Ueber Verkettung.

Von Hermann Brunn.

(Mit Tafel II—IV.)

(Eingelaufen 19. März.)

I. Verkettete Ringe. Schema ihres Verkettungszustandes.

1. Man stelle sich Gebilde vor von der Art eines in sich zurücklaufenden Fadens, ganz gleichgültig, ob man dabei den Faden als Curve, als Fläche oder als Körper sich denkt, und lege diesem Faden die Eigenschaften einerseits der Beweglichkeit, Biegbarkeit und Dehnbarkeit, andrerseits der Unzerreissbarkeit und Undurchdringlichkeit bei.[1]) Ein solches Gebilde sei im Folgenden kurzweg als Ring bezeichnet.

2. Wenn eine Anzahl beliebig verschlungener Ringe vorliegt, so ergibt sich als ein zur Beschreibung des Ringsystem mit verwendbarer Begriff der des Verkettungszustandes. Dieser Begriff ist Gegenstand der folgenden Blätter, zu deren Abfassung ich die erste Anregung fand in zwei von Tait nebeneinandergestellten wesentlich verschiedenen Beispielen je dreier verketteten Ringe,[2]) und die sich inhalt-

1) Eine genauer eingehende Definition würde uns zu Umständlichkeiten verführen, die für das Folgende keinen Werth haben.

2) Siehe Figg. 1 und 2 auf Tafel II. Vgl. Tait, On knots, Transact. of the R. Edinb. Soc. 1876, Vol. 28. Plate XV Fig. 15 und Plate XVI Fig. 26.

lich an die Betrachtungen anreihen, mit denen Listing seine „Vorstudien zur Topologie" abschliesst.

3. Verkettet mit einander sind Ringe dann, wenn die Weite, bis zu welcher sie von einander entfernt werden können, von ihren Dimensionen abhängt. Wenn eine Anzahl Ringe eine Kette bilden, so kann keiner vom andern über jede Weite hinaus entfernt werden, ohne dass mindestens einer von allen Ringen über jede Länge hinaus gedehnt würde, und es müssen, wenn man die Dimensionen der Ringe hinlänglich verkleinert, sämmtliche Ringe auf einen beliebig kleinen Raum zusammengezwungen werden.

4. Bildet ein Theil der Ringe einer Kette K, allein für sich betrachtet, ebenfalls eine Kette k, so heisse k eine Unterkette von K.

5. Nachdem der Begriff von verketteten Ringen dargestellt ist, lässt sich der von verketteten Ringketten leicht daraus ableiten.

6. Im Gegensatz zu Gebilden, die mit einander verkettet sind, sprechen wir von unverketteten oder „von einander freien" Gebilden.

7. Unter der Beschreibung des Verkettungszustandes von n Ringen verstehe ich die genaue Angabe der Ketten, welche durch die Ringe gebildet werden, und der sämmtlichen in ihnen enthaltenen Unterketten. Diese Beschreibung wird durch ein jetzt zu bildendes Schema geleistet.

8. Man setze in eine erste Zeile die Namen der Ringe nebeneinander, etwa

1) $$R_1,\ R_2,\ R_3\ \ldots\ldots\ R_{n-1},\ R_n$$

Dann bilde man die sämmtlichen Combinationen dieser Buchstaben zu zweien und untersuche, welche dadurch dargestellten Ringpaare, für sich allein betrachtet, mit einander verkettet sind, welche nicht. Die Bezeichnungen der verketteten Paare setze man in eine zweite Zeile nebeneinander, etwa:

2) $$R_{i_1} R_{i_2},\ R_{i_3} R_{i_4},\ \ldots\ldots,\ R_{i_{m-1}} R_{i_m}$$

In eine dritte Zeile stelle man diejenigen Ringtripel, welche, für sich allein betrachtet, Ketten bilden, etwa:

3) $$R_{k_1} R_{k_2} R_{k_3},\ R_{k_4} R_{k_5} R_{k_6},\ \ldots\ldots,\ R_{k_{l-2}} R_{k_{l-1}} R_{k_l}$$

und so fahre man fort und stelle, allgemein gesprochen, in der m-ten Zeile die Ketten, resp. Unterketten von m Ringen zusammen. Das Schema bricht von selbst ab, spätestens mit der n-ten Zeile, welche für den Fall, dass sämmtliche Ringe in eine einzige Kette zusammentreten, ein Glied enthält. Die sämmtlichen Zeilen zusammen seien als das (Verkettungs-) Schema der n Ringe bezeichnet.

9. Es liegt nahe, die in einer Zeile stehenden Glieder von der 3. Zeile an in zwei Gruppen zu theilen. Das Bestehen der in einer Zeile vorkommenden Ketten und Unterketten ist entweder aus vorher angeschriebenen Zeilen ersichtlich, oder nicht. So z. B. würde aus dem Bestehen der beiden Ketten $ACEF$ und BCD das Bestehen einer Kette $ABCDEF$ folgen; denn da A, E und F mit C, C mit B und D zusammenhängt, so hängen sämmtliche sechs Ringe unter einander zusammen. Ueberhaupt immer, wenn Ketten einen oder mehrere Ringe gemeinsam haben, lassen sich andere, umfassendere als vorhanden erkennen.

10. Die aus früheren Zeilen zu folgernden Ketten einer Zeile setze man in eine erste, die übrigen in eine zweite Gruppe der Zeile und trenne beide Gruppen durch einen kräftigen Verticalstrich. Anbei (s. S. 80) folgt zur Erläuterung ein ausführlicheres Beispiel; die Unterketten sind mit durchlaufenden Nummern unterschrieben und bei den abgeleiteten links zugleich die Nummern vorhergehender Ketten, aus denen sie abgeleitet werden können, verbunden durch ein Pluszeichen angegeben.

