X.

Vorstudien zur Topologie.

Von

Johann Benedict Listing.

(Mit eingedruckten Holzschnitten.)

Bei der Betrachtung räumlicher Gebilde können zwei allgemeine Gesichtspunkte oder Kategorien unterschieden werden, nämlich die Quantität und die Modalität. Die Untersuchungen der Geometrie in ihrer heutigen Ausbildung, so verschieden sie auch ihrem Gegenstande wie ihrer Methode nach sein mögen, haben der ersteren dieser Kategorien immer den Vorrang gelassen und demgemäfs ist die Geometrie von jeher als ein Theil der Gröfsenwissenschaft oder der Mathematik betrachtet worden, wie sich denn auch ihr Name mit Recht auf den Begriff des Messens beruft. Der zweite Gesichtspunkt, die Modalität oder die Berücksichtigung aller auf Lage und Aufeinanderfolge bezüglichen Fragen ist in der Geometrie meist nur in sofern in den Vordergrund getreten, als es ihr gelungen ist, diese Kategorie auf die der Gröfse zurückzuführen oder mit ihr zu verschwistern. Die Coordinatenmethode und die aus ihr erwachsene analytische Geometrie, so wie die Anwendung imaginärer und complexer Gröfsen auf geometrische Betrachtungen sind hierfür selbst redende Beispiele. Aber auch in der Geometrie der Alten und den neueren in gleichem Sinne gepflogenen Fortschritten, so wie in der sogenannten descriptiven Geometrie, wo man sich ohne Beihülfe des analytischen Calculs blofs auf dem Felde räumlicher Intuition bewegt, ist die Berücksichtigung modaler Verhältnisse nicht zu einem abgegrenzten und ausschliefslichen Gegenstand der Beschäftigung gemacht worden, sondern meist in den Operationen mit räumlichen Gröfsen implicirt oder gewissermafsen von ihnen getragen.

Die erste Idee einer wissenschaftlichen und gleichsam calculatorischen Bearbeitung der modalen Seite der Geometrie dürfte in gelegentlichen Aeufserungen von Leibniz gefunden werden, in welchen von einer Art Algorithmus die Rede ist, womit man die Lage räumlicher Gebilde eben so der Analyse unterwerfen müfste, wie es hinsichtlich der Gröfse mittelst der Algebra geschieht [1]). Doch ist eine später bekannt gewordene, von Leibniz selbst herrührende Probe seiner neuen geometrischen Characteristik, die zunächst auf den Begriff der Congruenz gegründet ist, nicht eigentlich modalen Inhalts. Auch kann die an diefs Leib-

---

[1]) Leibniz schreibt in einem Briefe v. J. 1679 an Huyghens: „mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem. Et je croy d'en voir le moyen et qu'on pourrait representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs: et je vous énvoye un essay qui me paroist considerable." Siehe: Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, ex manuscriptis in bibliotheca academiae Lugduno-Batavae servatis edidit P. J. Uylenbroek. fasc. I. pag. 9. — In fasc. II. pag. 6. findet sich die Mittheilung des in Huyghens' Nachlasse aufgefundenen Versuchs von Leibniz.

nizische Specimen angeknüpfte neue geometrische Analyse von Grafsmann nur, wie der barycentrische Calcul von Möbius, als eine Bereicherung der eigentlichen Geometrie angesehen werden, und dasselbe gilt von der géométrie de position von Carnot, welche sich an die durch Monge ausgebildete géométrie descriptive anschliefst. Dagegen steht die bekannte Aufgabe des sogenannten Rösselsprungs, welche schon von Euler und später von Andern wissenschaftlich gelöst worden, in näherer Verwandtschaft mit der Geometrie der Lage, und die von Vandermonde in seinen „remarques sur les problèmes de situation“ [1]) an diese Aufgabe geknüpften Bemerkungen über den Weg, den ein Faden geführt werden mufs, um z. B. eine Tresse oder die Maschen eines Strumpfgewebes darzustellen, sind ganz hierher zu zählen. Ebenso ein von Clausen in den Astronomischen Nachrichten Nr. 494 (ohne Beweis) erwähnter Satz.

Diefs wenige hier Angeführte abgerechnet, erwartet also die modale Seite der Geometrie ihre Bearbeitung und Ausbildung fast ganz von der Zukunft. Das Befremdende, dafs seit der ersten Anregung durch Leibniz zur Zeit noch nicht mehr in diesem Zweige des Wissens geschehen ist, erklärt sich einigermafsen aus der Schwierigkeit der Auffindung wirksamer und zweckmäfsiger Methoden, räumliche Intuitionen auf Begriffe zurückzuführen, und aus der Unzulänglichkeit der Sprache für die wissenschaftliche Bezeichnung der Begriffe, in denen das zu bearbeitende Material oft bedeutende Verwickelungen darbietet. Bei öftern Gelegenheiten durch den gröfsten Geometer der Gegenwart auf die Wichtigkeit des Gegenstandes aufmerksam geworden, habe ich mich seit längerer Zeit verschiedentlich in der Analyse einzelner hierher gehöriger Fälle versucht, zu denen die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen vielfache Veranlassung darbieten, und indem ich es wage, schon jetzt, noch bevor

[1]) Histoire de l'Acad. roy. des sciences année 1771. pag. 566.

diese Betrachtungen Anspruch auf streng wissenschaftliche Form und Methode machen können, Einiges davon als Vorstudien zu der neuen Wissenschaft mitzutheilen, kann meine Absicht nur darauf gerichtet sein, in propädeutischen Rudimenten, Beispielen und Materialien auf die Möglichkeit und die Bedeutung dieser Wissenschaft aufmerksam zu machen.

Es mag erlaubt sein, für diese Art Untersuchungen räumlicher Gebilde den Namen „Topologie" zu gebrauchen statt der von Leibniz vorgeschlagenen Benennung „geometria situs", welche an den Begriff des Mafses, der hier ganz untergeordnet ist, erinnert, und mit dem bereits für eine andere Art geometrischer Betrachtungen gebräuchlich gewordenen Namen „géométrie de position" collidirt. Unter der Topologie soll also die Lehre von den modalen Verhältnissen räumlicher Gebilde verstanden werden, oder von den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Theilen oder ihren Aggregaten im Raume, abgesehen von den Mafs- und Gröfsenverhältnissen. Durch den Begriff der Aufeinanderfolge, der mit dem der Bewegung nahe verwandt ist, tritt die Topologie zur Mechanik in ähnliche Beziehung wie zur Geometrie, wobei natürlich wiederum die Geschwindigkeit fortschreitender oder die Winkelgeschwindigkeit drehender Bewegung, defsgleichen Masse, Bewegungsgröfse, Kräfte oder Momente ihrer Quantität nach nicht in wesentlichen Betracht kommen, sondern nur die modalen Beziehungen zwischen beweglichen oder bewegten Gebilden im Raume. Die Topologie wird, um den Rang einer exacten Wissenschaft zu erreichen, zu dem sie berufen scheint, die Thatsachen der räumlichen Anschauung auf möglichst einfache Begriffe zurückführen müssen, mit welchen sie unter Beihülfe geeigneter, den mathematischen analog gewählter Bezeichnungen und Symbole die vorkommenden Operationen nach einfachen Regeln, gleichsam rechnend, vollzieht.

Von der Position.

Ich beginne mit einer einfachen, der Combinationslehre analogen, vorbereitenden Betrachtung, die sich an das Schema der drei Dimensionen des Raums anlehnt. Jeder räumliche Gegenstand kann mit drei in seinem Innern sich rechtwinklig kreuzenden Linien ausgerüstet werden, nach denen wir seine Dimensionen und Seiten von einander unterscheiden. In concreten Fällen sind vielerlei Benennungen für diese Dimensionen und Seiten üblich, deren Beachtung mehr für die Topologie als für die Geometrie von Interesse sein kann. Für den unbegrenzten Raum an irgend einem Platze auf der Erde bietet sich am natürlichsten die Lothlinie mit den beiden entgegengesetzten Richtungen Oben und Unten, die (horizontale) Mittagslinie mit Süd und Nord [1]), und die zu beiden rechtwinklige Horizontallinie mit West und Ost dar; an einem Hause die Höhendimension mit Oben und Unten, die Länge mit Rechts und Links, die Tiefe mit Vorn und Hinten; am menschlichen Körper Oben und Unten, Vorn und Hinten, Rechts und Links, u. s. w. Bezeichnen wir den Kreuzungspunkt durch 0, und drei auf den drei Dimensionsaxen beliebig gewählte Punkte durch die Ordnungszahlen 1, 2, 3, — ohne ausdrückliches Vorzeichen als positiv betrachtet — und drei auf entgegengesetzter Seite des Nullpunkts auf den Axen gewählte Punkte durch die (negativen) Zahlen $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ so, dafs gleichwerthige entgegengesetzte Zahlzeichen je einer Axe angehören, so bezeichnen 01 und $0\bar{1}$ die entgegengesetzten Seiten der ersten Dimension, und ebenso 02 und $0\bar{2}$ die der zweiten, 03 und $0\bar{3}$ die der dritten. An einem gewöhnlichen Spiel-

[1]) Nur unter den beiden geographischen Polen würde die Bestimmtheit der vier Himmelsgegenden wegfallen, und die beiden Horizontallinien müfsten nach beliebig gewählten terrestrischen Objecten festgelegt werden.

würfel z. B. (der in der Regel die Nummern von 1 bis 6 auf seinen Flächen so vertheilt trägt, dafs die Summe je zweier gegenüberliegender 7 ausmacht) denken wir 0 in seiner Mitte liegend, auf seinen Flächen aber statt der Augenzahlen Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs beziehungsweise die Ziffern $1, 2, 3, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}$ angemerkt. Zwei auf diese Weise mit ihren Dimensionszeichen versehene Körper *A* und *B* können nun in solche Stellungen neben oder in einander versetzt werden, dass jede der drei Axen des einen mit einer der drei Axen des andern gleichgerichtet ist. Solche Stellungen mögen (im engern Sinne des Worts) Positionen heifsen, und wir nehmen hierbei, falls die Axen nicht in einander fallen, auf die Lage der die Nullpunkte verbindenden geraden Linie gegen die Axen eben so wenig Rücksicht als auf die Gröfse dieser Distanzlinie. Die Position von *B* gegen *A* werde bezeichnet durch $\mathrm{pos}(A)B$, sowie die von *A* gegen *B* durch $\mathrm{pos}(B)A$. Die topologische Bestimmung einer Position von *B* zu *A* geschieht mittelst einer aus den drei Ziffern 1, 2, 3 in irgend welcher Ordnung und mit irgend welchen Vorzeichen bestehenden Form, in der die drei Ziffern der Ordnung nach diejenigen drei Seiten von *B* angeben, welche mit den Seiten 1, 2, 3 von *A* gleichgerichtet sind oder conspiriren. Wenn also z. B. die Position

$$\mathrm{pos}(A)B = 2\,\bar{3}\,\bar{1}$$

gegeben wäre, so stände *B* zu *A* in solcher Stellung, dafs die Seiten $2, \bar{3}, \bar{1}$ von *B* beziehungsweise mit 1, 2, 3 von *A* übereinstimmen. Bei jeder Position können die drei Ziffern der Form 1 2 3 als Indices oder Stellennummern betrachtet werden.

Es ist einleuchtend, dafs alle möglichen Positionen eines Körpers *B* zu einem andern *A* in den 48 Formen vorkommen müssen, welche man durch Stellen- und Zeichenwechsel permutatorisch bilden kann, und welche in folgender Zusammenstellung enthalten sind:

$1\ 2\ 3$	$2\ 3\ 1$	$3\ 1\ 2$	$\bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}$	$\bar{2}\ \bar{1}\ \bar{3}$	$\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}$
$1\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ \bar{3}\ \bar{1}$	$3\ \bar{1}\ \bar{2}$	$\bar{3}\ 2\ 1$	$\bar{2}\ 1\ 3$	$\bar{1}\ 3\ 2$
$1\ 2\ 3$	$\bar{2}\ 3\ \bar{1}$	$\bar{3}\ 1\ \bar{2}$	$3\ \bar{2}\ 1$	$2\ \bar{1}\ 3$	$1\ \bar{3}\ 2$
$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$	$\bar{2}\ \bar{3}\ 1$	$3\ \bar{1}\ 2$	$3\ 2\ \bar{1}$	$2\ 1\ \bar{3}$	$1\ 3\ \bar{2}$
$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$\bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1}$	$\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}$	$3\ 2\ 1$	$2\ 1\ 3$	$1\ 3\ 2$
$\bar{1}\ 2\ 3$	$\bar{2}\ 3\ 1$	$\bar{3}\ 1\ 2$	$3\ \bar{2}\ \bar{1}$	$2\ \bar{1}\ \bar{3}$	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$
$1\ \bar{2}\ 3$	$2\ \bar{3}\ 1$	$3\ \bar{1}\ 2$	$\bar{3}\ 2\ \bar{1}$	$\bar{2}\ 1\ \bar{3}$	$\bar{1}\ 3\ \bar{2}$
$1\ 2\ \bar{3}$	$2\ 3\ \bar{1}$	$3\ 1\ \bar{2}$	$\bar{3}\ \bar{2}\ 1$	$\bar{2}\ \bar{1}\ 3$	$\bar{1}\ \bar{3}\ 2$

Bei der wirklichen Effectuirung aller Positionen, in welche zwei Körper, nachdem die positorischen Axen in ihnen festgelegt sind, gebracht werden können, zeigt sich nun, dafs **entweder** nur die oberen 24, **oder** nur die unteren 24 Formen realisirbar sind. Bedeutet nämlich c eine der beiden Ziffern 3 und $\bar{3}$, und bringen wir zwei Körper in die Position 1 2 c, so bleibt zwischen den beiden Werthen für c nur so lange die Wahl, als wir uns erlauben, an einem beider Körper 3 mit $\bar{3}$ zu vertauschen oder seine dritte Axe in ihm selbst umzukehren. Welchen Werth also in der Positionsform 1 2 c die dritte Stelle c annehmen werde, hängt demnach von der gegenseitigen Lage der vier Punkte 0, 1, 2, 3 in jedem der beiden Körper ab. Denken wir uns am Orte des Nullpunkts ein menschliches Individuum, mit dem Scheitel nach dem Punkte 1, mit dem Gesicht nach dem Punkte 2 gerichtet, so liegt der Punkt 3 entweder auf der rechten oder auf der linken Seite. Die gegenseitige Lage der drei Positionsaxen heifse, im Falle 3 rechts liegt, eine **rechte**, falls 3 links liegt, eine **linke** Axenstellung; zwei rechte oder zwei linke Axenstellungen heifsen **homolog**, eine rechte und eine linke **heterolog**. Die rechte Axenstellung ist homolog mit derjenigen, welche wir erhalten, wenn wir 0 an einen Standpunkt auf der

Erde, 1 an das Zenith, 2 nach Süden, 3 nach Westen setzen; die linke mit der, wo 0 in der Sonne, 1 am Nordpol der Ekliptik, 2 im Nullpunkt des Widders, 3 im Nullpunkt des Krebses liegt. Setzen wir bei Münzstücken mit Randschrift und von gleicher Sorte 1 auf die Bildseite, 2 und 3 auf den Rand so, dafs die Schrift in der Richtung 2, $\overline{3}$, $\overline{2}$, 3 läuft, so erhalten wir selbst an Stücken von einerlei Jahrgang verschiedentlich bald rechte, bald linke Axenstellungen [1]; defsgleichen bei Spielwürfeln, wenn man sie in der oben erwähnten Weise beziffert.

Wir können also nunmehr sagen: zwei Körper lassen immer nur 24 Positionen zu, und zwar die in der ersten Abtheilung der obigen Zusammenstellung enthaltenen, wenn ihre Axenstellungen homolog sind, die der zweiten Abtheilung, wenn sie heterologe Axenstellungen haben. Die ersten 24 Positionen nennen wir p o s i t i v, die letzten 24 n e g a t i v. Für jene ist 1 2 3, für diese $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}$ als Primärposition zu betrachten. Die einzelnen Formen in obiger Zusammenstellung sind so geordnet, dafs jeder positiven Position der obern Abtheilung, eine negative an entsprechendem Platze der untern Abtheilung correspondirt, die aus ihr durch den Wechsel aller drei Zeichen entsteht. Beide Abtheilungen zusammen zerfallen in sechs Columnen, deren jede acht Positionen, vier positive und vier negative, enthält, welche sich nur durch die Zeichen ihrer Glieder unterscheiden. Die Ordnung der drei Glieder in den Positionen der drei ersten Columnen, wo die Aufeinanderfolge dem Schema 1, 2, 3, 1, 2 entspricht, mag die s t e i g e n d e, die in den drei letzten Columnen, nach dem Schema 3, 2, 1, 3, 2, die f a l l e n d e

[1] Diefs kann natürlich nur der Fall sein, wo, wie gewöhnlich, zwischen dem Rändeln und Prägen die Münzstücke ihre übereinstimmende Lage einbüfsen können, nicht aber, wo beide Proceduren gleichzeitig geschehen, wie bei der Droz'schen Einrichtung des Prägwerks.

Ordnung heifsen. In den ersten 12 positiven und den letzten 12 negativen Positionen findet sich eine gerade Zahl (0 oder 2) negativer Glieder, bei den übrigen eine ungerade Anzahl (1 oder 3).

