt sind, nicht am unrechten Ort.

Art. 26 ist bemerkt worden, dass die in partialen Complexen nicht zur Zählung kommenden Constituenten höherer Curien als nicht effectiv gelten. In diesem Sinne ist also namentlich die in den Linear-Complexen des Art. 28 angenommene Fläche zu verstehen, deren Voraussetzung nur als das Mittel zur einfachsten Definition der topologischen Beschaffenheit des Complexes anzusehen ist. Es ist also verstattet, in dem Beweis des letzten Lehrsatzes, den Linearcomplex, welcher beiden Flächencomplexen vor der Zerlegung gemeinschaftlich ist, der Kategorie des Satzes Art. 28 zu subsumiren, da bei der Bildung des Census aus den drei Constituent-Zahlen (6) eine gemeinschaftliche Fläche in der That nicht mitgezählt worden ist.

Beispiele zum vorigen Satze. 1. In jedem gewöhnlichen Polyëder, dessen Eckenzahl $= k$, Kantenzahl $= l$, Flächenzahl $= m$, ist $\theta''' = k - l + m = 2$. Dies ist der Euler'sche Satz.

2. An jeder Ecke eines Würfels seien büschelartig beliebig viele frei endende oder appendiculare Linien, die sich nach Belieben in den inneren Würfelraum oder in das Amplexum erstrecken mögen, inserirt. Wäre ihre Gesammtzahl $= t$, so besässe der Complex $8 + t$ Punkte, $12 + t$ Linien, 6 Flächen, und man hätte $8 + t - (12 + t) + 6 = 2$.

3. An dem würfelförmigen Complex seien alle quadratische Seitenflächen durch angefügte Kreissegmente so erweitert, dass jede Seite mit ihren vier flügelartigen Ansätzen eine Kreisfläche bildet, so wäre $k = 8$, $l = 36$, $m = 30$, also $\theta''' = 2$. Theilte man jede quadratische Seite durch zwei Diagonalen in 4 Flächenstücke, so erhielte man auf jeder Seite einen neuen Punkt, also $k = 14$, auf jeder Seite vier neue Linien, also $l = 60$, und statt jeder der 6 quadratischen Flächen 4 dreieckige Flächen, also $m = 48$, und es wäre wiederum $14 - 60 + 48 = 2$.

4. Schnitte man, wie Fig. 53 andeutet, mitten an jeder Kante eines Würfels einen kleineren Würfel, dessen Kanten weniger als ein Drittheil der Kanten des ganzen Würfels betragen, heraus, so würde die Zahl der Punkte betragen 104, der Linien 156, der Flächen 54, und somit ebenfalls $\theta''' = 104 - 156 + 54 = 2$. Man kann sich leicht durch Nachzählen davon überzeugen, dass die Diakrise stets den Werth 2 bewahrte, falls man statt an allen 12 Kanten nur an einigen oder einer solche Ausschnitte anbrächte.

5. An einer einem geöffneten viereckigen Kasten ähnlichen Configuration, wie sie in Fig. 54 dargestellt ist, denke man sich den etwa von dem Holze eingenommenen Raum als den abgegrenzten Körperraum des Complexes, gebildet durch 2 in einander geschobene Parallelepipeda, deren untere Horizontalflächen um die Dicke der Bodenwand von einander entfernt bleiben, ebenso wie die aufrechten Flächen. Den Deckel bilden appendiculäre Linien und Flächen. Die obere rahmenförmige Kantenfläche des Kastens, wird zunächst dem Deckel durch zwei Linien f und g in 2 Flächen zerlegt. Ohne sie würde diese Kantenfläche cyklodisch sein und den Complex der hier geforderten Kategorie entrücken. Eine jener zwei Linien aber würde schon genügen, dieser Fläche den geforderten acyklodischen Zustand zu verleihen. Dieser Complex bietet nun 28 Punkte, 42 Linien und 16 Flächen dar, also ist $\theta''' = 28 - 42 + 16 = 2$.

Die (unstatthafte) Wegnahme der beiden Linien würde die Zahl der Punkte um 2, der Linien um 4, der Flächen um 1 vermindern, und dann würde die Diakrise, da $k - l + m = 26 - 38 + 15 = 3$, aufhören 2 zu sein. Lassen wir dagegen nur eine der beiden Linien f und g weg, so bleibt die Diakrise $= 27 - 40 + 15 = 2$.

6. Eine Cylinderfläche sei an beiden Enden durch zwei Kreisflächen geschlossen. Ein Punkt des einen Kreisumfangs sei mit einem des andern durch eine auf der Cylinderfläche gezogene sich nicht kreuzende Linie verbunden. Ohne diese Linie würde die Cylinderfläche cyklodisch sein. Der Complex besitzt 2 Punkte, 3 Linien und 3 Flächen. Die Diakrise ist also $= 2$. In Fig. 55 ist die Cylinderfläche durch eine krumme Röhre ersetzt, die kreisförmigen Endflächen zu Kugelsegmenten erweitert. Auf der Fläche der Röhre sind zwei Schraubenlinien in gleichem Sinne laufend gezogen. Es ist $k = 4$, $l = 6$, $m = 4$, $\theta''' = 2$.

7. Auf einer einen acyklodischen Körperraum begrenzenden, übrigens irgendwie gestalteten Fläche ziehe man von einem effectiven Punkte aus eine sich nirgend kreuzende Linie nach einem zweiten effectiven Punkte, so hat man $k = 2$, $l = 1$, $m = 1$, also $\theta''' = 2$. Man nehme auf der Fläche nur einen effectiven Punkt und ziehe eine in sich zurücklaufende Linie durch diesen Punkt etwa in Gestalt der Fig. 43, so hat man $k = 1$, $l = 1$, $m = 2$, also

$\theta''' = 2$. Man nehme endlich auf der Fläche lediglich einen effectiven Punkt an, so hat man $k = 1$, $l = 0$, $m = 1$ und $\theta''' = 2$.

32.

Das erste der vorstehenden Beispiele hat gezeigt, wie der Euler'sche Satz von den Polyëdern ein specieller Fall unseres Lehrsatzes in Art. 30 ist. Wir erinnern daran, dass sich der Euler'sche Satz gleichfalls in dem früher (Art. 22) gefundenen Satze (1) eingeschlossen fand. Die nahe Verwandtschaft der beiden Sätze, jenes des Art. 22, bezüglich auf einen Linear-Complex in der Fläche (Ebene oder Kugel) und dieses des Art. 30, bezüglich auf einen Flächen-Complex im Raume, springt schon an der in beiden auftretenden Diakrise 2 in die Augen. In der That, die Beschaffenheit des Complexes in Art. 22 bleibt dieselbe, mag die ihn tragende Fläche eine Ebene d. i. eine unendlich grosse Kugel, wo das Flächen-Amplexum ins Unendliche ausgedehnt ist, oder mag sie eine Kugel von endlichem Radius sein, wo die amplexe Fläche, wie die übrigen Parzellen oder Felder, endliche Ausdehnung hat. Die Kugel darf durch jede andere allseitig geschlossene, einen acyklodischen Raum einschliessende Fläche, beispielsweise die Oberfläche eines Polyëders, ersetzt; und der Complex gleich dem Kantennetz eines Polyëders, insofern wir in ihm ausser den Punkten und Linien auch die Felder gezählt haben, in welche er die Fläche zerlegt, ein Flächen-Complex im Raume genannt werden. So stellen sich also nunmehr beide Arten von Complexen als solche Flächen-Complexe dar, in welchen die Flächen den gesammten Raum in zwei acyklodische Theile scheiden, und der Unterschied bleibt lediglich der, dass im Complex des Art. 22 alle Flächen der Grenze zwischen beiden Räumen angehören, wie es bei den gewöhnlichen Polyëdern der Fall ist, während in dem Complex des Art. 30 ausser diesen Grenzflächen auch noch andere mit ihnen in appendiculärer Verbindung stehende enthalten sein können, wie die letzten Beispiele mehrfache Fälle der Art vorgeführt haben. Offenbar steht also der in Art. 22 (1) gefundene Satz, den der Satz in Art. 30 nur als Specialfall unter sich begreift, unter den von uns bis jetzt aufgeführten Sätzen dem Euler'schen Satze am nächsten, wiewohl er ihn, wie bereits hervorgehoben, in mehrfacher Hinsicht an Allgemeinheit übertrifft. Uebrigens bedarf es kaum der Bemerkung, dass in unseren Beweisen dieser, wie der späteren Sätze nur die topologische Argumentation der Situal-Analysis und keinerlei im engeren Sinne geometrische Hülfssätze (wie bei vielen der zeitherigen Begründungen des Euler'schen Satzes) zur Anwendung kommen.

33.

Bevor wir zur Betrachtung der vollzähligen Complexe übergehen, wird es nicht unzweckmässig sein, die vier in den Artt. 27—30 gewonnenen Sätze noch einmal in einer Uebersicht vor Augen zu stellen, wobei die in Klammern gesetzten Zahlen den von der Zählung ausgeschlossenen Curien angehören. Es ist durchweg nur Ein Complex mit acyklodischen Constituenten vorausgesetzt.

Partial-Complex.	Punkte.	Linien.	Flächen.	Räume.	Diakrise.
1. Linear-Complex	k	l	(0)	(1)	$\theta = 1$
2. Linear-Complex	k	l	(1)	(1)	$\theta' = 0$
3. Flächen-Complex	k	l	m	(1)	$\theta'' = 1$
4. Flächen-Complex	k	l	m	(2)	$\theta''' = 2$

34.

Der generelle Census für acyklodische Constituenten.

Aus den beiden letzten dieser Sätze werden wir nun leicht zu dem generellen Census zunächst Eines Complexes acyklodischer Constituenten gelangen, in welchem die Zahl derselben in allen Curien beliebig gross ist.

Lehrsatz. In einem Complex acyklodischer Constituenten ist die Zahl der Punkte und Flächen so gross, wie die Zahl der Linien und Räume.

Beweis. Die Zahl der Punkte sei a, der Linien b, der Flächen c, der Räume d, so ist zu beweisen, dass $a - b + c - d = 0$.

Der Complex enthält ausser dem amplexen Raume $d-1$ begrenzte Körperräume. Man zerlege denselben in $d-1$ Complexe, deren jeder einen der $d-1$ begrenzten Körperräume des gegebenen Complexes enthält, nebst den Grenzen, die ihm im ungetheilten Complex zukommen, und etwa vorhandenen appendicularen Flächen und Linien, in beliebiger Ordnung, jedoch so, dass nach Ablösung jedes Theils der acyklodische Zustand des die übrigen noch ungetrennten Theile umgebenden Amplexums unversehrt bleibt, was dadurch geschieht, dass man bei jeder der successiven Trennungen einen solchen Körperraum wählt, der durch einen Theil seiner Gesammtgrenze mit dem Amplexum durch den übrigen Theil mit den übrigen noch ungetrennten Körperräumen des Complexes in Contigenz steht. Dann erhält man $d-1$ Flächen-Complexe von der Art des 4. unserer vorigen Lehrsätze und $d-2$ zwischen je einem und den übrigen der $d-1$ Theile gemeinschaftliche Flächen-Complexe von der Art des 3. Satzes. Bezeichnen wir die Zahl der Punkte, Linien und Flächen des ersten Theiles durch k_1, l_1, m_1, des zweiten durch k_2, l_2, m_2 u. s. w. und ebenso die Zahl der Constituenten im ersten gemeinschaftlichen Complex mit $(k)_1$, $(l)_1$, $(m)_1$, im zweiten mit $(k)_2$, $(l)_2$, $(m)_2$ u. s. f., so hat man nach dem 4. Satze (Art. 30)

für den 1. Theil .... $k_1 - l_1 + m_1 = \theta'''$

2. .... $k_2 - l_2 + m_2 = \theta'''$

etc.

$d-1$ten Theil .... $k_{d-1} - l_{d-1} + m_{d-1} = \theta'''$

also $$\Sigma k_{d-1} - \Sigma l_{d-1} + \Sigma m_{d-1} = (d-1)\,\theta''' \quad (7)$$

wo sich das Summationszeichen auf die Suffixa von 1 bis $d-1$ bezieht. Nach dem 3. Satze (Art. 29) aber ist in dem gemeinschaftlichen Complex zwischen

dem 1. Theil u. den übrigen $(k)_1 - (l)_1 + (m)_1 = \theta''$

2. .... $(k)_2 - (l)_2 + (m)_2 = \theta''$

etc.

$d-2$. Theil u. dem letzten $(k)_{d-2} - (l)_{d-2} + (m)_{d-2} = \theta''$

also $$\Sigma(k)_{d-2} - \Sigma(l)_{d-2} + \Sigma(m)_{d-2} = (d-2)\,\theta'' \quad (8)$$

Nun ist aber

$$a = \Sigma k_{d-1} - \Sigma(k)_{d-2}$$
$$b = \Sigma l_{d-1} - \Sigma(l)_{d-2}$$
$$c = \Sigma m_{d-1} - \Sigma(m)_{d-2}$$

folglich unter Zuziehung von (7) und (8)

$$a-b+c=(d-1)\theta'''-(d-2)\theta''$$

Da aber nach dem 4. unserer obigen Sätze $\theta''=1$, $\theta'''=2$, so ist

$$a-b+c=2(d-1)-(d-2)=d$$

oder, was zu beweisen war:

$$a-b+c-d=0.$$

35.

Beispiele zu dem vorigen Satze. 1. In jedem gewöhnlichen durch innere Punkte, Linien und Ebenen in polyëdrische Räume getheilten Polyëder ist die Zahl sämmtlicher Eckpunkte, der inneren wie der äusseren, plus der Zahl sämmtlicher Flächen, weniger der Zahl sämmtlicher Kantenlinien um die Einheit grösser als die Anzahl der polyëdrischen Theile, oder wenn die Zahl der Eckpunkte durch S, der Flächen durch F, der Kanten durch A und der polyëdrischen Theile durch P bezeichnet wird (wo also $a=S$, $b=A$, $c=F$, $d=P+1$:

$$S+F=A+P+1$$

Dies ist die von Cauchy dem Euler'schen Satze gegebene Erweiterung [1]).