11. Zur weiteren Erklärung des folgenden Beispieles vgl. auch 16.—18.

1. *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z*

2. *ab*, 1; *cd*, 2; *de*, 3; *dt*, 4; *hi*, 5; *hk*, 6; *ik*, 7; *pu*, 8; *xy* 9

3.	*cde*, 10, 2+8	*cdt*, 11, 2+4	*det*, 12, 3+4	*hik* 13, 5+7				*abc*, 14, 1+c; *deg* 15, 3+g	*dgu*, 16; *wyz* 17
4.	*abcd*, 18, 2+14	*cdeg*, 19, 2+15	*cdet*, 20, 4+10	*cdgu*, 21, 2+16	*degt*, 22, 4+15	*degu*, 23, 3+16			*lmno* 27
		dgpu, 24, 8+16	*dgtu*, 25, 4+16	*wxyz* 26, 9+17					
5.	*abcde*, 28, 10+14	*abcdt*, 29, 11+14	*cdegt*, 30, 11+15	*cdegu*, 31, 10+16	*cdgpu*, 32, 2+27	*cdgtu*, 33, 4+21	*ikwyz* 37, 7+17	*frwyz* 38, 17+fr	*qrsvz* 39
		degpu, 34, 3+24	*degtu*, 35, 4+23	*dgptu* 36, 4+24					
6.	*abcdeg*, 40, 15+28	*abcdet*, 41, 4+28	*abcdgu*, 42, 16+18	*cdegpu*, 43, 8+31	*cdegtu*, 44, 4+31	*cdgptu*, 45, 4+32	*dethik* 50, 12+13	*frpwyz* 51, 38+p	
		degptu, 46, 4+34	*hikwyz*. 47, 5+38	*ikwxyz*, 48, 9+37	*frwxyz* 49, 9+38				

21. *abcdefghikpqrstuvwxyz* 8+v+39+40+50+51

12. Die abgeleiteten Ketten lassen sich oft auf mehrfache Weise aus vorhergehenden zusammensetzen, wie z. B. Kette 41: *a b c d e t* statt mit 4 + 28 auch mit 28 + 12 etc. unterschrieben sein könnte.

13. Das gegebene Schema ist nur bis zur 6. Zeile ausgeführt, und angenommen, dass von hier ab in den rechten Zeilenhälften keine neuen Ketten mehr auftreten. Jedenfalls reicht das Schema dann bis zu der wieder angeschriebenen 21. Zeile, und man sieht, dass das ganze Ringsystem aus den von einander freien Ketten

a b c d e f g h i k p q r s t u v w x y z und *l m n o*

besteht.

14. Die rechten Gruppen sämmtlicher Zeilen zusammen wollen wir als die rechte, die linken Gruppen zusammen als die linke Schemahälfte bezeichnen. Die erste und zweite Zeile haben gar keine linke Gruppe und müssen vollständig zur rechten Schemahälfte gerechnet werden.

15. Durch Weglassen der linken Hälfte wird der Inhalt dessen, was das Schema uns lehren kann, in keiner Weise vermindert, da die linke Hälfte stets mittels der rechten reconstruirt werden kann. Es dürfte aber trotzdem in den meisten Fällen sich empfehlen, die linke Hälfte auch auszuführen, resp. beizubehalten.

16. Für die weitere Anordnung der Glieder können sehr verschiedene Gesichtspunkte maassgebend werden.

Für unsere Zwecke nehmen wir in der rechten Hälfte eine bestimmte weitere Eintheilung vor, zusammenhängend damit, dass die Glieder einer Zeile Glieder vorhergehender Zeilen als Unterketten enthalten können oder nicht. Jede rechte Zeilenhälfte wird in drei Theile getheilt. Es werden immer gestellt

in das erste Drittel: Die Glieder, welche aus lauter (bereits vorhergegangenen) Unterketten zusammengesetzt sind;

in das zweite Drittel: Die Glieder, welche Unterketten enthalten, ausserdem aber noch eine Gruppe G von Buchstaben, welche zusammen keine Unterkette bilden;

in das dritte Drittel: Die Glieder, welche gar keine Unterketten enthalten.

17. Die ersten Drittel der sämmtlichen rechten Zeilenhälften seien als erstes Drittel der rechten Schemahälfte bezeichnet, und entsprechend seien die Benennungen zweites und drittes Drittel zu verstehen.

18. Die Zeilendrittel halte man durch kleinere Vertikalstriche auseinander, oder man bilde, wie in dem Beispiel geschehen, gleich drei durchgehende Kolumnen von der 3. Zeile an. Sollten gewisse Drittel gar keine Glieder enthalten, so wird es doch gut sein, trotzdem die Trennungsstriche zu setzen.[1] In dem Beispiel 11 enthält nur Zeile 5) Ketten in allen drei Dritteln der rechten Hälfte, Zeile 3) nur zweites und drittes Drittel, Zeile 4) nur ein drittes Drittel, Zeile 6) nur die zwei ersten Drittel. Für die Ketten der ersten zwei Drittel ist durch die untergeschriebenen Summen angedeutet, aus welchen Unterketten und Buchstabengruppen G sie zusammengesetzt sind.

II. Bildung von Ketten, deren Schema ein gegebenes ist.

19. Man würde sich den Gegenstand dieses Aufsatzes zu einfach vorstellen und den Zweck der Aufstellung eines so allgemeinen Schema's nicht einsehen, so lange man nur an die gewöhnlich sich darbietende Art der Verkettung denken wollte. Die gewöhnlichsten Ketten haben ein Schema, dem abgesehen von Zeile 2) die rechte Hälfte ganz fehlt. Unser Begriff der Verkettung ist aber ein viel weiterer, und es kann das Zusammenhängen

1) Aehnliches gilt für die Trennungsstriche der Hälften.

einer Anzahl von Ringen in viel absonderlicheren Weisen stattfinden, auf welche eben hingewiesen werden soll.