Nach diesen Bemerkungen ersieht man leicht, dafs jede gegebene Position durch den Zeichenwechsel eines oder dreier ihrer Glieder ihr eigenes Zeichen ändert (d. i. negativ wird, wenn sie positiv war, oder umgekehrt), durch zwei Zeichenwechsel aber ihr Vorzeichen behält, und ferner, dafs die Permutation der Vorzeichen ohne Einflufs ist auf das Vorzeichen der Position, die Permutation der Glieder aber nur so lange ohne diesen Einflufs bleibt, als die Ordnung nicht in die entgegengesetzte verkehrt wird. Da sich nun jede gegebene Positionsform durch Zeichenwechsel und Gliederversetzung aus der positiven Primärposition ableiten läfst, so ist es leicht; zu erkennen, ob sie positiv oder negativ ist — versteht sich ohne Beihülfe der obigen Tabelle oder einer intuitiven Probe. So mufs z. B. die Position $\bar{1}\ \bar{3}\ 2$ wegen fallender Ordnung und ungerader Zahl negativer Glieder, so wie $\bar{2}\ 3\ \bar{1}$ wegen steigender Ordnung und zweier Minuszeichen positiv sein; $2\ 1\ 3$ aber wegen fallender Ordnung ohne Minuszeichen, und $\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}$ mit steigender Ordnung und dreimaligem Minus sind negative Positionen. Eben so leicht läfst sich in einer Positionsform $a\ b\ c$, in welcher zwei Glieder und das Vorzeichen der Position gegeben ist, das dritte Glied finden. Sollen z. B. zwei Körper, beide mit linker Axenstellung, in der Position $\bar{3}\ b\ 2$ stehen, so wird, weil die Ordnung steigend und die Position positiv sein mufs, $b = \bar{1}$.

Eine gegebene Position von B zu A invertiren heifst aus ihr die Position von A zu B ableiten. Diefs geschieht, indem man die Glieder der gegebenen Position mit ihren (der positiven Primärposition entsprechenden) Indices vertauscht, vorkommende Minuszeichen von den neuen Indices auf die zugehörigen neuen Glieder überträgt und diese nach den Indices ordnet.

Soll z. B. invertirt werden

$$\text{pos}\,(A)\,B = \bar{2}\;3\;\bar{1}$$

so hat man statt des an dritter Stelle stehenden Gliedes $\bar{1}$ in erster Stelle $\bar{3}$, statt des in erster Stelle stehenden Gliedes 2 in zweiter Stelle $\bar{1}$ und statt des an zweiter Stelle stehenden Gliedes 3 an dritter Stelle 2 zu setzen, und erhält somit

$$\text{pos}\,(B)\,A = \bar{3}\;\bar{1}\;2$$

Auf dieselbe Weise würde natürlich aus dieser invertirten Position wiederum die gegebene durch Inversion folgen.

Aus dem Begriff der Inversion ergibt sich, dafs die invertirte Position mit der ursprünglichen gleiches Vorzeichen und gleiche Anzahl von Minuszeichen in ihrer Form, somit also auch gleiche Ordnung in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder haben mufs.

Manche Positionen ändern durch Inversion ihre Form nicht, wie diefs z. B. bei der positiven Primärposition 1 2 3 der Fall ist, da jeder Körper mit sich selbst in dieser Position steht, und drücken also das gleiche gegenseitige Positionsverhältnifs zweier Körper aus. Aus dem Begriff der Inversion ergeben sich die Bedingungen, unter welchen eine Position durch Inversion ungeändert bleibt oder r e c i p r o k ist. In der ersten Columne der obigen 48 Positionen sind alle Glieder mit ihren Indices gleichlautend, wie in der Primärposition, und hier mufs also bei der Inversion jedes Glied mit seinem Vorzeichen an seiner Stelle verbleiben. In beiden Abtheilungen sind somit alle 4 Positionen der ersten Columne reciprok. In der vierten, fünften und sechsten Columne erscheint in jeder Form nur ein Glied mit seinem Index gleichlautend, und diefs behält also sammt seinem Vorzeichen die vorige Stelle; die beiden andern Glieder mit vertauschten Indices aber werden bei der Inversion nur dann wieder an derselben Stelle und ohne Zeichenänderung auftreten, wenn sie gleiche Vorzeichen haben. In beiden Abtheilungen also finden sich unter den vier Positionen jeder der drei letzten Columnen nur zwei reciproke. In der zweiten und dritten Columne endlich, wo kein Glied mit seinem Index gleichlautet, kann sich keine reciproke Position vorfinden. Es gibt demnach überhaupt 20 reciproke Positionen und zwar

zehn positive reciproke Positionen:

$$\begin{array}{llll}
1\,2\,3 & & & \\
1\,\bar{2}\,\bar{3} & \bar{3}\,\bar{2}\,\bar{1} & \bar{2}\,\bar{1}\,\bar{3} & \bar{1}\,\bar{3}\,\bar{2} \\
\bar{1}\,2\,\bar{3} & 3\,\bar{2}\,1 & 2\,1\,\bar{3} & \bar{1}\,3\,2 \\
1\,2\,3 & & &
\end{array}$$

zehn negative reciproke Positionen:

$$\begin{array}{llll}
\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3} & & & \\
\bar{1}\,2\,3 & 3\,2\,1 & 2\,1\,3 & 1\,3\,2 \\
1\,\bar{2}\,3 & \bar{3}\,2\,\bar{1} & \bar{2}\,\bar{1}\,3 & 1\,\bar{3}\,\bar{2} \\
1\,2\,\bar{3} & & &
\end{array}$$

Die übrigen 14 nicht reciproken Positionen jeder Abtheilung, so gruppirt wie sie durch Inversion mit einander zusammenhängen, sind

sieben Paare positiver Positionen:

$$\begin{array}{ll}
2\,3\,1 & 3\,1\,2 \\
2\,\bar{3}\,\bar{1} & \bar{3}\,1\,\bar{2} \\
\bar{2}\,3\,\bar{1} & \bar{3}\,\bar{1}\,2 \\
\bar{2}\,\bar{3}\,1 & 3\,\bar{1}\,\bar{2} \\
\bar{3}\,2\,1 & 3\,2\,\bar{1} \\
\bar{2}\,1\,3 & 2\,\bar{1}\,3 \\
1\,\bar{3}\,2 & 1\,3\,\bar{2}
\end{array}$$

sieben Paare negativer Positionen:

$$\begin{array}{ccc}
\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{1} & \qquad & \bar{3}\,\bar{1}\,\bar{2} \\
\bar{2}\,3\,1 & & 3\,\bar{1}\,2 \\
2\,\bar{3}\,1 & & 3\,1\,\bar{2} \\
2\,3\,\bar{1} & & \bar{3}\,1\,2 \\
3\,\bar{2}\,\bar{1} & & \bar{3}\,\bar{2}\,1 \\
2\,\bar{1}\,\bar{3} & & \bar{2}\,1\,\bar{3} \\
\bar{1}\,3\,\bar{2} & & \bar{1}\,\bar{3}\,2
\end{array}$$

Aufeinanderfolgende oder consecutive Positionen sind solche, welche für eine Reihe von Körpern A, B, C, . . . die Stellung des zweiten zum ersten, des dritten zum zweiten, des vierten zum dritten u. s. w. ausdrücken. Consecutiv sind also die Positionen pos $(A)\,B$, pos $(B)\,C$, pos $(C)\,D$; und wenn pos $(B)\,C = 1\ 2\ 3$, also B und C positionell einander gleich sind, auch die Positionen pos $(A)\,B$ und pos $(C)\,D$. Es ist klar, dafs durch jede Invertirung consecutive Positionen entstehen. Haben zwei nicht consecutive Positionen ein Element gemeinschaftlich oder (was auf dasselbe hinausläuft) steht ein Element der einen mit einem der andern in der positiven Primärposition, so lassen sie sich durch Ordnen oder Invertiren consecutiv machen. So folgen z. B. aus den Positionen pos $(B)\,C$, pos $(A)\,B$ durch blofse Umkehrung ihrer Aufeinanderfolge oder durch Invertirung beider die consecutiven Positionen pos $(A)\,B$, pos $(B)\,C$ oder pos $(C)\,B$, pos $(B)\,A$; die Positionen pos $(D)\,E$, pos $(F)\,E$, werden consecutiv durch Invertirung der zweiten; pos $(G)\,H$, pos $(G)\,K$ durch Invertirung der ersten.

Die Summirung consecutiver Positionen besteht in der Herleitung einer Position des letzten Elementes zum ersten in der Reihe, auf welche sich die gegebenen Positionen beziehen. Die Summe von pos $(A)\,B$, pos $(B)\,C$, pos $(C)\,D$, pos $(D)\,E$ wird also pos $(A)\,E$ sein, was symbolisch so ausgedrückt werden kann:

$$\text{pos}\,((A)\,B + (B)\,C + (C)\,D + (D)\,E) = \text{pos}\,(A)\,E.$$

Insofern nur consecutive Positionen einer Summirung fähig sind, hat der Ausdruck

$$\text{pos}\,((A)\,B + (C)\,D + (E)\,F) = \text{pos}\,(A)\,F$$

nur dann Bedeutung, wenn $\text{pos}\,(B)\,C = \text{pos}\,(D)\,E = 123$, und in der Reihe A, B, C, D, E, F das zweite und dritte Element so wie das vierte und fünfte positionell identisch sind. Kommt also in einer beliebigen Zahl consecutiver Positionen die positive Primärposition vor, so kann dieselbe jedesmal ohne Wirkung auf die Summe aus der Reihe weggelassen werden. Sollen Positionen, die durch ihre Formen gegeben sind, summirt werden, so ist in dieser Forderung die Voraussetzung involvirt, dafs die Positionen consecutiv seien.

Die Evaluirung der Summe consecutiver, durch ihre Formen gegebener Positionen geschieht durch dreifaches Durchschreiten der Formglieder, wobei man am bequemsten die Formen unter einander setzt. Man sieht vorläufig von allen Minuszeichen ab, und findet das erste Glied der Summe in demjenigen Glied der letzten Position, zu welchem man gelangt, wenn man vom ersten Glied der ersten Position ausgehend successive die folgenden Positionen so durchläuft, dafs man bei jedem Schritt zu demjenigen Gliede der folgenden Form übergeht, dessen Index mit dem durchlaufenen Gliede der vorhergehenden Form gleichlautet. Das Zeichen ist positiv bei gerader, negativ bei ungerader Anzahl durchlaufener Minuszeichen. Ebenso findet man das zweite Glied der Summe, wenn man vom zweiten, und das dritte, wenn man vom dritten Gliede der ersten Position ausgeht. Beispiel·

$$\begin{array}{rl}
\text{pos}\,(A)\,B = & \bar{3}\;\bar{2}\;1 \\
\text{pos}\,(B)\,C = & 1\;\bar{3}\;\bar{2} \\
\text{pos}\,(C)\,D = & 2\;1\;\bar{3} \\
\text{pos}\,(D)\,E = & 3\;\bar{1}\;2 \\
\hline
\text{Summa pos}\,(A)\,E = & 3\;\bar{2}\;\bar{1}
\end{array}$$

Die Schritte heifsen für's erste Glied: $3, \bar{2}, 1, 3$ (gibt 3), für's zweite Glied: $\bar{2}, \bar{3}, \bar{3}, 2$ (gibt $\bar{2}$), für's dritte Glied. $1, 1, 2, \bar{1}$ (gibt $\bar{1}$). Aus dem Begriffe des Zusammenfassens consecutiver Positionen folgt von selbst, dafs das Vorzeichen der Summe aus den Vorzeichen der Summanden in gleicher Weise resultirt, wie bei den einzelnen Gliedern, und in der That ist in dem angeführten Beispiele, wo die dritte Form positiv, die drei übrigen negativ waren, eine negative Summe hervorgegangen.

Ein zweites Beispiel sei folgendes:

$$\left.\begin{array}{r} \text{pos}\,(E)\,F = \bar{2}\;\bar{3}\;1\;+ \\ (F)\,G = 3\;2\;1\;- \\ (G)\,H = \bar{1}\;3\;\bar{2}\;- \\ (H)\,I = \bar{2}\;3\;\bar{1}\;+ \\ (I)\,K = \bar{2}\;\bar{3}\;\bar{1}\;- \end{array}\right\}\ \text{pos}\,(E)\,K = \bar{2}\;3\;1\;-$$

$$\left.\begin{array}{r} (K)\,L = 2\;3\;1\;+ \\ (L)\,M = 2\;\bar{3}\;1\;- \\ (M)\,N = 1\;\bar{3}\;2\;+ \\ (N)\,O = \bar{3}\;\bar{2}\;\bar{1}\;+ \\ (O)\,P = 2\;3\;\bar{1}\;- \end{array}\right\}\ \text{pos}\,(K)\,P = 3\;1\;2\;+$$

$$\text{Summa pos}\,(E)\,P = \bar{1}\;2\;3\;-$$

Die jeder Form angefügten Plus- und Minuszeichen geben an, welcher Art die Position ist. Die Summe mufste eine negative Position werden. Die beiden Partialsummen von je 5 Positionen geben summirt dasselbe Resultat.

Eine gegebene Position mit ihrer invertirten in eine Summe vereinigt, mufs offenbar die positive Primärposition geben, als in welcher jeder Körper zu sich selbst steht. War die Position eine reciproke, so ist sie dadurch verdoppelt worden. Ebenso können Positionen verdrei- oder vervielfacht werden. Das $n$fache einer positiven Position ist stets eine positive Position, das $n$fache einer negativen ist negativ, wenn n ungerade, positiv, wenn n gerade ist. Hat man also eine Reihe von Elementen A, B, C, D, ... welche consecutiv in derselben Position stehen, so sind alle positionell identisch in dem einzigen Falle, wo die gemeinschaftliche Position die positive primäre 1 2 3 ist. Falls aber die gemeinschaftliche Position eine der übrigen 19 reciproken Positionen ist, stehen alle ungeraden Elemente A, C, E, ... untereinander einerseits, und alle geraden B, D, F, ... untereinander andrerseits in der positiven Primärposition. Die übrigen 28 Positionen sind hinsichtlich derjenigen Multipla, welche der positiven Primärposition gleichkommen, anders und unter sich verschieden beschaffen. Nämlich

erstens die acht positiven Positionen

$$\begin{array}{lll} 2\;3\;1 & \qquad & 3\;1\;2 \\ 2\;\bar{3}\;\bar{1} & & \bar{3}\;1\;\bar{2} \\ \bar{2}\;3\;\bar{1} & & \bar{3}\;\bar{1}\;2 \\ \bar{2}\;\bar{3}\;1 & & 3\;\bar{1}\;\bar{2} \end{array}$$

geben jede verdreifacht 1 2 3. Ist also eine dieser acht Positionen consecutiv der ganzen Reihe von Elementen A, B, C, D, ... gemeinschaftlich, so ist das vierte, siebente, zehnte, u. s. w. mit dem ersten Elemente positionell orientirt, ebenso das fünfte, achte, elfte u. s. w. mit dem zweiten, und das sechste, neunte, zwölfte u. s. w. mit dem dritten.

Zweitens die acht negativen Positionen

$$\begin{array}{lll} \bar{2}\;\bar{3}\;\bar{1} & \qquad & \bar{3}\;\bar{1}\;\bar{2} \\ \bar{2}\;3\;1 & & 3\;\bar{1}\;2 \\ 2\;\bar{3}\;1 & & 3\;1\;\bar{2} \\ 2\;3\;\bar{1} & & \bar{3}\;1\;2 \end{array}$$

geben jede verdreifacht $\bar{1}\;\bar{2}\;\bar{3}$, versechsfacht 1 2 3. Stehen also alle Glieder der Reihe A, B, C, u. s. w., welche in diesem Falle abwechselnd rechte und linke Axenstellungen haben müssen, consecutiv in einer dieser acht Positionen, so steht das vierte, zehnte, sechzehnte u. s. w. mit dem ersten, das fünfte, elfte, siebzehnte u. s. w. mit dem zweiten und das sechste, zwölfte, achtzehnte u. s. w. mit dem dritten in der negativen Primärposition, hingegen das siebente, dreizehnte, neunzehnte u. s. w. mit dem ersten, das achte, vierzehnte, zwanzigste u. s. w. mit dem zweiten, das neunte, fünfzehnte, einundzwanzigste u. s. w. mit dem dritten in der positiven Grundposition **1 2 3.**

Drittens die sechs positiven Positionen

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{3} & 2 & 1 & \quad & 3 & 2 & \bar{1} \\ \bar{2} & 1 & 3 & & 2 & \bar{1} & 3 \\ 1 & \bar{3} & 2 & & 1 & 3 & \bar{2} \end{array}$$

so wie die sechs negativen Positionen

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \bar{2} & \bar{1} & \quad & \bar{3} & \bar{2} & 1 \\ 2 & \bar{1} & \bar{3} & & \bar{2} & 1 & \bar{3} \\ \bar{1} & 3 & \bar{2} & & \bar{1} & \bar{3} & 2 \end{array}$$

führen durch Verdoppelung auf positive reciproke Positionen, nämlich das erste, zweite, dritte Paar in beiden Gruppen bezüglich auf

$$\begin{array}{ccc} \bar{1} & 2 & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & 3 \\ 1 & \bar{2} & \bar{3} \end{array}$$

und mithin durch Vervierfachung auf die positive Grundposition. Hier ist also je das vierte folgende Glied mit dem Anfangsgliede positionell orientirt. —

Als Beispiel der Anwendung dieser Betrachtungen über die Positionen mögen die Lagenverhältnisse zwischen Objecten und ihren katoptrischen oder dioptrischen Bildern dienen.

In dem einfachsten Falle, wo von einem körperlichen Objecte vor einem Planspiegel ein ebenfalls körperliches virtuelles Bild hinter dem Spiegel entsteht, welches dem Objecte in allen Dimensionen nach bekannter Weise geometrisch gleich und nur topologisch von demselben verschieden ist, legen wir im Objecte eine der drei positorischen Axen in die Richtung der Spiegelnormale, die beiden andern also mit der Spiegelebene gleichlaufend. Dann findet sich in pos (A) B, wenn A das Object und B sein Spiegelbild bedeutet, nur diejenige Axe, welche zur Spiegelfläche normal steht, umgelegt oder mit dem Minuszeichen an ihrer Stelle behaftet, während die beiden andern, wie in der positiven Primärposition in Bild und Object conspiriren. Die Position pos (A) B hat demnach eine der drei Formen

$$\bar{1}\ 2\ 3$$
$$1\ \bar{2}\ 3$$
$$1\ 2\ \bar{3}$$

jenachdem die erste, oder die zweite, oder die dritte Axe zum Spiegel normal steht. Diese Position ist also jedenfalls negativ und beruht somit auf heterologen Axenstellungen in Object und zugehörigem Spiegelbilde.