Nehmen wir einen Würfel, der durch halbirende Ebenen parallel zu seinen Seitenflächen in 8 kleinere Würfel getheilt ist, so haben wir $a=27$, $b=54$, $c=36$, $d=9$, wo $a+c=b+d$. Theilen wir ebenso jede Würfelseite in n und den Würfel in n^3 Theile, so kommt $a=(n+1)^3$, $b=3n(n+1)^2$, $c=3nn(n+1)$ und $d=n^3+1$ wo gleichfalls $(n+1)^3+3nn(n+1)=3n(n+1)^2+n^3+1$.

In einem Oktaëder, durch innere Flächen in 8 dreiseitige Pyramiden zerlegt, deren Spitzen in einem beliebigen inneren Punkte liegen, während je eine ihre Basis in einer Oktaëderfläche findet, sind 7 Punkte, 18 Linien, 20 Flächen, und ausser dem Amplexum 8 tetraëdrische Räume, und $7+20=18+8+1$.

In einem bloss von Dreiecken umschlossenen Polyëder, wie Tetraëder, Oktaëder, Ikosaëder, findet sich die Zahl der Punkte und Linien aus der Zahl der Flächen mittelst des 4. der obigen Sätze (s. Art. 33). Da nämlich in

1) Journal de l'Ecole polytechnique (16. cahier) Tome IX. pag. 77. Vgl. die Anm. in der Einleitung so wie Anm. zu Art. 18.

$k-l+m=2$ jetzt offenbar $3m=2l$ wird, so erhält man $k=2+\frac{1}{2}m$ und $l=\frac{3}{2}m$. (Die Flächenzahl kann in diesem Falle nur eine gerade Zahl sein). Zieht man nun von einem Punkte im Innern des von m Dreiecken begrenzten Polyëders gerade Linien nach sämmtlichen k Eckpunkten und theilt das Polyëder in m dreiseitige Pyramiden nach Art des vorigen Falles, so erhält man $k+1$ Punkte, $l+k$ Linien, $m+l$ Flächen und $m+1$ Räume (einschliesslich des Amplexums). Es ist also $a=3+\frac{1}{2}m$, $b=2+2m$, $c=\frac{5}{2}m$, $d=m+1$ und $a-b+c-d=0$. Für $m=8$, wie im vorigen Falle wird $a=7$, $b=18$, $c=20$, $d=9$, wie vorher. Für das Tetraëder wird $a=5$, $b=10$, $c=10$, $d=5$, für das Ikosaëder $a=13$, $b=42$, $c=50$, $d=21$. Für einen von 16 Dreiecken begrenzten polyëdrischen Körper, wie er aus Fig. 37 hervorgehen würde, wenn man die beiden fünfeckigen Grenzflächen durch je zwei Diagonalen in Dreiecke zerlegte, ist in dem den vorigen analogen Falle der Zerlegung in 16 dreiseitige Pyramiden $a=11$, $b=34$, $c=40$, $d=17$.

Aber auch jedes gewöhnliche Polyëder, seine m Seitenflächen mögen Dreiecke sein oder nicht, gibt durch die Zerlegung in m Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze im Innern des Körpers, wenn k die Zahl der Ecken und l der Kanten des unzerlegten Polyëders, wie vorher, $a=k+1$, $b=l+k$, $c=m+l$ und $d=m+1$ und es ist wiederum $a+c=b+d$.

2. Es sind im Raume n Kugeln ausser einander liegend gegeben, auf jeder Kugelfläche ein effectiver Punkt. Alle diese n Punkte sind mit einem einzigen $n+1$ten Punkte, der ausserhalb jeder Kugel liegt durch beliebige Linien, deren keine sich selbst kreuzt, verbunden. Dieser Complex hat $n+1$ Punkte, n Linien, n Flächen und $n+1$ Räume, also $a+c=b+d$. Setzte man in beliebig vielen der Kugeln noch eine Verbindungslinie zwischen ihrem Mittelpunkte und dem effectiven Punkte ihrer Oberfläche hinzu, so würde dadurch die Zahl a und die Zahl b um gleichviel vergrössert.

3. Zwei Systeme concentrischer Kugeln, Fig. 56, das eine n, das andere n' Kugeln enthaltend, berühren sich von aussen in einem effectiven Punkte, welcher der Fläche der grössten Kugel in jedem Systeme angehört. Dieser Berührungspunkt ist in jedem System durch eine, jede umschlossene Kugel nur in Einem Punkte durchdringende Linie mit dem Mittelpunkt des Systems verbunden. Dieser Complex, dessen Constituenten alle acyklodisch

sind, hat $n+n'+1$ Punkte, $n+n'$ Linien, $n+n'$ Flächen und $n+n'+1$ Räume, also ist wieder $a+c=2n+2n'+1=b+d$. Eine durch beide Mittelpunkte gelegte schneidende Ebene, welche zugleich die vorerwähnten Verbindungslinien enthalten soll, sei durch die grössten Kugeln nach aussen begrenzt, erstrecke sich also nicht in den amplexen Raum. Dann kommen keine Punkte, aber $n+n'$ Linien, $2n+2n'$ Flächen und $n+n'$ Räume hinzu, so dass also $a+c=3(n+n')+1=b+d$. Wird die schneidende Ebene in den amplexen Raum zur Fläche eines Kreises erweitert, der die äusseren Kugeln in 2 Punkten berührt, so kommen zwei Punkte, vier Linien und zwei appendiculare Flächen hinzu, und es bleibt immer noch $a-b+c-d=0$.

4. Zwei Ringkörper greifen verkettet in einander, Fig. 57. Jeder ist durch eine die Oeffnung des andern schliessende Fläche durchschnitten, welche selbst mit ihrem Ringe eine cyklische Grenzlinie gemein hat. Beide Schliessflächen schneiden einander in einer Linie, deren Endpunkte auf je einer Ringoberfläche liegen und die vier cyklischen Grenzen der beiden Schliessflächen acyklodisch machen. Die Durchschnittslinie macht beide Schliessflächen selbst acyklodisch. Die Ringkörper sind vermöge der in ihrem Innern gelegenen Theile der Schliessflächen acyklodisch. Vor Hinzufügung noch anderer in der Figur enthaltenen Flächen besteht der Complex aus 2 Punkten, 5 Linien, 6 Flächen und 3 Räumen, wo $2+6=5+3$. Schneiden wir jeden Ringkörper noch an einer andern Stelle, wie die Figur andeutet, durch eine vierseitig begrenzte Fläche, so besteht jetzt jeder Ringkörper wegen des in seinem Innern befindlichen Theils der neuen Schnittfläche aus 2 Körperräumen, so wie seine Oberfläche aus 2 Flächen, und wir haben $a=14$, $b=21$, $c=12$, $d=5$, also wieder $a-b+c-d=0$. Man dürfte jetzt — ohne Gefahr einer entstehenden Cyklose — den im Innern der Ringkörper liegenden Theil der Schliessflächen herausnehmen. Durch die Wegnahme in einem der Ringe würde c und d zugleich um 1, durch die Wegnahme in beiden Ringen um 2 vermindert, während a und b ungeändert blieben. Die Gleichung des Census aber bliebe verificirt.

Nach Wegnahme der oben gedachten beiden Flächen dürfte man nicht wiederum auch die im Innern der körperlichen Ringe befindlichen Theile der vierseitigen Schnittflächen beseitigen. Es würde dadurch lediglich c um 2 verringert und unsere Census-Gleichung unrichtig werden, was daher rühren würde, dass nunmehr die ringförmigen Körperräume cyklodisch geworden wären und somit der Bedingung nicht mehr genügt würde, an welche die Wahrheit des durch die gegenwärtigen Beispiele zu erläuternden Satzes geknüpft ist. Stellen wir die eben gedachten Flächen wieder her, beseitigen aber die ausserhalb der Ringkörper liegenden Theile der Schliessflächen unter Beibehaltung der Linie, die vorher ihre Durchschnittslinie gewesen, so sind zwar die Ringkörper oder ihre constituirenden Theile acyklodisch, aber das Amplexum würde zweifach cyklodisch werden. Durch Verminderung um 2 des Werthes von c allein, würde sich wiederum die Census-Gleichung aus gleichem Grunde nicht verificiren. Eine ausserdem versuchte Beseitigung der erwähnten Durchschnittslinie würde, weil jetzt das Ganze in zwei Complexe zerfiele, ebenso wenig eine Verification der Gleichung herbeiführen.

Diese und ähnliche im Vorhergehenden eingestreute Bemerkungen mögen dienen, die Bedeutung des bis jetzt noch ausbedungenen acyklodischen Zustandes sämmtlicher Constituenten des gegebenen Complexes in concreten Fällen noch mehr hervortreten zu lassen.

36.

Lehrsatz. Sind p Complexe von acyklodischen Constituenten gegeben, deren Gesammtzahl der Punkte a, der Linien b, der Flächen c, der Räume d ist, so ist $a-b+c-d=p-1$.

Beweis. Wir bezeichnen für die einzelnen Complexe, in ganz beliebiger Ordnung genommen, die Constituenten für den ersten, durch a_1, b_1, c_1, d_1, für den zweiten durch a_2, b_2, c_2, d_2 u. s. f. in jedem die Raum-Zahl d_1 oder d_2 u. s. w. so verstanden, als ob der Complex allein existirte.

Durch Tilgung der Flächen, Linien und Punkte eines Complexes hört natürlich die Existenz des Complexes selber auf. Alle seine Constituenten der vierten Curie aber, die an ihm unter einander in Contigenz waren, werden dadurch zu einem einzigen Raume verschmolzen, gleichviel, ob dieser Raum das Amplexum oder ein einem anderen Complex angehöriger Binnenraum sei. Die Wegräumung irgend eines Complexes, dessen Numerus der vierten Curie d_r ist hat demnach die Verminderung der Gesammtzahl d um $d_r - 1$ zur Folge. Tilgen wir also nach und nach alle Complexe, so vermindert sich bei jeder Wegschaffung eines Complexes die Total-Anzahl d um eine Zahl, welche 1 weniger beträgt als die Raumzahl des getilgten Complexes, und nach Wegräumung aller Complexe bleibt natürlich der leere amplexe Raum allein übrig, oder alle Tilgungen bewirken eine totale Verminderung um $d-1$. In Zeichen ausgedrückt haben wir also

$$d-1 = \Sigma(d_p - 1)$$

die Summation auf alle Suffixa von 1 bis p ausgedehnt gedacht. Dies gibt

$$d-1 = \Sigma d_p - p$$

oder

$$\Sigma d_p = d+p-1 \tag{9}$$

Nach dem vorhergehenden Lehrsatz ist nun für die einzelnen Complexe

$$a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 0$$
$$a_2 - b_2 + c_2 - d_2 = 0$$
$$\text{etc.}$$
$$a_p - b_p + c_p - d_p = 0$$

also

$$\Sigma a_p - \Sigma b_p + \Sigma c_p - \Sigma d_p = 0 \tag{10}$$

Es ist aber offenbar

$$\Sigma a_p = a$$
$$\Sigma b_p = b$$
$$\Sigma c_p = c$$

Unter Berücksichtigung dieser drei Summenwerthe, so wie des vierten, oben gefundenen (9) folgt aus (10):

$$a-b+c-d-p+1 = 0$$

oder, was zu beweisen war:

$$a-b+c-d = p-1$$

Der hiermit geschehene Schritt zur Ausdehnung des Satzes in Art. 34 auf den Fall einer beliebigen Zahl von Complexen ist so palpabel, dass wir uns füglich der Vorführung neuer Beispiele überheben dürfen. Aus den auf Einen Complex bezüglichen Beispielen des Art. 35 kann man nach Belieben mehrere Complexe seclusiv oder inclusiv coëxistirend annehmen und daran die Gleichung des gegenwärtigen Satzes verificiren. Auch ist es fast überflüssig zu bemerken, dass der Satz für $p = 1$ in den vorhergehenden des

Art. 34 übergeht, so wie dass er auch für den Fall $p = 0$ gilt, wo $a = b = c = 0$, $d = 1$ ist.

37.

Der generelle Census für irgend welche Complexe.

Nachdem wir die allgemeine Relation für den Census solcher Complexe gewonnen haben, deren Constituenten sämmtlich acyklodisch sind, gehen wir nun an die Untersuchung des Einflusses, den die Cyklose in den Constituenten gegebener Complexe auf diese Relation ausübt, um dadurch zu dem generellen Census irgend wie beschaffener Complexe zu gelangen.

Bisher haben alle Constituenten zum Census lediglich mit ihrem Numerus concurrirt, d. h. jeder Constituent zählte als Einheit in seiner Curie. Sobald wir, wie jetzt geschehen soll, die bisherige Einschränkung in der Beschaffenheit der Constituenten fallen lassen, wird der Beitrag eines Constituenten im Allgemeinen nicht mehr 1, sondern eine Zahl sein, welche aus der Einheit durch einen Zusatz hervorgeht, der lediglich für acyklodische Constituenten Null ist. Wir werden diesen Zusatz abgesehen von seinem Vorzeichen, welches aus den weiteren Betrachtungen von selbst hervorgehen wird, in den einzelnen Curien mit α, β, γ, δ bezeichnen und ihn, so wie die Summe der Zusätze in jeder Curie, das *Attributiv* nennen. Durch das Attributiv wird dem numerativen Element des Census gleichsam ein taxatorisches hinzugefügt.