20. Dies wird ersichtlich, wenn wir zeigen, dass jedes Schema eine Beschreibung wirklich vorhandener darstellbarer Ketten liefert.

Wir sagen: jedes Schema; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass ein Schema stets die Buchstabenbezeichnung jener Ketten und Unterketten enthalten muss, welche aus anderen Unterketten mit Nothwendigkeit sich ergeben. Es ist z. B. keine Kette denkbar, deren Schema die Glieder AB und AC enthält, ohne zugleich das Glied ABC zu enthalten.

Es genügt für unseren Zweck, anzugeben, wie man zu einem beliebig gegebenen Schema irgend eine zugehörige Kette construirt, und es liegt uns fern, die Gesammtheit der durch das Schema beschriebenen Ketten erschöpfen zu wollen.

21. Es kann hier das Geständniss nicht umgangen werden, dass die folgenden Nachweise an dem allen jenen Verschlingungs- und Verknotungsuntersuchungen gemeinsamen Uebel kranken, welche über die durch Anwendung des Gauss'schen Verschlingungsintegrals gesteckte Grenze hinausgehen. Eine mathematisch strenge und auf jeden Fall anwendbare Formulirung der Merkmale, wann zwei oder mehr Ringe untrennbar verbunden sind, liegt zur Zeit nicht vor, trotz mancher in dieser Richtung gemachten Anstrengungen. Wie die meisten der bekannten Tait'schen und Simony'schen Untersuchungen sind daher auch die folgenden vorläufig zum Theile auf den Boden der Empirie gestellt.

Eine allgemeine Methode.

22. Jedermann weiss, dass man zwei Ringe nach Maassgabe von Fig. 3 Taf. II mit einander verketten und durch

Aufschneiden des einen von beiden wieder von einander frei machen kann.

23. Auffälliger ist schon die Möglichkeit, 3 Ringe so ineinander zu verflechten, dass kein Paar derselben verkettet ist, sondern alle drei Ringe frei werden, sobald ein beliebiger aufgeschnitten wird.

Tait gibt ein Beispiel für diese Möglichkeit, welches wir in Fig. 2 reproduciren.[1])

24. Wir sind nun weiter gegangen und haben in Fig. 4 und Fig. 5 Taf. II Ketten von 4, resp. 5 Ringen gebildet, welche ganz entsprechende Eigenschaften zeigen, d. h. sofort vollständig zerfallen, sobald irgend einer der Ringe aufgeschnitten wird.

Ja, es lässt sich allgemein folgender, auf den ersten Blick sehr unwahrscheinliche Satz behaupten:

25. Es lassen sich beliebig viele Ringe R so zu einer Kette K verbinden, dass in K gar keine Unterketten vorhanden sind. Zerschneidet man einen einzigen ganz beliebigen der Ringe R, so werden sofort sämmtliche R frei von einander.

26. Nachdruck ist darauf zu legen, dass das Zerfallen bei der Zerschneidung eines ganz beliebigen der Ringe eintritt, denn Beispiele für Ketten aus n Ringen, die bei Zerschneidung eines bestimmten Ringes in ihre Elemente zerfallen, liegen auf der Hand: Man denke sich nur beliebig viele Ringe auf einen andern aufgereiht, wodurch eine Kette entsteht, deren rechte Schemahälfte die Form

1) $A, B, C \;.\;.\;.\;.\;.\; N$

2) $A\,B,\ A\,C \;.\;.\;.\;.\; A\,N$

hat, und welche beim Zerschneiden des Ringes A, aber keines andern in ihre Elemente zerfällt.

1) Siehe Citat bei 2.

27. Wir wollen ein Verfahren angeben, welches Ketten obiger Art herzustellen gestattet. Um es hinlänglich zu illustriren, ist es in den Figg. 3 (Taf. II), 6 und 7 (Taf. IV), 8 und 9 (Tafel III) für 2, 3, 4, 5 und 6 Ringe ersichtlich gemacht.

28. Allgemein gesprochen werden dabei, wenn n Ringe eine Kette sub 25. bilden sollen, $n-1$ derselben, $A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, der Uebersichtlichkeit wegen wie ein System concentrischer Kreise angeordnet, ein n-ter, A_1, in eigenthümlicher Weise in dieselben verflochten. Zur Beschreibung des Verfahrens dient am besten die vollständige Induction. Um die Art des Fortschreitens von n zu $n+1$ Ringen zu characterisiren, wird es genügen, in Worte zu fassen, wie aus der Kette von 5 Gliedern die von 6 Gliedern abgeleitet wird.

29. In Fig. 9 tritt zu den 4 concentrischen Ringen A_2, A_3, A_4, A_5 der Fig. 8 ein weiterer, A_6, aussen hinzu. Die Lage des durchgeflochtenen Ringes A_1 gegen A_2, A_3, A_4 bleibt vollständig ungeändert, die Aenderung der Verknüpfungsart äussert sich nur an seinem Verhalten gegen den früher äussersten Ring A_5 und den neuen A_6.

30. Für A_5 steigt die Zahl der „Ueberkreuzungen" mit A_1 auf das doppelte; man kann sagen, an Stelle jeder bisherigen Ueberkreuzung treten zwei neue, z. B. an Stelle[1]) von x_1 in Fig. 8 tritt x_1 und x_2 in Fig. 9, an Stelle von x_3 in Fig. 8 x_5 und x_6 in Fig. 9.