Unser Ebenbild, welches wir in einem Planspiegel erblicken, hat linke Axenstellung, wenn wir uns selbst mit rechter Axenstellung — oben 1, vorn 2, rechts 3 — versehen denken. Ein über oder unter uns befindlicher Spiegel gibt diesem Bilde zu unserm eigenen Körper die Position $\bar{1}\ 2\ 3$, ein vor oder hinter uns stehender $1\ \bar{2}\ 3$, ein rechts oder links stehender $1\ 2\ 3$. Der Planspiegel kehrt bei der Zusammensetzung seiner Bilder aus den Bestandtheilen des zu copirenden Gegenstandes jederzeit diejenige Dimension um, welche zur Spiegelfläche normal gerichtet ist. Es entsteht dadurch ein Bildkörper, der mit dem Originalkörper wegen der heterologen Axenstellung trotz der geometrischen Uebereinstimmung nicht positionell orientirt oder zur Congruenz gebracht werden kann. Abgesehen von den geometrischen Beziehungen, also lediglich topologisch genommen, gilt das Gesagte auch von den durch Convexspiegel erzeugten virtuellen Bildern von Gegenständen, die sich in beliebiger Entfernung vor solchen Spiegeln befinden, so wie auch von den hinter Concavspiegeln entstehenden virtuellen Bildern solcher Objecte, welche in geringerer Entfernung als die Brennweite vor dem Spiegel stehen. Bei den reellen oder Luftbildern aber, die von Gegenständen in gröfserer Entfernung als die Brennweite durch Concavspiegel entstehen, kommen aufser der Umkehrung der der Axe des Spiegels gleichlaufenden Dimension auch noch die Umkehrung der beiden andern, zur Spiegelaxe rechtwinkligen, Dimensionen hinzu, und hieraus geht für das Bild in Rücksicht auf das Object die negative Primärposition $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$ hervor.

In concavconvexen (difflexen) Spiegeln erblicken wir von solchen Gegenständen, die über den halben Krümmungsradius der Concavität vom Spiegel entfernt sind, Abbildungen, bei welchen aufser der gegen den Spiegel gerichteten Dimension von den beiden letztgedachten nur eine umgekehrt erscheint, und zwar diejenige, nach welcher die Oberfläche des Spiegels concav ist. Diese Scheinbilder [1]) stehen also zu ihren erzeugenden Objecten in einer der positiven Positionen $1\,\bar{2}\,\bar{3}$, $\bar{1}\,2\,\bar{3}$, $\bar{1}\,\bar{2}\,3$, jenachdem die erste oder die zweite oder die dritte Axe des Objects in der Richtung der Convexität der Spiegelfläche liegt. Für Objecte, die in geringerer Entfernung als der halbe Krümmungsradius der Concavität stehen, tritt in topologischer Hinsicht der obige Fall der Plan- und der Convexspiegel ein, und die Bilder stehen in einer der negativen Positionen $\bar{1}\,2\,3$, $1\,\bar{2}\,3$, $1\,2\,\bar{3}$.

Dioptrische, durch sphärische Linsen erzeugte Bilder bieten ähnliche Betrachtungen dar. Die virtuellen Bilder von Objecten, die durch Zerstreuungslinsen betrachtet wer-

---

[1]) Sie sind, optisch genommen, gewissermafsen reell und virtuell zugleich.

den, sind jederzeit mit ihren Objecten positionell orientirt oder stehen zu ihnen in der positiven Grundposition **1 2 3**. Dasselbe gilt von den virtuellen Bildern, welche Sammellinsen von Objecten erzeugen, die in geringerer Entfernung von der Linse abstehen, als ihre Brennweite beträgt, wie bei der Lupe und dem einfachen Mikroskop. Die reellen Bilder aber solcher Objecte, die über die Brennweite der Sammellinse entfernt sind, stehen zu ihren Objecten in einer der drei positiven Positionen $\mathbf{1\,\bar{2}\,\bar{3}}$, $\mathbf{\bar{1}\,2\,\bar{3}}$, $\mathbf{\bar{1}\,\bar{2}\,3}$, jenachdem die erste oder die zweite oder die dritte positorische Axe des Objects in der Richtung der optischen Axe der Linse liegt. Die Collectivlinsen kehren also in diesem Falle die beiden zur optischen Axe senkrechten Dimensionen zugleich um, die dritte in der optischen Axe liegende nicht.

Diese Betrachtungen können, so elementär sie an sich sind, dazu dienen, den Sinn gewisser topologischer Ausdrücke, die in der Sprache des gemeinen Lebens der Präcision entbehren, für den wissenschaftlichen Gebrauch genauer festzustellen. In den oben betrachteten Fällen haben wir Beispiele von einer, von zwei und von drei Umkehrungen der Dimensionen eines Körpers begegnet. Die Umkehrung zweier Dimensionen ergab eine positive Position, also homologe Axenstellung; Umkehrung einer oder dreier Dimensionen aber negative Positionen und heterologe Axenstellungen. Da nun die Umkehrung zweier Dimensionen durch blofse Lagenänderung desselben Körpers und zwar so erzeugt werden kann, dafs man den Körper um die dritte (nicht umgekehrte) Axe als Drehungsaxe eine halbe Umdrehung machen läfst; die Umkehrung einer oder dreier Dimensionen aber wegen der damit verknüpften Heterologie gleichsam einen Eingriff in die innere Verfassung des Körpers thut, und der Fall einer einfachen Dimensionsumkehrung sich wiederum in den einer dreifachen durch eine halbe Umdrehung des Körpers verwandeln läfst: so dürfte es zweckmäfsig sein, den Fall einer halben Umdrehung, wodurch sich zwei Dimensionen zugleich umkehren, eine Inversion oder Umkehrung schlechthin, den Fall einer einzigen Dimensionsumkehrung aber eine Perversion oder Verkehrung zu nennen, und im dritten Falle also, wo alle drei Dimensionen umgekehrt sind, den Körper als verkehrt und umgekehrt zugleich anzusehen. Es mag hierbei bemerkt werden, dafs alle bei diesen Begriffen (den der natürlichen oder primären Lage mitgerechnet) implicirten Positionen in der ersten Columne der früher aufgeführten Uebersicht enthalten sind, sowie dafs sie sämmtlich zu den reciproken Positionen gehören.

Es bedeuten also übersichtlich:

$1\;2\;3$ die natürliche Stellung,

$$\left.\begin{matrix} 1 & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & 2 & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & 3 \end{matrix}\right\} \text{umgekehrte Stellungen,}$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{1} & 2 & 3 \\ 1 & \bar{2} & 3 \\ 1 & 2 & \bar{3} \end{matrix}\right\} \text{verkehrte Stellungen,}$$

$\bar{1}\;\bar{2}\;\bar{3}$ die verkehrt umgekehrte Stellung.

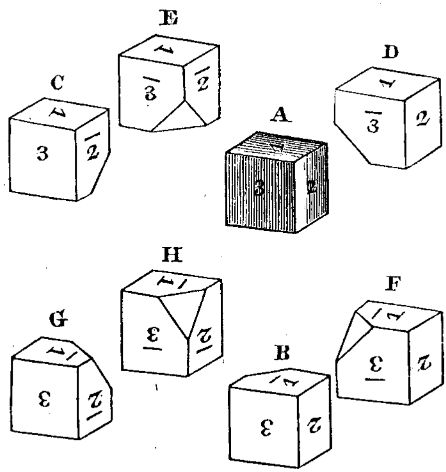
Von Plan- und Convexspiegeln würde man also sagen, sie geben verkehrte Bilder, von den Bildern der Concavspiegel, sie seien in gewissen Fällen verkehrt, in anderen Fällen verkehrt und umgekehrt zugleich. Die Bilder der difflexen Spiegel sind in gewissen Fällen umgekehrt, in andern dagegen verkehrt. Zerstreuungslinsen zeigen die Gegenstände nur in der natürlichen Stellung (verkleinert), Sammellinsen in gewissen Fällen ebenfalls in der natürlichen Stellung (aber vergröfsert), in anderen Fällen dagegen umgekehrt (wobei sowohl Verkleinerung — Fernrohr —, als

Vergröfserung — Mikroskop — möglich ist). Das Galiläische Fernrohr und das blofs aus Collectivlinsen zusammengesetzte terrestrische Fernrohr zeigen die Gegenstände in ihrer natürlichen Stellung, das Kepler'sche Fernrohr umgekehrt. Von den vier Arten katoptrischer Fernröhre, bei allen einfache, als Lupen wirkende oder sogenannte astronomische Oculare vorausgesetzt, gibt das Gregory'sche Bilder in natürlicher Stellung, das Cassegrain'sche und das Newton'sche invertirte, das Herschel'sche pervertirt-invertirte Bilder. Die Mikroskope betreffend, so kann im Allgemeinen die Stellung des Bildes in den (bereits oben erwähnten) einfachen Mikroskopen als natürlich, in den zusammengesetzten — dioptrischen wie katadioptrischen — als umgekehrt gelten. Indefs kommen je nach den Besonderheiten der Constructionen und den accessorischen Bestandtheilen, welche in diesem oder jenem Falle der Anwendung bei jeder Art von Mikroskopen zu Hülfe genommen werden können, Modificationen vor, die ganz zu erschöpfen hier nicht der Ort sein kann. Es mag genügen, auf einige der wichtigeren Vorkommnisse einzugehen. Die sogenannten pankratischen oder Dissectionsmikroskope (namentlich von Plöfsl und Oberhäuser) geben bei einer wesentlich dem zusammengesetzten dioptrischen Mikroskop entsprechenden Einrichtung unter Anwendung von Ocularen mit inversiver Wirkung Bilder in natürlicher Stellung. Die Inversoren können hierbei entweder dem Ocular des terrestrischen Fernrohrs analog zusammengesetzt sein, oder aus zwei mit ihren Hauptschnitten sich rechtwinklig kreuzenden Glasprismen construirt werden, welche je eine Dimension des Bildes pervertiren, also vereint eine Inversion bewerkstelligen. Projicirt man die Bilder auf Schirme, wie bei dem Sonnenmikroskop, dem Gasmikroskop und dem Megaskop, so vertreten reelle Bilder die Stelle der virtuellen und stehen gegen diese und also auch, insofern die genannten Instrumente dem einfachen Mikroskop analog sind, gegen die Objecte selbst in invertirter Stellung, wenn sie nach wie vor von der Ocularseite besehen werden, wie bei Anwendung von durchscheinenden Schirmen, hingegen in der pervertirt-invertirten Stellung, wenn man sie auf opaken Schirmen von der Objectivseite aus betrachtet. Bei den meist aus spiegelnden Bestandtheilen zusammengesetzten Projectoren, durch welche man zum Behuf des mechanischen Nachzeichnens mikroskopischer Gegenstände auf eine direct gesehene Papierfläche virtuelle Bilder projicirt, wird es bei Bestimmung der Stellung dieser Bilder wesentlich auf die Zahl der zu Hülfe genommenen Spiegelungen ankommen. Jedes rechtwinklige Prisma, sowie die Amici'sche Glasplatte oder der Sömmerring'sche Spiegel geben dem Bilde eine Perversion. Die Wollaston'sche Camera lucida erzeugt mittelst doppelter Perversion in derselben Dimension die vorige (ungeänderte) Stellung; zwei Spiegelungen mit gekreuzten Reflexionsebenen pervertiren das Bild nach zwei Dimensionen, d. h. sie invertiren es [1]).

[1]) Beim Gebrauch des Mikroskops ist hierauf in solchen Fällen sorgfältig zu achten, wo es sich um topologische Bestimmungsstücke des Objects handelt, wie die Rechts- oder Linkswindung in den Spiralgefäfswänden einer Pflanze, die Wimperbewegung der Räderthiere u. a. m. Von vielen andern Vorkommnissen, wo die in Rede stehenden Begriffe Platz greifen, hier nur noch einige Beispiele. Ein Mensch am jenseitigen Ufer eines ruhigen Wassers erscheint im Wasserspiegel verkehrt, in einem astronomischen Fernrohr umgekehrt; wiewohl beide Bilder den Kopf nach unten, die Füfse nach oben kehren, würde man doch nur bei dem dioptrischen, wie beim Original — könnte es untersucht werden — das Herz auf der linken Seite, beim katoptrischen aber auf der rechten Seite finden. Bei Schriftzügen kann der verkehrte vom umgekehrten Buchstaben unterschieden werden. Das umgekehrte lateinische *V* gibt ein griechisches *Λ*, das lat. *R* gibt verkehrt ein russisches *Я*, ein lat. *L* gibt verkehrt und umgekehrt ein griechisches *Γ*. Die Schriftsetzer lesen verkehrte Schrift ohne Schwierigkeit, manche Zeitungsleser in England umgekehrte Schrift. In manchen Büchern kommt stellenweise umgekehrte Schrift vor, verkehrte Schrift findet

Als Beispiel consecutiver Positionen mögen noch die Stellungen der durch drei zu einander rechtwinkligen Planspiegel entstehenden Spiegelbilder dienen. Sind I, II, III die drei Spiegel, *A* das Object, so gegen dieselben liegend, dafs es vor jedem Spiegel befindlich ist, und mit den drei positorischen Axen so versehen, dafs 1 mit der auf der Spiegelseite von I errichteten Normale und ebenso 2 und 3 beziehungsweise mit den auf der Spiegelseite von II und III errichteten Normalen conspiriren, so sind die Stellungen, in welchen die 7 Spiegelbilder und das Object unter einander stehen, leicht zu ermitteln. Drei durch einfache Reflexion hinter I, II, III entstehende Bilder *B*, *C*, *D* stehen, wie diefs die beigefügte Fig. 1. verdeutlicht,

Fig. 1.



zum Object *A* in den Positionen $\bar{1}\ 2\ 3$, $1\ \bar{2}\ 3$, $1\ 2\ \bar{3}$, ferner stehen drei durch doppelte Reflexion hinter II und III,

---

sich in vielen Manuscripten Leonardo da Vinci's. Die Ziffern auf der Scale des Gaufsischen Magnetometers müssen, um dem Beobachter in natürlicher Lage zu erscheinen, wegen der Perversion durch den Spiegel und der Inversion durch das Fernrohr, verkehrt und umgekehrt zugleich sein.

III und I, I und II erzeugte Bilder *E*, *F*, *G* in den Positionen $1\ \bar{2}\ \bar{3}$, $\bar{1}\ 2\ \bar{3}$, $\bar{1}\ \bar{2}\ 3$ und endlich das durch dreifache Reflexion entstehende Bild *H* in der Position $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$. Man kann nun von *A* ausgehend auf sechs verschiedenen Wegen consecutiv durch lauter einfache Perversionen bis zu *H* fortschreiten, wobei die Summe der jedesmaligen sieben negativen Positionen die negative Primärposition geben mufs. Nämlich :

(*A*)		(*A*)		(*A*)		(*A*)		(*A*)		(*A*)	
C	$1\ \bar{2}\ 3$	*D*	$1\ 2\ \bar{3}$	*B*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*C*	$1\ \bar{2}\ 3$	*D*	$1\ 2\ \bar{3}$	*B*	$\bar{1}\ 2\ 3$
E	$1\ 2\ \bar{3}$	*F*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*G*	$1\ \bar{2}\ 3$	*G*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*E*	$1\ \bar{2}\ 3$	*F*	$1\ 2\ \bar{3}$
D	$1\ \bar{2}\ 3$	*B*	$1\ 2\ \bar{3}$	*C*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*B*	$1\ \bar{2}\ 3$	*C*	$1\ 2\ \bar{3}$	*D*	$\bar{1}\ 2\ 3$
F	$\bar{1}\ 2\ 3$	*G*	$1\ \bar{2}\ 3$	*E*	$1\ 2\ \bar{3}$	*F*	$1\ 2\ \bar{3}$	*G*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*E*	$1\ \bar{2}\ 3$
B	$1\ 2\ \bar{3}$	*C*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*D*	$1\ \bar{2}\ 3$	*D*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*B*	$1\ \bar{2}\ 3$	*C*	$1\ 2\ \bar{3}$
G	$1\ \bar{2}\ 3$	*E*	$1\ 2\ \bar{3}$	*F*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*E*	$1\ \bar{2}\ 3$	*F*	$1\ 2\ \bar{3}$	*G*	$\bar{1}\ 2\ 3$
H	$1\ 2\ \bar{3}$	*H*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*H*	$1\ \bar{2}\ 3$	*H*	$\bar{1}\ 2\ 3$	*H*	$1\ \bar{2}\ 3$	*H*	$1\ 2\ \bar{3}$
(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(*A*) *H*	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$

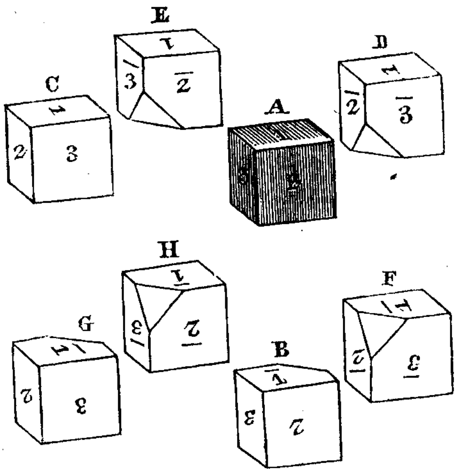
Ebenso würde man auf 24 verschiedenen Wegen consecutiv von *A* nach *H* durch drei Inversionen, dann eine Perversion und wiederum drei Inversionen fortschreiten können, wovon einer beispielsweise der folgende ist :

(*A*)	
E	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
F	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
G	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
B	$1\ \bar{2}\ 3$
C	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
D	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
H	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
(*A*) *H*	$\bar{1}\ 2\ 3$

Die negative Summe erwächst hierbei jedesmal aus sechs positiven und einer negativen Position. U. s. w.