Stellen wir uns vorerst zur Vereinfachung der Argumentation wieder zurück auf das Gebiet Eines Complexes, für welchen nach Art. 34 im Falle lediglich acyklodischer Bestandstücke die Relation

$$a - b + c - d = 0 \tag{11}$$

gilt, so wird jetzt, wo der Beitrag der einzelnen Constituenten allgemein in der ersten Curie $1+\alpha$ statt 1, in der zweiten $1+\beta$ statt 1, in der dritten $1+\gamma$ statt 1 und in der vierten $1+\delta$ statt 1 sein soll, jedes der vier Glieder der Census-Gleichung (11) nicht mehr die blosse Anzahl der Constituenten in der entsprechenden Curie, sondern die Summe der Beiträge aller in einer Curie contribuirenden Constituenten sein müssen. Bezeichnen wir die neuen Glieder der Census-Gleichung durch A, B, C, D, während nach wie vor a die Zahl der Punkte, b der Linien, c der Flächen, d der Räume bedeutet, sind ferner die Attributive der einzelnen Constituenten in der ersten Curie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_a$, in der zweiten $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_b$, in der dritten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_c$, in der vierten $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_d$ und endlich die Summen $\Sigma\alpha_a = \alpha$, $\Sigma\beta_b = \beta$, $\Sigma\gamma_c = \gamma$, $\Sigma\delta_d = \delta$, so muss offenbar das Aggregat $(a+\alpha)-(b+\beta)+(c+\gamma)-(d+\delta)$, sobald sämmtliche Attributive Null werden, in $a-b+c-d$ übergehen, von welchem in Art. 34 bewiesen worden, dass es $= 0$ ist; mit andern Worten: die bisherige Census-Gleichung (11) für einen acyklomatischen Complex geht im gegenwärtigen allgemeineren Falle eines cyklomatischen Complexes in die allgemeinere

$$A-B+C-D=0 \tag{12}$$

über, wo

$$\begin{aligned} A &= a+\alpha \\ B &= b+\beta \\ C &= c+\gamma \\ D &= d+\delta \end{aligned} \tag{13}$$

Wir bezeichnen nun ferner die cyklomatische Zahl der einzelnen Constituenten in der ersten Curie durch $\varkappa_1^0, \varkappa_2^0, \varkappa_3^0, \ldots \varkappa_a^0$, in der zweiten durch $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa_b'$, in der dritten durch $\varkappa_1'', \varkappa_2'', \ldots \varkappa_c''$, in der vierten durch $\varkappa_1''', \varkappa_2''', \ldots \varkappa_d'''$ und ausserdem für die Constituenten der dritten Curie durch $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_r$ den periphraktischen Werth 1 oder 0, jenachdem die Fläche periphraktisch ist, oder nicht, so wie endlich die Summen $\Sigma\varkappa_a^0$, $\Sigma\varkappa_b'$, $\Sigma\varkappa_c''$, $\Sigma\varkappa_d'''$ und $\Sigma\pi_c$ bezw. durch $\varkappa^0, \varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \pi$; so ist nunmehr die Aufstellung des auf einen beliebigen Complex bezüglichen allgemeinen Theorems des Census vorbereitet, welches wesentlich nur die Abhängigkeit der Attributive von der topologischen Natur der Constituenten, d. i. von ihrer cyklomatischen und periphraktischen Beschaffenheit nachzuweisen hat.

38.

Lehrsatz. In der auf einen räumlichen Complex von irgend wie beschaffenen Constituenten bezüglichen Census-Gleichung

$$A-B+C-D=0$$

wo $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, $C = c + \gamma$, $D = d + \delta$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_r &= -x_r^0 \\ \beta_r &= -x_r' \\ \gamma_r &= -x_r'' + \pi_r \\ \delta_r &= -x_r''' \end{aligned}$$

wo r einen beliebigen ganzzahligen Index bedeutet, und somit auch

$$\begin{aligned} \alpha &= -x^0 \\ \beta &= -x' \\ \gamma &= -x'' + \pi \\ \delta &= -x''' \end{aligned}$$

oder: das Attributiv ist in der ersten, zweiten und vierten Curie gleich der cyklomatischen Ordnungszahl negativ genommen und in der dritten Curie gleich der periphraktischen Zahl minus der cyklomatischen Zahl.

Beweis. Wir führen durch die erforderlichen Dialysen, nach Anweisung der in den Artt. 7 bis 25 enthaltenen Abschnitte von der Cyklose, der Dialyse und dem Diagramm, sämmtliche Constituenten successive in den einzelnen Curien, mit der ersten beginnend, aber innerhalb jeder Curie in beliebiger Ordnung, auf den acyklodischen Zustand zurück, um dadurch neue Complexe zu erzeugen, in welchen eine oder mehrere oder alle Curien theilweis oder gänzlich acyklodische Bestandtheile enthalten. Von den durch die dialytischen Operationen in den einzelnen Constituenten wie in den Curien dem gegebenen Complex hinzugefügten oder augmentären Constituenten müssen wir uns die erforderliche Rechenschaft geben, um den dadurch bewirkten doppelten Einfluss, nämlich des Ueberganges cyklodischer Constituenten in acyklodische und des gleichzeitigen Zuwachses an neuen Constituenten im Einzelnen übersehen zu können. Das Gesammt-Augment bildet alsdann in dem gegebenen Complex offenbar einen Inbegriff von virtuellen Constituenten, welche, sobald wir ihnen den Charakter der Effectivität ertheilen, den cyklomatischen Complex mit Einemmal in einen acyklodischen umwandeln.

In der *ersten* Curie fällt die Reduction weg, da die Punkte sämmtlich acyklodisch sind. Es ist nicht bloss x_r^0 und x, sondern auch das Attributiv α_r und die Attributivsumme α stets $= 0$.

In der *zweiten* Curie, der Linien, ist x_r' entweder $= 0$ oder $= 1$. Im ersten Falle ist die Linie acyklodisch und $\varepsilon_r = 0$. Im zweiten ist sie cyklisch und wird durch eine Dialyse acyklodisch. Die Dialyse besteht in einem Punkte an einem beliebigen Orte auf dem Cyklus. Jede solche Dialyse in der Curie bewirkt also im Complex einen Zuwachs von einem Punkte. In der zweiten Curie hat mithin die Reduction eines beliebigen Constituenten einerseits den Uebergang von B in $B-\varepsilon_r$ andererseits ein Augment von

$$x_r' \text{ Punkten}$$

und die Reduction aller Constituenten einerseits den Uebergang von B in $B-\varepsilon$, andererseits ein Augment von

$$x' \text{ Punkten}$$

zur Folge, während in der ersten Curie bei dem Uebergang von A in $A-\alpha_r$ oder in $A-\alpha$ dieser Zuwachs Null war.

In der *dritten* Curie, der Flächen, kann x_r'' Null oder jede ganze positive Zahl bedeuten, der Werth von π_r aber kann entweder 0 oder 1 sein. Wir ertheilen der Fläche erforderlichen Falls das Trema. Durch diesen Theil der Reduction an einem beliebigen Constituenten erwächst dem Complex der Zuwachs von π_r Punkten und durch die Operation an sämmtlichen Constituenten der Zuwachs von π Punkten. Die Dialyse einer Fläche besteht in einer acyklodischen Linie, welche entweder zwei neue Punkte, auf bereits acyklodische Linien fallend, und dadurch zwei neue Linien, oder einen solchen Punkt und dadurch eine neue Linie oder keinen Punkt und keine neue Linie dem Complex hinzufügt. Jede Dialyse bewirkt also einen Zusatz von einer Linie und ausserdem einen Zusatz von gleichviel Linien und Punkten und somit alle Dialysen einer beliebigen Fläche von der cyklomatischen Zahl x_r'' einen Zusatz von x''_r Linien nebst gleichviel (wir setzen m_r) Linien und Punkten. Die sämmtlichen Dialysen in der Curie werden mithin einen Zuwachs von x'' Linien und daneben von gleichviel (wir setzen m) Linien und Punkten zur Folge haben. Unter Mitberücksichtigung des Tremas ist sonach die Wirkung der Reduction einer beliebigen Fläche einerseits der Uebergang von C in $C-\gamma_r$, andererseits ein Augment von

$$x_r''+m_r \text{ Linien}$$
$$\pi_r+m_r \text{ Punkten,}$$

und die Wirkung der vollständigen Reduction der ganzen Curie einerseits der Uebergang von C in $C-\gamma$, andererseits ein Augment von

$$\begin{aligned} &x'' + m \text{ Linien} \\ &\pi + m \text{ Punkten.} \end{aligned}$$

In der *vierten* Curie, der Räume, besteht jede Dialyse in einer acyklodischen Fläche. Diese augmentäre Fläche führt im Allgemeinen l neue Linien, welche bereits acyklodische Flächen durchschneiden, und k neue Punkte, auf bereits acyklodische Linien fallend, ein. Die l neuen Linien bewirken durch die Zerschneidung acyklodischer Flächen einen Zusatz von l Flächen, und die k neuen Punkte durch die Zertheilung acyklodischer Linien einen Zusatz von k Linien. Der Zuwachs in Folge einer Dialyse wird also sein: eine Fläche und daneben l Flächen, $l+k$ Linien und k Punkte, d. h. ausser einer Fläche ein Zuwachs von gleichviel Flächen und Linien und ein anderer Zuwachs von gleichviel Linien und Punkten. Ein Raum, dessen Cyklose von der Ordnung x_r''' ist, wird also durch seine Reduction einerseits den Uebergang von D in $D-\delta_r$ andererseits ein Augment von

$$\begin{aligned} &x_r''' + n_r \text{ Flächen} \\ &n_r + n_r' \text{ Linien} \\ &n_r' \quad \text{ Punkten} \end{aligned}$$

verursachen, und die Folge der durchgängigen Operation in der vierten Curie wird sein einerseits der Uebergang von D in $D-\delta$ und andererseits ein Augment von

$$\begin{aligned} &x''' + n \text{ Flächen} \\ &n + n' \text{ Linien} \\ &n' \quad \text{ Punkten.} \end{aligned}$$

Die hierbei mehrfach zur Bezeichnung gleicher Zuwachs-Antheile in zwei benachbarten Curien gebrauchten Zeichen k, l, m, n (mit oder ohne Affixa) können sowohl Null als jede beliebige ganze positive Zahl bedeuten.

Der ursprünglich gegebene Complex hat jetzt durch die Reduction in den vier Curien eine Reihe von Stadien oder Phasen durchlaufen, die wir aus den Erfolgen der einzelnen Operationen leicht überblicken. Nennen wir den Complex in seinem anfänglichen Zustande W und seine successiven Phasen: W^0 nach der Reduction der ersten Curie, W^0_r nach der Reduction bloss des $r$ten Constituenten der ersten Curie, W' nach der Reduction der ersten und zweiten Curie, W_r' nach der Reduction der ersten Curie und in der zweiten Curie bloss des $r$ten Constituenten, u. s. f. also W''' den finalen Zustand nach der durchgängigen Reduction, so haben wir nech dem Bisherigen folgenden Bestand an Constituenten des Complexes in seinen successiven Phasen.

Der Complex in der Phase		unreducirt	reducirt
W	enthält	Punkte a	
		Linien b	
		Flächen c	
		Räume d	
W^0_r	enthält	Punkte $a-1$	Punkt 1
		Linien b	
		Flächen c	
		Räume d	
W'^0	enthält	....	Punkte a
		Linien b	
		Flächen c	
		Räume d	
W_r'	enthält	....	Punkte $a+x_r'$
		Linien $b-1$	Linie 1
		Flächen c	
		Räume d	
W'	enthält	....	Punkte $a+x'$
		....	Linien b
		Flächen c	
		Räume d	
W_r''	enthält	....	Punkte $a+x'+\pi_r+m$
		....	Linien $b+x_r''+m_r$
		Flächen $c-1$	Fläche 1
		Räume d	
W''	enthält	....	Punkte $a+x'+\pi+m$
		....	Linien $b+x''+m$

Der Complex in der Phase		unreducirt	reducirt
		....	Flächen c
		Räume d	
W_r'''	enthält	....	Punkte $a+\varkappa'+\pi+m+n'_r$
		....	Linien $b+\varkappa''+m+n_r+n'_r$
		....	Flächen $c+\varkappa_r'''+n_r$
		Räume $d-1$	Raum 1
W'''	enthält	....	Punkte $a+\varkappa'+\pi+m+n'$
		....	Linien $b+\varkappa''+m+n+n'$
		....	Flächen $c+\varkappa'''+n$
		....	Räume d

Wenden wir nun unter Berücksichtigung, dass für alle reducirten Constituenten das Attributiv wegfällt, die allgemeine Census-Gleichung (12) an, so erhalten wir folgende Gleichungen für die einzelnen Phasen:

für W .... $$A-B+C-D=0 \quad (14)$$
W_r^0 .... $$(A-\alpha_r)-B+C-D=0 \quad (15)$$
W^0 .... $$a-B+C-D=0 \quad (16)$$
W_r' .... $$(a+\varkappa_r')-(B-\beta)+C-D=0 \quad (17)$$
W' .... $$(a+\varkappa')-b+C-D=0 \quad (18)$$
W_r'' .... $$(a+\varkappa'+\pi_r+m_r)-(b+\varkappa_r''+m_r)+(C-\gamma_r)-D=0 \quad (19)$$
W'' .... $$(a+\varkappa'+\pi+m)-(b+\varkappa''+m)+c-D=0 \quad (20)$$
W_r''' .. $$(a+\varkappa'+\pi+m+n_r')-(b+\varkappa''+m+n_r+n_r')+(c+\varkappa_r'''+n_r)-(D-\delta_r)=0 \quad (21)$$
W''' .... $$(a+\varkappa'+\pi+m+n')-(b+\varkappa''+m+n+n')+(c+\varkappa''+n)-d=0 \quad (22)$$

Aus (14) und (15) folgt $-\alpha_r=0$ und da $\varkappa_r^0=0$, so ist
$$\alpha_r=-\varkappa_r^0 \quad (23)$$
Aus (16) und (17) folgt $\varkappa'_r+\beta_r=0$, oder
$$\beta_r=-\varkappa_r' \quad (24)$$
Aus (18) und (19) folgt $\pi_r-\varkappa_r''-\gamma_r=0$ oder
$$\gamma_r=-\varkappa_r''+\pi_r \quad (25)$$
Aus (20) und (21) folgt $\varkappa_r'''+\delta_r=0$ oder
$$\delta_r=-\varkappa_r''' \quad (26)$$

Ebenso ergibt sich aus (14) und (16) $A-a=0$ oder, da auch $A-a=\alpha$ und $x^0=0$,

$$\alpha=-x^0 \tag{27}$$

aus (16) und (18) nach (13) auch $B-b+x'=0$, oder da $B-b=\beta$,

$$\beta=-x' \tag{28}$$

aus (18) und (20): $C-c+x''-\pi=0$, oder da auch $C-c=\gamma$,

$$\gamma=-x''+\pi \tag{29}$$

endlich aus (20) und (22): $D-d+x'''=0$, oder da $D-d=\delta$,

$$\delta=-x''' \tag{30}$$

Mit den Gleichungen (23) ... (30) ist der Satz bewiesen.

39.

Die allgemeine Gleichung (12) oder

$$(a+\alpha)-(b+\beta)+(c+\gamma)-(d+\delta)=0$$

nimmt also zu Folge des eben bewiesenen Satzes diese Gestalt an

$$(a-x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi)-(d-x''')=0 \tag{31}$$

Von dieser auf Einen Complex bezüglichen Census-Gleichung gehen wir sofort auf den Fall einer beliebigen Zahl von Complexen über, der den vorstehenden als Specialfall wird enthalten müssen.