31. In Fig. 8 geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts immer so fort, dass er dabei von einer Seite des Ringes A_5 auf die andere tritt. In Fig. 9 hingegen geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts so fort,

1) Wir numeriren auf den concentrischen A die Ueberkreuzungen von links nach rechts, wie auf den Figuren zu sehen, und bezeichnen eine Ueberkreuzung mit x und ihrer Ordnungszahl als Index.

dass er auf der nemlichen Seite von A_5 bleibt. In Fig. 8 fand zwischen zwei Ueberkreuzungen $x_{2\nu+1}$ und $x_{2\nu+2}$ ein Umfangen, Unterqueren von A_5 durch A_1 statt; an dessen Stelle tritt jetzt sozusagen ein „Reiten" von A_1 auf A_5 zwischen zwei Paaren von Ueberkreuzungen $x_{4\nu+1}$, $x_{4\nu+2}$ und $x_{4\nu+3}$, $x_{4\nu+4}$, indem A_1 auf jeder Seite von A_5 eine Schleife herabhängen lässt. In Fig. 9 befindet sich ferner allgemein bei x_{2n-1} und x_{2n} A_1 auf der nemlichen Seite von A_5 wie in Fig. 8 bei x_n.

32. Nun zu A_6! Mit diesem Ring bildet A_1 geradesoviel Ueberkreuzungen wie mit A_5 und wir nennen die Ueberkreuzungen gleicher Ordnungszahl auf A_5 und A_6 entsprechende. Die Ueberkreuzungen entstehen, indem A_6 jede der von A_5 herabhängenden Schleifen einmal durchbohrt. A_1 befindet sich daher, gerade im Gegensatz zu dem Verhalten entsprechender Ueberkreuzungen auf A_5, auf verschiedenen Seiten von A_6, wenn man eine Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl und die rechts folgende ins Auge fasst.

Ferner:

33. Bezeichnet man das Vornlaufen von A_1 bei einer Ueberkreuzung mit v, das Hintenlaufen mit h, so entspricht jeder Reihe von Ueberkreuzungen eine Reihe von Buchstaben v, h, und es gilt die Regel: Einer Buchstabenfolge $v\,v\;h\,h$ resp. $h\,h\;v\,v$ auf A_5 muss eine symmetrische Buchstabenfolge auf A_6 entsprechen, also entweder $v\,h\,h\,v$ oder $h\,v\,v\,h$.

Schliesslich:

34. Symmetrieen von Buchstabenfolgen auf A_5 müssen in den entsprechenden Buchstabenfolgen von A_6 erhalten bleiben.

35. Durch die unter 30—34 gegebenen Regeln sind nun auf A_6 die Ueberkreuzungen vollständig bestimmt bis auf eine beliebige, die zu Anfang willkürlich gewählt werden

darf. Wir dürfen also z. B. bestimmen, dass die Ueberkreuzung der Ordnungszahl 1 stets den Buchstaben v zugetheilt erhält.

36. Es lässt sich die Anordnung der Ueberkreuzungen durch ein Schema wiedergeben, indem man die Ueberkreuzungsbuchstaben der Ringe A_2, A_3 . . . in aufeinanderfolgende, mit A_2, A_3 . . . bezeichnete Zeilen setzt.

Für zwei Ringe erhält man das Schema:

$$\begin{array}{ll} A_2: & v \quad h \end{array}$$

für drei Ringe:

$$\begin{array}{l r l} A_2: & v\,v & h\,h \\ A_3: & v\,h & \multicolumn{1}{|l}{h\,v} \end{array}$$

für vier Ringe:

$$\begin{array}{l r l} A_2: & v\,v & h\,h \\ A_3: & v\,v\,h\,h & \multicolumn{1}{|l}{h\,h\,v\,v} \\ A_4: & v\,h\,h\,v & \multicolumn{1}{|l}{v\,h\,h\,v} \end{array}$$

für fünf Ringe:

$$\begin{array}{l r r l l} A_2: & & v\,v & h\,h & \\ A_3: & & v\,v\,h\,h & \multicolumn{1}{|l}{h\,h\,v\,v} & \\ A_4: & v\,v\,h\,h & \multicolumn{1}{|r}{h\,h\,v\,v} & \multicolumn{1}{|l}{v\,v\,h\,h} & \multicolumn{1}{|l}{h\,h\,v\,v} \\ A_5: & v\,h\,h\,v & \multicolumn{1}{|r}{v\,h\,h\,v} & \multicolumn{1}{|l}{v\,h\,h\,v} & \multicolumn{1}{|l}{v\,h\,h\,v} \end{array}$$

etc. etc.

Die senkrechten Linien deuten Symmetriemitten an, und setzen sich, wenn sie in einer Zeile zum Vorschein gekommen sind, nach unten durch alle folgenden Zeilen fort.

37. Dass ein nach diesen Vorschriften gebildetes System wirklich eine Kette bildet, davon mag man sich durch das Experiment überzeugen. Vergl. übrigens 21.

38. Dass diese Ketten aber bei Zerschneidung eines einzigen beliebigen Ringes sofort in ihre sämmtlichen Elemente zerfallen, soll jetzt eingehend gezeigt werden.

Selbstverständlich ist das Zerfallen, wenn der zerschnittene Ring gerade A_1 ist.

Zerschneidet und entfernt man den äussersten Ring, so kann A_1, weil es auf den übrigen Ringen nur „reitet", einfach von ihnen abgehoben werden, wie ein Reiter vom Ross.

Zerschneidet und entfernt (= „löscht") man den zweiten Ring von aussen, so kann man alle Schleifen, mit denen A_1 auf diesem Ringe „ritt", nach unten fallen lassen, wofür die von der Mitte dieser Schleifen ausgehenden Symmetrieen von Wichtigkeit sind, und findet dann den äussersten Ring nirgends mehr unterquert. Daher steht dem Abheben des Ringes A_1, der auf den Ringen innerhalb des zerschnittenen nur reitet, nichts im Wege.