Dreht man das Object *A* um die erste positorische Axe eine Achtelumdrehung im Sinne von 2 nach 3, so nehmen alle Bilder neue Stellungen an (Fig. 2.), und man hätte statt der obigen sechs Reihen consecutiver Positionen nunmehr folgende:

Fig. 2.



(A)		(A)		(A)		(A)		(A)		(A)	
C	$1\ 3\ 2$	D	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	B	$\bar{1}\ 2\ 3$	C	$1\ 3\ 2$	D	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	B	$\bar{1}\ 2\ 3$
E	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	F	$\bar{1}\ 2\ 3$	G	$1\ 3\ 2$	G	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ 3\ 2$	F	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$
D	$1\ 3\ 2$	B	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	C	$\bar{1}\ 2\ 3$	B	$1\ 3\ 2$	C	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	D	$\bar{1}\ 2\ 3$
F	$\bar{1}\ 2\ 3$	G	$1\ 3\ 2$	E	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	F	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	G	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ 3\ 2$
B	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	C	$\bar{1}\ 2\ 3$	D	$1\ 3\ 2$	D	$\bar{1}\ 2\ 3$	B	$1\ 3\ 2$	C	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$
G	$1\ 3\ 2$	E	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	F	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ 3\ 2$	F	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	G	$1\ 2\ 3$
H	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$	H	$\bar{1}\ 2\ 3$	H	$1\ 3\ 2$	H	$\bar{1}\ 2\ 3$	H	$1\ 3\ 2$	H	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$
$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}$	$(A)\,H$	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$

Auch hier steht das siebente Spiegelbild *H* zum Object *A* in der negativen Grundposition, welche sich als Summe jeder der sechs Reihen herausstellt. Uebrigens mufs aus optisch-geometrischen Gründen das Bild *H* stets in dieser Position zum Objecte stehen, die positorischen Axen des Objects mögen gegen die Spiegelebenen gerichtet sein, wie man will.

Beim Gebrauch mancher mathematischer Instrumente können die positorischen Symbole oft mit Vortheil benutzt werden. Das Fernrohr eines Theodolithen zum Beispiel, welches, wenn es zwischen den Stützen liegt, nicht im vollen Verticalkreis herumgedreht werden kann, läfst vier verschiedene Positionen beim Einlegen in die Lager der Stützen zu. Ebenso müssen beim Nivelliren des Instruments der Libelle durch Umlegen zwei entgegengesetzte Stellungen gegeben werden, wodurch den drei Bestandtheilen des Theodolithen, nämlich dem Untertheil, dem Fernrohr und der Libelle in ihren gegenseitigen Stellungen acht verschiedene Combinationen gegeben werden können, deren Unterscheidung beim Gebrauch namentlich rücksichtlich der verschiedenen Correctionen oder Collimationsfehler von Interesse sein kann. Gibt man den drei Bestandtheilen bestimmte positorische Axen, so wird sich jede Combination in Form von zwei Positionen leicht definiren lassen. *A* bedeute die Alhidade mit der Stütze, *F* das Fernrohr mit den Zapfenarmen, *L* die Libelle mit den Füfsen. In *A* legen wir 1 nach oben in die Verticalaxe, 3 und $\bar{3}$ auf die beiden Stützen, 2 so, dafs 1, 2, 3 in rechter Axenstellung liegen. In *F* setzen wir 2 ans Objectiv, also $\bar{2}$ ans Ocular, 3 und $\bar{3}$ an die beiden Zapfen, 1 so, dafs 1, 2, 3 ebenfalls in rechter Axenstellung liegen. In *L* legen wir 1 auf die Oberseite der Glasröhre 3 und $\bar{3}$ an die beiden Füfse, und 2 so, dafs 1, 2, 3 wiederum eine rechte Axenstellung geben. Dann sind die acht Combinationen folgende:

1.) $\operatorname{pos}(A)\,F = 1\ 2\ 3$
$\quad (A)\,L = 1\ 2\ 3$

2.) $\operatorname{pos}(A)\,F = \bar{1}\ \bar{2}\ 3$
$\quad (A)\,L = 1\ 2\ 3$

3.) $\operatorname{pos}(A)\,F = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$
$\quad (A)\,L = 1\ 2\ 3$

4.) $\operatorname{pos}(A)\,F = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
$\quad (A)\,L = 1\ 2\ 3$

5.) $\operatorname{pos}(A)\,F = 1\ 2\ 3$
$\quad (A)\,L = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$

6.) $\operatorname{pos}(A)\,F = \bar{1}\ \bar{2}\ 3$
$\quad (A)\,L = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$

7.) $\operatorname{pos}(A)\,F = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$
$\quad (A)\,L = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$

8.) $\operatorname{pos}(A)\,F = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
$\quad (A)\,L = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$

Durch Invertirung der ersten Position $(A)\,F$ in jedem der acht Fälle (wodurch übrigens, da sie durchweg reciprok ist, ihre Form ungeändert bleibt) und Summirung zur zweiten Position $(A)\,L$ ergibt sich die jedesmalige Stellung der Libelle zum Fernrohr beziehungsweise:

1.) $\operatorname{pos}(F)\,L = 1\ 2\ 3$
2.) $\quad = \bar{1}\ \bar{2}\ 3$
3.) $\quad = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$
4.) $\quad = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
5.) $\operatorname{pos}(F)\,L = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
6.) $\quad = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$
7.) $\quad = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
8.) $\quad = 1\ 2\ 3$

Die Libelle erhält also vier verschiedene Stellungen zum Fernrohr, eine im ersten und achten, eine zweite im zweiten und siebenten, eine dritte im dritten und sechsten, eine vierte im vierten und fünften Falle. Die erste ist die natürliche, die drei andern sind Umkehrungen um die dritte, um die zweite und um die erste positorische Axe.

In anderen Fällen würde der unbegrenzte Raum mit paſslich gewählten positorischen Axen als neues Element hinzutreten, wie z. B. bei dem Heliotrop, dem magnetischen Inclinatorium u. s. w. Die weitere Ausführung darf indeſs dem Leser überlassen bleiben.

Von der Helikoïde oder Wendellinie.

Die Helikoïde oder Wendellinie ist eine doppelt gekrümmte Linie, die als der Weg eines Punktes im Raum angesehen werden kann, der sich cyklisch und progressiv zugleich bewegt.

Um diesem Begriffe eine für die topologischen Betrachtungen geeignete Allgemeinheit zu geben, nehmen wir folgende Feststellungen zu Hülfe. Unter einer cyklischen Linie, Ringlinie oder einem Ring verstehen wir (für den vorliegenden Zweck) den Umfang jeder beliebigen ebenen Figur, vorausgesetzt dafs sich ihre Umgrenzungslinie nirgends selber kreuzt oder mehrfache Punkte darbietet. Als Mitte des Rings dient jeder innerhalb der eingeschlossenen Fläche liegende Punkt, und man mag hierzu, um die Vorstellungen zu fixiren, den Schwerpunkt der Fläche wählen. Diesen Punkt bezeichnen wir mit 0. Die Endpunkte eines (durch 0 gezogenen) Durchmessers des Rings bezeichnen wir durch 1 und $\bar{1}$, die Endpunkte eines zweiten (beliebigen, oder, wenn man will, zum ersten winkelrechten) Durchmessers mit 2 und $\bar{2}$. Die beiden Seiten der Ringfläche können als Haupt- und Kehrseite unterschieden werden. Wir errichten auf der Ringebene im Punkte 0 eine Normale und bezeichnen einen auf der Hauptseite liegenden Punkt derselben mit 3, einen auf der Kehrseite liegenden mit $\bar{3}$. Es trägt also der Ring eine der früher erörterten positorischen Dimensionsunterscheidung analoge Bezeichnung, wobei wiederum die Punkte 0, 1, 2, 3 in rechter oder in linker Axenstellung begriffen sein können. Dem Ringe kann eine translatorische Bewegung dadurch ertheilt werden, dafs seine Mitte 0 auf einem beliebigen geraden oder krummen Wege fortschreitet, welcher die Conductrix, Leitlinie oder auch schlechthin seine Bahn heifst. Wir gestatten zunächst nur stetige Richtungsänderungen im Verlauf der Conductrix und schliefsen somit Winkel und Spitzen aus, welche Einschränkung bei dem Ringe wegfällt. Sind C und D zwei Punkte der Conductrix, zwischen welchen die Bewegung des Ringes betrachtet wird, so unterscheiden wir auf der am jedesmaligen Ort des Punktes 0 gezogenen Tangente der Bahn die Seite, nach welcher längs der Bahn eine Annäherung zum Punkte D statt findet, durch 4, sowie die entgegengesetzte durch $\bar{4}$. Die Bewegung in der Richtung 4 (oder CD) heifse progredirend, die entgegengesetzte $\bar{4}$ retrograd. Beim Beginn der translatorischen Bewegung des Ringes sei dessen Hauptseite nach 4, also die Kehrseite nach $\bar{4}$ gewendet. Der Ringlinie gestatten wir während ihrer Bewegung eine beliebige, jedoch stetige Veränderung ihrer Gröfse und Gestalt, der Ringebene aber eine beliebige Aenderung ihrer Lage, jedoch so, dafs einestheils der Winkel zwischen 1 und 4 nie gröfser als ein rechter werde, d. h. dafs 04 nie in die Ringebene falle, und dafs anderntheils bei den allmäligen Lagenänderungen der Ringnormale und Ortsänderungen der Ringmitte stets sämmtliche Theile des Ringes eine (wenn auch ungleich grofse) Bewegung im Sinne 03 vollbringen. Es ist klar, dafs bei der gemachten Beschränkung hinsichtlich des Unterschiedes der Richtungen 3 und 4 die progredirende Bewegung des Rings statt durch 4 auch durch 3, sowie die retrograde Bewegung statt durch $\bar{4}$ auch durch $\bar{3}$ bezeichnet werden kann. Die Fläche, welche durch solche Bewegung von der Ringlinie erzeugt wird und die Leitlinie schlauchförmig umschliefst, nennen wir ein Askoïd.

Während der zur Erzeugung des Askoïds erforderlichen progressiven Bewegung des Rings bewege sich nun ein Punkt in der Ringlinie selbst beständig in einerlei Sinn, dann beschreibt der Punkt eine Helikoïde oder Wendellinie auf dem Askoïd der ganzen Conductrix entlang. Die Geschwindigkeit beider gleichzeitigen Bewegungen, der cyklischen und der progressiven, unterliegt keiner andern Beschränkung, als dafs sie nicht ins Entgegengesetzte übergehe, und kann also übrigens nach Belieben veränderlich sein. Zur Bezeichnung des Sinnes der cyklischen Bewegung des Punkts dienen die vier auf dem Umfange des Rings befindlichen positorischen Zeichen 1, 2, $\bar{1}$, $\bar{2}$, in der Weise, dafs die Bewegung im Sinne $1\ 2\ \bar{1}\ \bar{2}\ 1$, durch $1\ 2$ oder $2\ 1$ oder $\bar{1}\ \bar{2}$ oder $\bar{2}\ 1$, die entgegensetzte aber durch $1\ \bar{2}$ oder $\bar{2}\ \bar{1}$ oder $\bar{1}\ 2$ oder $2\ 1$ ausgedrückt wird.

Durch die Zusammensetzung der für die beiden Bewegungen gewählten Bezeichnungen läfst sich nunmehr der Gang des die Wendellinie beschreibenden Punktes und somit die Wendellinie selbst am einfachsten topologisch characterisiren, und wir bezeichnen demgemäfs mit $(1\ 2)\ 3$ beispielsweise die Wendellinie, welche ein Punkt beschreibt, indem er sich cyklisch im Sinne $1\ 2$ und progressiv im Sinne 3 bewegt.

Verschiedenheiten in der Gestalt der Leitlinie sowie der Ringlinie, in den Form- und Lagenveränderungen der letzteren, in der Geschwindigkeit und den Geschwindigkeitsänderungen sowohl der cyklischen als der translatorischen Bewegung des die Helikoïde erzeugenden Punktes bedingen begreiflicherweise, wenn auch noch so mannigfache, doch nur solche Unterschiede in der einem Ausdrucke der angeführten Art entsprechenden Wendellinie, welche vorerst als wesentlich geometrisch gelten dürfen. Ebenso wird durch Umkehrung des Sinnes beider Bewegungen, wodurch der Punkt auf seinem helikoïdalen Wege rückläufig wird, nur ein phoronomischer Unterschied bedingt, so dafs wir z. B. den erzeugten Weg bei $(1\ 2)\ 3$ und bei $(1\ \bar{2})\ \bar{3}$ als topologisch gleichgeltend ansehen dürfen. Nur aus der Umkehrung des Sinnes Einer der beiden associirten Bewegungen oder aber, was auf dasselbe hinausläuft, aus dem Wechsel zwischen rechter und linker Axenstellung bei der Festlegung der Punkte 1 und 2 im Umfange des Rings, unter Beibehaltung derselben Symbolform, wird ein wesentlich topologischer Unterschied in der Wendellinie erwachsen.

Nach diesen Erörterungen ist leicht zu übersehen, dafs die zur Bezeichnung der Wendellinien dienenden Ausdrücke — abgesehen von den Klammern — denjenigen Positionsformen entsprechen müssen, in welchen die der Ringnormale entsprechende positorische Axe an dritter Stelle erscheint, d. h. den sechzehn Formen der ersten und fünften Columne der früheren Uebersicht. Hätte man die Axen 2 und 3 in die Ringebene, die Axe 1 in die Normale verlegt, so wären es die Positionsformen der zweiten und vierten Columne und ebenso wären, falls 1 und 3 in den Ring, 2 auf dessen Normale gesetzt würde, die Formen der dritten und sechsten Columne Ausdrücke der verschiedenen Wendellinien. Man kann mithin sämmtliche 48 Positionsformen (die zwei ersten Glieder von dem dritten mittelst Klammern absondernd) zu Ausdrücken für Helikoïden verwenden. Die oben eingeführte Bezeichnung soll nunmehr vorzugsweise auf den Fall beschränkt werden, wo man im Ringe rechte Axenstellung wählt. Im gegentheiligen Fall, wo 0, 1, 2, 3 in linker Axenstellung stehen, schreibe man z. B. [1 2] 3. Dann ergeben sich 96 verschiedene Helikoïdalformen. Die eine Hälfte, bei denen rechte Axenstellung zu Grunde liegt, stellen sich nunmehr in folgender Uebersicht dar:

$(1\ 2)\ 3$	$(1\ \bar{2})\ \bar{3}$	$(2\ 3)\ 1$	$(2\ \bar{3})\ \bar{1}$	$(3\ 1)\ 2$	$(3\ \bar{1})\ \bar{2}$
$(\bar{1}\ \bar{2})\ 3$	$(\bar{1}\ 2)\ \bar{3}$	$(\bar{2}\ \bar{3})\ 1$	$(\bar{2}\ 3)\ \bar{1}$	$(\bar{3}\ \bar{1})\ 2$	$(\bar{3}\ 1)\ \bar{2}$
$(2\ \bar{1})\ 3$	$(2\ 1)\ \bar{3}$	$(3\ \bar{2})\ 1$	$(3\ 2)\ \bar{1}$	$(1\ \bar{3})\ 2$	$(1\ 3)\ \bar{2}$
$(\bar{2}\ 1)\ 3$	$(\bar{2}\ \bar{1})\ \bar{3}$	$(\bar{3}\ 2)\ 1$	$(\bar{3}\ \bar{2})\ \bar{1}$	$(\bar{1}\ 3)\ 2$	$(\bar{1}\ \bar{3})\ \bar{2}$

$(\bar{1}\ \bar{2})\ \bar{3}$	$(\bar{1}\ 2)\ 3$	$(\bar{2}\ \bar{3})\ \bar{1}$	$(\bar{2}\ 3)\ 1$	$(\bar{3}\ \bar{1})\ \bar{2}$	$(\bar{3}\ 1)\ 2$
$(1\ 2)\ \bar{3}$	$(1\ \bar{2})\ 3$	$(2\ 3)\ \bar{1}$	$(2\ \bar{3})\ 1$	$(3\ 1)\ \bar{2}$	$(3\ \bar{1})\ 2$
$(\bar{2}\ 1)\ \bar{3}$	$(\bar{2}\ \bar{1})\ 3$	$(\bar{3}\ 2)\ \bar{1}$	$(\bar{3}\ \bar{2})\ 1$	$(\bar{1}\ 3)\ \bar{2}$	$(\bar{1}\ \bar{3})\ 2$
$(2\ \bar{1})\ \bar{3}$	$(2\ 1)\ 3$	$(3\ \bar{2})\ \bar{1}$	$(3\ 2)\ 1$	$(1\ \bar{3})\ \bar{2}$	$(1\ 3)\ 2$

Die andern 48 würden sich von diesen nur durch die Gestalt der Klammern unterscheiden.

Die sämmtlichen diesen Formen entsprechenden Wendellinien zerfallen nun in der vorhin hervorgehobenen topologischen Hinsicht, d. h. nach ihrem *Windungstypus* in zwei Arten, als deren Repräsentanten

(1 2) 3 und [1 2] 3

betrachtet werden können. Die der ersteren dieser beiden Formen entsprechenden Wendellinien mögen *rechtswendig* oder *dexiotrop*, die der andern entsprechenden *linkswendig* oder *laeotrop* heifsen.

Fig. 3.