Lehrsatz. Sind p Complexe von irgendwie beschaffenen Constituenten gegeben, in welchen die Gesammtzahl der Punkte a, der Linien b, der Flächen c, der Räume d ist, und bezeichnen x^0, x', x'', x''' in den einzelnen Curien die Summe der cyklomatischen Zahlen so wie π die Summe der periphragmatischen Zahlen in der dritten Curie, so ist, wenn $A=a-x^0$, $B=b-x'$, $C=c-x''+\pi$, $D=d-x'''$:

$$A-B+C-D=p-1$$

Beweis. Stehen die Complexe in seclusiver Stellung, so dass also alle von dem Amplexum umgeben werden, so wird man durch $p-1$ successive acyklodische und sich nicht selbst kreuzende Verbindungslinien erst zwei, dann drei, vier u. s. w. bis zuletzt alle p Complexe zu Einem Complex vereinigen können. Ist die Stellung eine durchgängig inclusive, so wird man entweder durch Anathese die seclusive Stellung einführen und wie vorher die successiven Combinationen zweier, dreier u. s. w. Complexe in beliebiger Ordnung vollziehen, oder sofern man auf die Anwendung der Anathese verzichten will, bei diesem Combinationsgeschäft die Inclusions-Ordnung befolgen, vom innersten zum nächsten äussern oder umgekehrt vom äussersten zum nächst innersten fortschreitend. Die Zahl der Combinationslinien ist auch in diesem Falle $p-1$. Ist endlich die Stellung promiscue die seclusive und inclusive, so wird man wiederum entweder durch Anathese durchgängig seclusive Stellung einführen, oder — ohne Anathese — die successiven Vereinigungen zwischen einzelnen oder bereits untereinander verbundenen Complexen dadurch vollziehen, dass man durch jede Verbindungslinie jedesmal nur Einen Zwischenraum durchsetzt oder gleichsam durchbohrt. Dass aber auch jetzt zur Vereinigung sämmtlicher Complexe in Einen Complex $p-1$ Combinationslinien erforderlich und ausreichend sind, geht, wie auch für die vorigen Fälle, aus der Ueberlegung hervor, dass die Zahl der Complexe nach Einführung jeder solcher Linie um 1 vermindert erscheint, so dass nach $p-1$ Linien die Zahl der Complexe um $p-1$ vermindert sein, d. h. auf 1 herabgekommen sein muss.

Es ist, wie für den gegenwärtigen Zweck, so auch in anderweitigem Betracht von Interesse nachgewiesen zu haben, dass zur Herstellung Eines Complexes aus p Complexen in allen Fällen, auch ohne Zuhülfenahme der Anathese, $p-1$ Combinationslinien erforderlich und ausreichend sind.

Jede Combinationslinie nun, welche gleichsam eine Brücke von einem Complex zum andern quer durch den beide umgebenden Zwischenraum herzustellen hat, muss den einen ihrer Endpunkte in dem einen, den andern im andern Complex finden. Untersuchen wir die Wirkung jedes solchen neuen Punktes auf die Constituenten des betreffenden Complexes, so kommen folgende fünf Fälle in Betracht.

Erstens: der Endpunkt der Combinationslinie ist ein bereits effectiver Punkt des Complexes, dann erfährt der Complex von dieser Seite keine Aenderung in seinem Bestande.

Zweitens: der Endpunkt ist ein Punkt auf einer acyklodischen Linie, dann ist die Wirkung im Bestande der Constituenten ein Augment in a um 1 und in b um 1.

Drittens: der Endpunkt ist ein Punkt auf einer cyklodischen Linie, dann bildet der Punkt die Dialyse dieser Linie und die Wirkung ist ein Augment in a um 1 und in x' um -1.

Viertens: der Endpunkt ist ein neuer Punkt auf einer aperiphraktischen Fläche von dem cyklomatischen Range x_r'', dann ist die Wirkung ein Augment in a um 1 und in x_r'' oder in x'' um 1.

Fünftens: der Endpunkt ist ein neuer Punkt auf einer periphraktischen Fläche, für welche also $\pi_r = 1$, dann bildet der Punkt das Trema dieser Fläche, und die Wirkung ist ein Augment in a um 1 und in π_r oder π um -1.

Die Wirkung eines Endpunkts auf die im Census vorkommenden Grössen a, b, c, d, x^0, x', x'', x''' und π ist also, indem wir einen Zuwachs mit $+$, eine Abnahme mit $-$ verzeichnen, die Aenderung

im 1. Fall	keine	oder von A um 0
		von B um 0
		von C um 0
im 2. Fall	von a um $+1$	oder von A um $+1$
	von b um $+1$	von B um $+1$
		von C um 0
im 3. Fall	von a um $+1$	oder von A um $+1$
	von x' um -1	von B um $+1$
		von C um 0
im 4. Fall	von a um $+1$	oder von A um $+1$
	von x'' um $+1$	von B um 0
		von C um -1
im 5. Fall	von a um $+1$	oder von A um $+1$
	von π um -1	von B um 0
		von C um -1

und in allen Fällen bleibt D ungeändert.

Bezeichnen wir durch u und u' Grössen, welche nur die Werthe 0 oder 1 annehmen können, so lassen sich die vorigen fünf Fälle in zwei so zusammenfassen, dass wir den Effect jeder der $p-1$ Verbindungen, welche einerseits einen Zuwachs um eine acyklodische Linie, andererseits den eben ermittelten Zuwachs durch jeden ihrer beiden Endpunkte einführt, darstellen als den Uebergang

entweder von A in $A+u+u'$
von B in $B+u+u'+1$
oder von A in $A+u+u'$
von B in $B+1$
von C in $C-u-u'$

d. h. durch die Einführung jeder der $p-1$ Verbindungslinien entsteht im Bestande der Complexe entweder in den zwei Gliedern A und B ein Zuwachs, der in B um die Einheit grösser ist, als in A, oder in den drei Gliedern A, B, C ein Zuwachs, der in A und C gleich gross aber entgegengesetzt, und in B der Einheit gleich ist. Bezeichnen v und w Zusätze, die sowohl 0 als jede ganze positive Zahl bedeuten können, so wird durch die Einführung aller $p-1$ Combinationslinien im Bestande des dadurch hergestellten einzigen Complexes ein Uebergang

entweder von A in $A+v$
von B in $B+v+p-1$
oder von A in $A+w$
von B in $B+p-1$
von C in $C-w$

bewirkt. Für den nunmehr hervorgegangenen Complex aber gilt nach dem Satze des vorigen Art. die Gleichung (12), welche jetzt diese Gestalt annimmt

entweder $(A+v)-(B+v+p-1)+C-D=0$
oder $(A+w)-(B+p-1)+(C-w)-D=0$

In beiden Fällen ist, was zu beweisen war:

$$A-B+C-D=p-1 \tag{32}$$

oder nach Einführung der Werthe von A, B, C, D:

$$(a-x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi)-(d-x''')=p-1 \tag{33}$$

Dies ist der Census räumlicher Complexe von endlicher Ausdehnung in seiner allgemeinsten Bedeutung, wiewohl seine Form sich später noch einer weiter gehenden Verallgemeinerung fähig zeigen wird.

40.

Zur Veranschaulichung des Sinns und der Allgemeinheit dieses Theorems führen wir nun eine Reihe von Beispielen für einen oder mehrere Complexe auf. Wir werden jedesmal aus dem Numerus und dem Attributiv die Glieder A, B, C, D und das Aggregat $A-B+C-D$ berechnen, dessen Betrag wir mit Q bezeichnen. Die Verification der Census-Gleichung wird alsdann aus der Uebereinstimmung der Werthe von Q und $p-1$ hervortreten.

1. Ein einziger Punkt im Raum ist gegeben. Dann ist $a=1$, $x^0=0$, $A=1$; $b=B=0$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=0$, $D=1$; $p=1$, also

$$Q = 1-0+0-1 = 0$$
$$p-1 = 0$$

Für n verschiedene irgendwie im Raume gelegene Punkte ist $a=n$, $x^0=0$, $A=n$; $b=B=0$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=0$, $D=1$; $p=n$, also

$$Q = n-0+0-1 = n-1$$
$$p-1 = n-1$$

2. Eine in sich zurückkehrende mit einem effectiven Punkte versehene Linie, wie Fig. 43, 44 oder 45, gibt $a=1$, $x^0=0$, $A=1$; $b=1$, $x'=0$, $B=1$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=1$, $D=0$; $p=1$, mithin

$$Q = 1-1+0-0 = 0$$
$$p-1 = 0$$

Für alle drei in Fig. 43, 44, 45 dargestellte, zugleich existirende Linien, gleichviel ob sie unter einander verkettet seien oder nicht, hat man $a=3$, $x^0=0$, $A=3$; $b=3$, $x'=0$, $B=3$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=3$, $D=-2$; $p=3$, also

$$Q = 3-3+0+2 = 2$$
$$p-1 = 2$$

3. Eine cyklische Linie ist gegeben. Dann ist $a=A=0$; $b=1$, $x'=1$, $B=0$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=1$, $D=0$; $p=1$. Also

$$Q = 0-0+0-0 = 0$$
$$p-1 = 0$$

Für n cyklische, sich weder berührende noch kreuzende Linien — irgendwie verkettet und verknotet oder nicht — hat man $a=A=0$; $b=n$, $x'=n$, $B=0$; $c=C=0$; $d=1$, $x'''=n$, $D=1-n$; $p=n$. Also

$$Q = 0-0+0-(1-n) = n-1$$
$$p-1 = n-1$$

4. Eine allseitig geschlossene, einen acyklodischen Raum einschliessende Fläche ohne effective Punkte oder Linien ist gegeben. Sie kann die Gestalt einer Kugel, eines Sphäroïds, einer Blase, eines geschlossenen Schlauchs u. s. w. haben. Es ist $a = A = 0$; $b = B = 0$; $c = 1$, $\varkappa'' = 0$, $\pi = 1$, $C = 2$; $d = 2$, $\varkappa''' = 0$, $D = 2$; $p = 1$. Also

$$Q = 0 - 0 + 2 - 2 = 0$$
$$p - 1 = 0$$

Für n solche Flächen in seclusiver oder inclusiver Stellung vorausgesetzt, dass sie einander weder berühren noch durchschneiden, ist $a = A = 0$; $b = B = 0$; $c = n$, $\varkappa'' = 0$, $\pi = n$, $C = 2n$, $d = n + 1$, $\varkappa''' = 0$, $D = n + 1$; $p = n$. Also

$$Q = 0 - 0 + 2n - (n + 1) = n - 1$$
$$p - 1 = n - 1$$

5. Für die in Fig. 24 dargestellte polycyklodische Fläche, für welche das Diagramm des eingeschlossenen Raums im 4. Beispiel des Art. 21, so wie im 3. Beispiel des Art. 22 sich als dreifach cyklodisch erwiesen hat, welche sich selbst als sechsfach cyklodisch erweist und deren Amplexum dreifach cyklodisch ist, hat man $a = A = 0$; $b = B = 0$; $c = 1$, $\varkappa'' = 6$, $\pi = 1$, $C = -4$; $d = 2$, $\varkappa_1''' = 3$, $\varkappa_2''' = 3$, $D = -4$; $p = 1$. Also

$$Q = 0 - 0 - 4 + 4 = 0$$
$$p - 1 = 0$$

6. Es seien die in den Figuren 3 und 4 dargestellten Flächen zwei zugleich gegebene Complexe. Jede derselben ist von einer cyklischen Linie vollständig begrenzt, die eine (Fig. 3) ist einfach cyklodisch, die andere (Fig. 4) zweifach cyklodisch. Das Amplexum ist dreifach cyklodisch. Effective Punkte fehlen. Man hat demnach $a = A = 0$; $b = 2$, $\varkappa_2' = 1$, $\varkappa_2' = 1$, $B = 0$; $c = 2$, $\varkappa_1'' = 1$, $\varkappa_2'' = 2$, $C = -1$; $d = 1$, $\varkappa''' = 3$, $D = -2$; $p = 2$. Mithin

$$Q = 0 - 0 - 1 + 2 = 1$$
$$p - 1 = 1$$

7. Eine ringförmige Röhre Fig. 58 besteht aus zwei Ringflächen, deren eine in der anderen ohne gegenseitige Durchschneidung oder Berührung enthalten ist. Sie stellt zwei Complexe dar, von welchen jeder aus einer

periphraktischen, zweifach cyklodischen Fläche besteht, und enthält zwei Räume, einen einfach cyklodischen und einen zweifach cyklodischen. Das Amplexum ist einfach cyklodisch. Hier ist also $a = A = 0$; $b = B = 0$; $c = 2$, $\varkappa_1'' = 2$, $\varkappa_2'' = 2$, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 1$, $C = 0$; $d = 3$, $\varkappa_1''' = 1$, $\varkappa_2''' = 2$, $\varkappa_3''' = 1$, $D = -1$; $p = 2$, und somit

$$Q = 0-0+0+1 = 1$$
$$p-1 = 1$$

Würden beide Ringflächen durch Anathese in seclusive Stellung gebracht, so müsste, wie bereits in Art. 18 hierauf aufmerksam gemacht ist, das Amplexum die Rolle des zweifach cyklodischen der drei Räume übernehmen, ohne dass dadurch die Glieder des Aggregats Q eine Aenderung ihrer Werthe erführen. Es bliebe nach wie vor $Q = p-1 = 1$. Wären statt zweier beliebig viele solcher Ringflächen gegeben, gleichviel ob in seclusiver oder inclusiver Stellung, ob verkettet oder nicht, so würde sich offenbar stets $Q = p-1$ ergeben

8. Die Figuren 19 und 20 enthalten zusammengenommen vier Complexe, nämlich zwei ringartige Körper und zwei cyklische Linien, letztere jede mit einem effectiven Punkte. Die Oberfläche des einen Ringkörpers (Fig. 19) ist periphraktisch und zweifach cyklodisch, der eingeschlossene Raum einfach cyklodisch. Der andere, polyëdrisch gestaltet, besitzt 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen, wovon zwei einfach cyklodisch. Das Amplexum ist vierfach cyklodisch Hier ist $a = A = 22$; $b = 32$, $\varkappa' = 0$, $B = 32$; $c = 13$, $\varkappa_1'' = 2$, $\varkappa_2'' = 1$, $\varkappa_3'' = 1$, $\pi_1 = 1$, $C = 10$; $d = 3$; $\varkappa_1''' = 1$, $\varkappa_2''' = 1$, $\varkappa_3''' = 4$, $D = -3$; $p = 4$. Mithin

$$Q = 22-32+10+3 = 3$$
$$p-1 = 3$$

9. Der leere complexlose unendliche Raum allein sei gegeben. Dann ist offenbar $A = B = C = 0$, $D = 1$, $p = 0$, also

$$Q = p-1 = -1$$

41.