Löscht man den dritten Ring von aussen, so werden die auf diesem reitenden Schleifen frei, und lassen sich, wieder in Folge der Symmetrieen, die in den zwei äusseren Ringen von ihren Mitten ausgehen, durch einfaches Abwickeln resp. Durchschieben ganz aus denselben herausflechten. Auf den weiter innen liegenden Ringen findet wieder nur ein Reiten statt und dem Abheben von A_1 steht nichts im Wege.

39. Ueberhaupt: Löscht man einen beliebigen der concentrischen Ringe, so besteht die sichtbarliche Freimachung des Ringes A_1 von den übrigen nach Richtung der äussern in einem Abwickeln und Durchschieben der Schleifen, welche auf dem zerschnittenen Ringe geritten waren, nach Richtung der innern Ringe in einem Abheben. Die erste Operation ist stets wesentlich bedingt durch die von der Mitte jener Schleifen ausgehenden Symmetrieen der Ueberkreuzungsbuchstaben, welche die Ueberkreuzungen stets paarweise aufzuheben gestatten.

Dass nach Ausflechtung von A_1 die übrigen Ringe alle frei sind, ist von selbst klar.

40. Wir werden nun keine Schwierigkeit haben, auch die Möglichkeit des folgenden einzusehen:

Beliebige von einander freie Ketten A, B....N, bestehend aus Ringen $A_1, A_2 \ldots A_\alpha$; $B_1, B_2 \ldots B_\beta$; .... $N_1\ N_2 \ldots N_\nu$ respective können in der Weise zu einer Kette P vereinigt werden, dass, beim Zerschneiden eines einzigen beliebigen Ringes, P in die sämmtlichen Ketten A, B, ... N zerfällt. Besser gesagt: Das Resultat der Aufschneidung ist das nemliche, als ob der Schnitt an den von einander freien Ketten A, B ... N ausgeführt worden wäre.

41. Man denke sich in den Figg. 3, 6, 7, 8, 9 die Ringe, statt sie in den ungezeichneten, resp. punctirten Theilen kreisförmig und von einander frei zu ergänzen, dort beliebig mit einander verschlungen, oder anders gesprochen: Man zerre aus den beliebig mit einander verketteten oder nicht verketteten Ringen $A_1\ A_2 \ldots N_\nu$ Theile so hervor, dass sie die Anordnung wie in den als Muster dienenden Figuren 3—9 erhalten, und denke sich einen beliebigen derselben wie A_1 in die andern hineingeflochten. Bei der an unseren Ringen (s. 1) vorausgesetzten unbegrenzten Dehnbarkeit ist dies stets zulässig. Sobald man eine der Curven $A_1, A_2 \ldots N_\nu$ zerschneidet, bedeutet die neu hinzugekommene Verflechtung nur eine für den Verkettungszustand des Systems irrelevante Lagenänderung, die Ketten A, B ... N trennen sich.

42. Man könnte einen Augenblick denken, dass die neu hinzugefügte Verkettung früher vorhandene Verkettungen zerstören könnte, indem sich neue Ueberkreuzungen gegen alte aufheben liessen. Alsdann würden wir nicht wissen, ob bei unserem Versuch, aus A, ... N eine einzige Kette P zu bilden, nicht vielmehr frühere Ketten in Unterketten zerfielen und würden in grosser Verwirrung sein. In Wahrheit ist die Gefahr nicht vorhanden; weil eben die neue Verkettung nur für die Gesammtheit der Ringe wirksam (s.

oben 41) und somit für die anfangs vorhandenen Verkettungen, die sich nur auf einen Theil der Ringe beziehen, völlig belanglos ist.

43. Das geschilderte Verfahren reicht vollkommen aus, um bei beliebig gegebenem Schema eine dementsprechende Kette zu bilden. Man bilde der Reihe nach die in der rechten Schemahälfte vorkommenden Unterketten, die der linken Hälfte entstehen dann von selbst. Die Möglichkeit, dass Ringe oder Unterketten zu einer Kette zusammentreten, nachdem sie schon zur Bildung andrer Ketten verwendet und in denselben befangen sind, stört in keiner Weise. Es macht also gar nichts, dass z. B. nach zwei Ketten $a\,b\,c\,d$ und $e\,f\,g\,h$ eine Kette $a\,c\,f\,g$ im Schema auftreten kann. Nur ein Paar Worte sind oben in 42 zu verändern, um die dortigen Schlussfolgerungen auch auf diesen Fall anzuwenden.

Andre Methoden, um speciell Ketten ohne Unterketten zu bilden.

44. Da speciell die Ketten ohne Unterketten, welche unter 25. erwähnt sind, einiges Interesse erwecken dürften, so sollen noch zwei andre Methoden angegeben werden, um solche Ketten zu bilden.

45. Man denke sich auf eine Ebene einen kreisförmigen Ring B gelegt, darüber einen ebensolchen Ring A, so dass die beiden Kreisflächen sich zum grössten Theile überdecken, und A etwas mehr nach links liegt. Dann schlage man — die Ebene wird weggedacht — den Theil des Ringes A, der innerhalb des Umfanges von B liegt, nach unten und links, den Theil von B, der innerhalb A liegt, nach oben und rechts, so werden A und B nach dem Muster von Fig. 11 zusammengesetzt sein. Operation wie Resultat wollen wir mit dem Symbol $[A\,B]$ bezeichnen. $[A\,B]$ bildet keine Kette, sondern die beiden Ringe sind frei von einander.