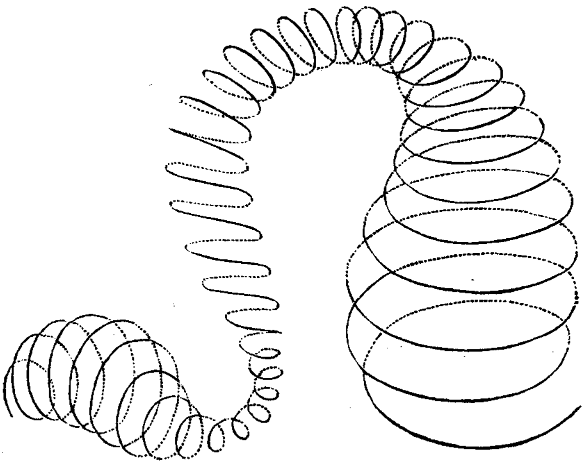


Fig. 3 stellt eine dexiotrope Helikoïde dar.

Da der Windungstypus einer Wendellinie durch Umkehrung des Sinnes beider associirten Bewegungen nicht geändert wird, sondern nur durch Eine Umkehrung oder durch Vertauschung der Axenstellung mit der zu ihr heterologen, so läfst sich einer gegebenen Wendellinienform leicht ansehen, ob sie einer dexiotropen oder einer laeotropen Windung entspricht.

Jede horizontale Zeile in der aufgeführten Zusammenstellung enthält drei Paare von Formen. In jedem Paar ist die zweite Form gegen die erste rückläufig, insofern das zweite und dritte Glied das entgegengesetzte Zeichen trägt. Der Windungstypus innerhalb jedes Paares ist also gleich. Nun sind aber auch die drei Formen (1 2) 3, (2 3) 1 und (3 1) 2 von gleichem Typus, weil die bei der zweiten und dritten subintelligirten Abänderung der positorischen Axen, deren Stellung homolog bleibt, durch die positiven Positionen 2 3 1 und 3 1 2 geleistet werden kann, und dieser Schlufs findet, wie in der ersten, so in allen übrigen Zeilen seine Anwendung. Folglich ist der Typus in allen sechs Formen jeder Zeile gleich. Die Formen der zweiten, dritten und vierten Zeile unterscheiden sich von den entsprechenden der ersten Zeile nur durch eine andere Bezeichnungsweise desselben Sinnes der cyklischen Bewegung. Also sind alle 24 Formen der ersten Abtheilung mit (1 2) 3 von gleichem Typus, d. h. dexiotrop. Aus gleichem Grunde sind alle 24 Formen der zweiten Abtheilung unter sich und mit (1 2) 3 von gleichem Typus. Die Windung in $(\bar{1}\ \bar{2})\ 3$ aber ist der von (1 2) 3 conträr, weil in ihr nur die progressive Bewegung entgegengesetzten Sinn hat. Folglich sind die letzten 24 Formen laeotrop. Da nun die ersten 24 Formen positive, die letzten 24 negative Positionsformen darstellen, so ist klar, *dafs eine Wendellinie dexiotrop oder laeotrop ist, je nachdem ihre Form bei rechter Axenstellung einer positiven oder negativen Position, bei linker Axenstellung aber einer negativen oder positiven Position entspricht.*

Ueber die sonst üblichen Benennungen der beiden Typen mögen hiernächst einige Bemerkungen vielleicht nicht am unrechten Orte sein. Welche von beiden Wendellinien oder Schraubenwindungen man rechts nennen will und welche links, ist an sich rein conventionell. Ich habe die Namen so gewählt, wie sie sich am natürlichsten und mit Concinnität an die voraufgegangenen topologischen Feststellungen anschliefsen, mufste aber dabei auf die sonst übliche Bezeichnung „rechts oder links gewunden, dextrorsum oder sinistrorsum volubilis und contortus“ verzichten, weil sie leider nicht die durchgehends feste Bedeutung erlangt haben, die sie sowohl in der botanischen und zoologischen Terminologie als in der Sprache der Technik haben sollten. Die in der Mechanik gebräuchlichen Schrauben sind bei weitem der Mehrzahl nach mit laeotropen Windungen versehen. Die technische Sprache bezeichnet sie als „rechte“ Schrauben, nicht nur weil sie die gewöhnlicheren sind, sondern auch weil sie in der Regel den Zweck haben, eine Abwärtsbewegung durch eine Rechtsdrehung zu bewirken. „Linke“ Schrauben, welche in besondern und seltnern Fällen (wovon die vorzüglichsten in Prechtl's technologischer Encyclopädie [1]) aufgeführt sind) ihre Anwendung finden, haben also dexiotrope Windungen. Diefs Verhältnifs soll bei den Schrauben der Japanesen das umgekehrte sein. Die eben angeführten Benennungen „rechts“ und „links“ sind von hier aus auf die übrigen Vorkommnisse schraubenförmiger Windungen in der Technik übergegangen, selbst in Fällen, wo entweder die „linke“ (d. i. dexiotrope) Gestalt entschieden die häufigere ist, wie bei den Schnecken in den Uhrwerken, oder beide Typen gleich häufig sein mögen, wie bei den Windmühlenflügeln, dem Schraubenruder, der Spiralpumpe, der Archimedischen Schraube, bei den Wendeltreppen, den gewundenen Säulen und andern schraubenähnlichen Ornamenten in der Architectur, den Springfedern, den Spiralfedern in Chronometern, sowie den Litzen oder Drähten in Seilen, Stricken, Schnüren und Gimpen. In der Conchyliologie ist die fragliche Unterscheidung für die Morphologie der Schnecken von Interesse. Auch hier hat man die laeotropen Windungen, welche die Regel bilden, rechts genannt, die conträ-

---

[1]) Bd. 13. S. 316.

ren oder dexiotropen, welche die seltneren sind, links, und diese Benennung kann insofern als naturgemäfs gelten, als man bei den Rechtswindungen im Sinne des Wachsthums des Thieres, d. i. von der nach oben gerichteten Spitze des Gehäuses zur Basis niedersteigend in den Windungen rechts um die Spindel geführt wird. In anderen Fällen der Zoologie kommen meist beiderlei Windungen gepaart vor an symmetrischen Organen, die zu beiden Seiten der Medianebene des animalen Körpers liegen. Beispiele sind die Schnecken des innern Ohres der höheren Thierclassen, die gewundenen Hörner und Zähne u. s. w.; auch gehört der torquirte, meist einzeln vorkommende Narwhalzahn hierher, dessen Seitenstück verloren zu gehen oder in der Ausbildung zurückzubleiben pflegt. Je nach der Art des Organs findet sich hierbei die dexiotrope Windung bald auf der rechten, bald auf der linken Seite des Thieres. In der Botanik endlich sind die beiden Windungstypen nicht blofs am Stengel der Schlingpflanzen, an den Ranken und den Spiralgefäfsen zu unterscheiden, sondern auch bei der Torsion verschiedener Pflanzentheile, wie der Baumstämme, der Grannen, der Pistille und besonders den gedrehten Blumenkronen. Die Linné'sche Nomenclatur stimmt in diesem Punkte mit der vorhin angeführten technologischen und conchyliologischen Terminologie überein, wiewohl dieselbe hier gewissermafsen als naturwidrig angesehen werden dürfte. Den Ausdruck caulis volubilis nämlich erklärt Linné [1]) so: spiraliter adscendens per ramum alienum und zwar sinistrorsum (☾) secundum solem vulgo, e. g. Humulus, Lonicera cet.; dextrorsum (☽) contra motum solis vulgi e. g. Convolvulus, Phaseolus, cet. Bei der Intorsio [2]) wiederholt er diese Bestimmung und stellt sie mit den Windungstypen am Cirrhus, an der Corolla und anderen Organen zusammen. In einer Anmerkung hierzu

[1]) Philosophia botanica 1751. pag. 39.

[2]) Ibid. pag. 103.

gibt nun Linné seine Definition von sinistrorsum und dextrorsum, welche später — zum Theil aus Anlafs des dabei vorgefallenen Druckfehlers — die verschiedensten Exegesen erfahren hat. Linné setzt fest: ***sinistrorsum*** hoc est, quod respicit ***dextram***, si ponas Te ipsum, in centro constitutum, meridiem adspicere; dextrorsum itaque contrarium, und erklärt damit, dafs er die nach der rechten Seite eines im Centrum stehenden Beobachters hervorragenden Blumenblätter als Kennzeichen einer links gewundenen Corolla angesehen wissen wolle, und vice versa. Das meridiem adspicere ist in der concreten Sprache Linné's nicht sowohl ein überflüssiger, als vielmehr ein prägnanter Ausdruck für die aufrechte Stellung des mitten in der Blume gedachten Beobachters, der das Gesicht nach einem bestimmten Punkte des Horizonts kehren soll — versteht sich, den Scheitel nach oben gerichtet. Freilich bleibt bei diesen Erklärungen in topologischer Hinsicht manches zu ergänzen, manches zu fragen übrig. So wird bei secundum solem nicht blofs crescens oder scandens sondern auch sub latitudine boreali stillschweigend vorausgesetzt, und bei gedrehten Blumen bleibt dahin gestellt, ob der innere oder der äufsere Rand der Petala, deren sogenannte innere (d. i. ursprünglich der Blumenaxe zugekehrte) Seite je nach der Entfaltung der Corolla bald nach innen, bald nach oben, bald nach aufsen gerichtet sein kann, oder vielleicht die Innen- oder Aufsenfläche des Petalums unter dem hoc est, quod respicit dextram s. sinistram verstanden werden soll. Selbst die Linné'schen Beispiele sind hierfür kein sicherer Fingerzeig, wie sich aus der (von Alexander Braun [1]) gerügten) Zusammenstellung von Vinca und Rauwolfia mit Asclepias, Periploca und Nerium ergibt. So viel scheint indefs aus dem Angeführten hervor-

[1]) Ueber die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen, in den Acten der Leop. Carol Acad. d. Naturf. Bd. 15, Theil 1, S. 15.

zugehen, dafs Linné die Absicht hatte, das was man in andern Fällen, z. B. bei einem Korkzieher oder einem Schneckenhause, rechts nannte, auch bei gewundenen Theilen einer Pflanze rechts zu nennen. Spätere botanische Schriftsteller sind lange Zeit Linné's Vorschlag gefolgt, den sie in verschiedenen (zum Theil sehr unpräcisen) Definitionen wiederholt haben. Reinhold Forster z. B. erklärt [1]): truncus, volubilis, spiraliter adscendens per alia corpora, dextrorsum (☽) a dextra ad sinistram, contra motum solis vulgo, sinistrorsum (☾) a sinistra ad dextram, secundum solem vulgo. Link [2]): caulis volubilis helicis in modum circa alia corpora firma volvitur et quidem dextrorsum seu contra solis motum, uti nautae aiunt e. g. Convolvulus cet., aut sinistrorsum seu secundum solis motum e. g. Humulus cet. Hier wird man das constituere se ipsum in centro leicht hinzudenken. Willdenow erklärt [3]), der Stengel winde sich „rechts (dextrorsum), wenn er von der Rechten zur Linken sich abwärts um einen Gegenstand dreht, z. B. Convolvulus, — links (sinistrorsum), wenn er von der Linken zur Rechten abwärts um einen Gegenstand sich windet, z. B. Humulus Lupulus." Diese in der Form eben so ungeschickte als vage Definition ist, wie aus den Beispielen entnommen werden mufs, dem Inhalte nach Linnéisch und fordert stillschweigend, dafs der Beobachter aufserhalb der Wendellinie stehend, die ihm zugewandten Hälften der Windungen in Gedanken von oben nach unten durchlaufe. In andern Schriften [4]) finden sich die Benen-

---

[1]) Enchiridion botanicae inserviens. Lugd. Bat. ed. altera 1792. pag. 3.

[2]) Elementa philosophiae botanicae. Berol. 1824. pag. 145.

[3]) Grundrifs der Kräuterkunde, 7te Aufl. von Link herausgegeben. Berl. 1831. S. 41.

[4]) z. B. in Zimmermann's Grundzügen der Phytologie. Wien 1831. S. 198.

nungen dextrorsum und sinistrorsum in Linné's Sinn; die Zeichen ☾ und ☽ aber in umgekehrter Bedeutung aufgeführt. Zu einer Vertauschung der Benennungen selbst aber hat Decandolle zuerst den Vorschlag gethan, welchem fast die Mehrzahl der neueren botanischen Schriftsteller folgt. Der Vortheil einer naturgemäfseren Definition unter Anwendung der ältern Benennung, nur mit vertauschten Bedeutungen, wird indefs durch die daraus erwachsende Verwirrung weit überboten. Decandolle erklärt [1]), *Dextrorsus*, qui se dirige à droite, et de là; *dextrorsum volubilis*, qui se roule de gauche à droite; dans ce sens, on se suppose au centre de la spire tourné du côté du midi, wo die letzte Bestimmung offenbar nur eine blinde Uebersetzung von „meridiem adspicere" ist. In gleichem Sinne spricht sich Decandolle an anderen Stellen seiner Schriften in dieser Beziehung aus [2]). Der Linné'schen Definition gleichfalls entgegen, also mit der Decandolle'schen übereinstimmend, sind die Benennungen „rechts und links gewunden" u. A. bei Mohl [3]), Schleiden [4]),

---

[1]) Théorie élémentaire de la botanique. Paris 1813, 2e édit. 1819. pag. 479.

[2]) Organographie végétale. Paris 1827. p. 156, und Physiologie végétale. Paris 1832. II. p. 840.

[3]) Ueber den Bau und das Winden der Ranken und Schlingpflanzen. Tübingen 1827.

[4]) Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik. Leipzig 1842. — In Theil I, S. 140 heifst es: „Ich will hier nur kurz noch die Bezeichnungen rechts und links gewundener Stengel erörtern, in denen viel Verwirrung herrscht. Die natürliche Anschauung ist folgende. Von Unten nach Oben entwickelt sich die Pflanze, sie steigt also auf; wenden wir nun die Ausdrücke links und rechts auf die Pflanze an, so hat das nur Sinn, indem wir uns gleichsam an ihre Stelle setzen; wir steigen aber uns links wendend in die Höhe, wenn wir die Axe der Windung zur Linken haben, rechts, wenn wir sie zur Rechten haben. Beziehen wir es auf den Lauf der Sonne, so können wir für unsere nördliche Halbkugel offenbar doch nur die der Sonne zugewendete, also südliche Hälfte der Windung mit ihrem Lauf in Beziehung

Endlicher und Unger [1]), sowie bei Alex. Braun [2]) und Naumann [3]) in ihren Untersuchungen über die Blattstellung. Hinsichtlich der bereits vorhin berührten Verschränkung der Blumenblätter einer Blüthe, namentlich in ihrer Aestivation, ist indefs eine präcise topologische Definition minder einfach, als es den in botanischen Werken darüber gegebenen Bestimmungen nach scheinen sollte, und so sehr Braun's Gründe Anerkennung verdienen, denen gemäfs — um Con-

---

bringen, dann geht aber die rechts gewundene Spirale mit der Sonne, die links gewundene gegen die Sonne. Linné hatte seltsamer Weise die Bezeichnungen umgekehrt verbunden, offenbar von einer unklaren Anschauung ausgehend, und Manche sind ihm darin gefolgt, Manche haben die Sache ganz umgedreht, links rechts und rechts links genannt, bis die Sache völlig confus war. Die Beziehung auf den Sonnenlauf ist überall eine sehr mangelhafte Bezeichnung. Links und rechts gewunden kann man aber, wie mir scheint, nicht wohl anders verstehen, als ich angegeben habe."

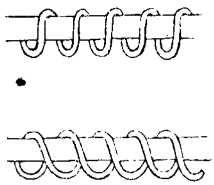
[1]) Grundzüge der Botanik, entworfen von Stephan Endlicher und Franz Unger. Wien 1843, wo es S. 83 heifst: „Der gewundene oder windende Stamm (caulis volubilis) schlingt sich in einer Schraubenlinie (Spirale) um eine Stütze. Er ist rechts gewunden (dextrorsum volubilis), wenn die Windung um den Beurtheiler, der sich selbst als Stütze denken mufs, von der Linken zur Rechten aufwärts gerichtet ist (Humulus Lupulus, Polygonum, Convolvulus). Der links gewundene Stengel (caulis sinistrorsum volubilis) ist von der Rechten zur Linken um den Beurtheiler gewunden. Phaseolus vulgaris, Convolvulus Sepium. Linné nennt den Stengel, der sich abwärts von der Rechten zur Linken wendet, rechtsgewunden, und wenn er sich abwärts von der Linken zur Rechten windet, heifst er ihm linksgewunden. Da die Windung aber in der Natur wirklich von unten nach oben geht, nennen wir rechtsgewunden, was Linné linksgewunden, und linksgewunden, was er rechtsgewunden heifst."

[2]) a. a. O.

[3]) C. F. Naumann über den Quincunx, als Grundgesetz der Blattstellung im Pflanzenreiche. Pogg. Ann. LVI. 7. Naumann bedient sich übrigens des mehr definirenden Ausdrucks *dextrorsum und sinistrorsum scandens*."

cinnität zu erzielen — die Aestivation bei Gentiana von Linné sinistrorsum statt dextrorsum, von Decandolle aber dextrorsum statt sinistrorsum contorta genannt werden müfste, so wenig erschöpfen sie die hierbei eintretenden Mannigfaltigkeiten, deren genauere Erörterung freilich an diesem Orte zu weit führen würde, und einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben mufs.

Noch möge hier nicht unerwähnt bleiben, dafs die Buchstaben δ und λ ein mnemonisches Mittel zur Unterscheidung beider Windungstypen darbieten, wenn man sie mit der scheinbaren Gestalt der dem Beobachter zugewandten Theile einer Wendellinie (mit quer verlaufender Conductrix)



δ

Fig. 4.