Bevor wir zu weiteren Betrachtungen übergehen, mögen wir noch einen Blick auf den Zusammenhang der in Art. 33 zusammengestellten vier Specialsätze mit unserem letzten Satze Art. 39 zurückwerfen, woran sich einige allgemeinere Bemerkungen von selbst anschliessen werden.

Die dort vorkommende Diakrise nämlich ist offenbar nichts anderes, als der (mit negativem Zeichen versehene) Inbegriff derjenigen Glieder der allgemeinen Census-Gleichung (32), welche sich auf die von der Zählung ausgeschlossenen, d. i. als nicht effectiv betrachteten Curien in jenen Partial-Complexen beziehen.

Insofern in jenen vier Sätzen jedesmal nur von Einem Complex die Rede ist, so haben wir uns bei dieser Vergleichung nur an die Form (12) des Census zu halten. Im ersten Satze ist nun $\theta = -(C-D)$, wo $C = c = 0$, $D = d = 1$, also $\theta = 1$; im zweiten ist $\theta' = -(C-D)$, wo $C = c = 1$, $D = d = 1$, also $\theta' = 0$; im dritten $\theta'' = D$ und $D = d = 1$, also $\theta'' = 1$; und im vierten $\theta''' = D$, wo $D = d = 2$ und somit $\theta''' = 2$.

Es springt von selbst in die Augen, dass wenn z. B. im zweiten Satze Flächen und Räume nicht als effective Constituenten gezählt werden, die Diakrise von solchen Abänderungen in den von der Zählung ausgeschlossenen Curien, welche sich innerhalb derselben compensiren, nicht berührt werden wird. Hätte man etwa der in diesem Satze vorausgesetzten Fläche eine oder mehrere andere innerhalb derselben linearen Umfangsgrenze beigesellt, so würde c und d, also C und D zugleich um Gleiches vergrössert werden, also θ' unverändert geblieben sein, und hätte man die Fläche — versteht sich unter Beibehaltung des unveränderten Zustandes aller Linien und Punkte — beseitigt, so wäre die Compensation durch Verringerung von c auf Null und Anwuchs von x''' auf 1 erfolgt, weil der amplexe Raum durch die Abänderung einfach cyklodisch werden musste.

Es findet hierdurch die im Eingange des Art. 31 gemachte Bemerkung eine neue Begründung.

Die Constante 2 des Euler'schen Satzes ist mit der Diakrise θ''' des vierten jener Specialsätze identisch, und ebenso ist im Cauchy'schen Satze (s. Art. 35) die Zahl $P+1$ eine Diakrise. Wir sehen jetzt, vom Standpunkte der Gleichung (32) diese diakritischen Zahlen in dem Inhalte der Glieder der Census-Gleichung in der Weise aufgehen, dass sie sich sei es im Numerus oder in den Attributiven der Constituenten eingereiht finden.

Der Census stellt gleichsam eine Bilanz auf zwischen zwei Abtheilungen von Beitrags-Raten, welche aus den verschiedenen Gruppen von Elementen der Complexe, d. i. aus den Curien erhoben werden. Die Diakrise erscheint alsdann als der Ausschlag des nicht bestehenden Gleichgewichts, als ein Saldo oder Deficit. Die in unseren Census-Sätzen gewonnene Verallgemeinerung des Euler'schen Theorems hat uns aber gezeigt, wie die Diakrisen der auf tieferen Stufen der Allgemeinheit stehenden Formen des Census in den höheren Stufen gleichsam wie durch Deckung eines Deficits ihre Erledigung finden. Der Gedanke, ob in unserer zuletzt gefundenen Form des Census die Zahl $p-1$ nicht gleicherweise nur eine Diakrise darstelle, die durch geeignete Umgestaltung einer Deckung fähig wäre, und ob sich in der Bilanz nicht völliges Gleichgewicht herstellen lasse, wird uns durch diese Erwägungen nahe gelegt. Diesen Gedanken wollen wir in der nachstehenden weiteren Verallgemeinerung verfolgen, und wenn auch der Fingerzeig zu diesem Ziele nur als ein Spiel mit leeren, lediglich die Form des Census berührenden Bildern erscheinen könnte, so wird gleichwohl die in diesem Sinne zu gewinnende neue Form unseres Satzes nicht nur den Blick so zu sagen auf die metaphysische Seite des Census, sondern zugleich auch die situal-analytische Kraft desselben dahin erweitern, dass er neben endlichen, wie bisher, nun auch unendlich ausgedehnte Complexe in letzter Verallgemeinerung zu beherrschen vermag.

42.

Weitere Verallgemeinerung des Census.

In den bisherigen Untersuchungen musste ein Hauptaugenmerk auf die Cyklose und ihre numerische Ermittelung gerichtet sein. Wir haben zu dem Ende die Complexe nur aus Constituenten der drei ersten Curien bestehen lassen und sie so definirt, dass im Falle mangelnder Zusammenhänge der Congregate von Punkten, Linien und Flächen mehrere Complexe als existirend angenommen werden mussten. Der Fall ferner, wo eine Fläche ohne unendliche Ausdehnung einer Begrenzung durch Linien und Punkte ermangelte, den wir durch den Ausdruck Periphraxis bezeichneten, stellte sich unter der bisherigen Fassung des Begriffs der Complexe als ein leicht zu erledigender singulärer Fall dar. Um zu einer ferneren Verallgemeinerung des Census zu gelangen, ist es zweckmässig und erforderlich, den Begriff des Complexes dahin zu modificiren, dass wir darunter den *Inbegriff aller zugleich und neben einander bestehenden Constituenten* verstehen, so dass jeweilig, auch wo bisher p Complexe vorhanden waren, nur von Einem Complex die Rede ist.

Diese neue Fassung des Begriffes „Complex" hat nun zur Folge

erstens, dass jeder gegebene Complex, mag es allein der eine Bestandtheil oder Constituent, nämlich der amplexe, ins Unendliche ausgedehnte Raum oder ausser ihm noch andere Bestandtheile, wie Linien, Flächen oder Räume sein, welche unendliche Ausdehnung besitzen, *unendlich* ist, und

zweitens, dass da, wo nach der früheren Begriffsbestimmung mehrere Complexe bestanden, die zeitherige Modalität der *Periphraxis*, welche auf gewisse Arten von Flächen beschränkt war, jetzt auch auf Constituenten der vierten Curie Anwendung findet, und somit ihr Vorkommen auf die dritte und vierte Curie zugleich erstreckt.

Die in Art. 39 besprochenen $p-1$ Verbindungslinien, welche das Amplexum oder andere Räume zwischen den p Complexen im früheren Sinne des Worts, die wir der Kürze wegen nunmehr Complexionen nennen wollen, gleichsam durchbohren, leisten in der vierten Curie dasselbe, was das Trema in der dritten. Die Räume, welche solche Verbindungslinien enthalten, erscheinen also vor dieser Diatrese periphraktisch, und um sie aperiphraktisch zu machen, müssen ihnen lineare Tremata ebenso ertheilt werden, wie einer periphraktischen Fläche, um sie aperiphraktisch zu machen, ein trematischer Punkt. Nach Ertheilung der $p-1$ Diatresen in der vierten Curie bleibt aber, so lange die Complexionen, wie bisher noch immer angenommen worden, keine ins Unendliche sich erstreckende Bestandtheile enthalten, offenbar das ins Unendliche ausgedehnte Amplexum noch einfach periphraktisch, und um diese letzte Periphraxis zu beseitigen, ist noch eine trematische Linie erforderlich, welche, von einem beliebigen Bestandtheile der p Complexionen aus, den unbegrenzten umgebenden Raum bis in unendliche Ferne durchbohrt, so dass also zur Beseitigung sämmtlicher Periphraxen der vierten Curie bei p gegebenen endlichen Complexionen p Diatresen erfordert werden.

Wir fügen den periphraktischen Zahlen im Attributiv der dritten Curie der Concinnität wegen (wie den cyklodischen Zahlen in der zweiten Curie) einen Accent bei und bezeichnen die den einzelnen Räumen zukommenden periphraktischen Zahlen durch π_1'', π_2'', π_3'' u. s. w., deren jede sowohl Null als jede ganze positive Zahl bedeuten kann, so sind diese Zahlen, deren Summe $\pi'' = p$ ist, in das Attributiv der Constituenten der vierten Curie aufzunehmen, wie die Zahlen π_1', π_2', π_3' u. s. w. und ihre Summe π' in das Attributiv der dritten Curie aufgenommen worden ist.

Die bisherige allgemeine Census-Gleichung (33) geht nach dieser Interpretation des Theiles p in der als Diakrise betrachteten Grösse $p-1$ nunmehr in diese über:

$$(a \quad x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi')-(d-x'''+\pi'') = -1 \tag{34}$$

43.

Der Effect der $p-1$ Verbindungslinien zwischen den p endlichen Complexionen, d. h. der Effect der ihnen entsprechenden $p-1$ Diatresen ist in dem Beweise des Satzes Art. 39 erörtert und erledigt. Es bleibt nur noch die Wirkung der im vorigen Art. besprochenen letzten der p oder π'' trematischen Linien zu erwägen, welche den amplexen Raum in den aperiphraktischen Zustand zu versetzen erforderlich ist.

Diese Linie führt uns auf das Unendliche und macht die Berücksichtigung der ersten jener beiden im vorigen Art. hervorgehobenen neuen Wirkungen der Modification in Begriff des Complexes ebenso nothwendig, als die der zweiten. Sie soll ihren einen Endpunkt, wie die übrigen $p-1$ trematischen Linien in einem Constituenten der drei ersten Curien, den andern aber im Unendlichen finden. Für den ersten Punkt wiederholt sich die Unterscheidung derjenigen Fälle, welche im Beweise des Satzes Art. 39 für jeden Endpunkt der $p-1$ Combinationslinien nöthig geworden. Die Folge der Einführung der neuen Linie ist einerseits ein Augment 1 im Werthe von b, andrerseits aber wenn ihr Ausgangspunkt in einem der a vorhandenen effectiven Punkte des Complexes liegt, Null, oder wenn er auf einer effectiven Linie liegt, ein Augment 1 in den Werthen von A und B zugleich, oder endlich, wenn er auf einer effectiven Fläche liegt, ein Augment 1 im Werthe von A und ein Decrement 1 im Werthe von C: in jedem Falle also ein Decrement 1 im Werthe von Q. Der andere Endpunkt, welcher im Unendlichen liegen soll, muss mithin im Aggregate Q augmentativ als 1 gezählt werden, wodurch sich herausstellt, dass das räumlich Unendliche die Rolle eines Punktes spielt, der in unendlicher Ferne liegt und mit welchem diese trematische Linie den Inbegriff der p Complexionen zu verbinden hat.

44.

Der allgemeine Census in seiner finalen Gestalt.

Es geht aus dieser Betrachtung hervor, dass wir das räumlich Unendliche als einen in unendlicher Ferne gelegenen virtuellen Punkt zu betrachten haben, der unter den Attributiven des Census ebenso nothwendig eine Aufnahme erheischt, wie die Cyklose und die Periphraxis, und dass wir folgerichtig die in der Gleichung (34) noch übrige diakritische Zahl -1 in der Bedeutung des räumlich Unendlichen zunächst in das Attributiv der vierten Curie aufnehmen müssen. Es stellt sich aber leicht heraus, dass gleichwie die Ordnungszahl der Cyklose im Attributiv der zweiten Curie und die Ordnungszahl der Periphraxis im Attributiv der dritten Curie nur die Werthe 0 oder 1 annehmen können, ebenso hier der censuelle Werth der Ausdehnung ins Unendliche ausser 1 auch 0 sein kann, nämlich in dem Falle, wo gar Nichts, also auch kein unendlicher Raum gegeben wäre, und somit auch der Numerus in der vierten Curie wie in allen übrigen gleich Null gesetzt werden müsste. Bedeutet also ω entweder 0 oder 1 und bezeichnen wir dadurch das Attribut der Ausdehnung ins Unendliche, so erhalten wir, indem wir jetzt x^0, welches stets $= 0$, weglassen, und in den bisherigen Zeichen für die Cyklose und die Periphraxis einen Accent weniger schreiben, folgende *allgemeinste* oder finale Form für die Census-Gleichung.

$$a-(b-x)+(c-x'+\pi)-(d-x''+\pi'-\omega) = 0 \qquad (35)$$

Abgesehen von dem eben berührten ganz singulären Fall, wo ω zugleich mit allen in dieser Gleichung vorkommenden Grössen Null wird, hat ω durchweg den Werth 1, durch welchen im Censusdas Unendliche in den Attributiven verwerthet wird. Den in unendlicher Ferne zu denkenden, das Unendliche repräsentirenden Punkt nennen wir das *Stigma*. Er ist es zuvörderst, in welchem die das Amplexum auf den aperiphraktischen Zustand zuzückführende trematische Linie ihren Endpunkt findet, zugleich aber ist das Stigma auch als die gemeinsame Grenze aller in einem räumlichen Complex etwa vorkommenden ins Unendliche sich erstreckenden Constituenten der zweiten und dritten Curie zu betrachten, so dass nach Einführung des unter ω in Rechnung gebrachten Stigmas der Census in seiner nunmehrigen Gestalt von selbst seine Geltung auch auf den Fall erstreckt, wo die Ausdehnung irgend welcher Constituenten ins Unendliche Platz greift. Statt zu sagen, eine Linie (gerade oder krumm), eine Fläche (eben oder gekrümmt) dehnt sich nach einer oder zwei oder beliebig viel Seiten ins Unendliche aus, ist nunmehr der Ausdruck gestattet: sie endet oder findet ihre Grenze nach diesen Seiten hin in dem Stigma, welches in allen solchen Fällen stets mit dem Werthe 1 in Rechnung kommt. Die anfänglich gestellte Bedingung, dass in den drei ersten Curien nur Constituenten von endlicher Ausdehnung vorkommen dürfen, ist also in der gegenwärtigen finalen Fassung des Census-Theorems gleichsam ohne unser Zuthun weggefallen. Auch bleibt der Begriff des amplexen Raumes, der bisher als durch die Ausdehnung ins Unendliche vor allen übrigen Constituenten bevorzugt scheinen durfte, und wie jetzt erhellt zugleich stets periphraktich war, durch den neuen und erweiterten Begriff des Complexes nicht unbeeinflusst. Nicht nur, dass durch die unendliche Ausdehnung von Linien und Flächen die räumliche Cyklose und Periphraxis zu neuen Ordnungszahlen gelangen, durch unendliche Constituenten der dritten Curie können sogar zwei oder mehr unendlich ausgedehnte Constituenten der vierten Curie erwachsen, deren jeder von nun ab auf die zeitherige Benennung „Amplexum" Anspruch machen kann. Die Singularität des sog. Amplexums in dem früheren minder allgemeinen Falle, wo unendlich ausgedehnte Constituenten in den drei niederen Curien noch ausgeschlossen waren, gegenüber den im Complex enthaltenen übrigen Constituenten der vierten Curie fällt demnach jetzt so gut wie völlig weg [1]). Gleichwohl mag die Benennung ihrer Bequemlichkeit wegen selbst für mehrere ins Unendliche ausgedehnte Raumtheile zugleich beibehalten werden.