46. $[A\,B]$ erinnert, so wie es in Fig. 10 gezeichnet ist, mit den bei p und q nahe sich umwindenden und im übrigen eng nebeneinanderherlaufenden Strängen, selbst an die Gestalt eines Ringes, der bei r seinen Durchgang hat und kreisförmig verläuft.

47. Diese Vorstellung des Ringartigen bei $[A\,B]$ lässt sich verstärken und die Handhabung des Gebildes als Ring erleichtern dadurch, dass man $[A\,B]$ in das Innere eines Hohlringes eingeschlossen denkt, resp. einschliesst, der es wie eine Haut umgibt und zusammenhält. Natürlich kann die Hilfsvorstellung resp. Hilfsvorrichtung des Hohlringes jederzeit wieder beseitigt werden.

48. Es wird jetzt, und noch mehr durch die folgende Verwendung, erklärlich sein, warum wir das Gebilde $[A\,B]$ als „Systemring" uns zu bezeichnen erlauben, trotzdem es nicht ein Ring nach der Definition 1 ist.

49. Wir können in dem Systemring $[A\,B]$ offenbar an Stelle von A und B selbst Systemringe treten lassen, wodurch Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,C\big],\quad \big[A\,[B\,C]\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\big]$$

entstehen, die selbst wieder als „Systemringe" bezeichnet und gehandhabt werden dürfen.

Man kann mit diesen Systemringen wieder die nemlichen Operationen vornehmen, wie mit den bisherigen einfachern, also z. B. Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,[C\,D]\,E\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\,[E\,F]\big] \text{ etc.}$$

herstellen, wodurch man zu immer complicirteren Systemringen gelangt.

50. Jeder Systemring S hat die Eigenschaft, aus zwei einfacheren Systemringen (resp. Ringen) S_1 und S_2 zusammengesetzt zu sein, und einen Hauptdurchgang zu besitzen,

der einerseits durch die Stränge von S_1, andrerseits durch die von S_2 begrenzt wird.

51. Keiner der behandelten Systemringe bildet eine Kette; sie bestehen aus lauter freien, nur in eigenthümlicher Weise zusammengelegten Ringen.

Sobald jedoch durch die Hauptöffnung eines solchen Systemringes S ein Ring oder andrer Systemring T geführt wird in der Weise, dass eine Verkettung stattfinden würde, sobald an Stelle von S und T einfache Ringe träten — am einfachsten also nach Muster von Fig. 3 —, so sind auf einmal sämmtliche Ringe mit einander verkettet und zwar liegt dann eine Kette ohne Unterkette vor. Der Schlussring versperrt sämmtlichen Ringen die Wege, auf denen sie aus den andern hervorgezogen und von ihnen frei gemacht werden könnten. Man überzeuge sich durch Experimente und erinnere sich an 21.

52. Dass ein vollständiges Zerfallen eintritt, sobald ein Ring R_1 in einem der Systemringe, sagen wir in S_1, zerschnitten wird, lässt sich folgendermaassen klar machen:

Innerhalb S ist R_1 jedenfalls mit einem andern Ring oder Systemring R_2 nach Muster von Fig. 11 zusammengelegt, später eventuell noch gefaltet worden. Führen wir den Schnitt an R_1 in der Nähe von p,[1]) so lässt sich dort der Systemring auseinanderzerren, ganz gleichgültig, welche Verbindungen er noch mit andern Ringen eingegangen ist, und verhält sich in Folge dessen in Bezug auf seinen Hauptdurchgang r nicht mehr wie ein Ring, sondern wie ein zweiendiger Faden. $[R_1\, R_2]$ war wieder mit einem andern Ring oder Systemring R_3 zu einem Systemring zusammengelegt worden, der sich nach der mit $[R_1\, R_2]$ vorgegangenen Veränderung selbst wie ein zweiendiger Faden verhält; etc. etc.

1) Nur der bequemeren Vorstellung wegen; die Stelle, wo der Schnitt geführt wird, ist gleichgültig.

so schliesst man fort und sieht schliesslich, dass S selbst sich wie ein zweiendiger Faden verhält nnd von T befreit werden kann; worauf alles zerfällt, da T allein ja keine Kette bildet.

53. Ein weiteres ganz besonders einfaches und symmetrisches Verfahren, um Ketten mit beliebig vielen Ringen ohne Unterketten zu bilden, ist durch Fig. 42 angedeutet. Es ist nur ein Stück der Kette gezeichnet, welche unter stets gleicher Wiederholung der Glieder, in Richtung des Pfeilbogens in sich zurücklaufend zu denken ist.

54. Es möge schliesslich noch bemerkt werden, dass diese Ketten mit den vorher unter 51 geschilderten eine viel grössere Verwandtschaft haben, als auf den ersten Blick ersichtlich ist.

III. Zerschneidungszahlen einer Kette.

Charakteristische Zahlen einer Kette im Allgemeinen.

55. Der für unsere Vorstellung einfachste Zustand von n Ringen ist der, wo sie sämmtlich unverkettet sind. Wir sind daher geneigt, jede Kette daraufhin zu beurtheilen, ob sie diesem Zustande nah oder ferne steht, und bezeichnen dementsprechend die Ringe als schwächer oder stärker verkettet. Diesen Grad der Verkettung kann man durch verschiedene charakteristische Zahlen darzustellen, zu messen versuchen.

56. Um eine erste derselben zu definiren, stellen wir uns die undurchdringlich gedachten Ringe einen Augenblick als durchdringlich für einander vor, und definiren sie als die geringste Anzahl der gegenseitigen Ringdurchdringungen, welche nöthig wird, um sämmtliche Ringe von einander zu trennen. Ueber diese Zahl sagt uns unser Schema gar nichts

aus, und um sie zu untersuchen, müssten wir über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen. Wir schreiten daher zu einer andern charakteristischen Zahl fort.