λ

vergleicht, wie Fig. 4 verdeutlicht. Auch kann der Buchstabe ſ zur Versinnlichung der d e x i o t r o p e n Schraubenwindungen dienen — ſſſſſſſ.

Der loxodrome Weg eines Schiffes, das genau nach Westen oder nach Osten steuert, ist ein Parallelkreis, in jedem andern Falle aber eine Helikoïde, und zwar eine dexiotrope, wenn der Schiffer seinen Cours nach Nordwest oder Südost, eine laeotrope, wenn er ihn nach Südwest oder Nordost richtet. Das Erdsphäroïd, auf dessen Oberfläche die Wendellinie entsteht, ist in diesem Falle als ein allenthalben geschlossenes Askoïd und die Erdaxe als Conductrix zu betrachten.

D o p p e l t e oder v i e l f a c h e Wendellinien erhält man, wenn man bei der oben erörterten Entstehungsweise der Helikoïde zwei oder mehrere Punkte statt eines einzigen sich cyklisch auf dem Ringumfang in einerlei Sinn bewegen läfst. Setzen wir hierbei vorerst und für die nächsten Zwecke fest, dafs trotz der Willkür hinsichtlich ihrer relativen Bewegungen keiner der beschreibenden Punkte den ihm vorangehenden einhole oder überschreite, so bieten die verschiedenen einfachen Wendellinien, aus welchen eine vielfache Helikoïde zusammengesetzt ist, und deren nebeneinderlaufende Windungen paradrom heifsen sollen, unter sich weder Berührungs- noch Durchschnittspunkte im Raume dar. Die Kanten einer mehrgängigen Schraube und die farbigen Bänder auf den Windungen vieler einschaligen Conchylien geben demnach Beispiele mehrfacher Wendellinien. Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs einer vielfachen Helikoïde derselbe Windungstypus zukommt, wie ihren Bestandtheilen, die in dieser Beziehung unter sich gleichartig, d. h. isotrop sein müssen.

Bei den in künftigen Untersuchungen näher zu betrachtenden Linearcomplexionen im Raume mufs auch der Fall Berücksichtigung finden, wo zwei oder mehr Punkte im Cyklus während ihrer von der Conductrix vorgeschriebenen progressiven Bewegung mit Geschwindigkeiten rotiren, deren Unterschiede einer topologischen Ordnungsmäfsigkeit unterliegen, und wo die entstehenden Helikoïden ein System arithmologisch geordneter Durchschnittspunkte liefern. Hier können sowohl isotrope als heterotrope Helikoïden mit einander verbunden sein. Ein Beispiel solcher Wendellinien, die wir diadrom nennen werden, bieten die Zeilen oder Wendeln dar, nach denen die Schuppen der Nadelholzzapfen geordnet sind. Zwei isotrope Helikoïden auf gemeinschaftlichem Askoïd sind entweder paradrom oder diadrom, zwei heterotrope sind nur diadrom.

Bevor wir auf neue Fälle von Verbindungen verschiedener Wendellinien eingehen, ist der Begriff helikoïdaler Flächen zu entwickeln. Verbinden wir den die Wendellinie beschreibenden Punkt H mit dem Punkte 0 auf der Conductrix durch eine (unbegrenzte) gerade Linie, so entsteht gleichzeitig mit der Wendellinie eine derselben Leitlinie angehörige **helikoïdale** oder **Wendelfläche**. Ihr Durchschnitt mit dem Askoïd ist eine doppelte Helikoïde. Ist die Conductrix eine gerade Linie und der Ring ein Kreis von constantem Radius, dessen Centrum auf der Conductrix progredirt und dessen Ebene zu ihr normal ist, so entsteht die Schraubenfläche, wie sie sich an flachgängigen Schrauben, an der Archimedischen Wasserschnecke und an der Unterfläche steinerner Wendeltreppen findet, oder wie sie aus einem ursprünglich ebenen, elastisch dehn- und biegsamen Bande (Metallstreifen) durch Torsion hervorgeht. Andere Arten von Wendelflächen lassen sich dadurch erzeugen, dafs man die erzeugende (gerade oder krumme) Linie, die Generatrix, zwar einerseits stets durch den Punkt H, andrerseits aber, statt durch 0, durch irgend einen in der Ebene der Ringlinie gelegenen, jedoch an ihrer translatorischen Bewegung theilnehmenden Punkt G der Conductrix gehen läfst. Die Schraubenflächen scharfgängiger Schrauben, vieler bohrerartiger Werkzeuge, die Oberflächen an gewundenen Thier- und Pflanzenkörpern, wie einschaliger Conchylien und spiralig gerollter Blumen oder Blätter und Blattscheiden [1] sind hierher gehörige Beispiele.

Vielfache derselben Conductrix angehörige Helikoïdalflächen, welche ebenfalls paradrom und isotrop oder diadrom mit gleichem oder entgegengesetztem Windungstypus sein können, werden ganz nach Analogie der entsprechenden Wendellinien construirt.

Verschiedene auf der Generatrix $0H$ oder GH liegende Punkte beschreiben gleichzeitig mit H isotrope Wendellinien, welche auf einerlei Wendelfläche neben einander verlaufen und deren Windungen unter sich paradrom sind.

---

[1] Einen zierlichen Fall bieten die dexiotrop gewundenen Aestchen der *Casuarina stricta*, welche A. Braun in seiner oben erwähnten Schrift auf Taf. 34. Fig. 5 bis 7 abgebildet hat.

In einem Faden oder Stricke, der aus vielen ursprünglich nebeneinander gestreckten Fasern oder Fäden durch gleichzeitige oder gemeinschaftliche Torsion entstanden ist, stellen die Bestandtheile eine Vielheit von paradromen Wendellinien dar, welche als verschiedenen paradromen Wendelflächen gruppenweise angehörig betrachtet werden können. Der einfachste hierher gehörige Fall, wo der Faden zweidrähtig ist, gibt demnächst einen wichtigen Anknüpfungspunkt für neue topologische Untersuchungen.

Es ist noch auf die Mannigfaltigkeit helikoïdaler Linien und Flächen hinzudeuten, welche aus der Verschiedenheit in den Gestalten der Conductrix erwächst. Ohne auf allgemeine und möglicherweise sehr verwickelte Fälle einzugehen, welche ohne voraufgegangene Erörterung des Begriffs der Linear- und Flächencomplexionen nicht methodisch würden überblickt werden können, mögen hier nur die beiden näherliegenden einfachen Formen, welche man der Leitlinie geben kann, hervorgehoben werden, nämlich die Wendellinie und die Ringlinie. Ist h eine Helikoïde und g ihre Conductrix, welche — wie bisher stillschweigend vorausgesetzt worden — nicht selbst helikoïdal ist oder wenigstens nicht als derartig betrachtet wird, so ist die Wendellinie h eine gewöhnliche oder Helikoïde der ersten Ordnung. Ist sodann k eine neue Wendellinie, deren Conductrix h ist, so hat das Askoïd, auf dessen Oberfläche k liegt, eine helikoïdale Form, und k ist eine Helikoïde zweiter Ordnung. Dient k wiederum als Leitlinie für eine Wendellinie l, so ist l eine Helikoïde dritter Ordnung, während das zugehörige Askoïd eine helikoïdale Form zweiter Ordnung besitzt. U. s. w.

Die Uebertragbarkeit dieser Begriffe auf Helikoidalflächen bedarf keines weiteren Nachweises.

Ist ferner die Conductrix g eine Ringlinie, so kann das zugehörige Askoïd (von welchem übrigens vorausgesetzt wird, dafs es den ganzen Umfang der ringförmigen Conductrix umschliefse) in sich geschlossen sein, so dafs es einen ringförmigen Canalraum allenthalben gegen den äufsern Raum abgrenzt, oder nicht. Im letzteren Falle können Durchschneidungen der mannigfaltigsten Art eintreten, oder aber ein successives (röhrenartiges) Ineinanderstecken beliebig vieler Askoïdwindungen ohne Durchschnittscurven stattfinden. Auf diesen verschiedenartigen ringförmigen Askoïden lassen sich einfache oder zusammengesetzte Helikoïden ziehen. Ist das Askoïd ganz geschlossen, so kann eine auf ihm gezogene Helikoïde ganz in sich zurücklaufen und somit Wendel- und Ringlinie zugleich sein, und diefs kann sowohl in einmaligem als in beliebig vielmaligem Umgang längs des ganzen Ringaskoïds der Fall sein. Bei n maligem Umgang erscheint jeder Theil des Askoïds als mit einer n fachen Wendellinie von isotropen Bestandtheilen bekleidet. Die Helikoïde kann anderenfalls ungeschlossen sein und bei genugsamer Verlängerung jeden Theil des Askoïds mit unzählig vielfacher Wendellinie umkleiden. Statt Einer können beliebig viele geschlossene oder ungeschlossene, isotrope oder heterotrope Helikoïden mit paradromen oder diadromen Windungen auf dem Ringaskoïd construirt werden. Ganz ähnliche Constructionen finden bei dem ungeschlossenen cyklischen Askoïd ihre Anwendung, nur mit dem Unterschiede, dafs geschlossene Helikoïden blofs im Falle vorhandener Durchschnittscurven möglich sind.

Es können endlich Helikoïden höherer Ordnungen, wenn deren Hauptconductrix eine Ringlinie ist, zugleich cyklisch sein. Es wäre überflüssig in diesem Falle wiederum auf die Mannigfaltigkeiten einzugehen, die sich hierbei darbieten können und welche im Wesentlichsten bereits bei den vorigen beiden Fällen angedeutet worden sind, aus denen der gegenwärtige zusammengesetzt ist.

Helikoïdale Flächen lassen sich leicht für alle diese verschiedenen Arten von Wendellinien substituiren oder mit ihnen combiniren.

Die Anführung einiger Beispiele wird die Vorstellungen über das Gesagte fixiren helfen, auch ohne Zuhülfenahme zahlreicher und in den Einzelnheiten ausführlicher Abbildungen. Stricke, Seile und Taue, die aus vielen einzelnen Fäden und Litzen durch successives Zusammendrehen gefertigt sind, geben ein bekanntes Beispiel von Helikoïden verschiedener Ordnung, wo (der technischen Regel nach) die Typen der aufeinanderfolgenden Ordnungen entgegengesetzt zu sein pflegen. Ein Schiffstau bestehe aus drei Seillitzen, welche dexiotrop zusammengedreht sind, so geben diese nächsten Bestandtheile das Bild einer dreifachen dexiotropen Wendellinie erster Ordnung mit paradromen Windungen. Jede Seillitze bestehe aus vier dünneren Litzen, dann bilden die letzteren drei laeotrope vierfache Wendellinien zweiter Ordnung. Besteht ferner jede Litze aus zwei Fäden und jeder Faden aus unbestimmt vielen Hanffasern, so sind die Fäden nach dexiotropen doppelten Helikoïden dritter Ordnung, die Fasern nach laeotropen vielfachen vierter Ordnung gewunden. Wird nun das Tau, wie auf Schiffen geschieht, in Wendellinienform aufgelagert, so steigt die Ordnung aller eben genannten Helikoïden um 1, und die Hanffasern z. B. stellen laeotrope vielfache Wendellinien fünfter Ordnung mit paradromen Windungen dar. An vielen Posamentirerzeugnissen, wie gedrehten Schnüren und Gimpen, liefsen sich ähnliche, zum Theil noch complicirtere Beispiele auffinden. Es darf bei dieser Gelegenheit auf solche, in gewisser Hinsicht paradoxe Fälle aufmerksam gemacht werden, wo durch successive, zumal entgegengesetzte, Torsionen — gleichsam durch Torsions-Interferenz — die Wendellinien höherer Ordnungen für den ersten Anblick ihren Character als doppelt gekrümmte oder gar als krumme Linien überhaupt streckenweise ganz einbüfsen und dabei die Gestalt wellenförmiger (trochoïdischer) Curven oder selbst gerader Linien annehmen. Wiewohl ein Seil in solchen Fällen äufserlich einer geflochtenen Litze sehr ähnlich werden kann, so bleibt es doch in der That von dem Flechtwerk noch wesentlich verschieden, worauf künftige Betrachtungen über die Geflechte werden näher einzugehen haben. Das Paradoxon ist hier, insofern quantitative Bestimmungen in der Topologie unwesentlich sind, als eine Zufälligkeit zu betrachten, und findet gewissermafsen sein geometrisches Seitenstück in dem bekannten Vorkommnifs, wo die Hypocykloïde eine gerade Linie wird, sobald der beschreibende Punkt auf dem Umfang eines erzeugenden Kreises liegt, der halb so grofs ist, als der Grundkreis, an dessen Innenwand er sich abwälzt. Die Erwähnung dieser Art von Vorkommnissen hätte also füglich unterbleiben mögen, wäre sie nicht besonders geeignet, inductorisch die Berechtigung zu begründen, auch in anderen Fällen solche Linien oder Zugtheile, welche auf den ersten Blick nichts weniger als helikoïdal zu sein scheinen, nach Bedürfnifs und Belieben als Wendellinien oder Theile von Helikoïden zu betrachten, oder gar unter Beimessung einer höhern Ordnung ihren Windungstypus in den hetero tropen umzusetzen. Ein Beispiel wird diefs deutlich machen. Ein geradliniger Stab werde dexiotrop mit einem Faden umwickelt. Dann kann zwar — und das ist die Ansicht, die sich am natürlichsten darbietet, — der Stab als Bild der Conductrix der vom Faden dargestellten dexiotropen Helikoïde betrachtet werden. Man kann aber auch den Faden als (helikoïdale) Conductrix und die vom Stabe versinnlichte gerade Linie als dexiotrope Wendellinie (zweiter Ordnung) ansehen, oder aber Stab und Faden zusammen als doppelte Helikoïde (zweiter Ordnung) gelten lassen, deren Conductrix eine im Stabe zwischen seiner Axe und dem Faden gedachte dexiotrope Wendellinie ist, deren Windungen mit dem Faden paradrom sind. Ertheilen wir dem (zu diesem Ende als hinreichend biegsam vorausgesetzten) Stabe eine laeotrope Windung, so stellt zwar am einfachsten der Faden eine dexiotrope Helikoïde zweiter Ordnung dar, deren Conductrix in der Axe des Stabes liegend laeotrop helikoïdal ist, es kann aber nichtsdestoweniger auch der Stab oder dessen Axe als dexiotrope Helikoïde dritter Ordnung angesehen werden, deren Conductrix eine dexiotrope vom Faden gebildete Wendellinie zweiter Ordnung ist; oder es können wiederum Stabaxe und Faden zusammen als doppelte dexiotrope Helikoïde dritter Ordnung gelten, zu der die vorhin im Stabe gedachte, dem Faden paradrome Wendellinie die dexiotrope, in zweiter Ordnung helikoïdale Conductrix bildet. —

Für die beiden anderen der drei oben besprochenen Fälle, nämlich der Helikoïden mit ringförmiger und mit helikoïdal-ringförmiger Conductrix würden sich ebenso leicht mittelst biegsamer fadenförmiger Körper (Litzen oder Drähte) versinnlichende Beispiele in Ausführung bringen lassen. Fassen wir unter den verschiedenen hierher gehörigen und oben angedeuteten Specialitäten diejenige besonders ins Auge, welche für künftige Anknüpfungen an andere Betrachtungen bei den Linearcomplexionen im Raume ein eigenthümliches Interesse in Anspruch nehmen wird, nämlich die mehrfachen isotropen geschlossenen Wendellinien, und bleiben hier, wo es sich zunächst nur um Beispiele handelt, bei dem Einfacheren stehen. Zwei, wenn man will gleich lange, Fäden lege man parallel (homodrom) gestreckt nebeneinander. Die Endpunkte des einen Fadens bezeichnen wir mit 1 und $\bar{1}$, die des andern mit 2 und $\bar{2}$ so, dafs 1 und 2 einer- sowie $\bar{1}$ und $\bar{2}$ andrerseits einander zunächst liegen. Torquirt man nun die beiden Fäden dadurch, dafs, während die Linie 1 2 unbeweglich bleibt, die Linie $\bar{1}\,\bar{2}$ um eine der anfänglichen Längsrichtung der Fäden parallele Axe beliebig vielmal gedreht wird, so werden je nach dem Sinn dieser Drehung beide Fäden eine dexiotrope oder laeotrope doppelte Wendellinie bilden, deren Conductrix in der Richtung der erwähnten Torsionsaxe verläuft. Der so entstandene Doppelfaden läfst sich nun durch Vereinigung seiner beiden Enden, so dafs die Enden 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$ beliebig paarweise verknüpft werden, zu einer doppelten in sich zurücklaufenden Wendellinie umgestalten. Hinsichtlich der Endpunktsverbindung oder des Schlusses sind in unserem Beispiel nur zwei Fälle möglich, nämlich

$$\text{erster Schlufs:}\quad \begin{matrix}(1\ \bar{1})\\(2\ \bar{2})\end{matrix}$$

$$\text{zweiter Schlufs:}\quad \begin{matrix}(1\ \bar{2})\\(2\ \bar{1})\end{matrix}$$

Im ersten Fall ist jeder von beiden Fäden für sich ringartig geschlossen, im zweiten bilden beide vereint eine geschlossene Linie. Der erste Fall tritt ein, wenn die Drehung eine beliebige Anzahl ganzer Touren, also eine gerade Zahl halber Touren beträgt, der zweite, wenn die Zahl halber Touren ungerade ist. Der erste Fall gibt, insofern hierher auch die Torsion 0 gerechnet werden kann, zur Entstehung zweier getrennten oder zweier ein- oder mehrwendlig verketteten Ringe Veranlassung, der zweite führt auf einen einfachen oder einen ein- oder mehrwendlig geknoteten Ring, worüber die Betrachtungen der Knoten weiteres Licht verbreiten werden.