1) Vgl. Art. 18, Anmerkung.

Nach dieser letzten Verallgemeinerung lässt sich der Inhalt der Census-Gleichung (35) dahin aussprechen:

LEHRSATZ. *In einem gegebenen, beliebig wie beschaffenen räumlichen Complex ist die Summe der mit abwechselnden Zeichen versehenen vier Beitragszahlen aus den vorhandenen Punkten, Linien, Flächen und Räumen, welche innerhalb jeder dieser vier Curien aus der Anzahl der Bestandtheile und den aus den Modalitäten der Cyklose, der Periphraxis und der Ausdehnung ins Unendliche ermittelten Attributiven erhalten werden, gleich Null.*

45.

Beispiele.

Indem wir so durch die Gleichung (35) auf dem Stadium der umfassendsten Allgemeinheit des Census angelangt sind, durch welche derselbe auf einen beliebigen räumlichen Complex mit begrenzten oder unbegrenzten Constituenten Anwendung findet, bleibt uns nur übrig, den Umfang dieser Allgemeinheit wiederum durch Aufführung einiger Beispiele noch anschaulicher zu machen.

Wir stellen die finale Gleichung (35) auch jetzt noch, wie die früheren Ausdrücke des Census, in der summarischen Form

$$A-B+C-D=0$$

dar, wo nunmehr

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= b-\varkappa \\ C &= c-\varkappa'+\pi \\ D &= d-\varkappa''+\pi'-\omega \end{aligned}$$

sein wird, und ermitteln in den concreten Fällen der nachfolgenden Beispiele, wie früher, die numerischen Werthe der vier Glieder A, B, C, D und hieraus den Werth Q des Aggregats $A-B+C-D$, welcher, sobald er sich gleich Null herausstellt, unser Theorem verificirt.

1. Der in Fig. 59 dargestellte Complex bietet 88 effective Punkte, 132 Linien oder Kanten, 36 Flächen, wovon 2 einfach cyklodisch, und 2 mehrfach cyklodische Räume, einen inneren begrenzten und einen äusseren amplexen periphraktischen unbegrenzten, dar. Zur Ermittelung der Raumcyklose

dient das in Fig. 60 dargestellte Diagramm, in welchem wir nach Art. 21 finden $k = 9$, $l = 14$ also $\varkappa = 14 - 9 + 1 = 6$, oder nach Art. 22 die Zahl der Binnenfelder $= 12$, der Traversen $= 6$, also ebenso $\varkappa = 6$. Beide Räume sind demnach 6 fach cyklodisch. Man hat also $A = a = 88$; $B = b = 132$; $c = 36$, $\varkappa_1' = 1$, $\varkappa_2' = 1$, $C = 34$; $d = 2$, $\varkappa_1'' = 6$, $\varkappa_2'' = 6$, $\pi_2' = 1$, $\omega = 1$, $D = -10$, und somit

$$Q = 88 - 132 + 34 + 10 = 0.$$

In diesem Beispiele kam noch, wie in allen früher aufgeführten, das Attribut des Unendlichen dem Amplexum allein zu. Die Zahl solcher Fälle zu vermehren, wie sie sich leicht würden erfinden oder aus Art. 31, 35, 40 entlehnen lassen, würde jetzt nur von geringerem Interesse sein, und führen wir deshalb ausser dem im Vorhergehenden wiederholentlich berührten Fall des leeren unendlichen Raumes hauptsächlich noch solche auf, in welchen mehrere Constituenten an der Ausdehnung ins Unendliche Theil nehmen.

2. Wenn der leere unendliche Raum allein den gegebenen Complex bildet, so wird jetzt $A = B = C = 0$; $d = 1$, $\varkappa'' = 0$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = 1 - 1$ und $Q = 0$. Während hier D verschwindet, indem d und ω zugleich den Werth 1 annehmen, geschieht dasselbe im Falle $d = 0$ dadurch, dass nun auch $\omega = 0$ wird.

3. Es sei ein Punkt gegeben und eine von ihm ausgehende gerade oder krumme, sich nirgend selbst durchkreuzende endlose Linie. Dann ist $a = A = 1$; $b = B = 1$; $C = 0$; $d = 1$, $\varkappa'' = \pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = 0$, und demnach $Q = 1 - 1 = 0$.

4. Eine auf beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckende sich nicht selbst durchkreuzende Linie ist gegeben; z. B. eine unbegrenzte gerade Linie, Parabel, Logistik, Schraubenlinie u. s. w. Dann ist $a = A = 0$; $b = B = 1$; $C = 0$; $d = 1$, und da nunmehr der amplexe Raum offenbar einfach cyklodisch, ausserdem aber noch wie vorhin aperiphraktisch ist, $\varkappa'' = 1$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = -1$, also $Q = -1 + 1 = 0$.

5. Nehmen wir auf der Linie des vorigen Beisp. noch einen effectiven Punkt an, so werden a und b zugleich um 1 grösser, und es wird $Q = 1 - 2 + 1 = 0$. Da es gleichgültig, ob die zwei an dem effectiven Punkte zusammentretenden Linearelemente den Winkel 180° mit einander bilden oder nicht,

so kann auch der vorliegende Complex als aus dem 3. Beisp. dadurch hervorgehend angesehen werden, dass wir von dem gegebenen Punkt statt einer zwei ins Endlose sich erstreckende, aber nirgend Durchschnitts- oder Berührungspunkte bildende, übrigens beliebig gestaltete Linien annehmen. In den numerischen Werthen des 3. Beisp. wächst alsdann b und x'' zugleich um 1, so dass wiederum $Q = 1-2+1 = 0$. Offenbar muss durch jede neu hinzutretende derartige Linie b und x'' zugleich um 1 steigen. Durch m unbegrenzte in Einem Punkt sich kreuzende Linien entsteht ein Complex der vorliegenden Art mit $2m$ Linien, wo $a = 1$, $b = 2m$, $d = 1$, $x'' = 2m-1$, $\omega = 1$ und $Q = 0$. Man sieht, wie der Raum z. B. durch drei in ihm gezogene Coordinatenaxen 5 fach cyklodisch wird. In der That kann sein Diagramm durch die Ecken und Kanten eines Würfels dargestellt werden, woraus nach Art. 21 oder 22 die 5 fache Cyklose erhellt.

6. Es haben n Linien von der vorigen Art und n' Linien von endlicher Länge Einen gemeinsamen Ausgangspunkt. Dann besteht der Complex aus $1+n'$ Punkten, $n+n'$ Linien und der amplexe Raum ist aperiphraktisch, $n-1$ fach cyklodisch. Also $a = A = 1+n'$; $b = B = n+n'$; $C = 0$; $d = 1$, $x'' = n-1$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = -n+1$, und

$$Q = 1+n'-n-n'+n-1 = 0.$$

7. Ein Polyëder mit 24 Flächen und 14 Ecken (Fig. 61) etwa das in der Krystallographie sogenannte Tetrakishexaëder sei gegeben. Von dem Mittelpunkt des Polyëders führen gerade Linien je eine nach einem mitten auf jeder der dreieckigen Seitenflächen gelegenen Punkte, und von jeder Polyëderecke aus geht eine radiale Linie bis ins Unendliche. Auch ohne dass wir in der Figur die 24 inneren und 14 äusseren Linien darstellen, wird sich der Census für diesen Complex leicht ausfindig machen lassen. Das Polyëder allein betrachtet besitzt 14 Ecken, 36 Kanten und 24 Flächen. Die 24 Linien im Innenraum haben in der Mitte des Körpers einen gemeinsamen Anfangspunkt, und jede einen Endpunkt auf einer Seitenfläche, welche durch diesen Endpunkt einfach cyklodisch wird. Der Innenraum selbst wird, wie aus den vorigen Beispielen hinreichend erhellt, 23 fach cyklodisch, die 14 von den Körperecken ausgehenden endlosen Linien des Aussenraums aber aber machen diesen Raum 13 fach cyklodisch. Wir finden somit $a = A = 1$

$+24+14=39$; $b=B=24+36+14=74$; $c=24$, $\varkappa'=24$, $C=0$, $d=2$, $\varkappa_1''=23$, $\varkappa_2''=13$, $\omega=1$, $D=-35$. Folglich

$$Q=39-74+0+35=0.$$

8. Würde die polyëdrische Oberfläche des Innenraums durch eine Kugelfläche ersetzt ohne effective auf ihr liegende Linien, aber nach wie vor die 24 Endpunkte der inneren, wie die 14 Anfangspunkte der äusseren radialen Linien enthaltend, so träte bloss eine Aenderung im Bestand der zweiten und dritten Curie ein, indem durch Wegfall der 36 Polyëderkanten $b=24+14=38$, und durch Austausch der 24 einfach cyklodischen Polyëderflächen gegen eine durch 38 effective Punkte 37 fach cyklodisch gewordene Kugelfläche $c=1$, $\varkappa'=37$ werden muss. Indem also B und C zugleich um 36 verringert werden, bleibt $Q=0$.

9. Zwei Linien im Raum, die eine beiderseits endlos, die andere mit 2 effectiven Endpunkten, weder einander noch sich selbst kreuzend oder berührend, sonst aber beliebig gestaltet, sind gegeben. Im einfachsten concreten Falle mag man sich beide Linien gerade denken. Der amplexe Raum ist jetzt einfach periphraktisch und einfach cyklodisch und es ist $a=A=2$; $b=B=2$; $C=0$; $d=1$, $\varkappa''=1$, $\pi'=1$, $\omega=1$, $D=0$ und $Q=2-2=0$. Durch Hinzufügung jeder neuen isolirten endlichen Linie würde a um 2, b um 1 und π' um 1 zunehmen und $Q=0$ bleiben. Vereinigte man die Endpunkte der endlichen von beiden Linien zu Einem effectiven Punkte, so würde a um 1 ab- und $\varkappa''$ um 1 zunehmen. Jede neue solche in sich zurückkehrende Linie mit einem effectiven Punkte würde eine Vergrösserung von a und b, so wie von $\varkappa''$ und π' um 1 zur Folge haben, wodurch Q unverändert $=0$ bliebe. Entzöge man der in sich zurückkehrenden Linie den einen effectiven Punkt, wodurch sie cyklisch würde, so würden sich die Aenderungen in a und $\varkappa$ wiederum compensiren. Jeder neue lineare Cyklus würde b und $\varkappa$, so wie $\varkappa''$ und π' um 1 vergrössern und dadurch Q unverändert lassen. Verschlingungen und Verkettungen solcher Linien unter sich und mit der endlosen Linie in beliebiger Complication würden hierbei irrelevant sein, da sie sich durch Anathese sofort beseitigen liessen.

10. Durch Verlängerung der endlichen Linie nach einer Seite bis ins

Unendliche würde dem Complex ein effectiver Punkt, zugleich aber dem amplexen Raum die Periphraxis entzogen, weil beiden Linien Ausdehnung ins Unendliche zukommt, d. i. weil dieselben durch das Stigma mit einander zusammenhängen. Die Raum-Cyklose ist auch jetzt noch einfach. Jede neue solche Linie mit Anfangspunkt und ohne Ende würde nur a und b zugleich um 1 vergrössern und somit Compensation im Census bewirken.

11. Geben wir der zweiten Linie wie der ersten unendliche Ausdehnung nach beiden Seiten, wie z. B. bei zwei parallelen endlosen geraden Linien der Fall wäre, so hätte man $a = A = 0$; $b = B = 2$; $C = 0$, $d = 1$, $\varkappa'' = 2$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = -2$ und $Q = 2-2 = 0$. Für n beiderseits ins Unendliche reichende Linien im Raum, gerade oder in beliebiger Krümmung, in beliebiger gegenseitiger Lage, aber ohne effective Punkte, wäre $A = 0$, $b = B = n$, $C = 0$, $d = 1$, $\varkappa'' = n$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = -n$ und $Q = n - n = 0$.

12. Von drei Linien der eben gedachten Art, Fig. 62, geht die eine EF durch eine Kugel S hindurch, die zweite GH berührt sie in einem Punkte, die dritte K geht in Distanz an ihr vorüber. Der Complex hat 3 Punkte, 6 Linien, 1 Fläche und 2 Räume. Die Kugelfläche ist durch 3 effective Punkte zweifach cyklodisch, der innere Kugelraum vermöge des in ihm befindlichen Stücks der Linie EF einfach cyklodisch. Die Cyklose des äusseren Raums wird aus dessen Diagramm erkannt, welches man in einer seiner Gestalten z. B. dadurch erhält, dass man von einem Punkte diesseits der Fig. 62 durch die mit e, f, g, h, k bezeichneten Regionen nach einem Punkte jenseits Linien gezogen denkt, wodurch sich (wie in Fig. 63) 5 Züge und 2 Ausgänge oder — ohne Traversen — 4 Binnenfelder herausstellen. Der äussere Raum ist also 4 fach cyklodisch. Somit ist $a = A = 3$; $b = B = 6$; $c = 1$, $\varkappa' = 2$, $C = -1$; $d = 2$, $\varkappa_1'' = 1$, $\varkappa_2'' = 4$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = -4$. Also

$$Q = 3-6-1+4 = 0.$$

Fügen wir noch eine ganz isolirte Kugel ohne effectiven Punkt hinzu, so wird eine acyklodische periphraktische Fläche und ein acyklodischer aperiphraktischer Raum, sowie eine einfache Periphraxis des Amplexums hinzutreten. Es wird jetzt $a = A = 3$; $b = B = 6$; $c = 2$, $\varkappa_1' = 2$, $\pi_2 = 1$,

$C = 1$; $d = 3$, $x_1'' = 1$, $x_2'' = 4$, $\pi' = 1$, $\omega = 1$, $D = -2$, und somit

$$Q = 3-6+1+2 = 0.$$

Durch Hinzufügung jeder neuen solchen isolirten Kugel würden C und D zugleich um 2 wachsen, indem c, π, d und π' um 1 zunehmen.