57. Vorausschickend bemerken wir, dass unter einem Querschnitt ein Schnitt verstanden werden soll, der einem Faden seine ringförmige Natur nimmt, und ihn in einen solchen mit zwei Enden verwandelt.

58. Man kann sich nun fragen: Welches ist die geringste Anzahl von Querschnitten, welche man an den gedachten Ringen ausführen muss, um dieselben sämmtlich von einander frei zu machen?

59. Und andrerseits: Welches ist die grösste Anzahl von Querschnitten, die man zur Zerfällung der Ketten in ihre Bestandtheile ausführen kann unter der Bedingung, dass nie ein bereits frei gewordener Ring zerschnitten wird?

60. Wir nennen die erste Zahl kurz die Minimalzerschneidungszahl, die zweite die Maximalzerschneidungszahl unseres Ringsystems.

Ableitung der Zerschneidungszahlen für eine specielle Art von Ketten.

61. Wir behandeln zunächst die Zerschneidungszahlen solcher Ketten, in deren Schema die linke Hälfte vollständig fehlt.

Ein solches Schema enthält kein einziges Glied, dessen Vorhandensein aus Gliedern, die in vorhergehenden Zeilen angeschrieben sind, nothwendig folgen würde, wie etwa aus zwei Gliedern AB und BC der zweiten Zeile nothwendig ein Glied ABC für die dritte Zeile sich ergibt.

62. Wenn zwei in einem solchen Schema vorkommende (Ketten resp.) Unterketten Ringe gemeinsam haben, so muss eine derselben sämmtliche Ringe der andern enthalten, mit

andern Worten: Unterketten des Schema's, welche Ringe gemeinsam haben, können einander nicht coordinirt, sondern eine von beiden muss der andern subordinirt sein.

63. Daraus folgt:

1) Die in den Gliedern einer Zeile auftretenden Ringe müssen sämmtlich von einander verschieden sein, somit können das zweite und dritte Drittel einer Zeile keine Ringe gemeinsam haben wie im allgemeinen Falle.

2) Die in den Gliedern des dritten Drittels vorkommenden Ringe sind sämmtlich von einander verschieden, während beim allgemeinen Falle im dritten Drittel ein und derselben Zeile gleiche Ringe in verschiedenen Gliedern vorkommen können.

3) Schneidet man einen Ring einer Kette des letzten Drittels auf, so werden sofort alle Ringe dieser Kette gänzlich frei, nicht bloss frei von einander.

Denn bliebe ein Theil T der Ringe dieser Kette, welche ausserdem noch die durch T' angedeuteten Ringe enthalten soll, mit nicht in der Kette enthaltenen Ringen U verkettet, so würde eine Kette mit den Gliedern $T + T' + U$ sich ergeben, die aus den Ketten $T + T'$ und $T' + U$ ableitbar und daher in die linke Seite des Schema's zu setzen wäre, welche doch frei bleiben soll. Dass die Ringe T allein für sich zum Theil verkettet bleiben, ist ersichtlich ebenfalls ausgeschlossen.

Minimalzerschneidungszahl μ.

64. Es ist klar, dass, um das Ringsystem in seine Elemente zu zerlegen, in jeder Kette des dritten Drittels ein Schnitt geführt werden muss, da diese Ketten anders nicht aufgelöst werden können, und keiner dieser Schnitte seinen Einfluss auf zwei Ketten des dritten Drittels erstreckt.

65. Andrerseits folgt aus Satz 3) des letzten Abschnittes 63, dass nach Ausführung dieser Schnitte sämmtliche Ringe

vollständig frei sind. Die Minimalzerschneidungszahl ist also hier gleich der Anzahl der Glieder des dritten Drittels:

$$\mu = \delta_3.$$

66. Um eine deutlichere Einsicht von der Richtigkeit dieses Satzes zu bekommen, könnte man den Einfluss der successiven Schnitte auf den Verkettungszustand des Ringsystems verfolgen, was wir aber hier der Kürze halber übergehen.

Maximalzerschneidungszahl M.

67. Bei Ableitung der Maximalzerschneidungszahl wird ein Umstand wichtig, der bei Ableitung der Minimalzerschneidungszahl belanglos war: Die Reihenfolge der Schnitte.

68. Sind M Ringe gefunden, bei deren Zerschneidung in bestimmter Reihenfolge das Ringsystem erst mit dem M-ten Schnitte in seine Elemente zerfällt, so gibt es sicher andre Reihenfolgen, bei deren Einhalten dieses Zerfallen vor dem M-ten Schnitte eintritt.

69. Jedenfalls lässt sich aus den M Ringen ein System von δ_3 Ringen herausheben, das mit jeder im dritten Drittel stehenden Kette nur je einen Ring gemein hat. δ_3 ist dann die Minimalzerschneidungszahl μ, s. den Schluss des vorigen Abschnittes, und das ganze System zerfällt schon nach dem μ-ten Schnitte, wenn man gerade die herausgehobenen μ Ringe zuerst aufschneidet.

70. Die $M-\mu$ übrigen Ringe können offenbar nicht in Ketten des dritten Drittels vorkommen, da sonst mindestens in einer derselben zwei Ringe aufgeschnitten würden. Dies hiesse aber, einen bereits ganz freigewordenen Ring aufschneiden (s. 63. 3)), was ausgeschlossen sein soll (s. 59). Es müssen daher Ringe sein, deren erstes Auftreten im zweiten Drittel erfolgt, als zu Gruppen G gehörig (s. 16). Schneidet man einen solchen Ring auf, so zerfällt die be-

treffende Kette in die zur Gruppe G gehörigen Ringe und in Unterketten, welche bereits in früheren Zeilen vorkommen; ausserdem können in den ersten zwei Dritteln von folgenden Zeilen dadurch Kettenzertheilungen eintreten, nicht aber in vorhergehenden. Die Ketten des letzten Drittels bleiben ganz unbeeinflusst.