Hätte man statt zweier drei Fäden genommen, so könnte man, nach beliebig vielmaliger dexiotroper oder laeotroper Torsion, mittelst Zusammenschliefsens der Enden 1, 2, 3 mit den Enden $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ in beliebiger Combination zu zwei eine ringgestaltige geschlossene dreifache Wendellinie herstellen. Die nunmehr möglichen sechs Schlüsse

$$\begin{matrix}(1\ \bar{1}) & (1\ \bar{1}) & (1\ \bar{3}) & (1\ \bar{2}) & (1\ \bar{2}) & (1\ \bar{3})\\(2\ \bar{2}) & (2\ \bar{3}) & (2\ \bar{2}) & (2\ \bar{1}) & (2\ \bar{3}) & (2\ \bar{1})\\(3\ \bar{3}) & (3\ \bar{2}) & (3\ \bar{1}) & (3\ \bar{3}) & (3\ \bar{1}) & (3\ \bar{2})\end{matrix}$$

geben (abgesehen von der Torsions- oder Wendlingszahl) drei wesentlich verschiedene Fälle. Erstens: beim ersten Schlufs entstehen drei getrennte oder verkettete Ringe.

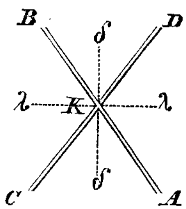
Zweitens: beim zweiten, dritten und vierten Schlufs entstehen zwei Ringe (einer aus einem, der andere aus den beiden übrigen Fäden bestehend), die getrennt oder verkettet, einfach oder verknotet sein können. Drittens: durch den fünften und sechsten Schlufs entsteht ein einziger, einfacher oder verknoteter Ring.

Diese Beispiele enthalten in der That belangreiche Ausgangspunkte für die Untersuchungen in dem Abschnitte der Topologie, der von den Linearcomplexionen im Raume und insbesondere von der Verknotung, der Verkettung und dem Flechtwerk zu handeln hat. Die Weiterführung und Verallgemeinerung mufs ganz den genannten Untersuchungen vorbehalten bleiben. Indefs verdient hier noch, was unmittelbarer mit der Natur der Helikoïde in Zusammenhang steht, hervorgehoben zu werden, dafs unter übrigens gleichen Umständen in allen bisher erörterten Fällen von irgend wie zusammengesetzten Wendellinien eben so wie bei der einfachen Helikoïde durch heterotropen Windungstypus oder durch entgegengesetzte Torsion Lineargebilde erwachsen, welche gegenseitig im Verhältnifs der Perversion stehen und somit figurell und nicht blofs situell verschieden sind. Die Benennungen „dexiotrop“ und „laeotrop“ werden künftig auch zu einer concinnen Unterscheidung in dieser Rücksicht benutzt werden dürfen.

Endlich soll die Idee der Wendellinie noch auf einen bereits oben (S. 853) angedeuteten Elementarfall Anwendung finden, der durchgehends bei den Linearcomplexionen im Raume, so wie theilweise auch bei den Flächencomplexionen eine wesentliche Rolle spielt. Die topologische Untersuchung irgendwie beschaffener Gebilde im Raum wird nämlich ins Künftige meist an ihre Projectionen auf eine Fläche — Ebene oder Kugelfläche — angeknüpft werden müssen, wobei die Projectivlinien oder Strahlen, allgemein zu reden, als homocentrisch, d. i. als parallel oder, bei genugsamer Verlängerung, durch einen gemeinschaftlichen Punkt, das

Auge des Beobachters, gehend angenommen werden. Bei solchen Abbildungen in zwei Dimensionen ist nun für topologische Zwecke eine Unterscheidung der relativen Lage von Körper- Flächen- oder Linientheilen, welche gemeinschaftliche Bildpunkte darbieten, erforderlich, und zwar in der Weise, dafs man einander deckende Objecte im Bilde als solche erkenne, und aus ihm, ohne andere Projectionen zu Hülfe nehmen zu müssen, ihre relative Lage und Entfernung gegen das Auge des Beschauers entnehme. Dieser Zweck, für welchen bei der Darstellung von Körpern und Flächen die gewöhnlichen Regeln des Zeichnens hinreichende Mittel darbieten, wird sich gleicherweise bei darzustellenden Linien im Raume erreichen lassen, wenn man sich erlaubt, dieselben als lineare Körper (Stäbe, Drähte, Fäden u. dgl.) darzustellen.

Fig. 5.



In Fig. 5 erscheinen die beiden Linien oder Fäden AB und CD bei K kreuzweise übereinander gelegt, wie Aufzug- und Einschlagfaden eines Gewebes, AB dem (darüber befindlichen) Auge des Beschauers näher, CD entfernter liegend. Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs die Entfernung, um welche die in der Projection bei K coïncidirenden Punkte der beiden Linien im Raume von einander abstehen, ihrer Gröfse nach nicht in Betracht kommt. Eine Kreuzung dieser Art, wobei sich nach angegebener Weise in der Projection oder Zeichnung der überliegende von dem untenliegenden Faden durch den blofsen Anblick leicht unterscheiden läfst, nennen wir eine Ueberkreuzung im Gegensatz zur Durchkreuzung, wo ein wirklicher Durchschnittspunkt im Raume stattfindet, und die eben gedachte Entfernung beider Fäden bei K entweder Null ist, oder wenigstens als verschwindend betrachtet wird. Zwei Wege können demnach, wie beim gewöhnlichen Kreuzwege, einander durchkreuzen, oder aber, wie diefs in manchen Städten [1]) und bei vielen Kreuzungen zwischen Eisenbahnen und anderen Fahrstrafsen der Fall ist, einander überkreuzen. Wo keine Verwechselung eintreten kann, wird man sich übrigens im einen, wie im andern Fall des Ausdrucks „Kreuzung" bedienen können. Den in der Projection aus einer Ueberkreuzung entstehenden Durchschnittspunkt selbst nennen wir Knotenpunkt oder Nodalpunkt.

Betrachten wir nunmehr zwei einander überkreuzende Linien AB und CD als einer doppelten Helikoïde angehörig, deren Conductrix bei K zwischen beiden Linien hindurch geht, so können diese Linien bei der durch die Figur versinnlichten Ueberkreuzung, wo AB über CD liegt, entweder als dexiotrop oder als laeotrop helikoïdal angesehen werden, je nachdem sich die Conductrix durch die Winkelräume AKC und BKD oder durch die Winkelräume AKD und BKC erstreckt. Wir übertragen demgemäfs die Benennungen dexiotrop und laeotrop auf die Kreuzung selbst, indem wir sie in Bezug auf eine der beiden diagonalen, gegeneinander queren; Leitlinien betrachten. Bei künftigen Untersuchungen über manchfach untereinander verschlungenen und verflochtenen Fäden, Bändern oder sonstwie gestalteten Körpern wird es zweckmäfsig erscheinen, in den Projectionen die vier Winkelräume, welche jede Ueberkreuzung darbietet, mit den Symbolen δ und λ, wie die Figur zeigt, zu signiren, so dafs nach einer durch die Räume δ, δ verlaufenden Conductrix die Kreuzung dexiotrop, nach einer

[1]) In einem „Wege, auf welchem ein Wagen über den andern fahren kann", besteht das sogen. Wahrzeichen von Homburg vor der Höhe.

dazu queren in den Räumen λ, λ laeotrop ist. Es verdient bemerkt zu werden, dafs diese Signirung gleicherweise für die Kehrseite der Ueberkreuzung, wo *CD* bei *K* dem Auge näher steht als *AB*, wie für die vorgegebene Hauptseite gültig ist, da nur Perversionen, aber keine Inversionen einen Einflufs auf den Windungstypus haben.

Einige Beispiele von Linearcomplexionen mit Ueberkreuzungen werden den Gebrauch dieser Bezeichnungsweise geläufig machen.

Fig. 6.

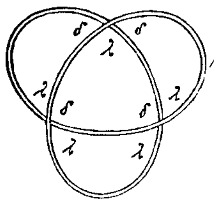


Fig. 7.

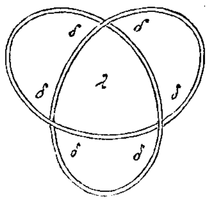
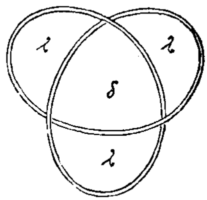


Fig. 8.



Die Complexionen Fig. 6, 7 und 8 sind in der Projection, d. h. die Kreuzungen als Durchkreuzungen gedacht, einander topologisch gleich. Jede zeigt eine in sich geschlossene Linie mit drei Kreuzungen, drei zweiwinkligen Parzellen oder Oesen und einer dreiwinkligen Parzelle oder Masche. Die Verschiedenheit liegt blofs in der Natur der Ueberkreuzungen und diefs stellt sich durch die Typuszeichen in der Art vor Augen, dafs eine algorithmische Discussion, wie sie ihres Ortes geführt werden mufs, leicht daran angeknüpft werden kann, um dadurch mancherlei Fragen über die unter gewissen Bedingungen möglichen oder unmöglichen Transformationen zur Erledigung zu bringen. Die Complexion in Fig. 6 kann auf einen einfachen unverknoteten Ring zurückgeführt werden, wo also die drei Kreuzungen verschwinden. In Fig. 7 und 8 läfst sich durch Transformation die Zahl der Kreuzungen nicht verringern, obwohl, wie in allen Fällen, vergröfsern. Fig. 6 ist eine reducibele Form, Fig. 7

und 8 sind reducirte Formen. In genauem Zusammenhang hiermit steht, dafs in beiden letztern alle Parzellen monotyp, in der ersten nur eine (die untere Oese) monotyp, die übrigen amphityp erscheinen. Der äufsere Raum, der bei diesen Betrachtungen als selbständige Parzelle (Amplexum) angesehen werden mufs, ist in Fig. 6 amphityp, in Fig. 7 und 8 monotyp, in allen drei Complexionen dreiwinklig. In Fig. 7 kommt ihm der Name λ, in Fig. 8 der Name δ zu. Fig. 7 kann nicht in Fig. 8 transformirt werden, oder umgekehrt, beide stehen zu einander im Verhältnifs der Perversion. Jede von ihnen aber kann ohne Aenderung der Kreuzungszahl so transformirt werden, dafs der Name des äufseren Raums wechselt, bei Fig. 7 also in Delta, bei Fig. 8 in Lambda übergeht. Dabei würden aber z. B. in Fig. 8 statt dreier Lambda-Oesen und einer Delta-Masche mit drei Winkeln, zwei λ-Oesen und zwei dreiwinklige δ-Maschen auftreten, und die (amplexe) dreiwinklige δ-Masche des äufsern Raumes würde durch eine amplexe λ-Oese ersetzt worden sein, was indefs bei diesem Beispiel nicht weiter durch Zeichnungen verfolgt werden soll. Bezeichnen wir bei reducirten Formen mit monotypen Parzellen jede Parzelle durch ihr Typuszeichen, ein angefügter Index oder Exponent gebe die Eckzahl der Parzelle an, Coëfficientzahlen fassen die isotypen Parzellen von gleichem Index zusammen, dann stellt sich z. B. für Fig. 7 das Complexions-Symbol für alle reducirten Formen so

$$\begin{matrix} 3\,\delta^2 \\ 2\,\lambda^3 \end{matrix}$$

Für Fig. 8 würde dieses Symbol (nach Vertauschung von δ und λ) heifsen

$$\begin{matrix} 2\,\delta^3 \\ 3\,\lambda^2 \end{matrix}$$

Der Exponent 1 (d. h. blofs δ oder λ) würde eine Schlinge bedeuten, die in reducirten Formen nicht vorkommt. Der Exponent 2 zeigt Oesen an, höhere Exponenten bedeuten Maschen mit drei oder mehr Winkeln. Die Summe aller Coëfficienten gibt die Zahl aller Parzellen, das Amplexum mitgerechnet, und ist um 2 gröfser als die Zahl der Kreuzungen. Die Summe der Producte aus Coëfficienten und zugehörigen Exponenten gibt in jedem der beiden Theile des Symbols das Doppelte der Kreuzungszahl. — Solche Symbole enthalten die topologischen Charactere der sogenannten Verknotung. Fig. 7 und 8 kommen übrigens mit dem bereits oben erwähnten einfach verknoteten Ring überein, den man durch drei halbe Torsionen und den Ringschlufs zweier anfänglich paradromen Fäden erhält. Bei Fig. 7 ist der Torsionstypus dexiotrop, bei Fig. 8 laeotrop.

Es mögen noch einige andere Beispiele folgen. Von den drei in Fig. 9, 10, 11 dargestellten, an Kreuzungszahl und Parzellenform gleichen Complexionen sind die ersten beiden reducibel, die dritte reducirt.

Fig. 9.

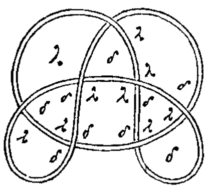


Fig. 10.

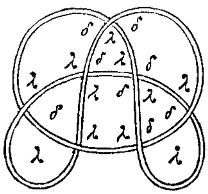
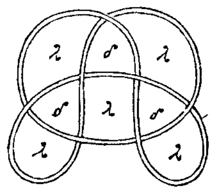


Fig. 11.



Die Reduction von Fig. 9 würde nur drei, die von Fig. 10 fünf Kreuzungen herausstellen. Fig. 8 stellt die Reduction von Fig. 9 dar.

Fig. 12.

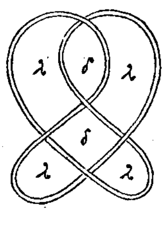
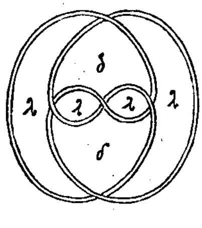


Fig. 13.



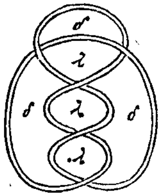


Fig. 14.

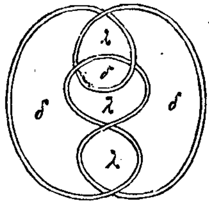


Fig. 15.

Fig. **12**, **13**, **14**, **15** sind aequivalente reducirte Formen mit fünf Kreuzungen, in welche sich Fig. **10** durch Reduction verwandeln läfst. Ihr Complexions-Symbol ist

$$\begin{matrix} 2\,\delta^4 + \delta^2 \\ 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2 \end{matrix}$$

Das Amplexum hat der Reihe nach die Symbole δ^4, δ^2, λ^3, λ^2. Diese vier Formen erschöpfen die Zahl möglicher Reductionen im vorliegenden Falle und entsprechen hier den vier Gliedern des Symbols. Die Entwickelung des Zusammenhangs der Anzahl verschiedener möglicher, einem Symbol entsprechender, reducirter Formen mit der Gliederzahl, den Coëfficienten und Exponenten des Symbols bildet den Gegenstand besonderer Untersuchungen in der Complexionslehre. Dem Symbol

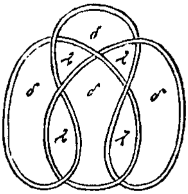
$$\begin{matrix} 2\,\delta^4 + 3\,\delta^2 \\ 2\,\lambda^5 + 2\,\lambda^2 \end{matrix}$$

entsprechen fünf verschiedene reducirte Formen mit sieben Kreuzungen, in welchem das Amplexum zweimal das Zeichen δ^2 und die Zeichen δ^4, λ^5, λ^2 je einmal annehmen würde. Das Symbol der reducirten, mit sieben Kreuzungen versehenen Form in Fig. 11 ist

$$\begin{matrix} \delta^5 + 3\,\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2 \end{matrix}$$

Ihr entsprechen aufser Fig. 11, wo das Amplexum δ^5 heifst, noch fünf andere Formen, von welchen Fig. 16 eine, mit dem Amplexum λ^4, darstellt.

Fig. 16.

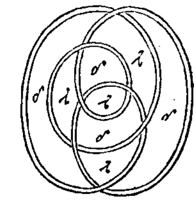


In gewissen Fällen ist ein Symbol mit einem andern aequivalent, so dafs sich die reducirten Formen des einen in die des andern durch Transformation überführen lassen. Ein Beispiel einer solchen Aequivalenz ist:

$$\left\{\begin{matrix}\delta^5 + 3\,\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\,\delta^4 + 2\,\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2\end{matrix}\right\}$$

Während dem ersten dieser beiden aequivalenten Symbole sechs reducirte Formen angehören, entsprechen dem zweiten fünf andere, so dafs sämmtliche elf reducirte Formen (mit sieben Ueberkreuzungen) untereinander aequivalent sind. Eine der dem zweiten Symbol angehörigen fünf Formen stellt Fig. 17 dar, mit dem Amplexum λ^2.

Fig. 17.



Diese nur auf eine einzige geschlossene Linie im Raum bezüglichen Beispiele, mit einigen gelegentlich hinzugefügten Andeutungen mögen dienen, auf den Zusammenhang aufmerksam zu machen, in welchen bei der topologischen Betrachtung über die Raum-Complexionen die an der Wendellinie entwickelten Grundbegriffe mit den verwickeltsten modalen Raumverhältnissen zu treten geeignet sind.

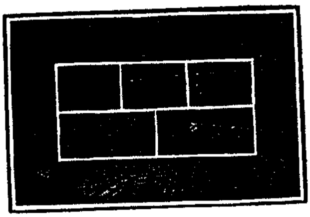
Zum Schlusse dieser ersten Vorstudien sollen noch einige andere Gebiete der Topologie in ihren elementären Anfängen näher bezeichnet werden, deren weiterer Verfolg einer künftigen Gelegenheit vorbehalten bleiben mufs.