13. Eine nach allen Seiten unbegrenzte Ebene theilt den ganzen unendlichen Raum in 2 gesonderte unbegrenzte Theile. Es ist $A = 0$, $B = 0$, $c = C = 1$, $d = 2$, $\omega = 1$, $D = 1$. Also $Q = 1-1 = 0$. Ziehen wir in der Ebene eine gerade endlose Linie, so zerfällt die Ebene in 2 Stücke, b und c wachsen um 1, und Q bleibt $= 0$. Nehmen wir das eine Flächenstück weg, so nehmen c und d zugleich um 1 ab.

Zwei sich kreuzende unbegrenzte Ebenen ergeben eine unbegrenzte Linie, 4 Flächen und 4 Räume, und somit $A = 0$, $b = B = 1$; $c = C = 4$; $d = 4$, $\omega = 1$, $D = 3$; also $Q = -1+4-3 = 0$. Durch Wegnahme einer der 4 Flächen wird $C = 3$, $d = 3$, $\omega = 1$, $D = 2$ und $Q = -1+3-2 = 0$. Statt der drei von der gemeinsamen Linie ausgehenden nach einer Seite unendlich ausgedehnten Ebenen kann man deren n annehmen und es wird offenbar $A = 0$, $B = 1$, $C = n$, $d = n$, $\omega = 1$, $D = 4-1$ und $Q = -1+n-n+1 = 0$.

Durch einen in der Linie angenommenen effectiven Punkt steigt A und B zugleich um 1 und Q bleibt Null.

Drei sich kreuzende unbegrenzte Ebenen (Coordinaten-Ebenen) ergeben 1 Punkt, 6 Linien, 12 Flächen, 8 Räume, also $a = A = 1$; $b = B = 6$; $c = C = 12$, $d = 8$, $\omega = 1$, $D = 7$. Also $Q = 1-6+12-7 = 0$.

Alle diese Fälle gestatten, ohne Einfluss auf die numerischen Elemente, die vorkommenden Ebenen und geraden Linien durch krumme Flächen und Curven zu ersetzen, wenn diese nur wie jene sich nicht in neuen Punkten oder Linien kreuzen oder berühren.

14. Die Spitze oder der Mittelpunkt einer vollständigen (doppelten) Kegelfläche, Fig. 64, liege im Inneren einer Kugel, die durch sie in zwei cyklischen Linien durchschnitten werde. Der Complex enthält alsdann 1 Punkt, 2 cyklische Linien, 7 Flächen, von denen 3 der Kugel, 4 dem Kegel angehören, 6 Räume, wovon 3 innerhalb und 3 ausserhalb der Kugel liegen. Man hat also $a = A = 1$; $b = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $B = 0$; $c = 7$, $x_1' = x_2' = 0$, $x_3' = x_4' = 1$, $x_5' = 1$, $x_6' = 1$, $x_7' = 1$, $\pi = 0$, $C = 4$; $d = 6$,

$\varkappa_1'' = \varkappa_2'' = 0$, $\varkappa_3'' = 1$, $\varkappa_4'' = \varkappa_5'' = 0$, $\varkappa_6'' = 1$, $\pi' = 0$, $\omega = 1$, $D = 3$, und mithin

$$Q = 1 - 0 + 2 - 3 = 0.$$

15. An einem Würfel erweitern wir alle Flächen allseitig ins Unendliche, im Innern des Würfels sei eine isolirte Kugel enthalten. Dieser Complex hat 8 Punkte, die Würfelecken, jede der 12 Würfelkanten gibt mit 2 Verlängerungen 3 Linien, im Ganzen 36 Linien, in der Ebene jeder Würfelseite liegen 9 Flächen, im Ganzen sind also, die Kugelfläche mitgezählt, 55 Flächen vorhanden. Die Kugelfläche ist periphraktisch. Das Innere des Würfels zerfällt in 2 Räume, einen innerhalb der Kugel, acyklodisch und aperiphraktisch, und einen die Kugel umgebenden, periphraktisch acyklodisch. Der amplexe Raum zerfällt in 6 den Würfelseiten, 12 den Würfelkanten und 8 den Würfelecken anliegende Räume, alle ins Unendliche ausgedehnt, acyklodisch und aperiphraktisch. Der Census ergibt also $a = A = 8$; $b = B = 36$; $c = 55$, $\varkappa' = 0$, $\pi = 1$, $C = 56$; $d = 28$, $\varkappa'' = 0$, $\pi' = 1$, $\omega = 1$, $D = 28$. Also

$$Q = 8 - 36 + 56 - 28 = 0.$$

Fügen wir noch drei endlose gerade Linien hinzu, die sich unter einander rechtwinklig und den Würfelkanten parallel in einem Punkte innerhalb der Kugel kreuzen, so wächst die Zahl der Punkte um 13, der Linien um 18. Flächen und Räume ändern zwar nicht ihre Zahl, aber ihr Attributiv. Die Kugelfläche verliert ihre Periphraxis und erlangt 5fache Cyklose. Jede der 6 Würfelseiten wird einfach cyklodisch. Der im Würfel enthaltene, die Kugel umgebende Raum wird aperiphraktisch und nimmt ebenso wie der Innenraum der Kugel 5fache Cyklose an. Von den 26 den Würfel umgebenden ins Unendliche reichenden Räumen werden die 6 den Würfelseiten entsprechenden einfach cyklodisch, die übrigen 20 bleiben acyklodisch. Es ergibt sich also nunmehr $a = A = 21$; $b = B = 54$; $c = 55$, $\varkappa_1' = 5$, $\pi_1 = 0$, $\Sigma\varkappa_2' = 6$, $C = 44$; $d = 28$, $\varkappa_1'' = 5$, $\varkappa_2'' = 5$, $\pi_1' = 0$, $\Sigma\varkappa_3''' = 6$, $\omega = 1$, $D = 11$. Folglich

$$Q = 21 - 54 + 44 - 11 = 0.$$

Diese Beispiele, die sich leicht durch noch complicirtere vermehren liessen, mögen für den gegenwärtigen Zweck genügen. Die Anwendung des Census in verwickelten concreten Fällen kann nach den im Vorhergehenden dargelegten Regeln keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegen.

46.

Wir schliessen diese Untersuchung mit der Bemerkung, dass sowie im Euler'schen Satze — wenn auch stillschweigend — nur acyklodische, aperiphraktische und endliche Bestandtheile in dem polyëdrischen Complex vorausgesetzt werden, das Theorem des Census in allen Stufen der Verallgemeinerung, auf welche wir dasselbe haben gelangen lassen, nach den gleich anfangs gemachten Feststellungen sich hinsichtlich des den Constituenten beigelegten Numerus nur auf den einfachsten Fall möglicher Voraussetzungen, nämlich auf die Annahme stützt, dass die Constituenten schlechthin gezählt werden oder dass jedem die positive reelle Einheit als Numerus zukomme. Wenn aber in gewissen Gebieten geometrischer oder topologischer Analyse die Constituenten mit anderen von neuen Modalitäten abhängigen Numerativen ausgerüstet werden (s. beispielsweise „Vorstudien" S. 870), so eröffnen sich damit für den Census auch nach dieser Seite hin noch fernere Erweiterungen, die jedoch von der vorliegenden Untersuchung, in welcher zunächst die Ausbildung desselben nach der Seite des Attributivs hin bezielt werden sollte, ganz ausgeschlossen bleiben mussten.

Anhang,

enthaltend die kurze Erklärung einiger in der Abhandlung gebrauchten neuen Benennungen.

Acyklodisch, nicht cyklodisch, s. Cyklose, cyklodisch (Art. 9).

Amplexum, der umgebende, ins Unbegrenzte ausgedehnte Raum (Art. 5).

Anathese, eine Umstellung der Complexe oder ihrer Theile ohne Eingriff in ihren Zusammenhang (Art. 18).

Aperiphraktisch, nicht periphraktisch, s. Periphraxis (Art. 24).

Attributiv, eine aus den Modalitäten der Cyklose, der Periphraxis und der unendlichen Ausdehnung abgeleitete Zahl (Art. 37).

Ausgang, in den Linear-Complexen jeder Punkt, in welchem mehr als zwei Linien (Züge) zusammentreffen (Art. 19).

Census, die Relation zwischen der Anzahl von Punkten, Linien, Flächen und körperlichen Räumen der Complexe und den Attributiven ihrer Bestandtheile.

Complex, jedes Aggregat von Punkten, Linien und Flächen ein- oder ausschliesslich der dadurch abgegrenzten körperlichen Räume (Art. 1 und 42).

Constituent, Bestandtheile eines Complexes (Art. 1).

Curie, Abtheilung oder Classe, zu welcher ein Constituent im Complex gehört, ob Punkt, oder Linie, oder Fläche, oder körperlicher Raum (Art. 1).

Cyklodisch, ringmässig zusammenhängend, anastomosirend (Art. 9).

Cyklose, ringmässiger Zusammenhang, Anastomose (Art. 9).

Diagramm, eine Linearcomplexion, auf welche ein Constituent durch allmälige Verengerung oder Retraction seiner Grenzen zurückgeführt wird (Art. 13 u. ff.)

Diakrise, eine von der Beschaffenheit des Complexes abhängige constante Zahl (Art. 26).

Dialyse, Auflösung oder Annullirung der Cyklose (Art. 9).

Diaphragma, oder Zwerchfläche, eine acyklodische, durch eine cyklische Linie begrenzte Fläche (Art. 7).

Diatrese, Aufhebung oder Annullirung der Periphraxis (Art. 24).

Effectiv heissen alle im Census zur Zählung kommenden Constituenten (Art. 2).

Felder, die einzelnen Flächenräume in einem auf eine Fläche projicirten Diagramm (Art. 19).

Flächen-Complex, ein Partial-Complex, in dessen Census nur die drei ersten Curien gezählt werden (Art. 26, 29, 30).

Linear-Complex, ein Partial-Complex, in dessen Census nur die zwei ersten Curien gezählt werden (Art. 26, 27, 28).

Monocentrisch, ein Diagramm mit einem einzigen Ausgang (Art. 20).

Periphraktisch, allseitig geschlossen, wie sphäroïdische Flächen oder rings umhüllende körperliche Räume (Art. 24, 42).

Periphraxis, Eigenschaft einer Fläche oder eines Raumes, wenn sie allseitig zusammenhängen und einen Complex oder Complextheil rings umhüllen. (Art. 24, 42).

Stigma, ein das räumlich Unendliche im Census repräsentirender virtueller Punkt (Art. 43).

Strecke, in einem Diagramm, die Stücke, in welche bei seiner Projection auf einer Fläche, die Züge durch die Traversen getheilt werden (Art. 19).

Traverse, in einem auf eine Fläche projicirten Diagramm die Punkte, in welchen sich zwei Züge überkreuzen, die sich im räumlichen Diagramm nicht schneiden (Art. 19).

Trema, der die Periphraxis einer Fläche auflösende oder annullirende Punkt (Art. 24)

Virtuell heissen Punkte, Linien, Flächen und Räume, wenn sie in Complexen als nicht effectiv gelten, oder nur zu Hülfe genommen werden, ohne im Census mitgezählt zu werden (Art. 2).

Zug, im Diagramm jeder lineare Weg zwischen zwei Ausgängen, der keinen Ausgang als Binnenpunkt enthält (Art. 19).

Zwerchfläche s. Diaphragma (Art. 7).

Verbesserungen.

S.	38	Zeile	1 v. o. ***statt*** $k=13$, $l=24$ ***lies*** $k=19$, $l=30$.
„	40	„	1 v. o. ***statt*** des Diagramms ***lies*** das Diagramm.
„	„	„	10 v. o. ***statt*** [400] ***lies*** [300].
„	42	„	7 v. u. ***statt*** Fig. 45 ***lies*** Fig. 45a.
„	45	„	11 v. o. ***statt*** Fig. 50 ***lies*** Fig. 49.
„	49	„	7 v. o. und Zeile 3 v. u. ***statt*** (1) ***lies*** (2).
„	62	„	6 v. u. ***statt*** m ***lies*** m_r
„	63	„	14 v. u. ***statt*** $\mathfrak{E}$ ***lies*** $\mathfrak{E}_r$
„	„	„	9 v. u. ***statt*** $(c+x''+u)$ ***lies*** $(c+x'''+u)$.