71. Um nun die Zerfällung des ganzen Systems erst nach möglichst viel Schnitten eintreten zu lassen, beginne man in der letzten Zeile, welche ein zweites Drittel aufweist, und schneide in jedem Gliede des zweiten Drittels einen, gleichgültig welchen Ring der Gruppe G auf. Dann behandle man nach dem nemlichen Verfahren die vorhergehende Zeile, und so fort. Schliesslich wird man in jedem Gliede des zweiten Drittels einen Schnitt geführt haben, im Ganzen δ_2 Schnitte. Hierauf lässt sich aber kein weiterer Schnitt machen, der nicht eine Kette des letzten Drittels angreifen würde.

72. Die Maximalzerschneidungszahl ergibt sich nach diesen Betrachtungen gleich der Summe der Anzahlen der in den letzten Dritteln stehenden Glieder:

$$M = \delta_2 + \mu = \delta_2 + \delta_3.$$

73. Es ist auch klar, dass die Zerschneidungszahl des Systems jeden zwischen μ und M liegenden Werth annehmen kann. Man kann ja von den δ_2 Schnitten im zweiten Drittel (s. 71) eine beliebige Theilanzahl ausführen und dann zu den μ Schnitten im dritten Drittel übergehen (s. 69).

Die Zerschneidungszahlen für allgemeine Formen der Kette.

74. Die Zahlen μ und M lassen sich für Ketten allgemeiner Schemaform nicht in ähnlich einfacher Weise ableiten; man kann einige Regeln angeben, welche unnöthige

Umwege vermeiden lassen, und scheint im Uebrigen auf das Durchprobiren der verschiedenen Möglichkeiten angewiesen.

75. Zunächst ist für die Aufsuchung von μ wichtig, dass das ganze System dann und erst dann in seine Bestandtheile zerlegt ist, wenn die Glieder des letzten Drittels zweiter Hälfte im Schema in die ihren zerfällt sind. Es handelt sich also darum, diese Glieder durch möglichst wenig Schnitte vollständig zu zerfällen.

76. Geht man die Glieder des letzten Drittels durch und sucht eine Anzahl solcher heraus, welche aus lauter verschiedenen Buchstaben bestehen, es seien die Glieder $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_\nu$, so ist ν eine untere Grenze für μ. Es müssen mindestens ν Ringe A_1, A_2, $A_3 \ldots A_\nu$ zerschnitten werden, welche resp. den Gliedern Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 \ldots \Gamma_\nu$ angehören.

Dadurch wird die Auswahl der zu zerschneidenden Ringe unter Umständen wesentlich beschränkt.

77. Für M ist Folgendes zu bemerken;

Jedes Glied des zweiten Drittels rechter Hälfte ist zusammengesetzt aus Gliedern vorhergehender Zeilen und ausserdem aus Ringen G, die zusammen kein vorhergehendes Glied bilden, obwohl sie in solchen vorhergehenden Gliedern vorkommen können. Zunächst kennzeichne man in jedem Gliede die Ringe G; weiterhin unter diesen wieder die, welche in keinem Glied des letzten Drittels vorkommen: sie mögen G' heissen. Durch Zerschneiden eines G' wird ein Glied zweiten Drittels rechter Hälfte in Unterketten vorhergehender Zeilen und die Ringe G zerlegt. Man beginne nun (vgl. 71) damit, in jedem Gliede der letzten Zeile, die ein zweites Drittel enthält, einen Ring G' aufzuschneiden und schreite dann zu vorhergehenden Zeilen weiter.

78. Es ist aber jetzt möglich, dass die Auswahl des G' im einzelnen Gliede nicht mehr gleichgültig ist, wie bei den speciellen Schemata 61, weil sehr wohl einzelne Ringe in

der Gesammtheit der G' mehrfach vorkommen können. Es ist also zu ermitteln, bei welcher Auswahl der zu zerschneidenden G' die meisten Schnitte möglich sind, ehe sämmtliche G sich loslösen.

Es sei M_1 diese Maximalzahl.

79. Dann mache man, ebenfalls durch Probiren die Maximalzahl der Schnitte ausfindig, welche geführt werden kann, bis sämmtliche Ketten im letzten Drittel zerfallen: Sie sei M_2. Dann ist

$$M = M_1 + M_2.$$

80. Fassen wir den Inhalt dieses Aufsatzes noch einmal kurz zusammen:

Die Arbeit bezieht sich auf Ringe, das heisst auf geometrische Gebilde von der Art in sich zurücklaufender Fäden. Den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildete der „Verkettungszustand" eines Ringsystems. Es war dies ein Begriff, der sich nicht auf die specielle Art der Verschlingung und Verknotung von Ringen bezog, sondern nur auf die Thatsache, ob Ringe zusammenhängen oder nicht. Die vollständige Beschreibung des Verkettungszustandes wurde durch ein Schema geliefert, das sämmtliche Ringe, Unterketten und selbständige Ketten eines Ringsystems in passender Anordnung angibt. So weit der erste Theil; im zweiten Theil wurde gezeigt, dass nicht nur jede Kette ihr Schema hat, sondern auch für jedes Schema Ketten existiren, und hiebei besonders auf eine Art von Ketten hingewiesen, welche keine Unterketten enthalten. Im dritten Kapitel wurde von den Zerschneidungszahlen der Ketten gehandelt, charakteristischen Zahlen, welche ein gewisses Maass für den Verkettungszustand abgeben.