Linearcomplexionen, d. h. beliebige gerade oder krumme Linien oder Aggregate solcher Linien, können in Einer Fläche — Ebene oder Kugelfläche — enthalten sein, oder aber den Raum in jedweder Richtung durchsetzen. Sie können in beiden Fällen eine beliebige Anzahl von Durchschnitts- oder Vereinigunspunkten, sowie im zweiten Falle durch Projection auf eine Ebene oder Kugelfläche aufser diesen Vereinigungspunkten noch beliebig viel Ueberkreuzungen darbieten.

Bei den Linearcomplexionen in der Fläche, wo also nur Durchschnitts- oder Vereinigungspunkte vorkommen, kann jeder dem Liniencomplex angehörige Punkt als ein Ort angesehen werden, von welchem aus eine bestimmte Zahl von Wegen nach andern Punkten des Complexes offen steht. An einer zwischen zwei Punkten A und B gezogenen geraden Linie z. B. kann jeder der beiden Endpunkte A und B als nur auf Einem Wege zugänglich, jeder Binnenpunkt C der Linie aber als auf zwei Wegen zugänglich angesehen werden. Wäre nun bedungen, keinen Weg öfter als einmal zu betreten, so dürften A und B nur wiederum die Grenzen eines continuirlichen einfachen Zuges sein, während man zum Punkte C auf dem einen Wege hingelangen und ihn auf dem andern wieder verlassen könnte. Es ist klar, dafs man jeden Punkt, an welchem n Wege ihre Vereinigung finden, jenachdem n gerade oder ungerade ist, entweder als den Durchschnittspunkt von $\frac{n}{2}$ Linien oder als den Ort ansehen kann, an welchem sich der Durchschnittspunkt von $\frac{n-1}{2}$ Linien mit dem Endpunkt einer Linie vereinigt. Hieraus folgt, dafs eine ganze Linearcomplexion als das Aggregat von einer bestimmten Anzahl continuirlicher Züge betrachtet werden kann, deren jeder zwei Grenz- oder Endpunkte besitzt, welche an unpaarzahligen Vereinigungspunkten liegen. Es müssen also in jeder Linearcomplexion (und mithin auch in jeder Summe von untereinander nicht zusammenhängenden Complexionen) eine gerade Anzahl unpaarzahliger Vereinigungspunkte vorkommen, während die Zahl der paarzahligen Vereinigungspunkte, zu denen jeder Binnenpunkt auf einer Linie gezählt werden darf, unendlich grofs ist. Mit Hülfe dieses Satzes ist es leicht, für jede vorgegebene, wenn auch noch so verwickelte Complexion die geringstmögliche Zahl von continuirlichen Zügen anzugeben, in welchen sie sich so beschreiben läfst, dafs kein Theil mehr als einmal durchlaufen wird. Um diese kleinstmögliche Zahl von Zügen zu bestimmen, hat man demnach die unpaarzahligen Punkte der Complexion zu zählen. Ihre Zahl, die immer gerade sein mufs, sei p, so ist $\frac{p}{2}$ die kleinste Zahl von Zügen, in welchen die Configuration beschrieben werden kann. Zur wirklichen Effectuirung, sowie zur Ermittelung der Anzahl aller möglichen verschiedenen Vollführungsarten würden freilich noch umständlichere Untersuchungen, als hier Platz finden können, erforderlich werden. Nicht unerwähnt soll jedoch bleiben, dafs falls $p = 0$ ist, die gesuchte Zugzahl nicht $= 0$, sondern $= 1$ zu setzen ist, und dafs diese Bestimmungen bei einer vorgegebenen Mehrheit von einander getrennter Complexionen für jede derselben einzeln genommen ihre Anwendung finden, so dafs also z. B. zur Beschreibung von m untereinander nichtsammenhängenden Complexionen, in welchen gar kein unpaarzahliger Punkt vorkommt, wie z. B. von m theils aufser einander, theils concentrisch in einander liegenden, unter sich nicht zusammenhängenden Ringlinien, ebensowohl m Züge erforderlich sind, als zur Beschreibung einer Complexion, welche $2m$ unpaarzahlige Vereinigungspunkte besitzt, oder m solcher von einander getrennter Complexe, deren jeder zwei dergleichen Punkte enthält. Und ferner, dafs ein Gelingen des wirklichen Versuchs in Fällen, wo p nicht $= 0$, an die Bedingung geknüpft ist, dafs Anfang und Ende jedes Zuges nur auf unpaarzahlige Punkte fallen.

In Fig. 18 kommen acht unpaarzahlige Punkte (jeder zu drei Wegen) vor, mithin läfst sich diese Figur, ohne einige Theile zwei oder mehrmals zu ziehen, nicht in weniger als vier continuirlichen Zügen beschreiben [1].

Fig. 18.



Ein mit einem Kreis umschriebenes, mit beiden Diagonalen versehenes Quadrat würde wenigstens zwei, das Gitter eines Schachbretts (von 64 Feldern) wenigstens 14 Züge erfordern. Sollten auf dem Schachbrett alle schwarzen Felder je mit einer Diagonale in übereinstimmenden Richtungen versehen erscheinen, so würde sich die Darstellung entweder in 9 oder in 6 continuirlichen Zügen leisten lassen, je nachdem die Diagonalen der schwarzen Eckfelder in Einer geraden Linie liegen oder nicht; und vollends liefse sich die Figur in einem einzigen Zuge ausführen, falls solche untereinander gleichgerichtete Diagonalen in sämmtlichen Feldern gefordert würden.

---

[1]) Diefs ist der S. 813 erwähnte, von Clausen in A. N. Nr. 494 angeführte Satz.

Fig. 19.

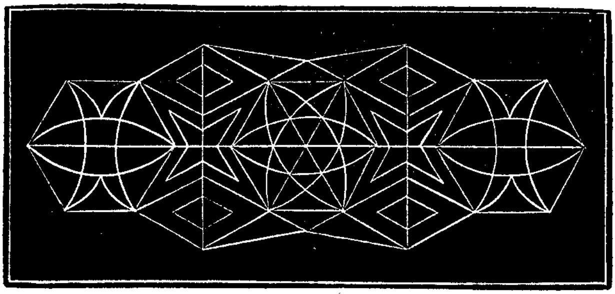


Fig. 19 läfst sich gleichfalls in Einem Zuge beschreiben, da nur zwei unpaarzahlige Punkte, die beiden quinären an den Enden des horizontalen Längsdurchmessers, darin vorkommen.

Der vorhin erwähnte, die Zahl p betreffende Satz, auf einen geodätischen Fall angewandt, läfst sich so aussprechen: in jeder beliebig grofsen Dreieckskette gibt es solcher Punkte, um welche eine ungerade Zahl von Winkeln im Horizont liegt (die zusammen 360° ausmachen), immer nur eine gerade Anzahl, während die Zahl derjenigen Dreieckspunkte, um welche eine gerade Zahl von Winkeln liegt, ebensowohl ungerade als gerade sein kann.

Diese Betrachtungen finden in ihrer ganzen Ausdehnung auch bei den Linearcomplexionen im Raume ihre Anwendung. Die in den Projectionen hervortretenden Ueberkreuzungen sind natürlich von den Durchkreuzungen oder Vereinigungspunkten wohl zu unterscheiden.

Bei solchen Linearcomplexionen in einer Fläche, welche keine unpaarzahligen Punkte besitzen und mithin als geschlossene und in sich zurückkehrende Züge oder als Aggregate solcher Züge anzusehen sind, veranlafst die Frage nach den von der Complexion abgegrenzten Flächenstücken (Parzellen) eine eigenthümliche Discussion. Die Darstellung der Complexe auf einer allenthalben geschlossenen sphäroidischen Fläche, einer Constructions- oder Himmelskugel, hat rücksichtlich der Einfachheit und Eleganz der Sätze Vorzüge vor der Darstellung auf einer ungeschlossenen Fläche oder Ebene, welche für diese Fragen jederzeit als ein blofses Fragment einer vollständigen Kugelfläche (wenn auch von überaus grofsen Dimensionen) angesehen werden darf, und zu welcher man von der geschlossenen und vollständigen Fläche in der Regel leicht durch eine Art Developpirung übergehen kann. Denkt man sich also auf einer Kugelfläche z. B. eine einfache Ringlinie, so scheidet diese die gesammte Fläche in zwei Theile *A* und *B*, von welchen jeder ganz auf einerlei Seite der Trennungslinie liegt. Man darf hierbei ebensowohl *A* die innere, eingeschlossene und *B* die äufsere, ausgeschlossene Fläche nennen, als umgekehrt. Diese Alternative wiederholt sich bei zusammengesetzten geschlossenen Complicationen so oft, aus so viel geschlossenen einfachen Zügen der Complex als zusammengesetzt angesehen wird. Bei einmal getroffener Entscheidung aber über Aus- und Einschlufs, welche Modalitäten sich am einfachsten durch die Ordnungszahlen 0 und 1 bezeichnen lassen, stellt sich die Geltung jedes abgegrenzten Flächenstücks in einer Ordnungszahl von selbst fest. Eine geschlossene Linie mit einer Durchkreuzung (in Gestalt der Ziffer 8) scheidet die Gesammtfläche in drei Theile. Setzt man 0 in den die beiden Schlingen umgebenden Raum [1]), 1 in die eine Schlinge, so stellt sich $\bar{1}$ als Rang für den Binnenraum der andern Schlinge heraus. Vertauscht man 0 und 1, so tritt 2 an die Stelle von $\bar{1}$. U. s. w. Für die vier Rangziffern a, b, c, d in den Winkelräumen jeder Durchkreuzung, von denen a und b, b und c, c und d, d und a Nebenwinkeln, also a und c, b und d Scheitelwinkeln zugehören, ergibt sich die Regel:

---

[1]) Dieser Raumtheil der Kugelfläche ist zweieckig, also nach der bereits oben gebrauchten Terminologie eine „Oese“.

entweder

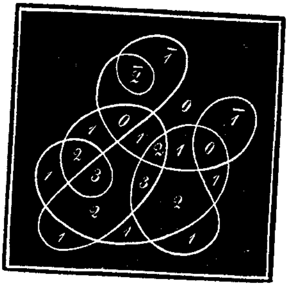
$$a - c = \pm 2,\quad b - d = 0,\quad a + c - b - d = 0$$

oder

$$a - c = 0,\quad b - d = \pm 2,\quad a + c - b - d = 0,$$

wonach sich sämmtliche Parzellen einer gegebenen Complexion leicht beziffern lassen.

Fig. 20.



Die in Fig. 20 dargestellte Linearcomplexion mag diefs beispielsweise erläutern. Von den zwanzig Parzellen, in welche mit achtzehnmaliger Durchkreuzung dieser geschlossene Zug die gesammte Kugelfläche theilt, trägt diejenige, die in der Darstellung auf einer Ebene als der die Figur umgebende Flächenraum, d. i. als Amplexum erscheint, die Ordnungszahl 0, würde aber — und dasselbe gilt von jeder andern Parzelle — durch gemeinsame Erhöhung oder Erniedrigung aller zwanzig vorhandenen Zahlen um eine beliebige ganze Zahl auf jeden andern positiven oder negativen Rang gebracht werden können, was begreiflich für die Anzahl der Rangclassen (im vorliegenden Beispiel 6, nämlich von $\bar{2}$ bis 3 inclusive) ohne Einflufs ist. In manchen Fällen [1])

[1]) Vgl. die von Gaufs gemachten Bemerkungen über die möglichen Vertheilungsarten eventueller geocentrischer Oerter auf dem Zodiakus eines gegebenen Planeten, A. N. Nr. 625. Hinsichtlich des hierbei erwähnten Falles kettenringartigen Ineinandergreifens zweier Planetenbahnen verdienen nach Herrn B. A. Gould's neuerdings hierüber

müssen den auf den Scheidungs- oder Grenzlinien selbst liegenden Punkten gleichermafsen, wie den Binnenpunkten der Flächentheile, Rangzahlen zugetheilt werden. Wählt man zu diesem Behufe die geraden ganzen Zahlen, Null mitgerechnet, zur Bezifferung der Parzellen, so fallen die zwischen liegenden ungeraden Zahlen auf die Grenzlinien.

Bei der Projection der Linearcomplexionen im Raum auf eine Kugelfläche treten aufser den Durchkreuzungen und beliebig vielfachen Vereinigungspunkten auch noch die Ueberkreuzungen auf, für deren nach bereits oben begründeten Regeln vorzunehmende Unterscheidung und Signirung wir das Auge stets an einem beliebigen Ort im Innern der Constructionskugel annehmen. Für diese Untersuchungen bietet sich ein reiches und häufig sehr verwickeltes Material dar, zu welchem u. a. die vielen Arten von Knoten, Strick- und Flechtwerke, Gewebe jeder Gattung u. s. w. zahlreiche Bei-

---

angestellten Untersuchungen diejenigen Paare der neun bis jetzt bekannten Asteroïdenbahnen hier angeführt zu werden, welche Kettenringe bilden. Es sind diefs die folgenden 25 Combinationen (wo der neueste, von Graham entdeckte Planet den Namen Thetis trägt):

Thetis mit Hebe, Vesta, Asträa, Iris, Juno, Flora, Pallas,
Hebe „ Vesta, Asträa, Iris, Juno, Pallas, Ceres,
Vesta „ Asträa, Iris, Juno, Flora,
Asträa „ Iris, Juno, Flora,
Iris „ Flora, Pallas,
Juno „ Pallas, Ceres,
Flora „ Pallas,

so dafs Thetis und Hebe jede siebenmal, Vesta, Asträa, Iris und Juno jede sechsmal, Flora und Pallas je fünfmal und Ceres zweimal combinirt erscheint. Die übrigen 11 Combinationen, in welchen die Ceres sechsmal, Pallas und Flora jede dreimal, Juno, Iris, Asträa und Vesta je zweimal, Hebe und Thetis jede einmal vorkommt, bieten ebenso, wie je zwei Bahnen der übrigen Hauptplaneten, blofse Einschlüsse einer Bahn in der andern dar. Die Ceresbahn umschliefst sechs Bahnen: Pallas, Flora, Iris, Asträa, Vesta und Thetis, die Pallasbahn zwei: Asträa und Vesta, die Junobahn zwei: Flora und Iris, die Hebebahn eine, nämlich die der Flora.

träge aus dem Gebiete der Technik und Praktik abgeben. Nicht minder sind manche Gegenstände, bei welchen wohl selten an die Beziehung zu wissenschaftlichen Fragen gedacht werden mag, wie manche Spielwerke, unter denen das bekannte Spiel mit den künstlich verflochtenen Ringen [1]) hervorgehoben zu werden verdient, interessante topologische Paradigmen. Von einer Anzahl verschiedener, in der Artillerie-, Pionier-, Schiffer- und Weberpraxis oder anderweitig gebräuchlicher Knoten, nebst ihren üblichen Trivialnamen, werden die nächsten topologischen Beiträge eine Zusammenstellung enthalten, bei welcher Gelegenheit für solche aus der Praxis entlehnte concrete Fälle auf die nicht topologischen Beziehungen physikalischer, mechanischer oder industrieller und selbst ästhetischer Art insoweit wird Rücksicht genommen werden dürfen, als zur Absonderung der rein topologischen Gesichtspunkte dienlich ist.

Die obigen Betrachtungen über die Position sind in weiterer Ausführung theils auf solche Fälle auszudehnen, wo den Elementen eine andere Anzahl positorischer Axen als drei zukommt, theils mit denjenigen Untersuchungen zu verbinden, welche zugleich auf die S i t u a t i o n, d. h. auf die Lage der die Elemente verbindenden geraden Linie Rücksicht nehmen. Bestimmungen dieser Art bilden ein topologisches Element bei vielen Vorkommnissen sowohl in der industriellen Mechanik [2]) und der Künste, als auch in der Naturwissenschaft und namentlich derjenigen Theile der Physik, welche sich auf die dynamische Electricität und den Magnetismus beziehen.

---

[1]) Die von Lichtenberg darüber angestellten Betrachtungen (verm. Schriften B. 6, S. 252) sind nicht topologischen Inhalts.

[2]) Es darf bei dieser Gelegenheit auf einen Versuch aufmerksam gemacht werden, Maschinenbewegungen durch Symbole darzustellen: *On a method of expressing by signs the action of machinery* by Charles B a b b a g e. Philos. Trans. for the year 1826, part 3, pag. 250.

Die Symmetrie des Raumes und der Bewegung bildet endlich einen ergiebigen Stoff für künftige topologische Untersuchungen, die sich theilweise schon an das bereits über die Position Vorgetragene anknüpfen lassen. Wenn auch die Begriffe der Gröfse, des Mafses, der geometrischen Aehnlichkeit oder Congruenz hiebei nicht aufser Acht bleiben dürfen, so treten sie doch bei der Vorstellung des räumlichen Eben- oder Gleichmafses jederzeit hinter den Begriff der modalen Raumverhältnisse zurück, wodurch die Symmetrie nicht sowohl dem Gebiete der Geometrie, als vielmehr dem der Topologie anheim fällt. Theils in der Morphologie der organisirten Wesen, theils und ganz besonders in der Krystallographie [1]) spielen die Symmetriegesetze eine wesentliche Rolle.

---

[1]) In der letztgenannten Beziehung verdient die classische Schrift über Krystallographie von W. H. Miller, *a treatise on Crystallography*, Cambridge 1839, besondere Beachtung, insofern sich hier die Bedeutung der Symmetrie für die Characteristik der Krystallsysteme am klarsten gewürdigt und in die Form der Darstellung aufgenommen findet. Der Verfasser sagt (pag. 20): „the different systems of crystallization are further distinguished by the various kinds of symmetry observable in the distribution of the faces of the crystals belonging to them. For, if a face occur having the symbol $(h\,k\,l)$, it will generally be accompanied by the faces having for their symbols certain arrangements of $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$, determined by laws peculiar to each system, and which will be fully explained when we come to describe each system separately.“ In wie naher Beziehung die Hemiëdrie und Holoëdrie der Krystallgestalten zur Symmetrie stehen, bedarf kaum der Erwähnung.