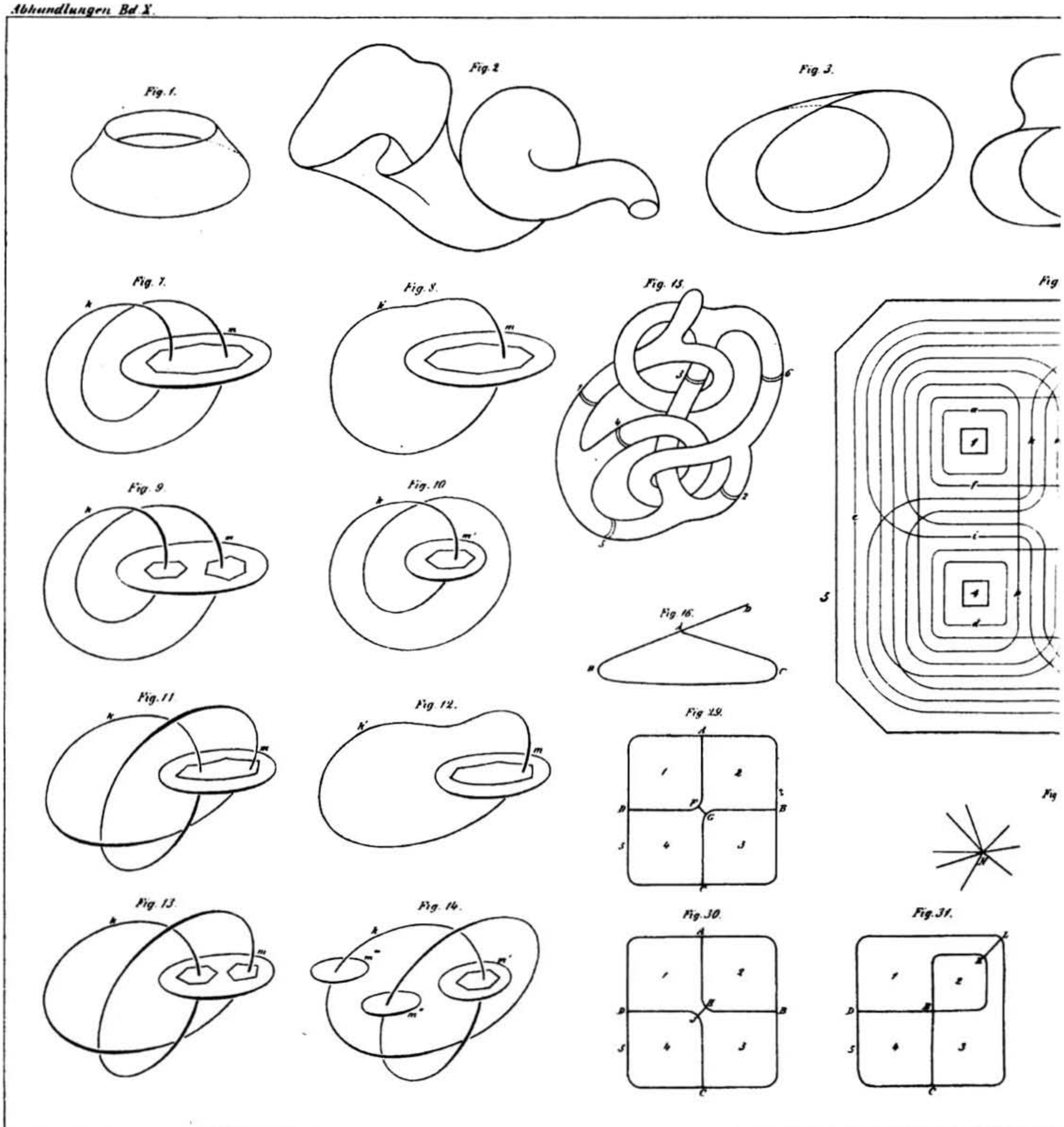
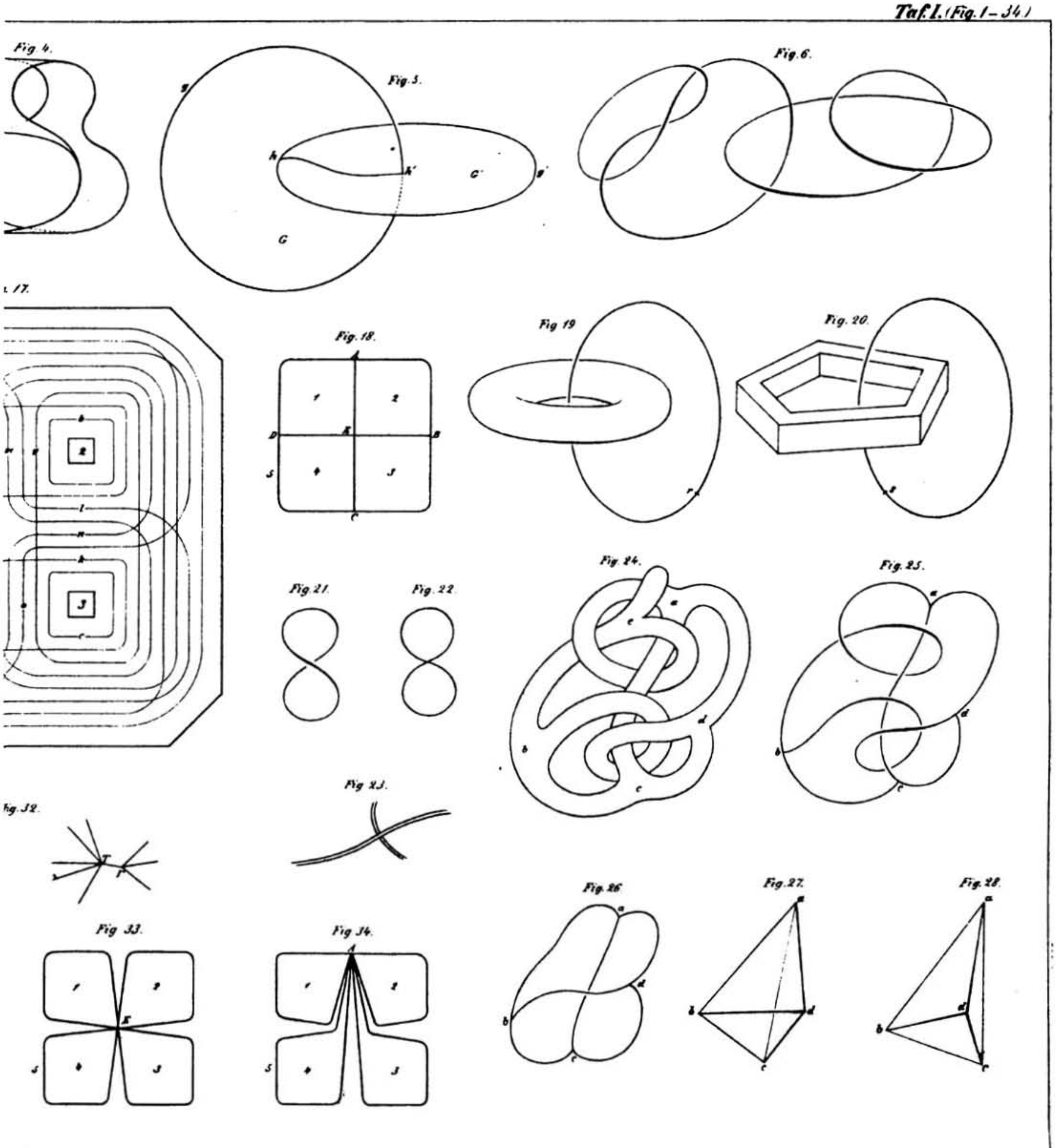


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 15.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 16.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 29.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 30.
Fig. 31.

Taf. I. (Fig. 1–34.)



Lith. Anst. v. C. [illegible]

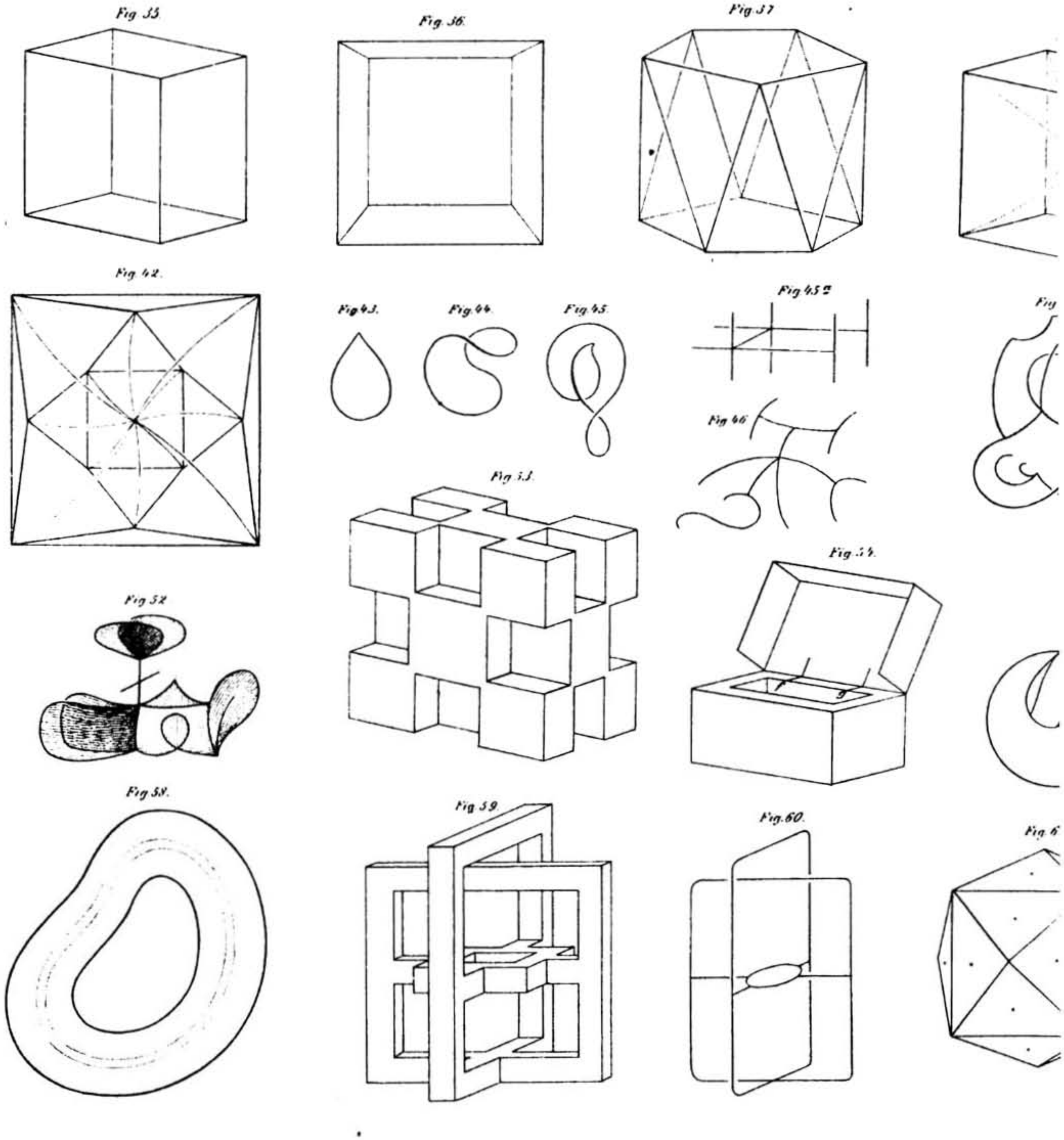


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 45ª
Fig. 46
Fig. 53.
Fig. 52
Fig. 54.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.

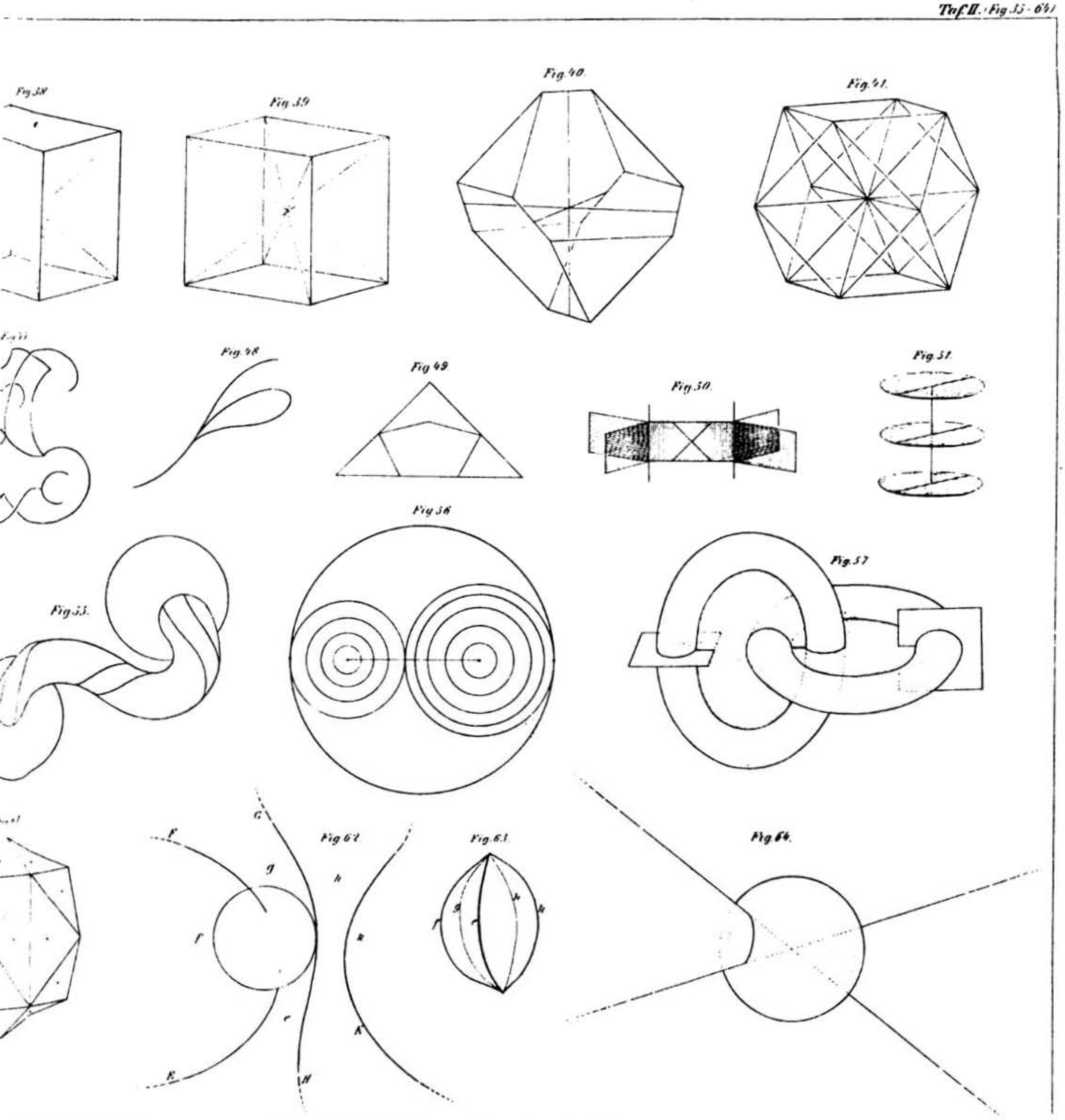


Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64